CENGAGE Learning

VOLUMEN 1

NOVENA EDICIÓN

FÍSICA

para ciencias e ingeniería

SERWAY ■ JEWETT



Física

para ciencias e ingeniería
Volumen 1

NOVENA EDICIÓN



© Ashley Cooper/Corbis

Física

para ciencias e ingeniería
Volumen 1

NOVENA EDICIÓN

Raymond A. Serway
Emeritus, James Madison University

John W. Jewett, Jr.
Emeritus, California State Polytechnic University, Pomona

Con las contribuciones de Vahé Peroomian,
University of California en Los Angeles



© Ashley Cooper/Corbis

Traducción
Dra. Ana Elizabeth García Hernández

Revisión técnica
Dr. Ernesto Filio López
Unidad Profesional en Ingeniería
y Tecnologías Aplicadas
Instituto Politécnico Nacional

CENGAGE Learning®

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

Física para ciencias e ingeniería
Volumen 1
Novena edición
Raymond A. Serway/John W. Jewett, Jr.

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Editora de Adquisiciones para Latinoamérica:
Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial de Contenidos en Español:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editor:
Sergio R. Cervantes González

Diseño de portada:
Roy Neuhaus

Imagen de portada:
© Ashley Cooper/Corbis

Composición tipográfica:
Rogelio Raymundo Reyna Reynoso

© D.R. 2015 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc.
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en Internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Traducido del libro
Physics for Scientists and Engineers, Volume 1, *9th Edition*.
Raymond A. Serway; John Jewett, Jr.
Publicado en inglés por Brooks/Cole, una compañía de Cengage Learning © 2014
ISBN: 978-1-133-95415-6

Datos para catalogación bibliográfica:
Serway, Raymond A.; John W. Jewett, Jr.
Física para ciencias e ingeniería,
Novena edición
ISBN: 978-607-519-200-0

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 17 16 15 14

Dedicamos este libro a nuestras esposas Elizabeth y Lisa, y a todos nuestros hijos y nietos, por su amorosa comprensión cuando pasamos tiempo escribiendo en lugar de estar con ellos.

Contenido breve

PARTE 1
Mecánica 1

1 Física y medición 2
2 Movimiento en una dimensión 21
3. Vectores 59
4 Movimiento en dos dimensiones 78
5 Las leyes del movimiento 111
6 Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton 150
7 Energía de un sistema 177
8 Conservación de la energía 211
9 Cantidad de movimiento lineal y colisiones 247
10 Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo 293
11 Cantidad de movimiento angular 335
12 Equilibrio estático y elasticidad 363
13 Gravitación universal 388
14 Mecánica de fluidos 417

PARTE 2
Oscilaciones y ondas mecánicas 449

15 Movimiento oscilatorio 450
16 Movimiento ondulatorio 483
17 Ondas sonoras 507
18 Sobreposición y ondas estacionarias 533

PARTE 3
Termodinámica 567

19 Temperatura 568
20 Primera ley de la termodinámica 590
21 Teoría cinética de los gases 626
22 Máquinas térmicas, entropía y segunda ley de la termodinámica 653

Contenido

Acerca de los autores xi
Prefacio xiii
Al estudiante xxix

PARTE 1
Mecánica 1

1 Física y medición 2
1.1 Estándares de longitud, masa y tiempo 3
1.2 Materia y construcción de modelos 6
1.3 Análisis dimensional 7
1.4 Conversión de unidades 9
1.5 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud 10
1.6 Cifras significativas 11

2 Movimiento en una dimensión 21
2.1 Posición, velocidad y rapidez 22
2.2 Velocidad y rapidez instantáneas 25
2.3 Análisis de modelo: la partícula bajo velocidad constante 28
2.4 Aceleración 31
2.5 Diagramas de movimiento 35
2.6 Análisis de modelo: la partícula bajo aceleración constante 36
2.7 Objetos en caída libre 40
2.8 Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo 43

3. Vectores 59
3.1 Sistemas coordenados 59
3.2 Cantidades vectoriales y escalares 61
3.3 Algunas propiedades de los vectores 62
3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios 65

4 Movimiento en dos dimensiones 78
4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración 78
4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante 81
4.3 Movimiento de proyectil 84
4.4 Análisis de modelo: partícula en movimiento circular uniforme 91
4.5 Aceleraciones tangencial y radial 94
4.6 Velocidad y aceleración relativas 96

5 Las leyes del movimiento 111
5.1 Concepto de fuerza 111
5.2 Primera ley de Newton y marcos inerciales 113
5.3 Masa 114
5.4 Segunda ley de Newton 115
5.5 Fuerza gravitacional y peso 117
5.6 Tercera ley de Newton 118
5.7 Análisis de modelos utilizando la segunda ley de Newton 120
5.8 Fuerzas de fricción 130

6 Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton 150
6.1 Extensión de la partícula en el modelo del movimiento circular uniforme 150
6.2 Movimiento circular no uniforme 156
6.3 Movimiento en marcos acelerados 158
6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas 161

7 Energía de un sistema 177
7.1 Sistemas y entornos 178
7.2 Trabajo realizado por una fuerza constante 178
7.3 Producto escalar de dos vectores 181
7.4 Trabajo realizado por una fuerza variable 183
7.5 Energía cinética y el teorema trabajo-energía cinética 188
7.6 Energía potencial de un sistema 191
7.7 Fuerzas conservativas y no conservativas 196
7.8 Relación entre fuerzas conservativas y energía potencial 198
7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema 199

8 Conservación de la energía 211
8.1 Análisis de modelo: sistema no aislado (energía) 212
8.2 Análisis de modelo: sistema aislado (energía) 215
8.3 Situaciones que incluyen fricción cinética 222
8.4 Cambios en la energía mecánica para fuerzas no conservativas 227
8.5 Potencia 231

9 Cantidad de movimiento lineal y colisiones 247
9.1 Cantidad de movimiento lineal 247
9.2 Análisis de modelo: sistema aislado (cantidad de movimiento) 250

9.3 Análisis de modelo: sistema no aislado (cantidad de movimiento) 252
9.4 Colisiones en una dimensión 256
9.5 Colisiones en dos dimensiones 264
9.6 El centro de masa 267
9.7 Sistemas de muchas partículas 272
9.8 Sistemas deformables 275
9.9 Propulsión de cohetes 277

10 Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo 293
10.1 Posición, velocidad y aceleración angular 293
10.2 Análisis de modelo: objeto rígido bajo aceleración angular constante 296
10.3 Cantidades angulares y traslacionales 298
10.4 Momento de torsión 300
10.5 Análisis de modelo: objeto rígido bajo un momento de torsión neto 302
10.6 Cálculo de momentos de inercia 307
10.7 Energía cinética rotacional 311
10.8 Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional 312
10.9 Movimiento de rodamiento de un objeto rígido 316

11 Cantidad de movimiento angular 335
11.1 Producto vectorial y momento de torsión 335
11.2 Análisis de modelo: sistema no aislado (cantidad de movimiento angular) 338
11.3 Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido rotatorio 342
11.4 Análisis de modelo: sistema aislado (cantidad de movimiento angular) 345
11.5 El movimiento de giroscopios y trompos 350

12 Equilibrio estático y elasticidad 363
12.1 Análisis de modelo: objeto rígido en equilibrio 363
12.2 Más acerca del centro de gravedad 365
12.3 Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático 366
12.4 Propiedades elásticas de los sólidos 373

13 Gravitación universal 388
13.1 Ley de Newton de gravitación universal 389
13.2 Aceleración en caída libre y fuerza gravitacional 391
13.3 Análisis de modelo: partícula en un campo (gravitacional) 392
13.4 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas 394
13.5 Energía potencial gravitacional 400
13.6 Consideraciones energéticas en el movimiento planetario y de satélites 402

14 Mecánica de fluidos 417
14.1 Presión 417
14.2 Variación de la presión con la profundidad 419
14.3 Mediciones de presión 423
14.4 Fuerzas de flotación y principio de Arquímedes 423
14.5 Dinámica de fluidos 427
14.6 Ecuación de Bernoulli 430
14.7 Otras aplicaciones de la dinámica de fluidos 433

PARTE 2
Oscilaciones y ondas mecánicas 449

15 Movimiento oscilatorio 450
15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte 450
15.2 Análisis de modelo: partícula en movimiento armónico simple 452
15.3 Energía del oscilador armónico simple 458
15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme 462
15.5 El péndulo 464
15.6 Oscilaciones amortiguadas 468
15.7 Oscilaciones forzadas 469

16 Movimiento ondulatorio 483
16.1 Propagación de una perturbación 484
16.2 Análisis de modelo: onda viajera 487
16.3 La rapidez de ondas sobre cuerdas 491
16.4 Reflexión y transmisión 494
16.5 Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales sobre cuerdas 495
16.6 La ecuación de onda lineal 497

17 Ondas sonoras 507
17.1 Variaciones de presión en ondas sonoras 508
17.2 Rapidez de ondas sonoras 510
17.3 Intensidad de ondas sonoras periódicas 512
17.4 El efecto Doppler 517

18 Sobreposición y ondas estacionarias 533
18.1 Análisis de modelo: ondas en interferencia 534
18.2 Ondas estacionarias 538
18.3 Análisis de modelo: ondas bajo condiciones de frontera 541
18.4 Resonancia 546
18.5 Ondas estacionarias en columnas de aire 546
18.6 Ondas estacionarias en barras y membranas 550
18.7 Batimientos: interferencia en el tiempo 550
18.8 Patrones de onda no sinusoidales 553

PARTE 3
Termodinámica 567

19 Temperatura 568
19.1 Temperatura y ley cero de la termodinámica 568
19.2 Termómetros y escala de temperatura Celsius 570
19.3 Termómetro de gas a volumen constante y escala absoluta de temperatura 571

19.4 Expansión térmica de sólidos y líquidos 573
19.5 Descripción macroscópica de un gas ideal 578

20 Primera ley de la termodinámica 590
20.1 Calor y energía interna 590
20.2 Calor específico y calorimetría 593
20.3 Calor latente 597
20.4 Trabajo y calor en procesos termodinámicos 601
20.5 Primera ley de la termodinámica 603
20.6 Algunas aplicaciones de la primera ley de la termodinámica 604
20.7 Mecanismos de transferencia de energía en procesos térmicos 608

21 Teoría cinética de los gases 626
21.1 Modelo molecular de un gas ideal 627
21.2 Calor específico molar de un gas ideal 631
21.3 Equipartición de la energía 635
21.4 Procesos adiabáticos para un gas ideal 637
21.5 Distribución de rapideces moleculares 639

22 Máquinas térmicas, entropía y segunda ley de la termodinámica 653
22.1 Máquinas térmicas y segunda ley de la termodinámica 654
22.2 Bombas de calor y refrigeradores 656
22.3 Procesos reversibles e irreversibles 659
22.4 La máquina de Carnot 660
22.5 Motores de gasolina y diesel 665
22.6 Entropía 667
22.7 Cambios de entropía en sistemas termodinámicos 671
22.8 Entropía y la segunda ley 676

Apéndices

A Tablas A-1
A.1 Factores de conversión A-1
A.2 Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas A-2

B Repaso matemático A-4
B.1 Notación científica A-4
B.2 Álgebra A-5
B.3 Geometría A-10
B.4 Trigonometría A-11
B.5 Desarrollo de series A-13
B.6 Cálculo diferencial A-13
B.7 Cálculo integral A-16
B.8 Propagación de incertidumbre A-20

C Tabla periódica de los elementos A-22

D Unidades del SI A-24
D.1 Unidades del SI A-24
D.2 Algunas unidades del SI deducibles A-24

Respuestas a exámenes rápidos y problemas con numeración impar A-25

Índice I-1

Acerca de los autores



Raymond A. Serway recibió su doctorado en el Illinois Institute of Technology y es profesor emérito en la James Madison University. En 2011 fue galardonado con un doctorado honorario por parte de su alma mater, Utica College. En 1990 recibió el Madison Scholar Award en la James Madison University, donde enseñó durante 17 años. El doctor Serway comenzó su carrera docente en la Clarkson University, donde dirigió investigaciones y enseñó de 1967 a 1980. En 1977 recibió el Distinguished Teaching Award en la Clarkson University y el Alumni Achievement Award del Utica College en 1985. Como científico invitado en el IBM Research Laboratory en Zurich, Suiza, trabajó con K. Alex Müller, ganador del premio Nobel 1987. El doctor Serway también fue científico visitante en el Argonne National Laboratory, donde colaboró con su mentor y amigo, Sam Marshall. Además, el doctor Serway es coautor de *College Physics*, novena edición; *Principles of Physics*, quinta edición; *Essentials of College Physics* y *Modern Physics*, tercera edición. También es coautor del libro de bachillerato *Physics*, publicado por Holt, Rinehart y Winston. Además, el doctor Serway ha publicado más de 40 artículos de investigación en el campo de física de materia condensada y ha impartido más de 60 conferencias en reuniones profesionales. El doctor Serway y su esposa, Elizabeth, disfrutan viajar, jugar al golf, pescar, acampar cantar en un coro de iglesia y pasar tiempo de calidad con sus cuatro hijos y diez nietos, y recientemente, otro grandioso nieto.



John W. Jewett, Jr. obtuvo su licenciatura en Física en la Drexel University y su doctorado en la Ohio State University, con especialidad en las propiedades ópticas y magnéticas de la materia condensada. El doctor Jewett comenzó su carrera académica en el Richard Stockton College de Nueva Jersey, donde enseñó de 1974 a 1984. En la actualidad es profesor emérito de física en la California State Polytechnic University, en Pomona. A lo largo de su carrera docente, el doctor Jewett ha sido un activo promotor de la educación en ciencias físicas. Además de recibir cuatro becas National Science Foundation, ayudó a fundar y dirigir el Southern California Area Modern Physics Institute (SCAMPI) y el Science IMPACT (Institute of Modern Pedagogy and Creative Teaching), que trabaja con profesores y escuelas para desarrollar currícula efectiva en ciencia. Los premios del doctor Jewett incluyen el Stockton Merit Award en el Richard Stockton College en 1980, el Outstanding Professor Award en la California State Polythecnic University de 1991-1992 y el Excellence in Undergraduate Physics Teaching Award de la American Association of Physics Teachers (AAPT) en 1998. Ha impartido más de 100 conferencias en reuniones profesionales, incluidas conferencias en la AAPT. También ha publicado 25 artículos sobre física de la materia condensada e investigaciones en la enseñanza de la física. Además es autor de *The World of Physics: Mysteries, Magic and Myth*, el cual proporciona un gran número de conexiones entre la física y las experiencias cotidianas. Aparte de su trabajo en este libro, es coautor de *Principles of Physics*, quinta edición, así como de *Global Issues*, un conjunto de cuatro manuales de ciencia integral para educación secundaria. Al doctor Jewett le gusta tocar piano con su banda de físicos, viajar, la fotografía submarina, las lenguas extranjeras y coleccionar antigüedades que se puedan usar como aparatos de demostración en clases de física. Lo más importante, le gusta pasar el tiempo con su esposa, Lisa, sus hijos y nietos.

Prefacio

Al escribir esta novena edición de *Física para ciencias e ingeniería*, continuamos con nuestros esfuerzos por mejorar la claridad de la presentación e incluir nuevas características pedagógicas que ayudan a apoyar los procesos de aprendizaje y enseñanza. Al retroalimentar las sugerencias de los usuarios de la octava edición, información obtenida de los alumnos y profesores que utilizan los suplementos digitales, así como de los revisores, hemos clarificado el texto para satisfacer mejor las necesidades de los estudiantes y profesores.

Este libro está pensado para un curso introductorio de física para estudiantes que se especializan en ciencia o ingeniería. Todo el contenido del libro en su versión amplia podría cubrirse en un curso de tres semestres, pero es posible usar el material en secuencias más breves con la omisión de capítulos y subtemas seleccionados. Los antecedentes matemáticos ideales de los estudiantes que tomen este curso deben incluir un semestre de cálculo. Si esto no es posible, el estudiante debe inscribirse en un curso simultáneo de introducción al cálculo.

Contenido

El material en este libro cubre temas fundamentales de física clásica y proporciona una introducción a la física moderna. El libro se divide en seis partes. La Parte 1 (capítulos 1 a 14) se relaciona con los fundamentos de la mecánica newtoniana y la física de fluidos; la Parte 2 (capítulos 15 a 18) cubre oscilaciones, ondas mecánicas y sonido; la Parte 3 (capítulos 19 a 22) aborda el calor y la termodinámica. La Parte 4 (capítulos 23 a 34) trata la electricidad y el magnetismo; la Parte 5 (capítulos 35 a 38) cubre luz y óptica; la Parte 6 (capítulos 39 a 46) aborda la relatividad y la física moderna.

Objetivos

Este libro de introducción a la física tiene tres objetivos principales: proporcionar al estudiante una presentación clara y lógica de los conceptos básicos y principios de la física, fortalecer la comprensión de los conceptos y principios a través de un amplio rango de interesantes aplicaciones al mundo real y desarrollar habilidades para resolver problemas por medio de un enfoque efectivamente organizado. Para alcanzar estos objetivos hemos enfatizado en argumentos físicos sólidos y en una metodología para resolver problemas. Al mismo tiempo hemos intentado motivar al estudiante mediante ejemplos prácticos que demuestren el papel de la física en otras disciplinas, incluidas ingeniería, química y medicina.

Cambios en la novena edición

Para preparar la novena edición de este texto se hicieron muchos cambios y mejoras. Algunas de las nuevas características se basan en nuestras experiencias y en las tendencias actuales en educación en ciencia. Otros cambios se incorporaron en respuesta a comentarios y sugerencias ofrecidos por los usuarios de la octava edición y

por revisores del manuscrito. Las características que se mencionan aquí representan los principales cambios en la novena edición.

Integración mejorada del enfoque Análisis de modelos para resolver problemas. Los estudiantes se enfrentan a cientos de problemas durante sus cursos de física. Un número relativamente pequeño de los principios fundamentales forman la base de estos problemas. Cuando se enfrentan a un nuevo problema, el físico elabora un *modelo* del problema que se puede resolver de una manera sencilla mediante la identificación del principio fundamental que es aplicable en el problema. Por ejemplo, muchos de los problemas implican la conservación de la energía, la segunda ley de Newton o ecuaciones cinemáticas. Debido a que el físico ha estudiado extensivamente estos principios y su aplicación extensiva, él o ella puede aplicar este conocimiento como un modelo para la solución de un problema nuevo. Aunque sería ideal para los estudiantes seguir este mismo proceso, la mayoría de ellos tienen dificultades para familiarizarse con toda la paleta de los principios fundamentales que están disponibles. Es más fácil para los estudiantes identificar una *situación* más que un principio fundamental.

El *enfoque Análisis de modelo* que tratamos en esta revisión establece un conjunto estándar de las situaciones que aparecen en la mayoría de los problemas de la física. Estas situaciones se basan en una entidad en uno de los cuatro modelos de simplificación: partícula, sistema, objeto rígido y onda. Una vez identificado el modelo de simplificación, el estudiante piensa acerca de lo que la entidad está haciendo o cómo interactúa con su entorno. Esto lo lleva a identificar un análisis de modelo particular para el problema. Por ejemplo, si un objeto cae, el objeto se reconoce como una partícula experimentando una aceleración debida a la gravedad que es constante. El estudiante ha aprendido que el *análisis de modelo de una partícula bajo la aceleración constante* describe esta situación. Además, este modelo tiene un pequeño número de ecuaciones asociadas con él para su uso en los problemas de inicio, las ecuaciones cinemáticas presentadas en el capítulo 2. Por lo tanto, la comprensión de la situación ha dado lugar a un análisis de modelo, que a su vez se identifica con un número muy reducido de ecuaciones para comenzar el problema, en lugar de los miles de ecuaciones que los estudiantes ven en el texto. De esta manera, el uso de Análisis de modelo conduce al estudiante a identificar el principio fundamental. A medida que el estudiante adquiere más experiencia, él o ella se inclinan menos en el enfoque de Análisis de modelo y comienzan a identificar directamente los principios fundamentales.

Para integrar mejor el enfoque análisis de modelo para esta edición, los **recuadros Análisis de modelo descriptivo** se han agregado al final de cualquier sección que introduce un nuevo análisis de modelo. Esta característica resume el análisis de modelo presentado en la sección y proporciona ejemplos de los tipos de problemas que un estudiante puede resolver utilizando el análisis de modelo. Estos recuadros funcionan como una "actualización" antes de que los estudiantes vean los Análisis de modelo utilizados en los ejemplos prácticos para una sección dada.

Los ejemplos resueltos en el texto que utilizan los Análisis de modelo han sido señalados con un icono de AM para facilitar la referencia. Las soluciones de estos ejemplos integran el enfoque de análisis de modelo para la resolución de problemas. El enfoque se ve reforzado aún más en el resumen de fin de capítulo bajo el título *Análisis de modelos para resolver problemas.*

Cambios capítulo por capítulo

La siguiente lista destaca los principales cambios en la Novena edición.

Capítulo 2

- En la sección 2.3 se ha incluido una nueva introducción al concepto de Análisis de modelo.

- En las secciones 2.3 y 2.6 se han agregado tres recuadros Análisis de modelo descriptivo.
- Se han revisado varias secciones de texto para hacer referencias más explícitas a los Análisis de modelo.

Capítulo 4

- Se ha agregado un recuadro Análisis de modelo descriptivo en la sección 4.6.
- Se han revisado varias secciones de texto para hacer referencias más explícitas a los Análisis de modelo.

Capítulo 5

- Se han agregado dos recuadros Análisis de modelo descriptivo en la sección 5.7.
- Se han modificado varios ejemplos para que los valores numéricos sólo se pongan al final de la solución.
- Se han revisado varias secciones de texto para hacer más explícitas las referencias a los Análisis de modelo.

Capítulo 6

- Se ha agregado un recuadro Análisis de modelo descriptivo en la sección 6.1.
- Se han modificado varios ejemplos para que los valores numéricos se pongan sólo al final de la solución.

Capítulo 7

- Se aclaró la notación de trabajo realizado sobre un sistema externamente e internamente dentro de un sistema.
- Las ecuaciones y las discusiones de varias secciones se han modificado para mostrar claramente las comparaciones con las ecuaciones de energía potencial similares en diferentes situaciones.

Capítulo 8

- Se han agregado dos recuadros Análisis de modelo descriptivo en las secciones 8.1 y 8.2.
- La estrategia para resolución de problemas en la sección 8.2 ha sido reformulada para considerar una aplicación más general tanto para sistemas aislados como no aislados.
- Como resultado de una sugerencia de un equipo PER de la Universidad de Washington y de la Universidad del Estado de Pennsylvania, se ha reescrito el ejemplo 8.1 para mostrar a los estudiantes el efecto de elegir diferentes sistemas en el desarrollo de la solución.
- Se han reescrito todos los ejemplos del capítulo para comenzar directamente con la ecuación 8.2 en lugar de empezar con el formato de $E_i = E_f$.
- Se han modificado varios ejemplos para que los valores numéricos se coloquen sólo al final de la solución.
- Se ha eliminado la estrategia para resolver problemas de la sección 8.4 y se revisó el material del texto para incorporar estas ideas al manejo de cambios de energía cuando actúan fuerzas no conservativas.
- Se han revisado varias secciones del texto para hacer referencias más explícitas a los Análisis de modelo.

Capítulo 9

- En la sección 9.3 se han agregado dos recuadros Análisis de modelo descriptivo.
- Se han modificado varios ejemplos para que los valores numéricos sean puestos sólo al final de la solución.

Capítulo 10

- Se modificó el orden de cuatro secciones (10.4–10.7) con el fin de introducir el momento de inercia a través del momento de torsión (en lugar de energía) y se juntaron las dos secciones de energía. Las secciones se han revisado considerando el desarrollo de los conceptos revisados. Esta revisión hace que el orden del enfoque sea similar al orden que se sigue con los estudiantes que ya han visto el movimiento de traslación.
- Se han agregado nuevos párrafos introductorios en varias secciones para mostrar cómo el desarrollo de nuestro análisis del movimiento de rotación es paralelo al que se siguió en el movimiento de traslación.
- Se han agregado dos recuadros Análisis de modelo descriptivo en las secciones 10.2 y 10.5.
- Se han revisado varias secciones de texto para hacer referencias más explícitas a los Análisis de modelo.

Capítulo 11

- Se agregaron dos recuadros Análisis de modelo descriptivo en las secciones 11.2 y 11.4.
- Se revisaron las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento angular para presentarse como $\Delta L = (0 \text{ o } \tau dt)$ con el fin de ser coherentes con el método del capítulo 8 para la conservación de la energía y del capítulo 9 para la conservación de la cantidad de movimiento lineal.

Capítulo 12

- Se agregó un recuadro Análisis de modelo descriptivo en la sección 12.1.
- Se modificaron varios ejemplos para que los valores numéricos sean puestos sólo al final de la solución.

Capítulo 13

- Las secciones 13.3 y 13.4 se han intercambiado para proporcionar un mejor flujo de conceptos.
- Se ha introducido un *nuevo* Análisis de modelo: *Partícula en un campo (gravitacional)*. Este modelo se introduce porque representa una situación física que ocurre a menudo. Además, el modelo se introduce para anticipar la importancia de las versiones de este modelo posteriormente en electricidad y magnetismo, donde es aún más crítico. Se ha agregado un recuadro Análisis de modelo descriptivo en la sección 13.3. Además, se ha agregado una nueva sección de resumen al final del capítulo, y el material del texto se ha revisado para hacer referencia al nuevo modelo.
- La descripción de los objetivos históricos del experimento de Cavendish en 1798 se ha revisado para que sea más coherente con la intención original de Cavendish y el conocimiento disponible en el momento del experimento.
- Se han agregado objetos recién descubiertos del cinturón de Kuiper en la sección 13.4.
- Se ha modificado el material del texto para hacer una conexión más fuerte con los Análisis de modelo, especialmente en las secciones de energía 13.5 y 13.6.
- Se han revisado todas las ecuaciones de conservación para presentarse con el cambio en el sistema por un lado y la transferencia a través de la frontera por el otro, para ser coherentes con el método de los capítulos anteriores para la conservación de energía, conservación de la cantidad de movimiento lineal y conservación de la cantidad de movimiento angular.

Capítulo 14

- Se han revisado varias secciones textuales para hacer referencias más explícitas a Análisis de modelo.
- Se han modificado varios ejemplos para colocar los valores numéricos sólo al final de la solución.

Capítulo 15

- Se ha agregado un recuadro Análisis de modelo descriptivo en la sección 15.2.
- Se han revisado varias secciones del texto para hacer referencias más explícitas al Análisis de modelo.

Capítulo 16

- Se ha agregado un nuevo recuadro Análisis de modelo descriptivo en la sección 16.2.
- En la sección 16.3 se ha reescrito totalmente la deducción de la velocidad de una onda en una cuerda, para mejorar el desarrollo lógico.

Capítulo 18

- Se han agregado dos recuadros Análisis de modelo descriptivo, en las secciones 18.1 y 18.3.

Capítulo 19

- Se han modificado varios ejemplos para que los valores numéricos sean puestos sólo al final de la solución.

Capítulo 20

- Se revisó la sección 20.3 para enfatizar el enfoque de *sistemas*.

Capítulo 21

- Una nueva introducción a la sección 21.1 establece el concepto de los *modelos estructurales* que se utilizan en este capítulo y en los siguientes capítulos para describir los sistemas que son demasiado grandes o demasiado pequeños para observarse directamente.
- Se han numerado quince nuevas ecuaciones y se han renumerado todas las ecuaciones del capítulo. Esta nueva numeración de ecuaciones permite que sea más fácil y más eficiente referenciarlas en el desarrollo de la teoría cinética.
- Se ha invertido el orden de las secciones 21.3 y 21.4 para proporcionar una discusión más continua de los calores específicos de los gases.

Capítulo 22

- En la sección 22.4 la discusión del teorema de Carnot se ha reescrito y ampliado, se agregó una nueva figura que está conectada con la prueba del teorema.
- El material en las secciones 22.6, 22.7 y 22.8 se ha reorganizado por completo, reordenado y reescrito. Se ha eliminado el concepto de entropía como medida del desorden en favor de ideas más contemporáneas de la literatura de educación física en entropía y su relación con conceptos como incertidumbre, falta de información y dispersión de energía.
- Se han añadido dos nuevos prevenciones de riesgos en la sección 22.6 para ayudar a los estudiantes a comprender la entropía.
- Se ha agregado un nuevo argumento para la equivalencia del enunciado de la segunda ley de entropía y los enunciados de Clausius y Kelvin–Planck en la sección 22.8.
- Se han agregado dos nuevas secciones de resumen relativas a la discusión de la revisión de entropía.

Características del texto

La mayoría de los instructores cree que el libro seleccionado para un curso debe ser la principal guía del estudiante para entender y aprender la materia de estudio. Además, el libro debe tener un estilo accesible y estar escrito para facilitar la instrucción y el aprendizaje. Con estos puntos en mente hemos incluido muchas características pedagógicas que se mencionan a continuación y tienen la intención de mejorar su utilidad tanto a estudiantes como a instructores.

Resolución de problemas y comprensión conceptual

Estrategia general para resolver problemas. Al final del capítulo 2 (páginas 45–47) se perfila una estrategia general a seguir por los estudiantes que les proporciona un proceso estructurado para resolver problemas. En los capítulos restantes la estrategia se emplea explícitamente en cada ejemplo, de modo que los estudiantes aprenden cómo se aplica y son animados a seguir esta estrategia cuando trabajan con los problemas de final de capítulo.

Ejemplos resueltos. Todos los ejemplos en el texto se presentan en un formato de dos columnas para reforzar mejor los conceptos físicos. La columna izquierda muestra información textual que describe las etapas para resolver el problema. La columna derecha muestra las operaciones matemáticas y los resultados de seguir dichos pasos. Esta presentación facilita la concordancia del concepto con su ejecución matemática y ayuda a los estudiantes a organizar su trabajo. Dichos ejemplos reconstituidos siguen de cerca una Estrategia General para Resolver Problemas que se introduce en el capítulo 2 para reforzar hábitos efectivos para resolver problemas. En la página siguiente encontrará una muestra de un ejemplo resuelto.

Los ejemplos son de dos tipos. El primer tipo de ejemplo (y el más común) presenta un problema y respuesta numérica. El segundo tipo de ejemplo es conceptual en naturaleza. Para dar énfasis a la comprensión de los conceptos físicos, los muchos ejemplos conceptuales se etiquetan como tales, se ponen en recuadros y están diseñados para enfocar a los estudiantes en la situación física del problema. Los ejemplos resueltos en el texto que utilizan los análisis de modelos han sido señalados con un icono de AM para facilitar su consulta y las soluciones de estos ejemplos ya integran más a fondo el enfoque de análisis de modelo para la resolución de problemas. Con base en la retroalimentación de los revisores de la Octava edición, hemos hecho revisiones cuidadosas para los ejemplos resueltos de manera que las soluciones se presentan simbólicamente, en la medida de lo posible, con los valores numéricos sustituidos al final. Este enfoque ayudará a los estudiantes a pensar simbólicamente cuando resuelven problemas en lugar de la inserción innecesaria de números en ecuaciones intermedias.

¿Qué pasaría si? Aproximadamente un tercio de los ejemplos del texto contienen una condicional ¿Qué pasaría si? Al completar la solución del ejemplo, una pregunta ¿Qué pasaría si? ofrece una variación en la situación planteada en el texto del ejemplo. Esta característica alienta a los estudiantes a pensar acerca de los resultados del ejemplo; también ayuda en la interpretación conceptual de los principios. Las preguntas ¿Qué pasaría si? también preparan a los estudiantes para encontrar problemas novedosos que se presenten en los exámenes. Algunos de los problemas de fin de capítulo también incluyen esta característica.

Exámenes rápidos. Los exámenes rápidos proporcionan a los estudiantes una oportunidad para poner a prueba su comprensión de los conceptos físicos presentados. Las preguntas piden a los estudiantes tomar decisiones de acuerdo a un razonamiento firme y algunas de las preguntas se escribieron para ayudar a los estudiantes a superar interpretaciones equívocas comunes. Los exámenes rápidos se presentan en un formato objetivo, que incluyen opción múltiple, verdadero–falso y de clasificación. Las respuestas a todos los exámenes rápidos se encuentran al final del texto. Muchos instructores prefieren usar tales preguntas en un estilo de enseñanza de "instrucción por búsqueda" o con el uso de sistema de respuesta personal "clickers", pero también se pueden usar en formato de examen estándar. Enseguida se muestra un ejemplo de examen rápido.

Examen rápido 7.5 Un dardo se carga en una pistola de resorte al comprimir a éste por una distancia x. En la segunda carga, al resorte se le comprime una distancia $2x$. ¿Qué tan rápido, comparado con el primero, el segundo dardo abandona la pistola? **(a)** Cuatro veces más, **(b)** dos veces más, **(c)** igual, **(d)** la mitad, **(e)** la cuarta parte.

Prevenciones de riesgos ocultos. Más de doscientas Prevenciones de riesgos ocultos se proporcionan para ayudar a los estudiantes a evitar errores y malas interpretaciones comunes. Estas características, que se colocan en los márgenes del texto, abordan tanto malas interpretaciones estudiantiles comunes como situaciones en que los estudiantes con frecuencia siguen rutas improductivas.

Resúmenes. Cada capítulo contiene un resumen que revisa los conceptos y ecuaciones importantes explicadas en dicho capítulo. El resumen se divide en tres secciones: Definiciones, Conceptos y principios, y Análisis de modelos para resolver problemas. En cada sección, recuadros tipo ficha de estudio se enfocan en cada definición, concepto, principio o análisis del modelo por separado.

Prevención de riesgos ocultos 16.2

Dos tipos de rapidez/velocidad No confunda v, la rapidez de la onda mientras se propaga a lo largo de la cuerda, con v_y, la velocidad transversal de un punto en la cuerda. La rapidez v es constante para un medio uniforme, mientras que v_y varía sinusoidalmente.

Ejemplo 3.2 Un viaje de vacaciones

Un automóvil viaja 20.0 km al Norte y luego a 35.0 km en una dirección 60.0° al noroeste, como se muestra en la figura 3.11a. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del automóvil.

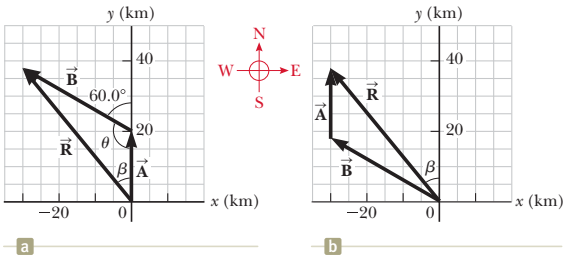


Figura 3.11 (Ejemplo 3.2) (a) Método gráfico para encontrar el vector de desplazamiento resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$. (b) Sumando los vectores en orden inverso ($\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}$) da el mismo resultado para $\vec{\mathbf{R}}$

Cada solución se reorganizó para seguir de cerca la Estrategia General para Resolver Problemas que se resalta en las páginas 45–47 del capítulo 2, para reforzar buenos hábitos en la solución de problemas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ dibujados en la figura 3.11a ayudan a conceptualizar el problema. También se ha dibujado el vector resultante $\vec{\mathbf{R}}$. Esperamos que su magnitud sea de unas pocas decenas de kilómetros. El ángulo β que hace que el vector resultante con el eje y se espera que sea menos de 60°, el ángulo que el vector $\vec{\mathbf{B}}$ hace con el eje y.

Categorizar Este ejemplo se puede clasificar como un simple problema de análisis acerca de suma vectorial. El desplazamiento $\vec{\mathbf{R}}$ es la resultante cuando se suman los dos desplazamientos individuales $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Además, se puede clasificar como un problema acerca del análisis de triángulos, así que se acude a la experiencia en geometría y trigonometría.

Analizar En este ejemplo se muestran dos formas para analizar el problema de encontrar la resultante de dos vectores. La primera es resolver el problema mediante la geometría, con el uso de papel graficado y un transportador para medir la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ y su dirección en la figura 3.11a. (De hecho, aun cuando sepa que va a realizar un cálculo, debe bosquejar los vectores para comprobar sus resultados.) Con una regla y transportador ordinarios, típicamente un buen diagrama da respuestas con dos dígitos pero no con una precisión de tres dígitos. ¡Intente usar estas herramientas en $\vec{\mathbf{R}}$ en la figura 3.11a y compare con el análisis trigonométrico que se muestra a continuación!

La segunda forma de resolver el problema es analizarlo con álgebra. La magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ se obtiene a partir de la ley de cosenos, tal como se aplica al triángulo en la figura 3.11a (véase el Apéndice B.4).

Aplique $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$ de la ley de cosenos para encontrar R:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

Sustituya valores numéricos y note que $\theta = 180° - 60° = 120°$:

$$R = \sqrt{(20.0\text{ km})^2 + (35.0\text{ km})^2 - 2(20.0\text{ km})(35.0\text{ km})\cos 120°}$$
$$= 48.2\text{ km}$$

Aplique la ley de senos (Apéndice B.4) para encontrar la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ medida desde la dirección norte:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{B} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{R}$$
$$\operatorname{sen}\beta = \frac{B}{R}\operatorname{sen}\theta = \frac{35.0\text{ km}}{48.2\text{ km}}\operatorname{sen}120° = 0.629$$
$$\beta = 38.9°$$

El desplazamiento resultante del automóvil es 48.2 km, con una dirección de 38.9° al noroeste.

Cada paso de la solución se detalla en un formato de dos columnas. La columna izquierda proporciona una explicación para cada paso matemático de la columna derecha, para reforzar mejor los conceptos físicos.

Finalizar ¿El ángulo β que se calculó, concuerda con una estimación realizada al observar la figura 3.11a o con un ángulo real medido del diagrama con el uso del método de la poligonal? ¿Es razonable que la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ sea mayor que la de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$? ¿Las unidades de $\vec{\mathbf{R}}$ son correctas?

Aunque el método de la poligonal para sumar vectores funciona bien, tiene dos desventajas. Primera, algunas personas encuentran abrumador el uso de las leyes de cosenos y senos. Segunda, sólo resulta un triángulo si suma dos vectores. Si suma tres o más vectores, la forma geométrica resultante no es un triángulo. En la sección 3.4 se explora un nuevo método para sumar vectores que abordará estas dos desventajas.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que el viaje se realiza considerando los dos vectores en orden inverso: 35.0 km con dirección 60.0° al noroeste primero y después 20.0 km al Norte. ¿Cómo cambiarían la magnitud y dirección del vector resultante?

Respuesta No cambiarían. La ley conmutativa para la suma vectorial dice que el orden de los vectores en una suma es irrelevante. Gráficamente, la figura 3.11b muestra que los vectores sumados en orden inverso proporcionan el mismo vector resultante.

Preguntas y problemas. Para la Novena edició, los autores revisaron cada una de las preguntas y problemas e incorporaron revisiones diseñadas para mejorar su claridad y calidad. Cerca de 10% de las preguntas y problemas son nuevos en esta edición.

Preguntas. La sección de preguntas está a su vez dividida en dos secciones: *Preguntas objetivas* y *Preguntas conceptuales*. El instructor puede seleccionar entre ellas para asignar tareas en casa o en el salón de clase, posiblemente con métodos de "discusión por parejas de alumnos". En esta edición se incluyen más de novecientas preguntas objetivas y conceptuales. Las respuestas a preguntas seleccionadas se incluyen en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio* (a la venta únicamente en inglés) y las respuestas a todas las preguntas se encuentran en el *Manual de soluciones del instructor*.

Preguntas objetivas: son preguntas de tipo opción múltiple, verdadero-falso, clasificación o cualquier otro. Algunas requieren cálculos diseñados para facilitar la familiaridad de los estudiantes con las ecuaciones, las variables utilizadas, los conceptos que las variables representan y las relaciones entre los conceptos. Otras son más conceptuales en su naturaleza y están diseñadas para estimular el pensamiento conceptual. Las preguntas objetivas también se escriben con el usuario del sistema de respuesta personal en mente y la mayoría de las preguntas pueden ser fácilmente utilizadas en estos sistemas.

Preguntas conceptuales: son preguntas más tradicionales de respuesta corta y de tipo ensayo que requieren que los estudiantes piensen conceptualmente sobre una situación física.

Problemas. Al final de cada capítulo se incluye un extenso conjunto de problemas; en total, el texto contiene aproximadamente 3 700 problemas. Las respuestas a los problemas con número impar se proporcionan al final del libro. Las soluciones completas de aproximadamente un 20% de los problemas se incluyen en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio* (a la venta únicamente en inglés) y las respuestas a todas las preguntas se encuentran en el *Manual de soluciones del instructor*.

Los problemas de fin de capítulo están organizados por secciones (casi dos tercios de los problemas tienen claves referentes a secciones específicas del capítulo). Dentro de cada sección, los problemas ahora son la "plataforma" de los estudiantes para un pensamiento de orden superior mediante la presentación de todos los problemas sencillos de la primera sección, seguido de los problemas intermedios. (La numeración para problemas sencillos se imprime en *negro*, para problemas de nivel intermedio en **azul**). La sección de problemas adicionales contiene problemas que no se amoldan a la sección específica. Al final de cada capítulo está la sección de ***Problemas de desafío*** que reúne los problemas de mayor dificultad de algún lugar en un capítulo dado (los problemas de este tipo están marcados en **rojo**).

Problemas cuantitativos/conceptuales: contienen partes que piden a los estudiantes pensar tanto cuantitativa como conceptualmente. A continuación se muestra un ejemplo de este tipo de problemas:

Los incisos (a)–(c) requieren cálculos cuantitativos.

59. Un resorte horizontal unido a una pared tiene una constante de fuerza $k = 850$ N/m. Un bloque de masa $m = 1.00$ kg se une al resorte y descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, como en la figura P8.59. (a) El bloque se jala a una posición $x_i = 6.00$ cm desde la posición de equilibrio y se suelta. Encuentre la energía potencial elástica almacenada en el resorte cuando el bloque está a 6.00 cm de la posición de equilibrio y cuando el bloque pasa por la posición de equilibrio. (b) Encuentre la rapidez del bloque cuando pasa por el punto de equilibrio. (c) ¿Cuál es la rapidez del bloque cuando está en una posición $x_i/2 = 3.00$ cm? (d) ¿Por qué la respuesta al inciso (c) no es la mitad de la respuesta del inciso (b).

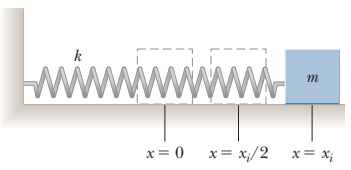


Figura P8.59

El inciso (d) es una pregunta conceptual acerca de la situación del problema.

Problemas simbólicos: piden a los estudiantes resolver un problema usando sólo manipulación simbólica. Los revisores de la Octava edición (así como la mayoría de los que respondieron a una numerosa encuesta) pidieron específicamente un aumento en el número de problemas simbólicos que se encuentran en el texto, ya que refleja mejor la forma en que los instructores quieren que sus estudiantes piensen en la resolución de problemas de física. Un ejemplo de problema simbólico aparece aquí:

No aparecen números en el enunciado del problema

51. Un camión se mueve con aceleración constante a hasta una colina que hace un ángulo ϕ con la horizontal, como en la figura P6.51. Una pequeña esfera de masa m está suspendida desde el techo de la camioneta por un cable de luz. Si el péndulo hace un ángulo constante θ con la perpendicular al techo, ¿a qué es igual a?

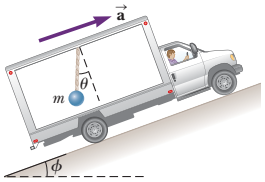


Figura P6.51

La figura muestra sólo cantidades simbólicas

51. $g(\cos\phi \tan\theta - \text{sen}\,\phi)$

La respuesta al problema es completamente simbólica

Problemas guiados: ayudan a los estudiantes a desglosar los problemas en pasos. Un problema de física normalmente pide una cantidad física en un contexto dado. Sin embargo, con frecuencia deben ser utilizados varios conceptos y se requieren una serie de cálculos para obtener la respuesta final. Muchos estudiantes no están acostumbrados a este nivel de complejidad y a menudo no saben por dónde empezar. Un problema guiado desglosa un problema estándar en pasos más pequeños, lo que permite a los estudiantes comprender los conceptos y estrategias necesarias para llegar a una solución correcta. A diferencia de los problemas estándar de física, la orientación se construye a menudo en el enunciado del problema. Los problemas guiados son una reminiscencia de cómo un estudiante puede interactuar con un profesor en una visita para asesoría. Estos problemas (hay uno en cada capítulo del texto) ayudan a la capacitación de los estudiantes para descomponer los problemas complejos en una serie de problemas más simples, una habilidad esencial para resolver problemas. Un ejemplo de problema guiado aparece aquí:

38. Una viga uniforme que descansa sobre dos pivotes tiene una longitud $L = 6.00$ m y una masa $M = 90.0$ kg. El pivote bajo el extremo izquierdo ejerce una fuerza normal n_1 sobre la viga, y el segundo pivote ubicado a una distancia $\ell = 4.00$ m del extremo izquierdo ejerce una fuerza normal n_2. Una mujer de masa $m = 55.0$ kg se para en el extremo izquierdo de la viga y comienza a caminar hacia la derecha, como se indica en la figura P12.38. El objetivo es encontrar la posición de la mujer cuando la viga se empieza a inclinar. (a) ¿Cuál es el análisis de modelo apropiado para la viga antes que se incline? (b) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga, marque las fuerzas gravitacionales y las normales que actúan sobre la viga y coloque a la mujer a una distancia x hacia la derecha del primer pivote, el cual es el origen. (c) ¿Dónde está la mujer cuando la fuerza normal n_1 es máxima? (d) ¿Cuánto vale n_1 cuando la viga está por inclinarse? (e) Utilice la ecuación 12.1 para encontrar el valor de n_2 cuando la viga está a punto de inclinarse. (f) Empleando el resultado del inciso (d) y la ecuación 12.2, con los momentos de torsión calculados en torno al segundo pivote, determine la posición x de la mujer cuando la viga tiende a inclinarse. (g) Verifique la respuesta al inciso (a) mediante el cálculo de momentos de torsión alrededor del primer punto pivote.

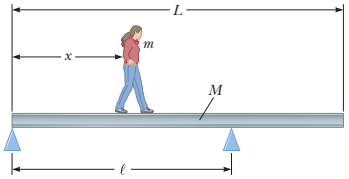


Figura P12.38

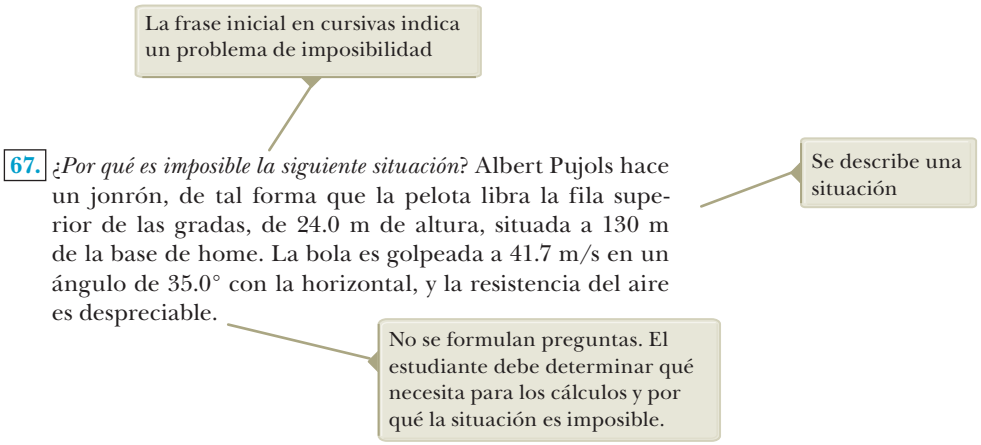
El objetivo del problema está identificado

El análisis comienza identificando el análisis de modelo apropiado

Al estudiante se le proporcionan sugerencias de los pasos para resolver el problema

Se pide el cálculo asociado al objetivo

Problemas de imposibilidad. La investigación en educación en física se ha centrado en gran medida en las habilidades de los estudiantes para la resolución de problemas. Aunque la mayoría de los problemas en este texto están estructurados en forma de suministro de datos y pedir el cálculo de un resultado, dos problemas por cada capítulo, en promedio, se estructuran como problemas de imposibilidad. Comienzan con la frase *¿Por qué es imposible la siguiente situación*? Esto es seguido por la descripción de una situación. El aspecto sorprendente de estos problemas es que no se hace una pregunta a los estudiantes, excepto la que apareces en cursivas al inicio. El estudiante debe determinar las preguntas que se tienen que hacer y qué cálculos se deben realizar. Con base en los resultados de estos cálculos, el estudiante debe determinar por qué la situación descrita no es posible. Esta determinación puede requerir información de la experiencia personal, sentido común, de Internet o de investigación impresa, la medición, las habilidades matemáticas, el conocimiento de las normas humanas o el pensamiento científico. Estos problemas se pueden asignar para desarrollar habilidades de pensamiento crítico en los estudiantes. También son divertidos, tienen el aspecto de "misterios" de la física que hay que resolver por parte de los alumnos de forma individual o en grupos. Un ejemplo de problema de imposibilidad aparece aquí:



Problemas apareados. Estos problemas son idénticos, uno pidiendo una solución numérica y otro una deducción simbólica. Ahora hay tres pares de estos problemas en la mayoría de los capítulos, en los problemas de fin de capítulo.

Problemas biomédicos. Estos problemas destacan la importancia de los principios de la física para aquellos estudiantes que toman este curso, que se especializa en una de las ciencias de la vida.

Problemas de repaso. Muchos capítulos incluyen problemas de repaso que requieren que el estudiante combine conceptos cubiertos en el capítulo con los que se explicaron en capítulos anteriores. Estos problemas (indicados como problemas de repaso) reflejan la naturaleza cohesiva de los principios en el texto y verifican que la física no es un conjunto de ideas dispersas. Cuando se mira hacia temas del mundo real como el calentamiento global o las armas nucleares, puede ser necesario invocar ideas físicas de varias partes de un libro como éste.

"*Problemas Fermi*". En la mayoría de los capítulos se plantea al estudiante uno o más problemas donde debe razonar en términos de orden y magnitud.

Problemas de diseño. Varios capítulos contienen problemas que le solicitan al estudiante determinar parámetros de diseño para un dispositivo práctico, de modo que pueda funcionar como se requiere.

Problemas basados en cálculo. Todos los capítulos contienen al menos un problema que aplica ideas y métodos del cálculo diferencial y un problema que usa cálculo integral.

Ilustraciones. Cada ilustración en la Novena edición es de estilo moderno que ayuda a expresar los principios de la física en el trabajo de una manera clara y precisa. Se incluyen *punteros de enfoque* en muchas figuras del texto; éstos señalan aspectos importantes de una figura o guían a los estudiantes a través de un proceso ilustrado por la fotografía o las ilustraciones. Este formato ayuda a los estudiantes que están aprendiendo de forma más visual. Un ejemplo de figura con un puntero de enfoque aparece a continuación.

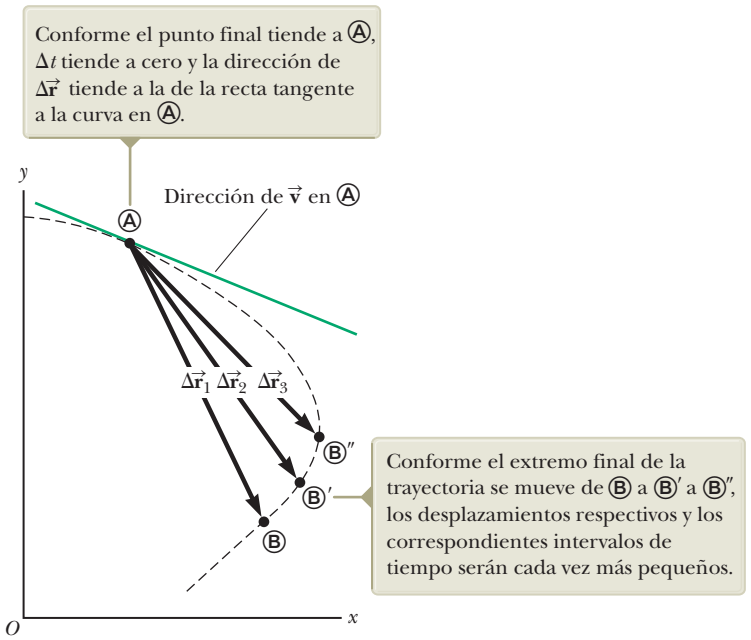


Figura 4.2 A medida que una partícula se mueve entre dos puntos, su velocidad promedio está en la dirección del vector desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. Por definición, la velocidad instantánea en Ⓐ se dirige a lo largo de la recta tangente a la curva en Ⓐ.

Apéndice matemático. El apéndice matemático (Apéndice B), una valiosa herramienta para los estudiantes, se actualizó para mostrar las herramientas matemáticas en un contexto físico. Este recurso es ideal para los estudiantes que necesitan un repaso rápido acerca de temas tales como álgebra, trigonometría y cálculo.

Características útiles

Estilo. Para facilitar la rápida comprensión, hemos escrito el libro en un estilo claro, lógico y atractivo. Elegimos un estilo de escritura que es un poco informal y relajado, de modo que los estudiantes encontrarán el texto atractivo y agradable para leer. Los nuevos términos se definen cuidadosamente y hemos evitado el uso de vocabulario especial.

Definiciones y ecuaciones importantes. Las definiciones más importantes se ponen en **negritas** o se resaltan con una pantalla para agregar énfasis y facilitar la revisión. De igual modo, las ecuaciones importantes se resaltan con una pantalla para facilitar su ubicación.

Notas al margen. Los comentarios y notas que aparecen en el margen con un icono ▶ se pueden usar para ubicar enunciados, ecuaciones y conceptos importantes en el texto.

Uso pedagógico del color. Los lectores deben consultar la **carta pedagógica de color** (al final del libro) para una lista de los símbolos en color que se usan en los diagramas del texto. Este sistema se usa consistentemente en todas las partes del texto.

Nivel matemático. Introducimos el cálculo de manera gradual, teniendo en mente que los estudiantes con frecuencia toman cursos introductorios de cálculo y física simultáneamente. La mayoría de las etapas se muestra cuando se desarrollan ecuaciones básicas, y con frecuencia se hace referencia a los apéndices matemáticos cerca del final del texto. Aunque los vectores son analizados en el capítulo 3, los productos vectoriales se introducen más adelante en el texto, donde se necesitan en aplicaciones físicas. El producto punto se introduce en el capítulo 7, que aborda la energía de un sistema; el producto cruz se introduce en el capítulo 11, que se relaciona con cantidad de movimiento angular.

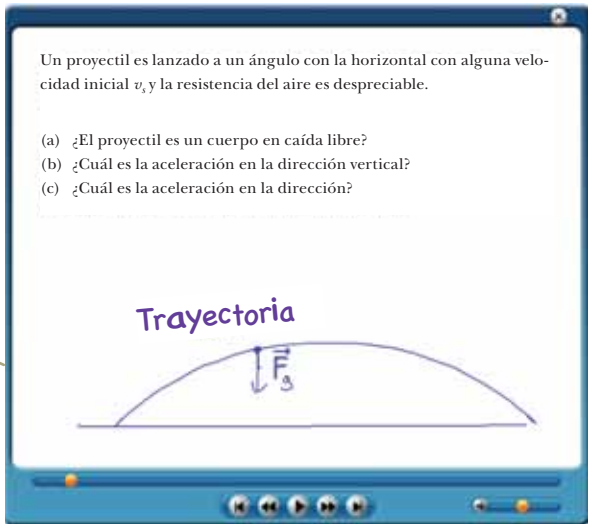
Cifras significativas. Las cifras significativas, tanto en los ejemplos trabajados como en los problemas de fin de capítulo, se manejaron con cuidado. La mayoría de los ejemplos numéricos se trabaja a dos o a tres cifras significativas, dependiendo de la precisión de los datos proporcionados. Los problemas de fin de capítulo por lo regular establecen datos y respuestas a tres dígitos de precisión. En la realización de los cálculos de estimación se suele trabajar con una sola cifra significativa. (Se puede encontrar más acerca del análisis de cifras significativas en el capítulo 1, páginas 11-13.)

Unidades. A lo largo del texto se usa el sistema internacional de unidades (SI). El sistema estadounidense de unidades usuales sólo se usa en una medida limitada en los capítulos sobre mecánica y termodinámica.

Apéndices. Casi al final del texto se proporcionan varios apéndices. La mayoría del material de los apéndices representa un repaso de conceptos y técnicas matemáticas aplicadas en el texto, incluidos notación científica, álgebra, geometría, trigonometría, cálculo diferencial y cálculo integral. En todas las partes del texto se hace referencia a estos apéndices. La mayor parte de las secciones de repaso matemático en los apéndices incluyen ejemplos y ejercicios con respuestas. Además de los repasos matemáticos, los apéndices contienen tablas de datos físicos, factores de conversión y las unidades del SI de cantidades físicas, así como una tabla periódica de los elementos. Otra información útil (constantes fundamentales y datos físicos, datos planetarios, una lista de prefijos estándar, símbolos matemáticos, el alfabeto griego y abreviaturas estándar de unidades de medición) aparecen al final del libro.

- **Videos solución** (disponibles en la sección de complementos digitales) explican las estrategias fundamentales de resolución de problemas, para ayudar a los estudiantes a través del problema. Además, los profesores pueden optar por incluir pistas de video de las estrategias de resolución de problemas. Una pantalla de captura de película con el video de la solución aparece a continuación:

Los videos solución ayudan a los estudiantes a visualizar los pasos necesarios para resolver un problema.



- **Revisión de conceptos**
- **Ejemplos resueltos,** mejorados con sugerencias y comentarios, para ayudar a los estudiantes a fortalecer las habilidades de resolución de problemas
- **Cada examen rápido** otorga a los estudiantes una amplia oportunidad para poner a prueba su comprensión conceptual.

CengageBrain.com (sólo disponible en inglés y con un costo adicional)

En **CengageBrain.com** los estudiantes serán capaces de ahorrar hasta un 60% en sus materiales del curso a través de nuestra completa gama de opciones. Tendrán la opción de rentar sus libros de texto, la compra de libros de texto impresos, libros de texto electrónicos o mensajes de los distintos capítulos y audiolibros, todos para ahorrar sustancialmente en los precios medios de venta al detalle. CengageBrain.com también incluye el acceso a la amplia gama de tareas y herramientas de estudio de Cengage Learning y cuenta con una selección de contenido libre.

Recursos para presentaciones (sólo disponibles en inglés y con un costo adicional)

Con ***PowerLecture con ExamView® y Joinin*** de *Física para Ciencias e Ingeniería*, Novena edición, llevar los principios y conceptos de la física a la vida en sus presentaciones ¡nunca fue tan fácil! Los dos volúmenes DVD-ROM de recursos PowerLecture para el instructor completamente equipados, (Volumen 1: capítulos 1-22, volumen 2: capítulos 23-46) ofrecen todo lo que usted necesita para *Física para Ciencias e Ingeniería*, Novena edición. El contenido clave incluye el *Manual Soluciones del Instructor*, las ilustraciones y las imágenes del texto, presentaciones específicas de PowerPoint pre elaboradas por capítulo, el software generador de exámenes ExamView con preguntas de examen precargadas, el sistema de respuesta Joinin o "clickers", animaciones de figuras activas y una biblioteca de películas de física.

Joinin. *Evaluar para aprender en el aula* son preguntas desarrolladas en la Universidad de Massachusetts Amherst. Esta colección de 250 preguntas conceptuales avanzadas ha sido probada en las aulas durante más de diez años y lleva el aprendizaje entre iguales a un nuevo nivel. Joinin ayuda a convertir sus conferencias en un ambiente de aprendizaje interactivo que promueve la comprensión conceptual. Disponible exclusivamente para la educación superior a partir de nuestra asociación con Turning Technologies, Joinin™ es la manera más fácil de convertir el aula en una experiencia personal, ¡totalmente interactiva para sus estudiantes!

Evaluación y recursos de preparación de clase (sólo disponibles en inglés y para los adopters del libro)

Una serie de recursos que se enumeran a continuación le ayudará con su evaluación y los procesos de preparación.

Manual de soluciones del instructor de Vahe Peroomian (Universidad de California en Los Angeles). Completamente revisado para esta edición, el *Manual de soluciones del instructor* contiene soluciones completas a todos los problemas de fin de capítulo del libro de texto, así como respuestas a los problemas de número par y a todas las preguntas. Las soluciones a los problemas nuevos en la novena edición están marcadas para su fácil identificación. El volumen 1 contiene los capítulos 1 a 22, el volumen 2 contiene los capítulos 23 a 46. Los archivos electrónicos del *Manual de soluciones del instructor* están disponibles en el PowerLecture™ DVD-ROM.

Banco de exámenes por Ed Oberhofer (Universidad de Carolina del Norte en Charlotte y Lake Sumter Community College). El banco de exámenes está disponible en los dos volúmenes del DVD-ROM PowerLecture™ mediante el software de exámenes ExamView®. Este banco de dos volúmenes contiene aproximadamente 2 000 pregun-

tas de opción múltiple. Los profesores pueden imprimir y duplicar las páginas para distribuir a los estudiantes. El volumen 1 contiene los capítulos 1 a 22 y el volumen 2 contiene los capítulos 23 a 46. Versiones WebCT y Blackboard del banco de exámenes están disponibles en el sitio de acompañamiento para el instructor en www.CengageBrain.com.

Instructor's Companion Web Site. Consulte el sitio del instructor, apuntando su navegador a **www.CengageBrain.com**, para una guía de correlación de problemas, presentaciones en PowerPoint, y Joinin contenido de respuesta del público. Los profesores que adoptan la Novena edición de *Física para Ciencias e Ingeniería* pueden descargar estos materiales después de conseguir la contraseña apropiada de su representante de ventas local.

Material de apoyo en español (sin costo y por medio de un código de acceso)

Este libro cuenta con un sitio de complementos digitales que contiene una serie de recursos en español para el profesor y el estudiante, los cuales incluyen los videos solución, cuestionarios interactivos y figuras activas, entre otros. Para tener acceso a los complementos digitales, solicítalo al correo soporte.latam@cengage.com indicando el título del ebook.

CENGAGE brain com

Recursos para el estudiante (sólo en inglés y con un costo adicional)

Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio de John R. Gordon, Vahé Peroomian, Raymond A. Serway y John W. Jewett, Jr. Este manual de dos volúmenes ofrece soluciones detalladas a 20% de los problemas de fin de capítulo del texto. El manual también incluye una lista de ecuaciones importantes, conceptos y las notas de las secciones clave del texto, además de respuestas a las preguntas al final de los capítulos seleccionados. El volumen 1 contiene los capítulos 1 a 22 y el volumen 2 contiene los capítulos 23 a 46.

Manual de laboratorio de física, Tercera edición, por David Loyd (Angelo State University), complementa el aprendizaje de los principios físicos básicos, mientras introduce los procedimientos y equipos de laboratorio. Cada capítulo incluye una asignación previa al laboratorio, objetivos, una lista de equipo, la teoría detrás del experimento, procedimientos experimentales, ejercicios, gráficas y preguntas. Un formulario de informe de laboratorio se incluye con cada experimento para que el estudiante pueda registrar los datos, cálculos y resultados experimentales. Los estudiantes son alentados a aplicar el análisis estadístico a los datos. Un *Manual completo del instructor* también está disponible para facilitar el uso de este manual de laboratorio.

Experimentos de laboratorio de física, Séptima edición, de Jerry D. Wilson (Lander College) y Cecilia A. Hernández (American River College). Este manual, líder en el mercado para el primer curso de laboratorio de física, ofrece una amplia gama de experimentos probados en clase diseñados específicamente para su uso en programas de laboratorio pequeños y medianos. Una serie de experimentos integrados enfatiza el uso de la instrumentación computarizada e incluye una serie de "experimentos asistidos por computadora" para permitir a los estudiantes e instructores ganar experiencia con equipos modernos. Esta opción también permite a los instructores determinar el equilibrio adecuado entre los experimentos tradicionales y

de Internet para sus cursos. Mediante el análisis de los datos a través de dos métodos diferentes, los estudiantes obtienen una mayor comprensión de los conceptos detrás de los experimentos. La séptima edición se ha actualizado con la última información y técnicas que implican el estado de equipos de última generación y una nueva característica Guided Learning aborda el creciente interés en la pedagogía de la investigación guiada. Catorce ensayos adicionales también están disponibles a través de la impresión personalizada.

Opciones de enseñanza

Los temas en este libro se presentan en la siguiente secuencia: mecánica clásica, oscilaciones y ondas mecánicas, y calor y termodinámica. Esta presentación es una secuencia tradicional, donde el tema de las ondas mecánicas se aborda antes que la electricidad y el magnetismo. Algunos profesores prefieren estudiar las ondas mecánicas y electromagnéticas juntas después de completar la electricidad y el magnetismo. En este caso, los capítulos 16 a 18 podrían ser cubiertos a lo largo del capítulo 34. El capítulo sobre la relatividad se coloca cerca del final del texto, porque este tema se trata a menudo como una introducción a la era de la "física moderna". Si el tiempo lo permite, los profesores pueden optar por cubrir el capítulo 39 después de completar el capítulo 13 como conclusión del material de la mecánica newtoniana. Para los instructores que enseñan una secuencia de dos semestres, algunas secciones y capítulos del volumen 1 se podrían eliminar sin pérdida de continuidad. Las siguientes secciones se pueden considerar opcionales para este propósito:

2.8 Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo
4.6 Velocidad y aceleración relativas
6.3 Movimiento en marcos acelerados
7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema
9.9 Propulsión de cohetes
11.5 El movimiento de giroscopios y trompos
14.7 Otras aplicaciones de la dinámica de fluidos
15.6 Oscilaciones amortiguadas
15.7 Oscilaciones forzadas
18.6 Ondas estacionarias en barras y membranas
18.8 Patrones de ondas no sinusoidales

Reconocimientos

Esta Novena edición de *Física para ciencias e ingeniería* se preparó con la guía y asistencia de muchos profesores que revisaron selecciones del manuscrito, la revisión previa del texto o ambos. Queremos agradecer a los siguientes académicos y expresar nuestro sincero aprecio por sus sugerencias, críticas y aliento:

Benjamin C. Bromley, University of Utah;
Elena Flitsiyan, University of Central Florida; y
Yuankun Lin, University of North Texas;
Allen Mincer, New York University;
YibinPan, University of Wisconsin–Madison;
N. M. Ravindra, New Jersey Institute of Technology;
Masao Sako, University of Pennsylvania;
Charles Stone, Colorado School of Mines;
Robert Weidman, Michigan Technological University;
Michael Winokur, University of Wisconsin–Madison

Antes de nuestro trabajo en esta revisión, realizamos una encuesta a profesores; sus comentarios y sugerencias ayudaron a darle forma, por lo que nos gustaría dar las gracias a los participantes de la encuesta:

Elise Adamson, *Wayland Baptist University;* Saul Adelman, *The Citadel;* Yiyan Bai, *Houston Community College;* Philip Blanco, *Grossmont College;* Ken Bolland, *Ohio State University;* Michael Butros, *Victor Valley College;* Brian Carter, *Grossmont College;* Jennifer Cash, *South Carolina State University;* Soumitra Chattopadhyay, *Georgia Highlands College;* John Cooper, *Brazosport College;* Gregory Dolise, *Harrisburg Area Community College;* Mike Durren, *Lake Michigan College;* Tim Farris, *Volunteer State Community College;* Mirela Fetea, *University of Richmond;* Susan Foreman, *Danville Area Community College;* Richard Gottfried, *Frederick Community College;* Christopher Gould, *University of Southern California;* Benjamin Grinstein, *University of California, San Diego;* Wayne Guinn, *Lon Morris College;* Joshua Guttman, *Bergen Community College;* Carlos Handy, *Texas Southern University;* David Heskett, *University of Rhode Island;* Ed Hungerford, *University of Houston;* Matthew Hyre, *Northwestern College;* Charles Johnson, *South Georgia College;* Lynne Lawson, *Providence College;* Byron Leles, *Northeast Alabama Community College;* Rizwan Mahmood, *Slippery Rock University;* Virginia Makepeace, *Kankakee Community College;* David Marasco, *Foothill College;* Richard McCorkle, *University of Rhode Island;* Brian Moudry, *Davis & Elkins College;* Charles Nickles, *University of Massachusetts Dartmouth;* Terrence O'Neill, *Riverside Community College;* Grant O'Rielly, *University of Massachusetts Dartmouth;* Michael Ottinger, *Missouri Western State University;* Michael Panunto, *Butte College;* Eugenia Peterson, *Richard J. Daley College;* Robert Pompi, *Binghamton University, State University of New York;* Ralph Popp, *Mercer County Community College;* Craig Rabatin, *West Virginia University at Parkersburg;* Marilyn Rands, *Lawrence Technological University;* Christina Reeves-Shull, *Cedar Valley College;* John Rollino, *Rutgers University, Newark;* Rich Schelp, *Erskine College;* Mark Semon, *Bates College;* Walther Spjeldvik, *Weber State University;* Mark Spraker, *North Georgia College and State University;* Julie Talbot, *University of West Georgia;* James Tressel, *Massasoit Community College;* Bruce Unger, *Wenatchee Valley College;* Joan Vogtman, *Potomac State College.*

Este texto fue revisado cuidadosamente en su precisión por Grant Hart, *Brigham Young University;* James E. Rutledge, *University of California at Irvine;* y Som Tyagi, *Drexel University.* Queremos agradecerles sus diligentes esfuerzos bajo presión de agenda.

Belal Abas, Zinoviy Akkerman, Eric Boyd, Hal Falk, Melanie Martin, Steve McCauley, y Glenn Stracher hicieron las correcciones a los problemas tomados de ediciones anteriores. Harvey Leff brindó una guía invaluable en la reestructuración del análisis de la entropía en el capítulo 22. Estamos agradecidos con los autores John R. Gordon y Ralph McGrew por preparar el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio* y con Vahé Peroomian por preparar un excelente *Manual de soluciones del instructor.* Susan English editó y mejoró cuidadosamente el banco de pruebas. Linnea Cookson nos dio una excelente precisión en la revisión de los Tutoriales de análisis de modelo.

Gracias y reconocimiento especial para el personal profesional en Brooks/Cole Publishing Company, en particular a Charles Hartford, Ed Dodd, Stephanie VanCamp, Rebecca Berardy Schwartz, Tom Ziolkowski, Alison Eigel Zade, Cate Barr y Brendan Killion (quien gestionó el programa auxiliar), por su fino trabajo durante el desarrollo, producción y promoción de este libro. Reconocemos el profesional servicio de producción y excelente trabajo artístico proporcionados por el personal en Lachina Publishing Services, y los dedicados esfuerzos de investigación fotográfica de Christopher Arena para el Bill Smith Group.

Para finalizar, estamos profundamente en deuda con nuestras esposas, hijos y nietos por su amor, apoyo y sacrificios de largo plazo.

Raymond A. Serway
St. Petersburg, Florida

John W. Jewett, Jr.
Anaheim, California

Al estudiante

Es apropiado ofrecer algunas palabras de consejo que deben ser de beneficio para el estudiante. Antes de hacerlo, suponemos que ha leído el Prefacio, que describe las diferentes características del texto y materiales de apoyo que le ayudarán a lo largo del curso.

Cómo estudiar

Con frecuencia preguntan a los instructores: "¿Cómo debo estudiar física y prepararme para los exámenes?" No hay una respuesta simple a esta pregunta, pero podemos ofrecer algunas sugerencias de acuerdo con nuestra experiencia en el aprendizaje y enseñanza a través de los años.

Ante todo, mantenga una actitud positiva hacia el tema de estudio, teniendo en mente que la física es la más esencial de todas las ciencias naturales. Otros cursos de ciencia que siguen usarán los mismos principios físicos, de modo que es importante que entienda y sea capaz de aplicar los diversos conceptos y teorías explicadas en el texto.

Conceptos y principios

Es esencial que entienda los conceptos y principios básicos antes de intentar resolver los problemas asignados. Esta meta la puede lograr al leer con cuidado el texto antes de asistir a su clase acerca del material cubierto. Cuando lea el texto, debe anotar aquellos puntos que no sean claros. También haga un intento diligente por responder los Exámenes rápidos, conforme los encuentra en su lectura. Hemos trabajado duro para preparar preguntas que le ayuden a juzgar por sí mismo qué tan bien entiende el material. Estudie cuidadosamente las preguntas **¿Qué pasaría si?** que aparecen en muchos de los ejemplos trabajados. Ellas le ayudarán a extender su comprensión más allá del simple acto de llegar a un resultado numérico. Las Prevenciones de riesgos ocultos también le ayudarán a alejarse de las malas interpretaciones comunes con respecto a la física. Durante la clase tome notas y pregunte acerca de aquellas ideas que no le sean claras. Tenga en mente que pocas personas son capaces de absorber todo el significado del material científico después de sólo una lectura; pueden ser necesarias muchas lecturas del texto y sus notas. Sus clases y trabajo de laboratorio complementan la lectura del libro y deben clarificar algo del material más difícil. Debe minimizar su memorización del material. La memorización exitosa de pasajes del texto, ecuaciones y derivaciones no necesariamente indican que comprende el material. Su comprensión del material mejorará mediante la combinación de hábitos eficientes de estudio, discusiones con otros estudiantes y con instructores, y su habilidad para resolver los problemas que se presentan en el libro. Pregunte siempre que crea que es necesario aclarar un concepto.

Agenda de estudio

Es importante que configure una agenda de estudio regular, de preferencia que sea diaria. Asegúrese de leer el programa de estudio del curso y que éste coincide con el

calendario establecido por el instructor. Las clases tendrán mucho más sentido si lee el texto correspondiente antes de asistir a ellas. Como regla general, debe dedicar aproximadamente dos horas de tiempo de estudio por cada hora que esté en clase. Si tiene problemas con el curso, busque el consejo del instructor u otros estudiantes que hayan tomado el curso. Puede ser necesario buscar más instrucción de estudiantes experimentados. Con mucha frecuencia, los instructores ofrecen sesiones de repaso, además de los periodos de clase regulares. Evite la práctica de demorar el estudio hasta un día o dos antes de un examen. Por lo general, este enfoque tiene resultados desastrosos. En lugar de emprender una sesión de estudio de toda la noche antes del examen, repase brevemente los conceptos y ecuaciones básicos, y luego tenga una buena noche de descanso. Si usted cree que necesita más ayuda en la comprensión de los conceptos, en la preparación para los exámenes o en la resolución de problemas, le recomendamos que adquiera una copia (en inglés) del *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio* que acompaña a este libro de texto.

Visite el sitio web *Física para ciencias e ingeniería* en www.cengagebrain.com/shop/ISBN/9781133954156 para ver muestras de los suplementos (en inglés) seleccionados para los estudiantes. Usted puede comprar cualquier producto Cengage Learning en inglés en nuestra tienda online CengageBrain.com.

Use las características

Debe usar por completo las diferentes características del texto explicadas en el Prefacio. Por ejemplo, las notas al margen son útiles para localizar y describir ecuaciones y conceptos importantes, y las negritas indican enunciados y definiciones importantes. En los apéndices hay muchas tablas útiles, pero la mayoría se incorpora al texto, donde su referencia es útil. El Apéndice B es un repaso conveniente de técnicas matemáticas.

Las respuestas a los exámenes rápidos y a los problemas con número impar se proporcionan al final del libro, las respuestas a las exámenes rápidos se ubican al final de cada capítulo y las soluciones a preguntas y problemas de fin de capítulo seleccionados se proporcionan en el paquete de recursos que acompañan al libro. La tabla de contenido proporciona un panorama de todo el texto y el índice le permite ubicar rápidamente material específico. En ocasiones se usan notas a pie de página para complementar el texto o citar otras referencias acerca del tema explicado.

Después de leer un capítulo debe ser capaz de definir cualquier cantidad nueva introducida en dicho capítulo y explicar los principios y suposiciones que se usaron para llegar a ciertas relaciones clave. Los resúmenes de capítulo y las secciones de repaso le ayudan a este respecto. En algunos casos puede encontrar necesario remitirse al índice del libro para ubicar ciertos temas. Debe ser capaz de asociar a cada cantidad física el símbolo correcto para representar dicha cantidad y la unidad en que se especifica la cantidad. Además, debe ser capaz de expresar cada ecuación importante en prosa concisa y exacta.

Resolución de problemas

R. P. Feynman, laureado Nobel en física, dijo una vez: “No sabes nada hasta que lo has practicado.” Para estar de acuerdo con este enunciado, le recomendamos encarecidamente que desarrolle las habilidades necesarias para resolver una amplia serie de problemas. Su habilidad para resolver problemas será una de las principales pruebas de su conocimiento en física; por lo tanto, debe intentar resolver tantos problemas como sea posible. Es esencial que comprenda los conceptos y principios básicos antes de intentar resolver problemas. Es buena práctica intentar encontrar soluciones alternas al mismo problema. Por ejemplo, puede resolver problemas en mecánica usando las leyes de Newton, pero con mucha frecuencia un método alter-

nativo que se apoye en consideraciones sobre la energía es más directo. No debe engañarse y creer que entiende un problema simplemente porque ha visto cómo se resolvió en clase. Debe ser capaz de resolver el problema y problemas similares por cuenta propia.

El enfoque para resolver problemas se debe planear cuidadosamente. Un plan sistemático es especialmente importante cuando un problema involucra muchos conceptos. Primero, lea el problema muchas veces hasta que esté seguro de que entiende qué se pide. Busque palabras clave que le ayuden a interpretar el problema y tal vez le posibiliten la formulación de ciertas suposiciones. Su habilidad para interpretar adecuadamente una pregunta es una parte integral de la resolución del problema. Segundo, debe adquirir el hábito de escribir la información conocida en un problema y aquellas cantidades que necesite encontrar; por ejemplo, puede construir una tabla que mencione tanto las cantidades conocidas como las cantidades a encontrar. Este procedimiento se usa a veces en los ejemplos trabajados del libro. Por último, después de decidir el método que considere apropiado para un problema determinado, proceda con su solución. La Estrategia General para Resolver Problemas le guiará a través de problemas complejos. Si sigue las etapas de este procedimiento (*Conceptualizar*, *Categorizar*, *Analizar*, *Finalizar*), le será más fácil llegar a una solución y ganará más por sus esfuerzos. Dicha estrategia, ubicada al final del capítulo 2 (páginas 45–47), se usa en todos los ejemplos en los capítulos restantes, de modo que puede aprender cómo aplicarla. En el texto se incluyen estrategias específicas para resolución de problemas para ciertos tipos de situaciones y aparecen con un encabezado azul. Dichas estrategias específicas siguen el esbozo de la Estrategia General para Resolver Problemas.

Con frecuencia los estudiantes fracasan en el reconocimiento de las limitaciones de ciertas ecuaciones o leyes físicas en una situación particular. Es muy importante que entienda y recuerde las suposiciones que subyacen a una teoría o formalismo particular. Por ejemplo, ciertas ecuaciones en cinemática sólo se aplican a una partícula en movimiento con aceleración constante. Estas ecuaciones no son válidas para describir el movimiento cuya aceleración no sea constante, como el movimiento de un objeto conectado a un resorte o el movimiento de un objeto a través de un fluido. Estudie cuidadosamente los Análisis de modelo para resolver problemas en los resúmenes de capítulo, de modo que sepa cómo se aplica cada modelo a una situación específica. Los análisis de modelo le proporcionan una estructura lógica para resolver problemas y ayudan a desarrollar sus habilidades de pensamiento para ser más como los de un físico. Utilice el enfoque del análisis de modelo para ahorrar horas de búsqueda de la ecuación correcta y para hacer de usted un solucionador de problemas más rápido y más eficiente.

Experimentos

La física es una ciencia que se apoya en observaciones experimentales. Por lo tanto, recomendamos que intente complementar el texto, realizando varios tipos de experimentos "prácticos", en casa o en el laboratorio. Estos experimentos se pueden usar para poner a prueba ideas y modelos explicados en clase o en el libro. Por ejemplo, el juguete común Slinky es excelente para estudiar ondas viajeras, una bola que se balancea en el extremo de una cuerda larga se puede usar para investigar el movimiento pendular, diferentes masas unidas al extremo de un resorte o banda de goma vertical se pueden usar para determinar su naturaleza elástica, un viejo par de lentes de sol y algunos lentes de desecho y una lupa son los componentes de diferentes experimentos en óptica, y una medida aproximada de la aceleración en caída libre se puede determinar simplemente al medir con un cronómetro el tiempo que una bola tarda en caer desde una altura conocida. La lista de tales experimentos es interminable. Cuando no estén disponibles modelos físicos, sea imaginativo e intente desarrollar los suyos por cuenta propia.

Nuevos medios

Le recomendamos enormemente usar el sitio de complementos digitales que acompaña a este libro. Es mucho más fácil comprender la física si la ve en acción, y estos nuevos materiales le permitirán volverse parte de dicha acción.

Es nuestro sincero deseo que encuentre en la física una experiencia excitante y agradable, y que se beneficie de esta experiencia sin importar la profesión que elija. ¡Bienvenido al excitante mundo de la física!

> *El científico no estudia la naturaleza porque sea útil; la estudia porque se deleita en ella, y se deleita en ella porque es hermosa. Si la naturaleza no fuera hermosa, no valdría la pena conocerla, y si no valiera la pena conocer la naturaleza, no valdría la pena vivir la vida.*
>
> **—Henri Poincaré**

Mecánica

PARTE
1



El FCX Clarity de Honda es un automóvil alimentado con pila de combustible a disposición del público, aunque en cantidades limitadas. Una pila de combustible convierte el hidrógeno combustible en electricidad para propulsar el motor que rueda a las llantas del auto. Los automóviles, propulsados ya sea con pilas de combustible, motores de gasolina o baterías, usan muchos de los conceptos y principios de la mecánica que vamos a estudiar en esta primera parte del libro. Las cantidades que podemos utilizar para describir el movimiento de los vehículos son posición, velocidad, aceleración, fuerza, energía e impulso. *(PRNewsFoto/American Honda)*

La física, fundamental entre las ciencias físicas, se ocupa de los principios esenciales del Universo. Es el cimiento sobre el que se erigen las otras ciencias: astronomía, biología, química y geología. También es el fundamento de un gran número de aplicaciones de ingeniería. La belleza de la física consiste en la simplicidad de sus principios fundamentales y en la forma en que con sólo un pequeño número de conceptos y modelos modifica y expande nuestra visión del mundo circundante.

El estudio de la física se divide en seis áreas primordiales:

1. La *mecánica clásica*, que estudia el movimiento de los objetos de gran magnitud en comparación con los átomos y se mueven con una rapidez mucho más lenta que la de la luz;
2. La *relatividad*, una teoría que describe los objetos que se mueven con cualquier rapidez, incluso los que se aproximan a la rapidez de la luz;
3. La *termodinámica*, que trata del calor, el trabajo, la temperatura y el comportamiento estadístico de los sistemas con gran número de partículas;
4. El *electromagnetismo*, que le compete a la electricidad, el magnetismo y los campos electromagnéticos;
5. La *óptica*, que estudia el comportamiento de la luz y su interacción con los materiales;
6. La *mecánica cuántica*, un conjunto de teorías que conectan el comportamiento de la materia al nivel submicroscópico con las observaciones macroscópicas.

Las disciplinas de la mecánica y el electromagnetismo son primordiales para todas las otras ramas de la física clásica (desarrolladas antes de 1900) y la física moderna (c. 1900–presente). La primera parte de este libro estudia a la mecánica clásica, conocida como *mecánica newtoniana* o simplemente mecánica. Muchos principios y modelos que se aplican para comprender los sistemas mecánicos conservan su importancia en las teorías de otras áreas de la física y sirven para describir muchos fenómenos naturales. Debido a eso, la mecánica clásica es trascendente para los estudiantes de todas las disciplinas ■

CAPÍTULO

1

Física y medición

1.1 Estándares de longitud, masa y tiempo

1.2 Materia y construcción de modelos

1.3 Análisis dimensional

1.4 Conversión de unidades

1.5 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud

1.6 Cifras significativas



Stonehenge, en el sur de Inglaterra, fue construido hace miles de años. Varias teorías se han propuesto acerca de su función, incluyendo un cementerio, un lugar de curación y un lugar de culto a los antepasados. Una de las teorías más intrigantes sugiere que Stonehenge era un observatorio, lo que permite mediciones de algunas de las cantidades analizadas en este capítulo, como la posición de los objetos en el espacio y en intervalos de tiempo entre eventos celestes periódicos.

Como todas las otras ciencias, la física se sustenta en observaciones experimentales y mediciones cuantitativas. Los objetivos principales de la física son identificar un número limitado de leyes fundamentales que rigen los fenómenos naturales y usarlas para desarrollar teorías capaces de anticipar los resultados experimentales. Las leyes fundamentales que se usan para elaborar teorías se expresan en el lenguaje de las matemáticas, la herramienta que proporciona un puente entre teoría y experimento.

Cuando hay discrepancia entre el pronóstico de una teoría y un resultado experimental, es necesario formular teorías nuevas o modificadas para resolver la discrepancia. Muchas veces una teoría es satisfactoria sólo bajo condiciones limitadas; a veces una teoría general es satisfactoria sin ciertas limitaciones. Por ejemplo, las leyes del movimiento descubiertas por Isaac Newton (1642–1727) describen con precisión el movimiento de los objetos que se mueven con rapidez normal pero no se aplica a objetos que se mueven con rapidez comparable con la velocidad de la luz. En contraste, la teoría especial de la relatividad, desarrollada más tarde por Albert Einstein (1879–1955), da los mismos resultados que las leyes de Newton a bajas rapideces, pero también hace una descripción correcta del movimiento de los objetos con rapideces que se aproximan a la rapidez de la luz. Por lo tanto, la teoría especial de la relatividad de Einstein es una teoría de movimiento más general que la formada por las leyes de Newton.

La física clásica incluye los principios de la mecánica clásica, la termodinámica, la óptica y el electromagnetismo desarrollados antes de 1900. Newton realizó importantes contribuciones a la física clásica y también fue uno de los creadores del cálculo como herramienta matemática. Durante el siglo XVIII continuaron los grandes adelantos en la mecánica, pero los campos de la termodinámica y el electromagnetismo no se desplegaron hasta la parte final del siglo XIX, principalmente porque antes de esa época los aparatos para experimentos controlados en estas disciplinas eran o muy burdos o no estaban disponibles.

Una gran revolución en la física, conocida como *física moderna*, comenzó hacia el final del siglo XIX. La física moderna nació primordialmente porque la física clásica no era capaz de explicar muchos fenómenos físicos. En esta era moderna hubo dos hitos, las teorías de la relatividad y de la mecánica cuántica. La teoría especial de la relatividad de Einstein no sólo describe en forma correcta el movimiento de los objetos que se mueven con rapideces comparables con la rapidez de la luz; también modifica por completo los conceptos tradicionales de espacio, tiempo y energía. Además, la teoría demuestra que la rapidez de la luz es el límite superior de la rapidez de un objeto y que la masa y la energía están relacionadas. La mecánica cuántica la formularon algunos científicos distinguidos para proporcionar descripciones de los fenómenos físicos a nivel atómico. Con los principios de la mecánica cuántica se han construido muchos dispositivos prácticos.

Los científicos hacen un trabajo constante por el mejoramiento en la comprensión de las leyes fundamentales. En tiempos recientes numerosos avances tecnológicos han resultado de los esfuerzos de muchos científicos, ingenieros y técnicos, tales como exploraciones planetarias no tripuladas, una variedad de desarrollos y potenciales aplicaciones en nanotecnología, microcircuitos y computadoras de alta velocidad, las complejas técnicas de imagen que se usan en la investigación científica y la medicina y muchos resultados notables en ingeniería genética. Los impactos de dichos desarrollos y descubrimientos en la sociedad han sido colosales, y es muy probable que los futuros descubrimientos y desarrollos serán excitantes, desafiantes y de gran beneficio para la humanidad.

1.1 Estándares de longitud, masa y tiempo

Para describir los fenómenos naturales, es necesario hacer mediciones de varios aspectos de la naturaleza. Cada medición se asocia con una cantidad física, tal como la longitud de un objeto. Las leyes de la física se expresan como relaciones matemáticas entre cantidades físicas que se introducirán y analizaran a lo largo del libro. En mecánica, las tres cantidades fundamentales son longitud, masa y tiempo. Todas las otras cantidades en mecánica se pueden expresar en función de estas tres.

Si tuviese que reportar los resultados de una medición a alguien que desea reproducir esa medición, tendría que definir un *estándar*. Sería absurdo que un visitante de otro planeta le hablara de una longitud de 8 "glitches" si no conoce el significado de la unidad glitch. Por otra parte, si alguien familiarizado con el sistema de medición reporta que una pared tiene 2 metros de alto y la unidad de longitud se define como 1 metro, se sabe que la altura de la pared es el doble de la unidad de longitud básica. Cualquier unidad que se elija como estándar debe ser accesible y poseer alguna propiedad que se pueda medir confiablemente. Los estándares de medición que diferentes personas de lugares distintos aplican en el Universo deben producir el mismo resultado. Además, los estándares que se usan para mediciones no deben cambiar con el tiempo.

En 1960, un comité internacional estableció un conjunto de estándares para las cantidades fundamentales de la ciencia. Se llama **SI** (Sistema Internacional) y sus unidades fundamentales de longitud, masa y tiempo son *metro, kilogramo y segundo*, respectivamente. Otros estándares para las unidades fundamentales SI establecidas por el comité son las de temperatura (el *kelvin*), corriente eléctrica (el *ampere*), la intensidad luminosa (la *candela*) y la cantidad de sustancia (el *mol*).

Longitud

La distancia entre dos puntos en el espacio se identifica como **longitud**. En 1120 el rey de Inglaterra decretó que el estándar de longitud en su país se llamaría *yarda* y sería precisamente igual a la distancia desde la punta de su nariz hasta el final de su brazo extendido. De igual modo, el estándar original para el pie adoptado por los franceses era la longitud del pie real del rey Luis XIV. Ninguno de dichos estándares es constante en el tiempo; cuando un nuevo rey subía al trono, ¡cambiaban las longitudes! El estándar francés prevaleció hasta 1799, cuando el estándar legal de longitud en Francia se volvió el **metro** (m), definido como una diezmillonésima de la distancia del Ecuador al Polo Norte a lo largo de una línea longitudinal particular que pasa por París. Observe que este valor es un estándar razonado en la Tierra, que no satisface el requerimiento de que se puede usar a través del Universo.

Tan recientemente como 1960, la longitud del metro se definió como la distancia entre dos líneas en una específica barra de platino–iridio que se almacena bajo condiciones controladas en Francia. Sin embargo, los requerimientos actuales de la ciencia y la tecnología necesitan más precisión que la dada por la separación entre las líneas en la barra. En las décadas de los sesenta y setenta del milenio pasado, el metro se definió como 1 650 763.73 longitudes de onda[1] de la luz naranja–rojo emitida de una lámpara de criptón 86. No obstante, en octubre de 1983, el metro se redefinió como **la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un tiempo de 1/299 792 458 segundos**. En efecto, esta última definición establece que la rapidez de la luz en el vacío es precisamente 299 792 458 metros por segundo. Esta definición del metro es válida a través del Universo con la suposición de que la luz es la misma en todas partes.

La tabla 1.1 enlista valores aproximados de algunas longitudes observadas. Debe estudiar esta tabla, así como las siguientes dos tablas, y comenzar a desarrollar una intuición de lo que significa, por ejemplo, una longitud de 20 centímetros, una masa de 100 kilogramos o un intervalo de tiempo de 3.2×10^7 segundos.

Prevención de riesgos ocultos 1.1

Valores razonables Es importante desarrollar la intuición acerca de valores típicos de cantidades cuando se resuelven problemas, porque debe pensar acerca de su resultado final y determinar si parece razonable. Si calcula la masa de una mosca y llega a un valor de 100 kg, esta respuesta es irracional y hay un error en alguna parte.

Masa

La unidad fundamental de **masa** en el SI, el **kilogramo** (kg), está definida como **la masa de un cilindro de aleación platino–iridio específico que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres**, Francia. Esta masa estándar fue establecida en 1887 y no ha cambiado desde esa época porque el platino–iridio es

Tabla 1.1 Valores aproximados de algunas longitudes medidas

	Longitud (m)
Distancia de la Tierra al quasar conocido más remoto	1.4×10^{26}
Distancia de la Tierra a las galaxias normales más remotas	9×10^{25}
Distancia de la Tierra a la galaxia más cercana (Andrómeda)	2×10^{22}
Distancia del Sol a la estrella más cercana (Próxima Centauri)	4×10^{16}
Un año luz	9.46×10^{15}
Radio orbital medio de la Tierra en torno al Sol	1.50×10^{11}
Distancia media de la Tierra a la Luna	3.84×10^{8}
Distancia del Ecuador al Polo Norte	1.00×10^{7}
Radio medio de la Tierra	6.37×10^{6}
Altitud típica (sobre la superficie) de un satélite que orbita la Tierra	2×10^{5}
Longitud de un campo de futbol	9.1×10^{1}
Longitud de una mosca	5×10^{-3}
Tamaño de las partículas de polvo más pequeñas	$\sim 10^{-4}$
Tamaño de las células de la mayoría de los organismos vivientes	$\sim 10^{-5}$
Diámetro de un átomo de hidrógeno	$\sim 10^{-10}$
Diámetro de un núcleo atómico	$\sim 10^{-14}$
Diámetro de un protón	$\sim 10^{-15}$

[1]Se usará la notación internacional estándar para números con más de tres dígitos, en éstos los grupos de tres dígitos se separan por espacios en lugar de comas. Por lo tanto, 10 000 es lo mismo que la notación estadounidense común de 10,000. De igual modo, $\pi = 3.14159265$ se escribe como 3.141 592 65.

Tabla 1.2

Masas aproximadas de varios objetos

	Masa (kg)
Universo observable	$\sim 10^{52}$
Galaxia Vía Láctea	$\sim 10^{42}$
Sol	1.99×10^{30}
Tierra	5.98×10^{24}
Luna	7.36×10^{22}
Tiburón	$\sim 10^{3}$
Humano	$\sim 10^{2}$
Rana	$\sim 10^{-1}$
Mosquito	$\sim 10^{-5}$
Bacteria	$\sim 1 \times 10^{-15}$
Átomo de hidrógeno	1.67×10^{-27}
Electrón	9.11×10^{-31}

Tabla 1.3 **Valores aproximados de algunos intervalos de tiempo**

	Intervalo de tiempo (s)
Edad del Universo	4×10^{17}
Edad de la Tierra	1.3×10^{17}
Edad promedio de un estudiante universitario	6.3×10^{8}
Un año	3.2×10^{7}
Un día	8.6×10^{4}
Un periodo de clase	3.0×10^{3}
Intervalo de tiempo entre latidos normales	8×10^{-1}
Periodo de ondas sonoras audibles	$\sim 10^{-3}$
Periodo de ondas de radio típicas	$\sim 10^{-6}$
Periodo de vibración de un átomo en un sólido	$\sim 10^{-13}$
Periodo de ondas de luz visible	$\sim 10^{-15}$
Duración de una colisión nuclear	$\sim 10^{-22}$
Intervalo de tiempo para que la luz cruce un protón	$\sim 10^{-24}$

una aleación inusualmente estable. Un duplicado del cilindro de Sèvres se conserva en el Instituto Nacional de Estándares y Tecnología (NIST, por sus siglas en inglés) en Gaithersburg, Maryland (figura 1.1a). La tabla 1.2 menciona valores aproximados de las masas de varios objetos.

Tiempo

Antes de 1967 el estándar de **tiempo** fue definido en términos *del día solar medio.* (Un día solar es el intervalo de tiempo entre apariciones sucesivas del Sol en el punto más alto que alcanza en el cielo cada día.) La unidad fundamental de un **segundo** (s) fue definida como $(\frac{1}{60})(\frac{1}{60})(\frac{1}{24})$ de un día solar medio. Esta definición se basa en la rotación de un planeta, la Tierra. Debido a eso, este movimiento no proporciona un tiempo estándar que sea universal.

En 1967 el segundo fue redefinido para sacar ventaja de la enorme precisión que se logra con un dispositivo conocido como *reloj atómico* (figura 1.1b), que mide vibraciones de átomos de cesio. Ahora 1 segundo se define como **9 192 631 770 veces el periodo de vibración de la radiación del átomo de cesio 133.**[2] En la tabla 1.3 se presentan valores aproximados de intervalos de tiempo.

Además del SI, otro sistema de unidades, el *sistema usual U.S.*, todavía se utiliza en Estados Unidos a pesar de la aceptación del SI en el resto del mundo. En este sistema las unidades de longitud, masa y tiempo son pie (ft), slug y segundo, respectivamente. En este libro se usarán las unidades del SI porque tienen aceptación mundial en la ciencia y en la industria. En el estudio de la mecánica clásica se hará un uso limitado de las unidades U.S. usuales.

Además de las unidades del SI fundamentales de metro, kilogramo y segundo, también se usan otras unidades, como milímetros y nanosegundos, donde los prefijos *mili-* y *nano-* denotan multiplicadores de las unidades básicas establecidas en varias potencias de diez. En la tabla 1.4 se citan los prefijos para las diversas potencias de diez y sus prefijos. Por ejemplo, 10^{-3} m es equivalente a 1 milímetro (mm), y 10^{3} m corresponde a 1 kilómetro (km). Del mismo modo, 1 kilogramo (kg) es 10^{3} gramos (g), y 1 megavolt (MV) es 10^{6} volts (V).

Las variables longitud, tiempo y masa son ejemplos de *cantidades fundamentales.* La mayoría de las otras variables son *cantidades derivadas*, aquellas expresadas como una combinación matemática de cantidades fundamentales. Ejemplos comunes son *área* (un producto de dos longitudes) y *rapidez* (una razón de una longitud a un intervalo de tiempo).

[2]El *periodo* se define como el intervalo de tiempo necesario para una vibración completa.

Reproducida con permiso del BIPM, que conserva plenamente protegido internacionalmente el copyright



a



AP Photo/Focke Strangmann

b

Figura 1.1 (a) El Kilogramo Estándar Nacional núm. 20, una copia exacta del Kilogramo Estándar Internacional que se conserva en Sèvres, Francia, se alberga bajo una doble campana en una bóveda en el Instituto Nacional de Estándares y Tecnología. (b) Un reloj atómico con fuente de cesio. El reloj no ganará ni perderá un segundo en 20 millones de años.

Tabla 1.4 Prefijos para potencias de diez

Potencia	Prefijo	Abreviatura	Potencia	Prefijo	Abreviatura
10^{-24}	yocto	y	10^{3}	kilo	k
10^{-21}	zepto	z	10^{6}	mega	M
10^{-18}	ato	a	10^{9}	giga	G
10^{-15}	femto	f	10^{12}	tera	T
10^{-12}	pico	p	10^{15}	peta	P
10^{-9}	nano	n	10^{18}	exa	E
10^{-6}	micro	μ	10^{21}	zeta	Z
10^{-3}	mili	m	10^{24}	iota	Y
10^{-2}	centi	c			
10^{-1}	deci	d			

Se proporciona una tabla de las letras en el alfabeto griego al final del libro.

Otro ejemplo de una cantidad deducida es la **densidad**. La densidad ρ (letra griega ro) de cualquier sustancia se define como su *masa por unidad de volumen*:

$$\rho \equiv \frac{m}{V} \tag{1.1}$$

En términos de cantidades fundamentales, la densidad es una razón de una masa a un producto de tres longitudes. Por ejemplo, el aluminio tiene una densidad de 2.70×10^3 kg/m^3, y el hierro tiene una densidad de 7.86×10^3 kg/m^3. Es factible pensar en una diferencia extrema en densidad al imaginar que sostiene un cubo de 10 centímetros (cm) de espuma de estireno en una mano y un cubo de 10 cm de plomo en la otra. Vea la tabla 14.1 del capítulo 14 para densidades de diferentes materiales.

Examen rápido 1.1 En un taller mecánico se producen dos levas, una de aluminio y la otra de hierro. Ambas levas tienen la misma masa. ¿Cuál leva es más larga? **(a)** La leva de aluminio es más larga. **(b)** La leva de hierro es más larga. **(c)** Ambas levas tienen el mismo tamaño.

1.2 Materia y construcción de modelos

Si los físicos no pueden interactuar directamente con algunos fenómenos, con frecuencia imaginan un **modelo** para un sistema físico que se relaciona con el fenómeno. Por ejemplo, no existe la capacidad para interactuar con los átomos, porque son demasiado pequeños. Por lo tanto, se construye un modelo mental de un átomo respecto a un sistema de un núcleo y uno o más electrones alrededor del núcleo. Una vez identificados los componentes físicos del modelo, se hacen pronósticos acerca de su comportamiento en función de las interacciones entre los componentes del sistema o la interacción entre el sistema y el ambiente externo al sistema.

Como ejemplo, considere el comportamiento de la *materia*. Un cubo de 1 kg de oro sólido, aparece en la parte superior de la figura 1.2. ¿Este cubo no es más que oro de pared a pared, sin espacio vacío? Si el cubo se corta por la mitad, las dos piezas todavía conservan su identidad química como oro sólido. ¿Y si las piezas se cortan de nuevo, una y otra vez, de manera indefinida? ¿Las partes más pequeñas siempre serán oro? Tales preguntas se pueden rastrear hasta los antiguos filósofos griegos. Dos de ellos, Leucipo y su discípulo Demócrito, no podían aceptar la idea de que tales cortes continuaran por siempre. Elaboraron un modelo para la materia al especular que el proceso a final de cuentas debe terminar cuando produzca una partícula que ya no se pueda cortar. En griego, *atomos* significa "sin corte". De este término griego proviene la palabra *átomo*.

El modelo griego de la estructura de la materia fue que toda la materia ordinaria consiste de átomos, como se sugiere en la mitad de la figura 1.2. Más allá de esto, ninguna estructura adicional se especificó en el modelo; los átomos eran pequeñas partículas que interactuaban unas con otras, pero la estructura interna del átomo no era parte del modelo.

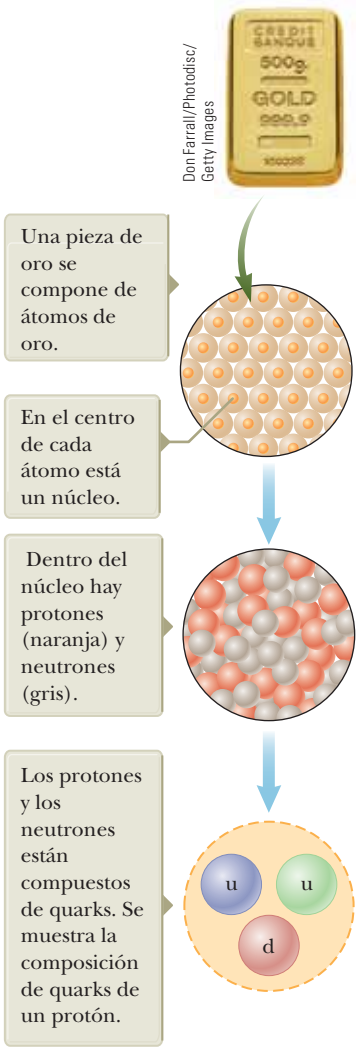


Figura 1.2 Niveles de organización en la materia.

En 1897, J. J. Thomson identificó al electrón como una partícula cargada y como un constituyente del átomo. Esto condujo al primer modelo atómico que contenía estructura interna. Este modelo se analizará en el capítulo 42.

Después del descubrimiento del núcleo en 1911, se elaboró un modelo atómico en el que cada átomo estaba constituido de electrones que rodean un núcleo central. En la figura 1.2 se muestra un núcleo de oro. Sin embargo, este modelo condujo a una nueva pregunta: ¿el núcleo tiene estructura? Esto es: ¿el núcleo es una sola partícula o una colección de partículas? A partir de 1930 evolucionó un modelo que describía dos entidades básicas en el núcleo: protones y neutrones. El protón porta una carga eléctrica positiva, y un elemento químico se identifica por el número de protones en su núcleo. Este número se llamó **número atómico** del elemento. Por ejemplo, el núcleo de un átomo de hidrógeno contiene un protón (de modo que el número atómico del hidrógeno es 1), el núcleo de un átomo de helio contiene dos protones (número atómico 2) y el núcleo de un átomo de uranio contiene 92 protones (número atómico 92). Además del número atómico, un segundo número, el **número de masa**, que se define como el número de protones más neutrones en un núcleo, caracteriza a los átomos. El número atómico de un elemento específico nunca varía (es decir, el número de protones no cambia) pero el número de masa sí varía (es decir, el número de neutrones cambia).

Sin embargo, ¿dónde se detiene el proceso de división? Ahora se sabe que protones, neutrones y un cúmulo de otras partículas exóticas están compuestas de seis diferentes variedades de partículas llamadas **quarks**, a las que se les ha dado los nombres de *arriba, abajo, extraño, encanto, fondo* y *cima*. Los quarks arriba, encanto y cima tienen cargas eléctricas de $+\frac{2}{3}$ del protón, mientras que los quarks abajo, extraño y fondo tienen cargas eléctricas de $-\frac{1}{3}$ del protón. El protón consiste de dos quarks arriba y un quark abajo, como se muestra en la parte inferior de la figura 1.2 y etiquetados u y d. Esta estructura predice la carga correcta para el protón. Del mismo modo, el neutrón consiste de dos quarks abajo y un quark arriba, lo que da una carga neta de cero.

Conforme estudie física, debe desarrollar un proceso de construcción de modelos. En este estudio se le retará con muchos problemas matemáticos. Una de las más importantes técnicas para la resolución de problemas es construir un modelo para el problema: identifique un sistema de componentes físicos para el problema y haga predicciones del comportamiento del sistema con base en las interacciones entre sus componentes o la interacción entre el sistema y su ambiente circundante.

1.3 Análisis dimensional

En Física la palabra *dimensión* denota la naturaleza física de una cantidad. La distancia entre dos puntos, por ejemplo, puede medirse en pies, metros o estadios, que son todas diferentes formas de expresar la dimensión de longitud.

Los símbolos que se usan en este libro para especificar las dimensiones de longitud, masa y tiempo son L, M y T, respectivamente.[3] Con frecuencia se usarán los corchetes [ ] para denotar las dimensiones de una cantidad física. Por ejemplo, el símbolo que se usa en este libro para rapidez es v, y en esta notación, las dimensiones de rapidez se escriben $[v] = \mathrm{L/T}$. Como otro ejemplo, las dimensiones del área A son $[A] = \mathrm{L}^2$. En la tabla 1.5 se mencionan las dimensiones y unidades de área, volumen,

Tabla 1.5 Dimensiones y unidades de cuatro cantidades derivadas

Cantidad	Área (A)	Volumen (V)	Rapidez (v)	Aceleración (a)
Dimensiones	L^2	L^3	L/T	$\mathrm{L/T}^2$
Unidades del SI	m^2	m^3	m/s	$\mathrm{m/s}^2$
Sistema usual U.S.	ft^2	ft^3	ft/s	$\mathrm{ft/s}^2$

[3]Las *dimensiones* de una cantidad se simbolizarán mediante letras mayúsculas no cursivas, como L o T. El *símbolo algebraico* para la cantidad en sí estará en cursiva, como L para la longitud de un objeto o t para tiempo.

rapidez y aceleración. Las dimensiones de otras cantidades, como fuerza y energía, se describirán conforme se introduzcan en el texto.

En muchas situaciones es posible que deba verificar una ecuación específica, para ver si satisface sus expectativas. Un procedimiento útil y poderoso llamado **análisis dimensional** ayuda para esta comprobación porque las dimensiones son tratadas como cantidades algebraicas. Por ejemplo, las cantidades se suman o restan sólo si tienen las mismas dimensiones. Además, los términos en ambos lados de una ecuación deben tener las mismas dimensiones. Al seguir estas simples reglas le será posible usar el análisis dimensional para determinar si una expresión tiene la forma correcta. Cualquier correspondencia es correcta sólo si las dimensiones en ambos lados de la ecuación son las mismas.

Para ilustrar este procedimiento, suponga que está interesado en una ecuación para la posición x de un automóvil en un tiempo t si el automóvil parte del reposo en $x = 0$ y se mueve con aceleración constante a. La expresión correcta para esta situación es $x = \frac{1}{2}at^2$ como se muestra en el capítulo 2. La cantidad x en el lado izquierdo tiene la dimensión de longitud. Para que la ecuación sea correcta en términos dimensionales, la cantidad en el lado derecho también debe tener la dimensión de longitud. Es posible realizar una verificación dimensional al sustituir las dimensiones para aceleración, L/T^2 (tabla 1.5), y tiempo, T, en la ecuación. Esto es, la forma dimensional de la ecuación $x = \frac{1}{2}at^2$ es

$$L = \frac{L}{T^2} \cdot T^2 = L$$

Las dimensiones de tiempo se cancelan, como se muestra, lo que deja a la dimensión de longitud en el lado derecho para igualar con la de la izquierda.

Un procedimiento más general de análisis dimensional es establecer una expresión de la forma

$$x \propto a^n t^m$$

donde n y m son exponentes que se deben determinar y el símbolo $\propto$ indica una proporcionalidad. Esta correspondencia es correcta sólo si las dimensiones de ambos lados son las mismas. Puesto que la dimensión del lado izquierdo es longitud, la dimensión del lado derecho también debe ser longitud. Esto es,

$$[a^n t^m] = L = L^1T^0$$

Puesto que las dimensiones de la aceleración son L/T^2 y la dimensión de tiempo es T:, tenemos

$$(L/T^2)^n T^m = L^1T^0 \quad \rightarrow \quad (L^n T^{m-2n}) = L^1T^0$$

Los exponentes de L y T deben ser los mismos en ambos lados de la ecuación. A partir de los exponentes de L, se ve de inmediato que $n = 1$. De los exponentes de T, $m - 2n = 0$, lo que, una vez que se sustituye para n, produce $m = 2$. Al regresar a la expresión original $x \propto a^n t^m$, se concluye que $x \propto at^2$.

Examen rápido 1.2 Verdadero o falso: el análisis dimensional puede proporcionar el valor numérico de constantes de proporcionalidad que aparecen en una expresión algebraica.

Prevención de riesgos ocultos 1.2

Símbolos para cantidades Algunas cantidades tienen un pequeño número de símbolos que las representan. Por ejemplo, el símbolo para tiempo casi siempre es t. Otras cantidades tienen varios símbolos que se aplican según el uso. La longitud se describe con símbolos tales como x, y y z (para posición); r (para radio); a, b y c (para los lados de un triángulo rectángulo); l (para la longitud de un objeto); d (para una distancia); h (para una altura), y así por el estilo.

Ejemplo 1.1 Análisis de una ecuación

Demuestre que la expresión $v = at$ es dimensionalmente correcta, donde v representa rapidez, a aceleración y t un instante de tiempo.

SOLUCIÓN

Identifique las dimensiones de v en la tabla 1.5: $[v] = \frac{L}{T}$

1.1 continuación

Encuentre las dimensiones de a en la tabla 1.5 y multiplique por las dimensiones de t:

$$[at] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\,\mathrm{T} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}$$

Por lo tanto, $v = at$ es dimensionalmente correcta porque se tienen las mismas dimensiones en ambos lados. (Si la expresión se hubiese dado como $v = at^2$, sería dimensionalmente *incorrecta*. ¡Inténtelo y verá!)

Ejemplo 1.2 Análisis de una ley de potencias

Suponga que la aceleración a de una partícula que se mueve con rapidez uniforme v en un círculo de radio r es proporcional a alguna potencia de r, por decir r^n, y alguna potencia de v, digamos v^m. Determine los valores de n y m y escriba la forma más simple de una ecuación para la aceleración.

SOLUCIÓN

Escriba una expresión para a con una constante adimensional de proporcionalidad k:

$$a = kr^n v^m$$

Sustituya las dimensiones de a, r y v:

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2} = \mathrm{L}^n \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right)^m = \frac{\mathrm{L}^{n+m}}{\mathrm{T}^m}$$

Iguale los exponentes de L y T de modo que la ecuación dimensional se balancee:

$$n + m = 1 \text{ y } m = 2$$

Resuelva las dos ecuaciones para n:

$$n = -1$$

Escriba la expresión de aceleración:

$$a = kr^{-1} v^2 = k\frac{v^2}{r}$$

En la sección 4.4 acerca del movimiento circular uniforme, se muestra que $k = 1$ si se usa un conjunto consistente de unidades. La constante k no sería igual a 1 si, por ejemplo, v estuviese en km/h y usted quisiera a en m/s^2.

1.4 Conversión de unidades

A veces debe convertir unidades de un sistema de medición a otro o convertir dentro de un sistema (por ejemplo, de kilómetros a metros). Las igualdades entre unidades de longitud del SI y las usuales U.S. son las siguientes:

1 milla = 1 609 m = 1.609 km 1 ft = 0.304 8 m = 30.48 cm
1 m = 39.37 pulg = 3.281 ft 1 pulg = 0.025 4 m = 2.54 cm (exactamente)

En el apéndice A se encuentra una lista más completa de factores de conversión.

Como las dimensiones, las unidades se manipulan como cantidades algebraicas que se cancelan mutuamente. Por ejemplo, suponga que desea convertir 15.0 pulg a centímetros. Puesto que 1 pulg se define exactamente como 2.54 cm, se encuentra que

$$15.0 \text{ pulg} = (15.0 \text{ pulg})\left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ pulg}}\right) = 38.1 \text{ cm}$$

donde el cociente entre paréntesis es igual a 1. Se expresa 1 como 2.54 cm/1 pulg (en lugar de 1 pulg/2.54 cm) para que la unidad "pulgada" en el denominador se cancele con la unidad en la cantidad original. La unidad restante es el centímetro, el resultado deseado.

Prevención de riesgos ocultos 1.3

Siempre incluya unidades Cuando realice cálculos, incluya las unidades para toda cantidad y lleve las unidades a través de todo el cálculo. Evite la tentación de quitar pronto las unidades y luego poner las unidades esperadas una vez que tiene una respuesta. Al incluir las unidades en cada paso, detecte errores si las unidades para la respuesta evidencian ser incorrectas.

Examen rápido 1.3 La distancia entre dos ciudades es de 100 mi. ¿Cuál es el número de kilómetros entre las dos ciudades? **(a)** Menor que 100, **(b)** mayor que 100, **(c)** igual a 100.

Ejemplo 1.3 ¿Está acelerando?

En una autopista interestatal en una región rural de Wyoming, un automóvil viaja con una rapidez de 38.0 m/s. ¿El conductor rebasó el límite de rapidez de 75.0 mi/h?

SOLUCIÓN

De la rapidez en m/s convierta metros en millas:

$$(38.0\ \cancel{\text{m}}/\text{s})\left(\frac{1\ \text{mi}}{1\ 609\ \cancel{\text{m}}}\right) = 2.36 \times 10^{-2}\ \text{mi/s}$$

Convierta segundos a horas:

$$(2.36 \times 10^{-2}\ \text{mi}/\cancel{\text{s}})\left(\frac{60\ \cancel{\text{s}}}{1\ \cancel{\text{min}}}\right)\left(\frac{60\ \cancel{\text{min}}}{1\ \text{h}}\right) = 85.0\ \text{mi/h}$$

En efecto, el conductor rebasó el límite de rapidez y debe reducirla.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el conductor viniese de fuera de Estados Unidos y estuviese familiarizado con magnitudes de velocidad medidas en km/h? ¿Cuál es la rapidez del automóvil en km/h?

Respuesta Se puede convertir la respuesta final a las unidades adecuadas:

$$(85.0\ \cancel{\text{mi}}/\text{h})\left(\frac{1.609\ \text{km}}{1\ \cancel{\text{mi}}}\right) = 137\ \text{km/h}$$

La figura 1.3 muestra un indicador de velocidad de un automóvil que muestra magnitudes de velocidad tanto en mi/h como en km/h. ¿Le es posible verificar la conversión que acaba de realizar con esta fotografía?



© Cengage Learning/Ed Dodd

Figura 1.3 Indicador de velocidad de un vehículo que muestra magnitudes de velocidad tanto en millas por hora como en kilómetros por hora.

1.5 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud

Suponga que alguien le pregunta el número de bits de datos en un disco compacto musical común. Su respuesta, que por lo general no se espera que proporcione el número exacto, sino más bien una estimación, se debe expresar como notación científica. El *orden de magnitud* de un número se determina del modo siguiente:

1. Exprese el número en notación científica con el multiplicador de la potencia de diez entre 1 y 10 y una unidad.
2. Si el multiplicador es menor que 3.162 (la raíz cuadrada de diez), el orden de magnitud del número es la potencia de diez en la notación científica. Si el multiplicador es mayor que 3.162, el orden de magnitud es uno más grande que la potencia de diez en la notación científica.

Se usa el símbolo ~ para "es del orden de". Use el procedimiento anterior para verificar los órdenes de magnitud para las siguientes longitudes:

$$0.008\ 6\ \text{m} \sim 10^{-2}\ \text{m} \qquad 0.002\ 1\ \text{m} \sim 10^{-3}\ \text{m} \qquad 720\ \text{m} \sim 10^{3}\ \text{m}$$

Por lo general, cuando se hace una estimación del orden de magnitud, los resultados son confiables hasta dentro de un factor aproximado de 10. Si una cantidad aumenta en valor por tres órdenes de magnitud, su valor aumenta por un factor de aproximadamente $10^3 = 1\,000$.

Las imprecisiones provocadas por suponer muy poco para un número, con frecuencia se cancelan por otras suposiciones que son muy altas. Encontrará que, con práctica, sus estimaciones se vuelven cada vez mejores. Los problemas de estimación pueden ser divertidos de trabajar porque usted escoge con libertad los dígitos, aventura aproximaciones razonables para números desconocidos, hace suposiciones simplificadoras y convierte la pregunta en algo factible de responder, en su cabeza o con una mínima manipulación matemática en el papel. Debido a la simplicidad de este tipo de cálculos, se realizan en un *pequeño* trozo de papel y con frecuencia se llaman "cálculos de servilleta".

Ejemplo 1.4 Respiraciones en una vida

Estime el número de respiraciones realizadas durante una vida humana promedio.

SOLUCIÓN

Comience por estimar que la vida humana promedio es de alrededor de 70 años. Piense acerca del número promedio de respiraciones que una persona realiza en 1 min. Este número varía dependiendo de si la persona se ejercita, duerme, está enojada, serena y cosas por el estilo. Al orden de magnitud más cercano, debe elegir 10 respiraciones por minuto como estimación. (Es cierto que dicha estimación está más cerca del valor promedio verdadero que 1 respiración por minuto o 100 respiraciones por minuto.)

Encuentre el número aproximado de minutos en un año

$$1\ \cancel{\text{año}}\left(\frac{400\ \cancel{\text{días}}}{1\ \cancel{\text{año}}}\right)\left(\frac{25\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}}\right)\left(\frac{60\ \text{min}}{1\ \cancel{\text{h}}}\right) = 6 \times 10^5\ \text{min}$$

Halle el número aproximado de minutos en una vida de 70 años:

$$\text{número de minutos} = (70\ \text{años})(6 \times 10^5\ \text{min/año}) = 4 \times 10^7\ \text{min}$$

Encuentre el número aproximado de respiraciones en una vida:

$$\text{número de respiraciones} = (10\ \text{respiraciones/min})(4 \times 10^7\ \text{min}) = 4 \times 10^8\ \text{respiraciones}$$

Por lo tanto, una persona toma en el orden de 10^9 respiraciones en una vida. Advierta cuánto más simple fue, en el primer cálculo, multiplicar 400×25 que trabajar con el más preciso 365×24.

¿QUÉ PASARÍA SI? Y si la vida promedio se estimase como 80 años en lugar de 70? ¿Esto cambiaría la estimación final?

Respuesta Se podría afirmar que $(80\ \text{años})(6 \times 10^5\ \text{min/año}) = 5 \times 10^7\ \text{min}$, de modo que la estimación final debería ser 5×10^8 respiraciones. Esta respuesta todavía está en el orden de 109 respiraciones, de modo que una estimación del orden de magnitud no cambiaría.

1.6 Cifras significativas

Cuando se miden ciertas cantidades, los valores medidos se conocen sólo dentro de los límites de la incertidumbre experimental. El valor de esta incertidumbre depende de varios factores, como la calidad del aparato, la habilidad del experimentador y el número de mediciones realizadas. El número de **cifras significativas** en una medición sirve para expresar algo acerca de la incertidumbre. El número de cifras significativas se relaciona con el número de dígitos numéricos utilizados para expresar la medición, como se analiza a continuación.

Como ejemplo de cifras significativas, suponga que se le pide medir el área de un disco compacto usando una regleta como instrumento de medición. Suponga que la precisión a la que puede medir el radio del disco es ± 0.1 cm. Debido a la incertidumbre de ± 0.1 cm, si el radio mide 6.0 cm, sólo es posible afirmar que su radio se encuentra en algún lugar entre 5.9 y 6.1 cm. En este caso, el valor medido de 6.0 cm tiene dos cifras

significativas. Note que *las cifras significativas incluyen el primer dígito estimado.* Por lo tanto, el radio se podría escribir como (6.0 ± 0.1) cm.

Los ceros pueden o no ser cifras significativas. Los que se usan para la posición del punto decimal en números como 0.03 y 0.007 5 no son significativos. Debido a eso, existen una y dos cifras significativas, respectivamente, en estos dos valores. Sin embargo, cuando los ceros vienen después de otros dígitos, existe la posibilidad de malas interpretaciones. Por ejemplo, suponga que la masa de un objeto está dada como 1 500 g. Este valor es ambiguo porque no se sabe si los últimos dos ceros se usan para ubicar el punto decimal o si representan cifras significativas en la medición. Para eliminar dicha ambigüedad, es común usar notación científica para indicar el número de cifras significativas. En este caso, la masa se expresaría como 1.5×10^3 g si hubiese dos cifras significativas en el valor observado, 1.50×10^3 g si hubiese tres cifras significativas y 1.500×10^3 g si hubiese cuatro. La misma regla se sostiene para números menores que 1, de modo que 2.3×10^{-4} tiene dos cifras significativas (y por lo tanto se podría escribir 0.000 23) y 2.30×10^{-4} tiene tres cifras significativas (también se escribe 0.000 230) y 2.30×10^{-4} tiene tres cifras significativas (que también se escribe como 0.000 230).

En la resolución de problemas, con frecuencia combinamos cantidades matemáticamente a través de la multiplicación, división, suma, resta, etc. Al hacer esto, usted debe asegurarse de que el resultado tiene el número adecuado de cifras significativas. Una buena regla general para su uso en la determinación del número de cifras significativas que se pueden afirmar en una multiplicación o una división es la siguiente:

> Cuando se multiplican muchas cantidades, el número de cifras significativas en la respuesta final es el mismo que el número de cifras significativas en la cantidad que tiene el número más pequeño de cifras significativas. La misma regla aplica para la división.

Ahora apliquemos esta regla para encontrar el área del disco compacto cuyo radio medimos antes. Usando la ecuación para el área de un círculo,

$$A = \pi r^2 = \pi(6.0 \text{ cm})^2 = 1.1 \times 10^2 \text{ cm}^2$$

Si realiza este cálculo en su calculadora, es probable que vea 113.097 335 5. Debe quedar claro que no quiere conservar todas estas cifras, pero puede tener la tentación de presentar el resultado como 113 cm^2. Este resultado no se justifica, ya que cuenta con tres cifras significativas, mientras que el radio sólo tiene dos. Por lo tanto, tenemos que presentar el resultado con sólo dos cifras significativas, como se muestra arriba.

Prevención de riesgos ocultos 1.4

Lea con cuidado Observe que la regla para suma y resta es diferente de la regla de multiplicación y división. Para suma y resta, la consideración relevante es el número de *lugares decimales*, no el número de *cifras significativas*.

Para suma y resta debe considerar el número de lugares decimales cuando determine cuántas cifras significativas ha de reportar:

> Cuando los números se sumen o resten, el número de lugares decimales en el resultado debe ser igual al número más pequeño de lugares decimales de cualquier término en la suma o resta.

Como un ejemplo de esta regla, considere la suma

$$23.2 + 5.174 = 28.4$$

Observe que no presentamos la respuesta como 28.374, ya que el número más pequeño de lugares decimales es uno para 23.2. Por lo tanto, nuestra respuesta debe tener sólo un lugar decimal.

La regla de la suma y resta a menudo puede dar lugar a respuestas que tienen diferente número de cifras significativas que las cantidades con las que empezó. Por ejemplo, considere las siguientes operaciones que cumplen con la regla:

$$1.000\ 1 + 0.000\ 3 = 1.000\ 4$$
$$1.002 - 0.998 = 0.004$$

En el primer ejemplo, el resultado tiene cinco cifras significativas a pesar de que uno de los términos, 0.000 3, sólo tiene una cifra significativa. Del mismo modo, en el segundo cálculo el resultado sólo tiene una cifra significativa a pesar de que los números a restar tienen cuatro y tres, respectivamente.

En este libro la mayoría de los ejemplos numéricos y problemas de fin de capítulo producirán respuestas que tienen tres cifras significativas. Cuando se realicen cálculos del orden de magnitud, por lo general se trabajará con una sola cifra significativa.

Si se debe reducir el número de cifras significativas en el resultado de un cálculo, hay una regla general para redondear números: el último dígito retenido se aumenta en 1 si el último dígito eliminado es mayor que 5. (Por ejemplo, 1.346 será 1.35.) Si el último dígito eliminado es menor que 5, el último dígito permanece como está. (Por ejemplo, 1.343 será 1.34.) Si el último dígito eliminado es igual a 5, el dígito restante debe redondearse al número par más cercano. (Esta regla ayuda a evitar acumulación de errores en procesos aritméticos largos.)

Una técnica para evitar la acumulación de error es demorar el redondeo de números en un cálculo largo hasta que tenga el resultado final. Espere a estar listo para copiar la respuesta final de su calculadora antes de redondear al número correcto de cifras significativas. En este libro se presentan los valores numéricos redondeados a dos o tres cifras significativas. Esto ocasionalmente hace que algunas manipulaciones matemáticas parezcan extrañas o incorrectas. Por ejemplo, revisemos el ejemplo 3.5 en la página 69, veremos la operación $-17.7\ \text{km} + 34.6\ \text{km} = 17.0\ \text{km}$. Esto parece una resta incorrecta, pero eso es sólo porque hemos redondeado los números de 17.7 km y 34.6 km para presentarlos. Si todos los dígitos en estos dos números intermedios se conservan y el redondeo sólo se realiza en el número final, se obtiene el resultado correcto de 17.0 km de tres dígitos.

Prevención de riesgos ocultos 1.5

Soluciones simbólicas Al resolver problemas, es muy útil realizar la solución completamente en forma algebraica y esperar hasta el final para introducir valores numéricos en la expresión simbólica final. Este método le ahorrará teclear mucho en su calculadora, especialmente si algunas cantidades se cancelan, ¡así nunca tendrá que introducir esos valores en su calculadora! Además, sólo tendrá que redondear una vez, en el resultado final.

Ejemplo 1.5 Instalación de una alfombra

En una habitación de 12.71 m de largo y 3.46 m de ancho se instalará una alfombra. Encuentre el área de la habitación.

SOLUCIÓN

Si multiplica 12.71 m por 3.46 m en su calculadora, verá una respuesta de 43.976 6 m^2. ¿Cuántos de estos números debe presentar? La regla empírica para multiplicación dice que presente en su respuesta sólo el número de cifras significativas que estén presentes en la cantidad medida que tenga el número más bajo de cifras significativas. En este ejemplo, el número más bajo de cifras significativas es tres en 3.46 m, así que debe expresar la respuesta final como 44.0 m^2.

Resumen

Definiciones

Las tres cantidades físicas fundamentales de la mecánica son **longitud**, **masa** y **tiempo**, que en el SI tienen las unidades **metro** (m), **kilogramo** (kg) y **segundo** (s). Estas cantidades fundamentales no es posible definirlas en términos de cantidades más básicas.

La **densidad** de una sustancia se define como su *masa por cada unidad de volumen:*

$$\rho \equiv \frac{m}{V} \tag{1.1}$$

continúa

Conceptos y principios

El método de **análisis dimensional** es muy valioso para resolver problemas de física. Las dimensiones son tratadas como cantidades algebraicas. Al realizar estimaciones y cálculos de orden de magnitud, debe ser capaz de aproximar la respuesta a un problema cuando no haya suficiente información disponible para especificar completamente una solución exacta.

Cuando calcule un resultado a partir de varios números medidos, donde cada uno tiene cierta precisión, debe dar el resultado con el número correcto de **cifras significativas**.

Cuando **multiplique** varias cantidades, el número de cifras significativas en la respuesta final es el mismo que el número de cifras significativas en la cantidad que tiene el número más pequeño de cifras significativas. La misma regla se aplica a la **división**.

Cuando se **suman** o **restan** números, el número de lugares decimales en el resultado debe ser igual al número más pequeño de lugares decimales de cualquier término en la suma o resta.

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Un estudiante usa una regleta para medir el grosor de un libro de texto y encuentra que es de 4.3 cm ± 0.1 cm. Otros estudiantes miden el grosor con calibradores vernier y obtienen (a) 4.32 cm ± 0.01 cm, (b) 4.31 cm ± 0.01 cm, (c) 4.24 cm ± 0.01 cm y (d) 4.43 cm ± 0.01 cm. ¿Cuál de estas cuatro mediciones, si hay alguna, concuerda con la obtenida por el primer estudiante?

2. Una casa se anunciaba con 1 420 metros cuadrados bajo su techo. ¿Cuál es el área en metros cuadrados? (a) 4 660 m^2 (b) 432 m^2 (c) 158 m^2 (d) 132 m^2 (e) 40.2 m^2.

3. Responda cada pregunta con sí o no. Dos cantidades deben tener las mismas dimensiones (a) ¿si las suma?, (b) ¿si las multiplica?, (c) ¿si las resta?, (d) ¿si las divide?, (e) ¿si las iguala?

4. El precio de la gasolina en una estación es de 1.5 euros por litro. Una estudiante usa 33 euros para comprar gasolina. Si sabe que 4 cuartos hacen un galón y que 1 litro es casi 1 cuarto, de inmediato razona que puede comprar (a) menos de 1 galón de gasolina, (b) aproximadamente 5 galones de gasolina, (c) cerca de 8 galones de gasolina, (d) más de 10 galones de gasolina.

5. Ordene las siguientes cinco cantidades de la más grande a la más pequeña. Si dos de las masas son iguales, deles igual lugar en su lista. (a) 0.032 kg, (b) 15 g, (c) 2.7×10^5 mg, (d) 4.1×10^{-8} Gg, (e) 2.7×10^8 μg.

6. ¿Cuál es la suma de los valores medidos 21.4 s + 15 s + 17.17 s + 4.00 3 s? (a) 57.573 s (b) 57.57 s (c) 57.6 s (d) 58 s (e) 60 s

7. ¿Cuál de las siguientes es la mejor estimación para la masa de todas las personas que viven en la Tierra? (a) 2×10^8 kg (b) 1×10^9 kg (c) 2×10^{10} kg (d) 3×10^{11} kg (e) 4×10^{12} kg

8. (a) Si una ecuación es dimensionalmente correcta, ¿esto significa que la ecuación debe ser verdadera? (b) Si una ecuación no es dimensionalmente correcta, ¿esto significa que la ecuación no puede ser verdadera?

9. La segunda ley de Newton de movimiento (capítulo 5) dice que la masa de un objeto por su aceleración es igual a la fuerza neta sobre el objeto. ¿Cuál de las siguientes da las unidades correctas para la fuerza? (a) kg · m/s^2, (b) kg · m^2/s^2, (c) kg/m · s^2, (d) kg · m^2/s, (e) ninguna de las respuestas

10. Una calculadora despliega un resultado como 1.365 248 0 $\times 10^7$ kg. La incertidumbre estimada en el resultado es ±2%. ¿Cuántos dígitos debe incluir como significativos cuando escriba el resultado? Elija una: (a) cero, (b) uno, (c) dos, (d) tres, (e) cuatro.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Suponga que los tres estándares fundamentales del sistema métrico fuesen longitud, *densidad* y tiempo en lugar de longitud, *masa* y tiempo. El estándar de densidad en este sistema se debe definir como el propio del agua. ¿Qué consideraciones acerca del agua necesitaría abordar para asegurar que el estándar de densidad es tan preciso como sea posible?

2. ¿Por qué el sistema métrico de unidades se considera superior a la mayoría de los otros sistemas de unidades?

3. ¿Qué fenómenos naturales podrían servir de patrones alternativos de tiempo?

4. Exprese las siguientes cantidades usando los prefijos dados en la tabla 1.4: (a) 3×10^{-4} m (b) 5×10^{-5} s (c) 72 $\times 10^2$ g

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 1.1 Estándares de longitud, masa y tiempo

Nota: Consulte la parte final de este libro, apéndices y tablas del texto siempre que sea necesario para resolver los problemas. Para este capítulo, la tabla 14.1 y el apéndice B.3 pueden ser particularmente útiles. Las respuestas a los problemas impares se presentan en la parte final del libro.

1. (a) Use la información que aparece al final de este libro para calcular la densidad promedio de la Tierra. (b) ¿Dónde encaja el valor entre los que se mencionan en la tabla 14.1 en el capítulo 14? Busque la densidad de una roca superficial típica, como el granito, en otra fuente y compare la densidad de la Tierra con ella.

2. El kilogramo estándar (figura 1.1a) es un cilindro de platino–iridio de 39.0 mm de alto y 39.0 mm de diámetro. ¿Cuál es la densidad del material?

3. Una importante compañía automotriz muestra un molde de su primer automóvil, hecho con 9.35 kg de hierro. Para celebrar sus 100 años en el negocio, un trabajador fundirá el molde en oro a partir del original. ¿Qué masa de oro se necesita para hacer el nuevo modelo?

4. Un protón, que es el núcleo de un átomo de hidrógeno, se representa como una esfera con un diámetro de 2.4 fm y una masa de 1.67×10^{-27}kg. (a) Determine la densidad del protón. (b) Establezca cómo se compara su respuesta del inciso (a) con la densidad del osmio, que está dada en la tabla 14.1 en el capítulo 14.

5. De cierta roca uniforme son cortadas dos esferas. Una tiene 4.50 cm de radio. La masa de la segunda esfera es cinco veces mayor. Encuentre el radio de la segunda esfera.

6. ¿Qué masa se requiere de un material con densidad ρ para hacer un cascarón esférico hueco que tiene radio interior r_1 y radio exterior r_2?

Sección 1.2 Materia y construcción de modelos

7. Un sólido cristalino consiste de átomos apilados en una estructura reticular repetitiva. Considere un cristal como el que se muestra en la figura P1.7a. Los átomos residen en las esquinas de cubos de lado $L = 0.200$ nm. Una pieza de evidencia para el ordenamiento regular de átomos proviene de las superficies planas a lo largo de las cuales se separa un cristal, o fractura, cuando se rompe. Suponga que este cristal se fractura a lo largo de una cara diagonal, como se muestra en la figura P1.7b. Calcule el espaciamiento d entre dos planos atómicos adyacentes que se separan cuando el cristal se fractura.

8. La masa de un átomo de cobre es 1.06×10^{-25} kg, y la densidad del cobre es de 8 920 kg/m^3. (a) Determine el número de átomos en 1 cm^3 de cobre. (b) Imagine un centímetro cúbico como formado por el apilamiento de cubos idénticos, con un átomo de cobre en el centro de cada uno. Determine el volumen de cada cubo. (c) Encuentre la dimensión de la arista de cada cubo, que representa una estimación de la distancia entre los átomos.

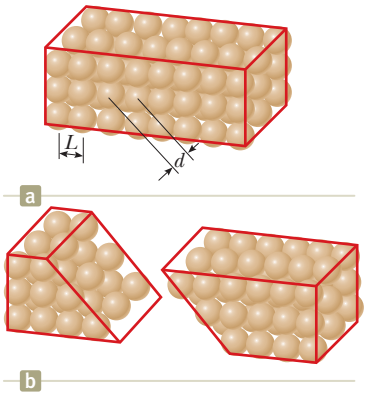


Figura P1.7

Sección 1.3 Análisis dimensional

9. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son dimensionalmente correctas? (a) $v_f = v_i + ax$ (b) $y = (2\text{ m})\cos(kx)$, donde $k = 2\text{ m}^{-1}$

10. La figura P1.10 muestra *un cono truncado*. Relacione cada una de las siguientes expresiones

(a) $\pi(r_1 + r_2)[h^2 + (r_2 - r_1)^2]^{1/2}$,
(b) $2\pi(r_1 + r_2)$, y
(c) $\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)/3$

con la cantidad que describe, (d) la circunferencia total de las caras circulares planas, (e) el volumen o (f) el área de la superficie curva?

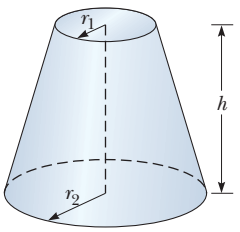


Figura P1.10

11. La energía cinética K (capítulo 7) tiene dimensiones kg $\times$ m^2/s^2. Se puede escribir en términos de la cantidad de movimiento p (capítulo 9) y la masa m como

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

(a) Determine las unidades adecuadas para la cantidad de movimiento utilizando análisis dimensional. (b) La unidad de la fuerza es el newton (N), donde 1 N = 1 kg × m/s^2. ¿Cuáles son las unidades de la cantidad de movimiento p en términos de 1 newton y otra unidad fundamental del SI?

12. La ley de la gravitación universal de Newton se representa por

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

donde F es la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por un pequeño objeto sobre otro, M y m son las masas de los objetos, y r es una distancia. La fuerza tiene las unidades SI kg · m/s^2. ¿Cuáles son las unidades del SI de la constante de proporcionalidad G?

13. La posición de una partícula que se mueve con aceleración uniforme es una función del tiempo y de la aceleración. Supongamos que escribimos esta posición $x = ka^m t^n$, donde k es una constante adimensional. Demuestre usando análisis dimensional que esta expresión se satisface si $m = 1$ y $n = 2$. ¿Puede este análisis dar el valor de k?

14. (a) Suponga que la ecuación $x = At^3 + Bt$ describe el movimiento de un objeto en particular, siendo x la dimensión de la longitud y T la dimensión del tiempo. Determine las dimensiones de las constantes A y B. (b) Determine las dimensiones de la derivada $dx/dt = 3At^2 + B$.

Sección 1.4 Conversión de unidades

15. Una pieza sólida de plomo tiene una masa de 23.94 g y un volumen de 2.10 cm^3. A partir de estos datos, calcule la densidad del plomo en unidades SI (kg/m^3).

16. Un cargador de mineral mueve 1 200 ton/h de una mina a la superficie. Convierta esta tasa a libras por segundo, considere que 1 ton = 2 000 lb.

17. El terreno de un edificio rectangular tiene un ancho de 75.0 ft y largo de 125 ft. Determine el área de este lote en metros cuadrados.

18. Suponga que su cabello crece a una proporción de 1/32 pulgada por cada día. Encuentre la tasa a la que crece en nanómetros por segundo. Dado que la distancia entre átomos en una molécula es del orden de 0.1 nm, su respuesta sugiere cuán rápidamente se ensamblan las capas de átomos en esta síntesis de proteínas.

19. *¿Por qué no es posible la siguiente situación?* El dormitorio de un estudiante mide 3.8 m por 3.6 m, y su techo tiene 2.5 m de altura. Después que el estudiante complete su curso de física mostrará su dedicación empapelando por completo las paredes de la habitación con las páginas de su copia del volumen 1 (capítulos del 1 al 22) de este libro de texto. Él incluso cubrirá la puerta y la ventana.

20. Una pirámide tiene una altura de 481 ft y su base cubre un área de 13.0 acres (figura P1.20). El volumen de una pirámide está dado por la expresión $V = \frac{1}{3}Bh$, donde B es el área de la base y h es la altura. Encuentre el volumen de esta pirámide en metros cúbicos. (1 acre = 43 560 ft^2.)

21. La pirámide descrita en el problema 20 contiene aproximadamente 2 millones de bloques de piedra que en promedio pesan 2.50 toneladas cada uno. Encuentre el peso de esta pirámide en libras.



Adam Sylvester/Photo Researchers, Inc.

Figura P1.20 Problemas 20 y 21.

22. Suponga que llenar un tanque de gasolina de 30.0 galones tarda 7.00 min. (a) Calcule la rapidez a la cual el tanque se llena en galones por segundo. (b) Calcule la rapidez a la cual el tanque se llena en metros cúbicos por segundo. (c) Determine el intervalo, en horas, que se requiere para llenar un volumen de 1.00 m^3 a la misma rapidez (1 galón = 231 pulg^3).

23. Un *terreno* tiene un área de 1 mi^2 y contiene 640 acres. Determine el número de metros cuadrados en 1 acre.

24. Una casa tiene 50.0 pies de largo y 26 pies de ancho, y techos a una altura de 8.0 pies. ¿Cuál es el volumen del interior de la casa en metros cúbicos y en centímetros cúbicos?

25. Un metro cúbico (1.00 m^3) de aluminio tiene una masa de 2.70 × 10^3 kg, y el mismo volumen de hierro tiene una masa de 7.86 × 10^3 kg. Encuentre el radio de una esfera de aluminio sólida que equilibraría una esfera de hierro sólida de 2.00 cm de radio sobre una balanza de brazos iguales.

26. Sea ρ_{Al} la densidad del aluminio y ρ_{Fe} la del hierro. Encuentre el radio de una esfera de aluminio sólida que equilibra una esfera de hierro sólida de radio r_{Fe} sobre una balanza de brazos iguales.

27. Un galón de pintura (volumen= 3.78 × 10^{-3} m^3) cubre un área de 25.0 m^2. ¿Cuál es el grosor de la pintura fresca sobre la pared?

28. Un auditorio mide 40.0 m × 20.0 m × 12.0 m. La densidad del aire es 1.20 kg/m^3. ¿Cuáles son (a) el volumen de la habitación en pies cúbicos y (b) el peso en libras del aire en la habitación?

29. (a) Cuando se imprimió este libro, la deuda nacional estadounidense era de aproximadamente $16 billones. Si se hicieran pagos con una tasa de $1 000 por segundo, ¿cuántos años tardaría en ser pagada la deuda, si supone que no se cargan intereses? (b) Un billete de dólar mide aproximadamente 15.5 cm de largo. ¿Con cuántos billetes de dólar puestos extremo con extremo se alcanzaría la Luna? Al final del libro se da la distancia Tierra-Luna, *Nota:* antes de hacer algún cálculo, intente adivinar las respuestas. Se sorprenderá.

30. Un átomo de hidrógeno tiene un diámetro de 1.06 × 10^{-10} m. El núcleo del átomo de hidrógeno tiene un diámetro de aproximadamente 2.40 × 10^{-15} m. (a) Para un modelo a escala, represente el diámetro del átomo de hidrógeno por la longitud de un campo de futbol americano (100 yardas = 300 ft) y determine el diámetro del núcleo en milímetros. (b) Encuentre la razón del volumen del átomo de hidrógeno al volumen de su núcleo.

Sección 1.5 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud

Nota: En las soluciones a los problemas 31 a 34, indique las cantidades que midió o estimó y los valores que tomó para cada una de ellas.

31. Encuentre el orden de magnitud del número de pelotas de tenis de mesa que entrarían en una habitación de tamaño típico (sin estrujarse).

32. (a) Calcule el orden de magnitud de la masa de una bañera medio llena de agua. (b) Calcule el orden de magnitud de la masa de una bañera medio llena de monedas de cobre.

33. En un orden de magnitud, ¿cuántos afinadores de piano residen en la ciudad de Nueva York? El físico Enrico Fermi fue famoso por plantear preguntas como ésta en los exámenes orales para calificar candidatos a doctorado.

34. Una llanta de automóvil tiene una duración de 50 000 millas. Con un orden de magnitud, ¿cuántas revoluciones girará durante su vida útil?

Sección 1.6 Cifras significativas

Nota: El apéndice B.8, que trata acerca de la propagación de incertidumbre, es útil para resolver los problemas de esta sección.

35. Una placa rectangular tiene un largo de (21.3 ± 0.2) cm y un ancho de (9.8 ± 0.1) cm. Calcule el área de la placa, incluida su incertidumbre.

36. ¿Cuántas cifras significativas hay en los siguientes números: (a) 78.9 ± 0.2 (b) 3.788×10^9 (c) 2.46×10^{-6} (d) 0.005 3?

37. El *año tropical*, el intervalo desde un equinoccio de primavera hasta el siguiente equinoccio de primavera, es la base para el calendario. Contiene 365.242 199 días. Encuentre el número de segundos en un año tropical.

38. Realice las siguientes operaciones aritméticas: (a) la suma de los valores medidos 756, 37.2, 0.83 y 2; (b) el producto de $0.003\,2 \times 356.3$, (c) el producto $5.620 \times \pi$.

Nota: Los siguientes 13 problemas requieren habilidades matemáticas que serán útiles a lo largo del curso.

39. Problema de repaso. En un estacionamiento universitario, el número de automóviles ordinarios es mayor que el de vehículos deportivos por 94.7%. La diferencia entre el número de automóviles y el número de vehículos deportivos es 18. Encuentre el número de vehículos deportivos en el estacionamiento.

40. Problema de repaso. Mientras usted está en un viaje a Europa, debe comprar barras de chocolate de avellana para su abuela. El comer sólo un cuadrado cada día, hace que cada gran barra dure 1 1/3 meses. ¿Cuántas barras constituirán el suministro de un año para ella?

41. Problema de repaso. Una niña se sorprende de que debe pagar \$1.36 por un juguete marcado con \$1.25 debido a los impuestos. ¿Cuál es la tasa de impuesto efectiva sobre esta compra, expresada como porcentaje?

42. Problema de repaso. La densidad promedio del planeta Urano es 1.27×10^3 kg/m^3. La razón de la masa de Neptuno a la de Urano es 1.19. La razón del radio de Neptuno al de Urano es 0.969. Encuentre la densidad promedio de Neptuno.

43. Problema de repaso. La razón del número de pericos que visita un comedero de aves al número de aves más interesantes es de 2.25. Una mañana, cuando 91 aves visitan el comedero, ¿cuál es el número de pericos?

44. Problema de repaso. Encuentre todo ángulo θ entre 0 y 360° para el cual la razón de sen θ a cos θ sea -3.00.

45. Problema de repaso. Para el triángulo rectángulo que se muestra en la figura P1.45, ¿cuáles son (a) la longitud del lado desconocido, (b) la tangente de θ y (c) el seno de ϕ?

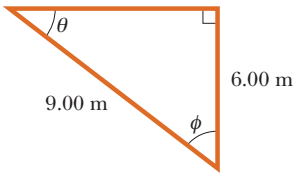


Figura P1.45

46. Problema de repaso. Pruebe que una solución de la ecuación

$$2.00x^4 - 3.00x^3 + 5.00x = 70.0$$

es $x = -2.22$.

47. Problema de repaso. Un cordero mascota crece rápidamente, con su masa proporcional al cubo de su longitud. Cuando la longitud del cordero cambia 15.8%, su masa aumenta en 17.3 kg. Encuentre la masa del cordero al final de este proceso.

48. Problema de repaso. Una curva en la autopista forma un arco de circunferencia. Un automóvil recorre la curva como se muestra en la vista desde un helicóptero de la figura P1.48. La brújula de su tablero muestra que el automóvil al inicio se dirige hacia el Este. Después de recorrer 840 m, se dirige $\theta = 35.0°$ al sureste. Encuentre el radio de curvatura de su trayectoria. *Sugerencia:* Encontrará útil aprender un teorema geométrico citado en el Apéndice B.3.

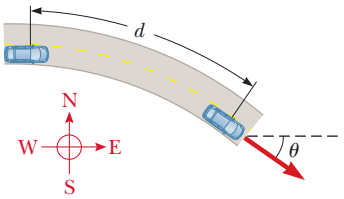


Figura P1.48

49. Problema de repaso. A partir del conjunto de ecuaciones

$$p = 3q$$
$$pr = qs$$
$$\tfrac{1}{2}pr^2 + \tfrac{1}{2}qs^2 = \tfrac{1}{2}qt^2$$

que contienen las incógnitas p, q, r, s y t, encuentre el valor de la razón de t a r.

50. Problema de repaso. La figura P1.50 de la página 18 muestra a los estudiantes que analizan la conducción térmica de la energía en bloques cilíndricos de hielo. Como veremos en el capítulo 20, este proceso se describe por la ecuación

$$\frac{Q}{\Delta t} = \frac{k\pi d^2(T_h - T_c)}{4L}$$

Para control experimental, en estos ensayos todas las cantidades, excepto d y Δt, son constantes. (a) Si d se hace tres veces

más grande, ¿la ecuación predice que Δt se hará más grande o más pequeña? ¿En qué factor? (b) ¿Qué patrón de proporcionalidad de Δt a d predice la ecuación? (c) Para mostrar esta proporcionalidad como una línea recta en una gráfica, ¿qué cantidades debe graficar en los ejes horizontal y vertical? (d) ¿Qué expresión representa la pendiente teórica de esta gráfica?



Alexandra Héder

Figura P1.50

51. **Problema de repaso.** A un estudiante se le proporcionan papel para copiar, regla, compás, tijeras y una báscula de precisión. El estudiante corta varias formas de varios tamaños, calcula sus áreas, mide sus masas y prepara la gráfica de la figura P1.51. (a) Considere el cuarto punto experimental desde la parte superior. ¿Qué tan lejos está de la recta de mejor ajuste? Exprese su respuesta como una diferencia en la coordenada del eje vertical. (b) Exprese su respuesta como un porcentaje. (c) Calcule la pendiente de la recta. (d) Establezca lo que demuestra la gráfica, en referencia con la pendiente de la gráfica y los resultados de los incisos (b) y (c). (e) Describa si este resultado debe anticiparse teóricamente. (f) Describa el significado físico de la pendiente.

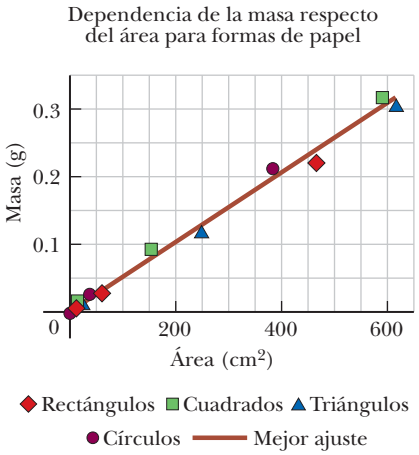


Figura P1.51

52. El radio de una esfera sólida uniforme mide (6.50 ± 0.20) cm y su masa es de (1.85 ± 0.02) kg. Determine la densidad de la esfera en kilogramos por metro cúbico y la incertidumbre en la densidad.

53. Se va a construir una banqueta alrededor de una piscina que mide (10.0 ± 0.1) m por (17.0 ± 0.1) m. Si la banqueta medirá (1.00 ± 0.01) m de ancho por (9.0 ± 0.1) cm de espesor, ¿qué volumen de cemento se necesita y cuál es la incertidumbre aproximada de este volumen?

Problemas adicionales

54. Las monedas de colección a veces se recubren con oro para mejorar su belleza y valor. Considere un cuarto de dólar conmemorativo que se anuncia a la venta en $4.98. Tiene un diámetro de 24.1 mm y un grosor de 1.78 mm, y está cubierto por completo con una capa de oro puro de 0.180 μm de grueso. El volumen del recubrimiento es igual al grosor de la capa por el área a la que se aplica. Los patrones en las caras de la moneda y los surcos en sus bordes tienen un efecto despreciable sobre su área. Suponga que el precio del oro es de $25.0 por cada gramo. (a) Encuentre el costo del oro agregado a la moneda. (b) ¿El costo del oro aumenta significativamente el valor de la moneda? Explique su respuesta.

55. En una situación en que los datos se conocen a tres cifras significativas, se escribe 6.379 m = 6.38 m y 6.374 m = 6.37 m. Cuando un número termina en 5, arbitrariamente se elige escribir 6.375 m = 6.38 m. Igual se podría escribir 6.375 m = 6.37 m, "redondeando hacia abajo" en lugar de "redondear hacia arriba", porque el número 6.375 se cambiaría por iguales incrementos en ambos casos. Ahora considere una estimación del orden de magnitud en la cual los factores de cambio, más que los incrementos, son importantes. Se escribe 500 m ~ 10^3 m porque 500 difiere de 100 por un factor de 5, mientras difiere de 1 000 sólo por un factor de 2. Escriba 437 m ~ 10^3 m y 305 m ~ 10^2 m. ¿Qué distancia difiere de 100 m y de 1 000 m por iguales factores de modo que lo mismo se podría escoger representar su orden de magnitud como ~10^2 m o como ~10^3 m?

56. (a) ¿Cuál es el orden de magnitud del número de microorganismos en el tracto intestinal humano? Una escala de longitud bacteriana típica es de 10^{-6} m. Estime el volumen intestinal y suponga que el 1% del mismo está ocupado por las bacterias. (b) ¿El número de bacterias indican si las bacterias son beneficiosas, peligrosas o neutras para el cuerpo humano? ¿Qué funciones podrían tener?

57. El diámetro de la galaxia con forma de disco, la Vía Láctea, es de aproximadamente 1.0 × 10^5 años luz (a–l). La distancia a Andrómeda, que es la galaxia espiral más cercana a la Vía Láctea, es de alrededor de 2.0 millones de a–l. Si un modelo a escala representa las galaxias Vía Láctea y Andró-



Robert Gendler/NASA

Figura P1.57 La galaxia Andrómeda.

meda como platos soperos de 25 cm de diámetro, determine la distancia entre los centros de los dos platos.

58. *¿Por qué no es posible la siguiente situación?* En un esfuerzo para aumentar el interés en un programa de televisión, a cada ganador semanal se le ofrece un premio de bonificación de $1 millón adicional si él o ella pueden contar personalmente esa cantidad exacta de un paquete de billetes de 1 dólar. El ganador deberá realizar esta tarea bajo la supervisión de los ejecutivos del programa de televisión y en una semana laboral de 40 horas. Para consternación de los productores del programa, la mayoría de los participantes tiene éxito en el desafío.

59. Un chorro de agua elevado se ubica en el centro de una fuente, como se muestra en la figura P1.59. Un estudiante camina alrededor de la fuente, y mide su circunferencia en 15.0 m. A continuación, el estudiante se para en el borde de la fuente y usa un transportador para medir el ángulo de elevación de la fuente que es de $\phi = 55.0°$. ¿Cuál es la altura del chorro?



Figura P1.59
Problemas 59 y 60.

60. Una fuente de agua está en el centro de una piscina circular como se muestra en la figura P1.59. Un estudiante camina alrededor de la piscina y mide la circunferencia C. A continuación, se sitúa en el borde de la piscina y utiliza un transportador para medir el ángulo de elevación de su línea de visión a la parte superior del chorro de agua. ¿Cuál es la altura del chorro de agua?

61. En la siguiente tabla la información representa observaciones de las masas y dimensiones de cilindros sólidos de aluminio, cobre, latón, estaño y hierro. (a) Use tales datos para calcular las densidades de dichas sustancias. (b) Establezca cómo sus resultados para aluminio, cobre y hierro se comparan con los conocidos en la tabla 14.1.

Sustancia	Masa (g)	Diámetro (cm)	Longitud (cm)
Alumio	51.5	2.52	3.75
Cobre	56.3	1.23	5.06
Latón	94.4	1.54	5.69
Estaño	69.1	1.75	3.74
Hierro	216.1	1.89	9.77

62. La distancia del Sol a la estrella más cercana es casi de 4×10^{16} m. La galaxia Vía Láctea (figura P1.62) es en términos aproximados un disco de $\sim 10^{21}$ m de diámetro y $\sim 10^{19}$ m de grosor. Encuentre el orden de magnitud del número de estrellas en la Vía Láctea. Considere representativa la distancia entre el Sol y el vecino más cercano.



Richard Payne/NASA

Figura P1.62 La galaxia Vía Láctea.

63. Suponga que hay 100 millones de automóviles de pasajeros en Estados Unidos y que el consumo promedio de combustible es de 20 mi/gal de gasolina. Si la distancia promedio que recorre cada automóvil es de 10 000 mi/año, ¿cuánta gasolina se ahorraría al año si el consumo promedio de combustible pudiera aumentar a 25 mi/gal?

64. Un cascarón esférico tiene un radio externo de 2.60 cm y uno interno de a. La pared del cascarón tiene grosor uniforme y está hecha de un material con densidad de 4.70 g/cm^3. El espacio interior del cascarón está lleno con un líquido que tiene una densidad de 1.23 g/cm^3. (a) Encuentre la masa m de la esfera, incluido su contenido, como función de a. (b) ¿Para qué valor de a tiene m su máximo valor posible? (c) ¿Cuál es esta masa máxima? (d) Explique si el valor del inciso (c) concuerda con el resultado de un cálculo directo de la masa de una esfera sólida de densidad uniforme hecha del mismo material que el cascarón. (e) **¿Qué pasaría si?** En el inciso (a), ¿la respuesta cambiaría si la pared interior del cascarón no fuese concéntrica con la pared exterior?

65. Las bacterias y otros procariotas se encuentran bajo tierra, en el agua y en el aire. Una micra (10^{-6} m) es una escala de longitud característica asociada con estos microbios. (a) Estime el número total de bacterias y otros procariotas sobre la Tierra. (b) Estime la masa total de todos estos microbios.

66. Se sopla aire hacia dentro de un globo esférico de modo que, cuando su radio es de 6.50 cm, éste aumenta con una rapidez de 0.900 cm/s. (a) Encuentre la rapidez a la que aumenta el volumen del globo. (b) Si dicha rapidez de flujo volumétrico de aire que entra al globo es constante, ¿en qué razón aumentará el radio cuando el radio es de 13.0 cm? (c) Explique físicamente por qué la respuesta del inciso (b) es mayor o menor que 0.9 cm/s, si es diferente.

67. Una barra que se extiende entre $x = 0$ y $x = 14.0$ cm tiene área de sección transversal uniforme $A = 9.00$ cm^2. Su densidad cambia de manera uniforme de 2.70 g/cm^3 a 19.3 g/cm^3. (a) Identifique las constantes B y C requeridas en la expresión $\rho = B + Cx$ para describir la densidad variable. (b) La masa de la barra se conoce mediante

$$m = \int_{\text{todo material}} \rho \, dV = \int_{\text{toda } x} \rho A \, dx = \int_0^{14.0\text{ cm}} (B + Cx)(9.00\text{ cm}^2)\, dx$$

Realice la integración para encontrar la masa de la barra.

68. En física es importante usar aproximaciones matemáticas. (a) Demuestre que, para ángulos pequeños ($< 20°$),

$$\tan \alpha \approx \operatorname{sen} \alpha \approx \alpha = \frac{\pi \alpha'}{180°}$$

donde α está en radianes y α' en grados. (b) Use una calculadora para encontrar el ángulo más grande para el que $\tan \alpha$ se pueda aproximar a α con un error menor de 10.0 por ciento.

69. El consumo de gas natural por una compañía satisface la ecuación empírica $V = 1.50t + 0.008\,00t^2$, donde V es el

volumen de gas en millones de pies cúbicos y t es el tiempo en meses. Exprese esta ecuación en unidades de pies cúbicos y segundos. Suponga un mes de 30.0 días.

70. Una mujer que desea saber la altura de una montaña mide el ángulo de elevación de la cima de la montaña de 12.0°. Después de caminar 1.00 km más cerca de la montaña a nivel del suelo, encuentra que el ángulo es 14.0°. (a) Realice un dibujo del problema, ignorando la altura de los ojos de la mujer por encima del suelo. *Sugerencia*: Utilice dos triángulos. (b) Usando el símbolo y para representar la altura de la montaña y el símbolo x para representar la distancia original de la mujer a la montaña, etiquete la imagen. (c) Utilizando la imagen etiquetada, escriba dos ecuaciones trigonométricas que relacionen las dos variables seleccionadas. (d) Determine la altura y.

71. Un niño adora ver cómo se llena una botella de plástico transparente con champú (figura P1.71). Las secciones transversales horizontales de la botella son círculos con diámetros variables, porque la botella es mucho más ancha en algunos lugares que en otros. Usted vierte champú de color brillante con una relación de flujo volumétrico constante de 16.5 cm^3/s. ¿A qué tasa el nivel de la botella se eleva (a) a un punto donde el diámetro de la botella es de 6.30 cm y (b) a un punto donde el diámetro es de 1.35 cm?

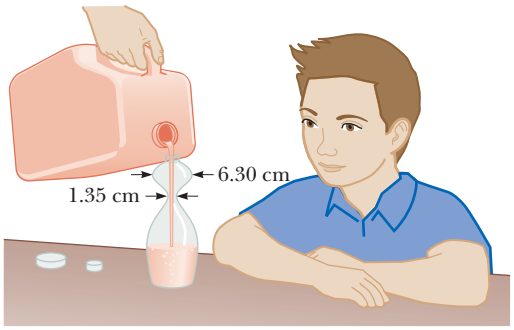


Figura P1.71

Problemas de desafío

72. Una mujer se encuentra a una distancia horizontal x de una montaña y mide el ángulo θ de elevación de la cima de la montaña por encima de la horizontal. Después de caminar acercándose a la montaña una distancia d a nivel del suelo, encuentra que el ángulo es ϕ. Encuentre una ecuación general para la altura y de la montaña en términos de d, ϕ y θ, ignore la altura de los ojos al suelo.

73. Se para en una llanura y observa dos vacas (figura P1.73). La vaca A está al norte de usted y a 15.0 m de su posición. La vaca B está a 25.0 m de su posición. Desde su punto de vista, el ángulo entre la vaca A y la vaca B es de 20.0°, con la vaca B a la derecha de la vaca A. (a) ¿A qué distancia están la vaca A y la vaca B? (b) Considere la vista de la vaca A. De acuerdo con esta vaca, ¿cuál es el ángulo entre usted y la vaca B? (c) Considere el punto de vista de la vaca B. De acuerdo con esta vaca, ¿cuál es el ángulo entre usted y la vaca A? *Sugerencia*: ¿cuál es la situación vista por un colibrí que asoma por encima de la pradera? (d) Dos estrellas en el cielo parecen estar a 20.0° de separación. La estrella A está a 15.0 a-l de la Tierra, y la estrella B, que está a la derecha de la estrella A, está a 25.0 a-l de la Tierra. Para un habitante de un planeta que orbita alrededor de la estrella A, ¿cuál es el ángulo en el cielo entre la estrella B y nuestro Sol?

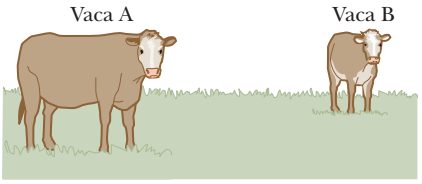


Figura P1.73 Su vista de las dos vacas en un prado. La vaca está al norte de usted. Debe girar los ojos un ángulo de 20.0° para ver desde la vaca A a la vaca B.

CAPÍTULO

2

Movimiento en una dimensión



2.1 Posición, velocidad y rapidez

2.2 Velocidad y rapidez instantáneas

2.3 Análisis de modelo: la partícula bajo velocidad constante

2.4 Aceleración

2.5 Diagramas de movimiento

2.6 Análisis de modelo: la partícula bajo aceleración constante

2.7 Objetos en caída libre

2.8 Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo

Estrategia general para resolver problemas

En las carreras de dragsters un conductor quiere una aceleración tan grande como sea posible. En una distancia de un cuarto de milla, un vehículo alcanza rapideces de más de 320 mi/h y cubre toda la distancia en menos de 5 s. (*George Lepp/Stone/Getty Images*)

Como una primera etapa en el estudio de la mecánica clásica, se describe el movimiento de un objeto ignorando las interacciones con agentes externos que pueden causar o modificar dicho movimiento. Esta parte de la mecánica clásica se llama *cinemática*. (La palabra *cinemática* tiene la misma raíz que *cinema*.) En este capítulo se considera sólo el movimiento en una dimensión, esto es: el movimiento de un objeto a lo largo de una línea recta.

A partir de la experiencia cotidiana es claro que el movimiento de un objeto representa un cambio continuo en la posición del objeto. En física se clasifica por categorías el movimiento en tres tipos: traslacional, rotacional y vibratorio. Un automóvil que viaja en una autopista es un ejemplo de movimiento traslacional, el giro de la Tierra sobre su eje es un ejemplo de movimiento rotacional, y el movimiento de ida y vuelta de un péndulo es un ejemplo de movimiento vibratorio. En este y los siguientes capítulos se tratará sólo con el movimiento traslacional. (Más tarde, en el libro, se discutirán los movimientos rotacional y vibratorio.)

En el estudio del movimiento traslacional se usa el **modelo de partícula** y el objeto en movimiento se describe como una *partícula* sin importar su tamaño. Recuerde nuestro análisis de la sección 1.2, acerca de la construcción de modelos para situaciones físicas. En general, **una partícula es un objeto parecido a un punto, es decir: un objeto que tiene masa pero es de tamaño infinitesimal**. Por ejemplo, si quiere describir el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, puede considerar a la Tierra como partícula y obtener datos razonablemente precisos acerca de su órbita. Esta aproximación se justifica porque el radio de la órbita de la

Tierra es grande en comparación con las dimensiones de la Tierra y del Sol. Como ejemplo, en una escala mucho más pequeña, es posible explicar la presión que ejerce un gas sobre las paredes de un contenedor al tratar las moléculas de gas como partículas, sin importar su estructura interna.

2.1 Posición, velocidad y rapidez

Posición ▶

La **posición** x de una partícula es la ubicación de la partícula respecto a un punto de referencia elegido que se considera el origen de un sistema coordenado. El movimiento de una partícula se conoce por completo si la posición de la partícula en el espacio se conoce en todo momento.

Considere un automóvil que se mueve hacia adelante y en reversa a lo largo del eje x como en la figura 2.1a. Cuando comienza a recopilar datos de posición, el automóvil está a 30 m a la derecha de un punto de referencia $x = 0$. Aplique el modelo de partícula para identificar algún punto en el automóvil, tal vez la manija de la puerta delantera, como una partícula que representa a todo el automóvil.

Tabla 2.1 Posición del automóvil en varios tiempos

Posición	t (s)	x (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓒ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	−37
Ⓕ	50	−53

Active el cronómetro y una vez cada 10 s anote la posición del automóvil. Como aparece en la tabla 2.1, el automóvil se mueve hacia la derecha (que se definió como la dirección positiva) durante los primeros 10 s de movimiento, desde la posición Ⓐ a la posición Ⓑ. Después de Ⓑ, los valores de posición comienzan a disminuir, lo que indica que el automóvil regresa desde la posición Ⓑ hasta la posición Ⓕ. De hecho, en Ⓓ, 30 s después de comenzar a medir, el automóvil está en el origen de coordenadas (vea la figura 2.1a). Continúa moviéndose hacia la izquierda y está a más de 50 m a la izquierda de $x = 0$ cuando se deja de registrar información después del sexto punto de datos. En la figura 2.1b se presenta una representación gráfica de esta información. A dicha gráfica se le llama *gráfica posición-tiempo*.

Observe ahora las *representaciones alternativas* de información que se usaron para el movimiento del automóvil. La figura 2.1a es una *representación pictórica*, mientras que la figura 2.1b es una *representación gráfica*. La tabla 2.1 es una *representación tabular* de la misma información. Usar representaciones alternativas es una excelente estrategia para comprender la situación en un problema dado. En todo caso, la meta en muchos problemas es lograr una *representación matemática*, la cual se analiza para resolver algún fragmento de información solicitada.

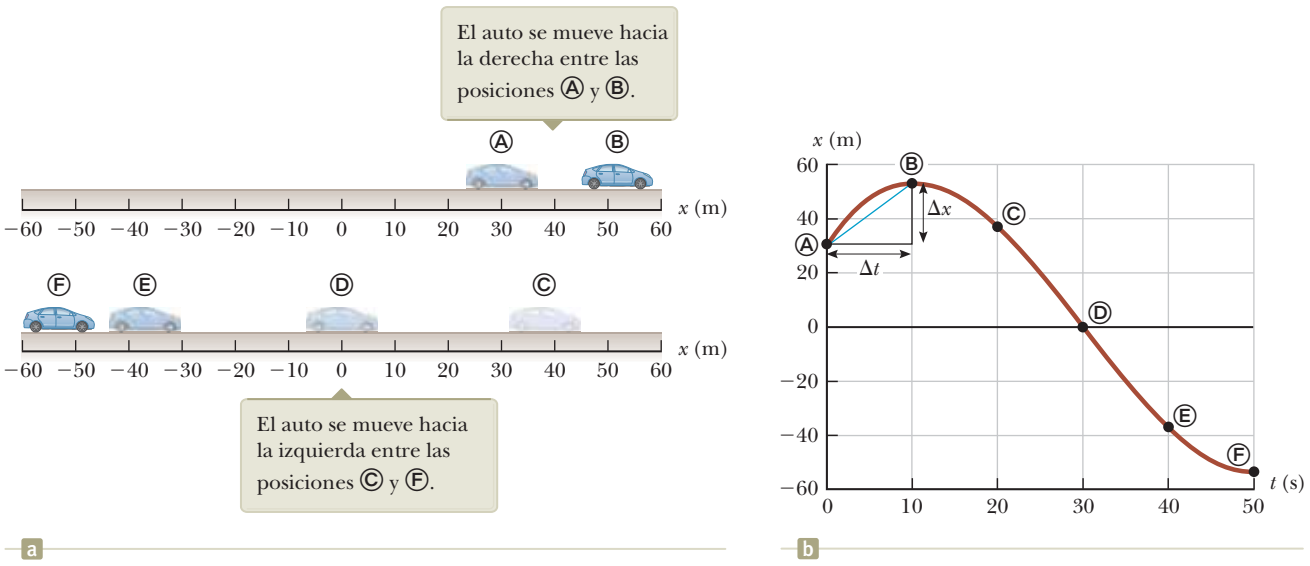


Figura 2.1 Un automóvil va hacia adelante y en reversa a lo largo de una línea recta. Ya que se tiene interés sólo en el movimiento traslacional del automóvil, se le modela como una partícula. Se pueden usar varias representaciones para la información del movimiento del automóvil. La tabla 2.1 es una representación tabular de la información. (a) Representación pictórica del movimiento del automóvil. (b) Representación gráfica (gráfica posición-tiempo) del movimiento del automóvil.

A partir de los datos de la tabla 2.1 se determina fácilmente el cambio en posición del automóvil para varios intervalos de tiempo. El **desplazamiento** Δx de una partícula se define como su cambio en posición en algún intervalo de tiempo. Conforme la partícula se mueve desde una posición inicial x_i a una posición final x_f, su desplazamiento está dado por

$$\Delta x \equiv x_f - x_i \qquad (2.1)$$

◀ **Desplazamiento**

Se usa la letra griega mayúscula delta (Δ) para denotar el *cambio* en una cantidad. A partir de esta definición se ve que x es positiva si x_f es mayor que x_i y negativo si x_f es menor que x_i.

Es muy importante reconocer la diferencia entre desplazamiento y distancia recorrida. **Distancia** es la longitud de una trayectoria seguida por una partícula. Considere, por ejemplo, a los jugadores de basquetbol de la figura 2.2. Si un jugador corre desde la canasta de su propio equipo a lo largo de la cancha hasta la canasta del otro equipo y luego regresa a su propia canasta, el *desplazamiento* del jugador durante este intervalo de tiempo es cero, porque terminó en el mismo punto del que partió: $x_f = x_i$, de modo que $\Delta x = 0$. Sin embargo, durante este intervalo de tiempo, se movió a lo largo de una distancia equivalente al doble de la longitud de la cancha de basquetbol. La distancia siempre se representa como un número positivo, mientras que el desplazamiento puede ser positivo o negativo.

Brian Drake/Time Life Pictures/Getty Images



Figura 2.2 En esta cancha de basquetbol, los jugadores corren de ida y vuelta durante todo el juego. La distancia que corren los jugadores durante el tiempo de juego es distinta de cero. El desplazamiento de los jugadores durante el tiempo de juego es aproximadamente cero porque deben regresar al mismo punto una y otra vez.

El desplazamiento es un ejemplo de una cantidad vectorial. Muchas otras cantidades físicas, incluida posición, velocidad y aceleración, también son vectores. En general, una **cantidad vectorial** requiere la especificación tanto de dirección como de magnitud. En contraste, una **cantidad escalar** tiene un valor numérico y no dirección. En este capítulo se usan los signos positivo (+) y negativo (−) para indicar la dirección del vector. Por ejemplo, para movimiento horizontal especifique a su arbitrio a la derecha como la dirección positiva. Después, cualquier objeto que siempre se mueva a la derecha experimenta un desplazamiento positivo $\Delta x > 0$ y cualquier objeto que se mueva hacia la izquierda experimenta un desplazamiento negativo, de modo que $\Delta x < 0$. En el capítulo 3 se tratarán las cantidades vectoriales con más detalle.

Todavía no se menciona un punto muy importante. Note que los datos de la tabla 2.1 resultan sólo en los seis puntos de datos de la gráfica de la figura 2.1b. Por lo tanto, el movimiento de la partícula no se conoce por completo, ya que no conocemos su posición en *todo* momento. La curva uniforme que se dibuja a través de los seis puntos de la gráfica sólo es una *posibilidad* del movimiento real del automóvil. Únicamente se tiene información acerca de seis instantes de tiempo; no se tiene idea de lo que ocurrió entre los puntos de datos. La curva suave es una *suposición* de lo que ocurrió, pero tenga en mente que *sólo* es una suposición. Si la curva suave representa el movimiento real del automóvil, la gráfica contiene información acerca de todo el intervalo de 50 s durante los que se observó el movimiento del automóvil.

Es mucho más fácil ver los cambios en la posición a partir de la gráfica que de una descripción verbal o incluso de una tabla de números. Por ejemplo, es claro que el automóvil cubre más terreno durante la mitad del intervalo de 50 s que al final. Entre las posiciones Ⓒ y Ⓓ, el automóvil viaja casi 40 m, pero durante los últimos 10 s, entre las posiciones Ⓔ y Ⓕ, se mueve a menos de la mitad de esa distancia. Una forma común de comparar estos diferentes movimientos es dividir el desplazamiento Δx que se presenta entre dos lecturas de cronómetro entre el valor de dicho intervalo de tiempo particular Δt. El resultado evidencia ser una relación muy útil, que se usará muchas veces. A esta relación se le ha dado un nombre especial: *velocidad promedio*. La **velocidad promedio** $v_{x,\text{prom}}$ de una partícula se define como el desplazamiento x de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo t durante el que ocurre dicho desplazamiento:

$$v_{x,\text{prom}} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

◀ **Velocidad promedio**

donde el subíndice x indica movimiento a lo largo del eje x. A partir de esta definición es claro que la velocidad promedio tiene dimensiones de longitud divididas entre el tiempo (L/T), o metros por segundo en unidades del SI.

La velocidad promedio de una partícula que se mueve en una dimensión es positiva o negativa, dependiendo del signo del desplazamiento. (El intervalo de tiempo Δt siempre es positivo.) Si la coordenada de la partícula aumenta en el tiempo (esto es, si $x_f > x_i$), Δx es positiva y $v_{x,\text{prom}} = \Delta x/\Delta t$ es positiva. Este caso corresponde a una partícula que se mueve en la dirección x positiva, esto es, hacia valores más grandes de x. Si la coordenada disminuye en el tiempo (esto es, si $x_f < x_i$), Δx es negativa y por lo tanto $v_{x,\text{prom}}$ es negativa. Este caso corresponde a una partícula que se mueve en la dirección x negativa.

La velocidad promedio se interpreta geométricamente al dibujar una línea recta entre dos puntos en la gráfica posición-tiempo en la figura 2.1b. Esta recta forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo de altura Δx y base Δt. La pendiente de esta recta es la razón $\Delta x/\Delta t$, que se definió como velocidad promedio en la ecuación 2.2. Por ejemplo, la recta entre las posiciones Ⓐ y Ⓑ en la figura 2.1b tiene una pendiente igual a la velocidad promedio del automóvil entre dichos dos tiempos $(52\text{ m} - 30\text{ m})/(10\text{ s} - 0) = 2.2\text{ m/s}$.

En el uso cotidiano, los términos *rapidez* y *velocidad* promedio son intercambiables. Sin embargo, en física hay una clara distinción entre estas dos cantidades. Considere una competidora de maratón que corre una distancia d de más de 40 km y aun así termina en su punto de partida. Su desplazamiento total es cero, ¡así que su velocidad promedio es cero! No obstante, es necesario cuantificar cuán rápido corre. Una relación ligeramente diferente logra esto. La **rapidez promedio** v_{prom} de una partícula, una cantidad escalar, se define como la distancia total recorrida dividida entre el intervalo de tiempo total requerido para recorrer dicha distancia:

Rapidez promedio ▶

$$v_{\text{prom}} \equiv \frac{d}{\Delta t} \tag{2.3}$$

Prevención de riesgos ocultos 2.1

Rapidez promedio y velocidad promedio La magnitud de la velocidad promedio *no* es la rapidez promedio. Por ejemplo, considere a la corredora de maratón que se analizó en la ecuación 2.3. La magnitud de su velocidad promedio es cero, pero su rapidez promedio claramente es distinta de cero.

La unidad del SI de la rapidez promedio es la misma que la unidad de velocidad promedio: metros por segundo. Sin embargo, a diferencia de la velocidad promedio, la rapidez promedio no tiene dirección y siempre se expresa como un número positivo. Advierta la clara distinción entre las definiciones de velocidad promedio y rapidez promedio: la velocidad promedio (ec. 2.2) es el *desplazamiento* dividido entre el intervalo de tiempo, mientras que la rapidez promedio (ec. 2.3) es la distancia recorrida dividida entre el intervalo de tiempo.

El conocimiento de la velocidad promedio o la rapidez promedio de una partícula no proporciona información acerca de los detalles del viaje. Por ejemplo, suponga que le toma 45.0 s andar 100 m por un largo corredor recto hacia su puerta de salida en el aeropuerto. En la marca de 100 m, se da cuenta que pasó los baños y regresa 25.0 m a lo largo del mismo corredor, y faltan 10.0 s para el viaje de regreso. La magnitud de su *velocidad* promedio es $+75.0\text{ m}/55.0\text{ s} = +1.36\text{ m/s}$. La *rapidez* promedio para su viaje es $125\text{ m}/55.0\text{ s} = 2.27\text{ m/s}$. Es posible que haya viajado a varias rapideces durante la caminata. Ninguna velocidad promedio ni rapidez promedio proporciona información acerca de estos detalles.

Examen rápido 2.1 ¿Bajo cuáles de las siguientes condiciones la magnitud de la velocidad promedio de una partícula que se mueve en una dimensión es más pequeña que la rapidez promedio durante algún intervalo de tiempo? **(a)** una partícula se mueve en la dirección $+x$ sin regresar, **(b)** una partícula se mueve en la dirección $-x$ sin regresar, **(c)** una partícula se mueve en la dirección $+x$ y luego invierte la dirección de su movimiento, **(d)** no existen condiciones para que esto sea cierto.

Ejemplo 2.1 Cálculo de velocidad y rapidez promedio

Encuentre el desplazamiento, velocidad promedio y rapidez promedio del automóvil de la figura 2.1a entre las posiciones Ⓐ y Ⓕ.

2.1 continuación

SOLUCIÓN

Consulte la figura 2.1 para formar una imagen mental del automóvil y su movimiento. Modele el automóvil como una partícula. A partir de la gráfica posición-tiempo dada en la figura 2.1b, note que $x_Ⓐ = 30$ m en $t_Ⓐ = 0$ s y que $x_Ⓕ = -53$ m en $t_Ⓕ = 50$ s.

Use la ecuación 2.1 para encontrar el desplazamiento del automóvil: $\Delta x = x_Ⓕ - x_Ⓐ = -53\text{ m} - 30\text{ m} = -83\text{ m}$

Este resultado significa que el automóvil termina 83 m en la dirección negativa (a la izquierda, en este caso) desde donde partió. Este número tiene las unidades correctas y es del mismo orden de magnitud que los datos proporcionados. Un vistazo rápido a la figura 2.1a indica que es la respuesta correcta.

Aplique la ecuación 2.2 para encontrar la velocidad promedio del auto:

$$v_{x,\text{ prom}} = \frac{x_Ⓕ - x_Ⓐ}{t_Ⓕ - t_Ⓐ} = \frac{-53\text{ m} - 30\text{ m}}{50\text{ s} - 0\text{ s}} = \frac{-83\text{ m}}{50\text{ s}} = -1.7\text{ m/s}$$

No es posible encontrar sin ambigüedad la rapidez promedio del automóvil a partir de los datos de la tabla 2.1, porque no se tiene información acerca de las posiciones del automóvil entre los puntos de datos. Si se adopta la suposición de que los detalles de la posición del automóvil se describen mediante la curva de la figura 2.1b, la distancia recorrida es 22 m (desde Ⓐ a Ⓑ) más 105 m (de Ⓑ a Ⓕ)), para un total de 127 m.

Aplique la ecuación 2.3 para encontrar la rapidez promedio del automóvil: $v_{\text{prom}} = \dfrac{127\text{ m}}{50\text{ s}} = 2.5\text{ m/s}$

Note que la rapidez promedio es positiva, como debe ser. Considere que la curva café de la figura 2.1b fuese diferente, de modo que entre 0 s y 10 s viaja desde Ⓐ a 100 m y luego regresa a Ⓑ. La rapidez promedio del automóvil cambiaría porque la distancia es diferente, pero la velocidad promedio no cambiaría.

2.2 Velocidad y rapidez instantáneas

Con frecuencia es necesario conocer la velocidad de una partícula en un instante específico en el tiempo t en lugar de la velocidad promedio durante un intervalo de tiempo finito Δt. En otras palabras, nos gustaría poder especificar su velocidad de manera tan precisa como detalla su posición al notar lo que ocurre en una lectura particular de reloj; esto es, en algún instante específico. ¿Qué significa hablar acerca de qué tan rápido se mueve algo si se "congela el tiempo" y sólo hablar acerca de un instante individual? A finales del siglo XVI, con la invención del cálculo, los científicos empezaron a razonar las formas de describir el movimiento de un objeto en cualquier momento.

Para ver cómo se hace esto, considere la figura 2.3a (página 26), que es una reproducción de la gráfica de la figura 2.1b. ¿Cuál es la velocidad de la partícula en $t = 0$? Ya se discutió la velocidad promedio para el intervalo durante el cual el automóvil se mueve desde la posición Ⓐ hasta la posición Ⓑ (dada por la pendiente de la recta azul) y para el intervalo durante el cual se mueve de Ⓐ a Ⓕ (representado por la pendiente de la recta azul más larga y que se calculó en el ejemplo 2.1). El automóvil comienza a moverse hacia la derecha, que se define como la dirección positiva. Debido a esto, al ser positivo, el valor de la velocidad promedio durante el intervalo de Ⓐ a Ⓑ es más representativo de la velocidad inicial que el valor de la velocidad promedio durante el intervalo de Ⓐ a Ⓕ, que se determinó como negativa en el ejemplo 2.1. Ahora enfóquese en la recta azul corta y deslice el punto Ⓑ hacia la izquierda a lo largo de la curva, hacia el punto Ⓐ, como en la figura 2.3b. La recta entre los puntos se vuelve cada vez más inclinada, y conforme los dos puntos se vuelven en extremo próximos, la recta se convierte en una recta tangente a la curva, indicada por la recta verde en la figura 2.3b. La pendiente de esta recta tangente representa la velocidad del automóvil en el punto Ⓐ. Lo que se hizo fue determinar

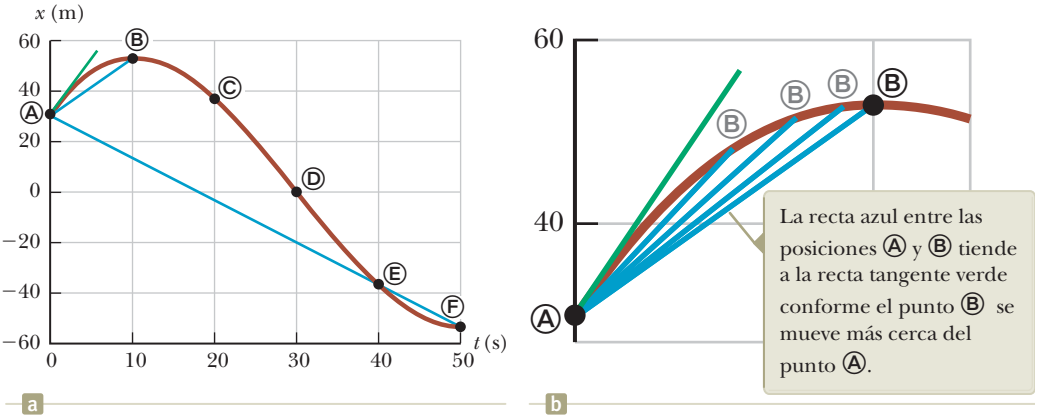


Figura 2.3 (a) Gráfica que representa el movimiento del automóvil de la figura 2.1. (b) Una ampliación de la esquina superior izquierda de la gráfica.

Prevención de riesgos ocultos 2.2

Pendientes de gráficas En cualquier gráfica de datos físicos, la pendiente representa la razón del cambio en la cantidad representada en el eje vertical al cambio en la cantidad representada en el eje horizontal. Recuerde que *una pendiente* tiene unidades (a menos que ambos ejes tengan las mismas unidades). Las unidades de la pendiente de la figura 2.1b y la figura 2.3 son metros por segundo, las unidades de velocidad.

la *velocidad instantánea* en dicho momento. En otras palabras, la **velocidad instantánea** v_x es igual al valor límite de la razón $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:[1]

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.4}$$

En notación de cálculo, este límite se llama *derivada* de x respecto a t, y se escribe dx/dt:

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{2.5}$$

Velocidad instantánea ▶

La velocidad instantánea puede ser positiva, negativa o cero. Cuando la pendiente de la gráfica posición-tiempo es positiva, como en cualquier momento durante los primeros 10 s en la figura 2.3, v_x es positiva y el automóvil se mueve hacia valores más grandes de x. Después del punto Ⓑ, v_x es negativa porque la pendiente es negativa y el automóvil se mueve hacia valores más pequeños de x. En el punto Ⓑ, la pendiente y la velocidad instantánea son cero y el automóvil está momentáneamente en reposo.

De aquí en adelante, se usa la palabra velocidad para designar velocidad instantánea. Cuando se esté interesado en *velocidad promedio*, siempre se usará el adjetivo *promedio*.

Prevención de riesgos ocultos 2.3

Rapidez instantánea y velocidad instantánea En la Prevención de riesgos ocultos 2.1 se argumentó que la magnitud de la velocidad promedio no es la rapidez promedio. Sin embargo, la magnitud de la velocidad instantánea es la rapidez instantánea. En un intervalo de tiempo infinitesimal, la magnitud del desplazamiento es igual a la distancia recorrida por la partícula.

La **rapidez instantánea** de una partícula se define como la magnitud de su velocidad instantánea. Como con la rapidez promedio, la rapidez instantánea no tiene dirección asociada con ella. Por ejemplo, si una partícula tiene una velocidad instantánea de +25 m/s a lo largo de una recta dada y otra partícula tiene una velocidad instantánea de −25 m/s a lo largo de la misma recta, ambas tienen una rapidez[2] de 25 m/s.

Examen rápido 2.2 ¿Los integrantes de la patrulla de caminos están más interesados en **(a)** la rapidez promedio o **(b)** la rapidez instantánea mientras usted conduce?

Ejemplo conceptual 2.2 La velocidad de diferentes objetos

Considere los siguientes movimientos unidimensionales: (**A**) una bola lanzada directamente hacia arriba llega al punto más alto y cae de vuelta hacia la mano del lanzador; (**B**) un automóvil de carreras parte del reposo y aumenta su rapidez hasta 100 m/s, y (**C**) una nave espacial navega por el espacio con velocidad constante. ¿Existen algunos puntos en el movimiento de estos objetos donde la velocidad instantánea tenga el mismo valor que la velocidad promedio durante todo el movimiento? Si es así, identifique el (los) punto(s).

[1] Observe que el desplazamiento Δx también tiende a cero conforme Δt tiende a cero, de modo que la razón parece 0/0. Aunque este cociente puede parecer difícil de evaluar, el cociente tiene un valor específico. Como Δx y Δt se vuelven cada vez más pequeños, la razón $\Delta x/\Delta t$ tiende a un valor igual a la pendiente de la recta tangente a la curva x en función de t.

[2] Como con la velocidad, se quita el adjetivo para rapidez instantánea. "Rapidez" significa rapidez instantánea.

2.2 continuación

SOLUCIÓN

(A) La velocidad promedio para la bola lanzada es cero porque la bola regresa al punto de partida; por lo tanto, su desplazamiento es cero. Hay un punto donde la velocidad instantánea es cero: en lo alto del movimiento.

(B) La velocidad promedio del automóvil no se puede evaluar sin ambigüedad con la información dada, pero debe tener algún valor entre 0 y 100 m/s. Puesto que el automóvil tendrá una velocidad instantánea entre 0 y 100 m/s en algún momento durante el intervalo, debe haber algún instante cuando la velocidad instantánea sea igual a la velocidad promedio durante todo el movimiento.

(C) Puesto que la velocidad instantánea de la nave espacial es constante, su velocidad instantánea en cualquier tiempo y su velocidad promedio durante *cualquier* intervalo de tiempo son iguales.

Ejemplo 2.3 Velocidad promedio e instantánea

Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su posición varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $x = -4t + 2t^2$, donde x está en metros y t está en segundos.[3] La gráfica posición-tiempo para este movimiento se muestra en la figura 2.4a. Como la posición de la partícula está dada por una función matemática, el movimiento de la partícula es completamente conocido, a diferencia del automóvil de la figura 2.1. Note que la partícula se mueve en la dirección x negativa durante el primer segundo de movimiento, en el momento $t = 1$ s está momentáneamente en reposo y se mueve en la dirección x positiva en tiempos $t > 1$ s.

(A) Determine el desplazamiento de la partícula en los intervalos de tiempo $t = 0$ a $t = 1$ s y $t = 1$ s a $t = 3$ s.

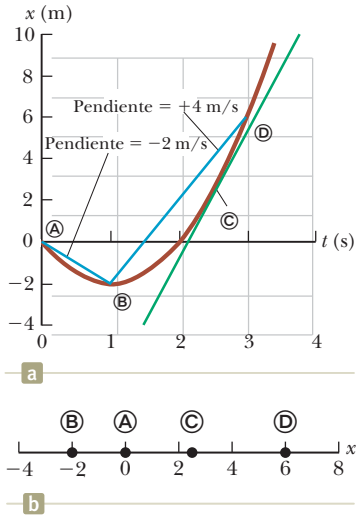


Figura 2.4 (Ejemplo 2.3) (a) Gráfica posición-tiempo para una partícula que tiene una coordenada x que varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $x = -4t + 2t^2$. (b) La partícula se mueve en una dimensión a lo largo del eje x.

SOLUCIÓN

A partir de la gráfica de la figura 2.4, elabore una representación mental del movimiento de la partícula. Tenga en mente que la partícula no se mueve en una trayectoria curva en el espacio, tal como la que muestra la curva café en la exposición gráfica. La partícula se mueve sólo a lo largo del eje x en una dimensión como se muestra en la figura 2.4b. En $t = 0$, ¿se mueve a la derecha o a la izquierda?

Durante el primer intervalo de tiempo, la pendiente es negativa y por lo tanto la velocidad promedio es negativa. En consecuencia, se sabe que el desplazamiento entre Ⓐ y Ⓑ debe ser un número negativo que tiene unidades de metros. De igual modo, se espera que el desplazamiento entre Ⓑ y Ⓓ sea positivo.

En el primer intervalo de tiempo, haga $t_i = t_{Ⓐ} = 0$ y $t_f = t_{Ⓑ} = 1$ s y aplique la ecuación 2.1 para encontrar el desplazamiento:

$$\Delta x_{Ⓐ\to Ⓑ} = x_f - x_i = x_{Ⓑ} - x_{Ⓐ}$$
$$= [-4(1) + 2(1)^2] - [-4(0) + 2(0)^2] = -2 \text{ m}$$

Para el segundo intervalo de tiempo ($t = 1$ s a $t = 3$ s), sea $t_i = t_{Ⓑ} = 1$ s y $t_f = t_{Ⓓ} = 3$ s:

$$\Delta x_{Ⓑ\to Ⓓ} = x_f - x_i = x_{Ⓓ} - x_{Ⓑ}$$
$$= [-4(3) + 2(3)^2] - [-4(1) + 2(1)^2] = +8 \text{ m}$$

También es posible leer estos desplazamientos directamente de la gráfica posición-tiempo.

(B) Calcule la velocidad promedio durante estos dos intervalos de tiempo.

continúa

[3]Simplemente para facilitar la lectura, la expresión se escribe como $-4t + 2t^2$ en lugar de $x = (-4.00 \text{ m/s})t + (2.00 \text{ m/s}^2)t^{2.00}$. Cuando una ecuación resume observaciones, considere que sus coeficientes tienen tantos dígitos significativos como otros datos citados en el problema. Considere que sus coeficientes tienen las unidades requeridas para una consistencia dimensional. Cuando inicie el cronómetro en $t = 0$, por lo general no se tiene la intención de limitar la precisión a un solo dígito. Considere que cualquier valor cero en este libro tiene tantas cifras significativas como necesite.

2.3 continuación

SOLUCIÓN

En el primer intervalo de tiempo, aplique la ecuación 2.2 con $\Delta t = t_f - t_i = t_{Ⓑ} - t_{Ⓐ} = 1$ s:

$$v_{x,\text{prom}\,(Ⓐ \to Ⓑ)} = \frac{\Delta x_{Ⓐ \to Ⓑ}}{\Delta t} = \frac{-2\text{ m}}{1\text{ s}} = -2\text{ m/s}$$

En el segundo intervalo de tiempo, $\Delta t = 2$ s:

$$v_{x,\text{prom}\,(Ⓑ \to Ⓓ)} = \frac{\Delta x_{Ⓑ \to Ⓓ}}{\Delta t} = \frac{8\text{ m}}{2\text{ s}} = +4\text{ m/s}$$

Estos valores son los mismos que las pendientes de las rectas que unen estos puntos en la figura 2.4.

(C) Encuentre la velocidad instantánea de la partícula en $t = 2.5$ s.

SOLUCIÓN

Mida la pendiente de la recta verde en $t = 2.5$ s (punto Ⓒ) en la figura 2.4a:

$$v_x = \frac{10\text{ m} - (-4\text{ m})}{3.8\text{ s} - 1.5\text{ s}} = +6\text{ m/s}$$

Observe que esta velocidad instantánea está en el mismo orden de magnitud que los resultados anteriores; esto es, unos cuantos metros por segundo. ¿Esto es lo que habría esperado?

2.3 Análisis de modelo: la partícula bajo velocidad constante

Análisis de modelo ▶

En la sección 1.2 se estudió la importancia de hacer análisis de modelos. Un modelo particularmente importante en la solución de problemas físicos es usar *análisis de modelos*. Un **análisis de modelo** es una situación común que se presenta una y otra vez en la resolución de problemas de física. Puesto que representa una situación común, también representa un tipo común de problemas que ya se ha resuelto. Cuando se identifica un análisis de modelo en un nuevo problema, la solución al nuevo problema se puede modelar después de que el problema previo ya fue resuelto. Los análisis de modelos nos ayudan a reconocer situaciones comunes y nos guían hacia una solución al problema. La forma que toma un análisis de modelo es una de cualquiera de las dos descripciones siguientes: (1) el comportamiento de alguna entidad física o (2) la interacción entre dicha entidad y el entorno. Cuando encuentre un nuevo problema, debe identificar los detalles fundamentales del mismo e intentar reconocer cuál de los tipos de problemas que ya resolvió sirve como modelo para el nuevo. Por ejemplo, suponga que un automóvil se mueve a lo largo de una autopista recta con una rapidez constante. ¿Es importante que sea un automóvil? ¿Es importante que sea una autopista? Si las respuestas a ambas preguntas son no, represente el automóvil como una *partícula bajo velocidad constante*, que se discutirá en esta sección. Una vez que el problema se ha modelado, ya no se trata de un automóvil. Se trata de una partícula sometida a un cierto tipo de movimiento, un movimiento que ya hemos estudiado antes.

Este método es un poco similar a la práctica común de la profesión legal de encontrar "antecedentes legales". Si se encuentra un caso resuelto con anterioridad que sea muy similar, en cuanto a lo legal, al actual, se ofrece como modelo y se plantea un argumento en la corte que los vincule en términos lógicos. Por lo tanto, el fallo en el caso previo se usa para influir en el fallo del caso actual. En física sucederá algo similar. Para un problema determinado busque un "precedente físico", un modelo con el que ya esté familiarizado y que sea aplicable al problema actual.

Todos los análisis de modelos se generarán respecto a cuatro modelos de simplificación fundamentales. El primero es el modelo de partícula discutido en la introducción de este capítulo; se observará una partícula bajo varios comportamientos e interacciones ambientales. En capítulos siguientes se introducen más análisis de modelos en función de modelos de simplificación de un *sistema*, un *objeto rígido* y una *onda*. Una vez introducidos dichos análisis de modelos, se verá que aparecen de nuevo una y otra vez en diferentes situaciones de problemas.

Cuando se resuelve un problema, se debe evitar navegar por el capítulo en busca de una ecuación que contenga la incógnita que se pide en el problema. En muchos casos, la ecuación que encuentre puede no tener nada que ver con el problema que está intentando resolver. Es *mucho* mejor tomar este primer paso: **identificar el análisis de modelo que sea apropiado para el problema**. Para hacer esto, piense cuidadosamente acerca de qué está pasando en el problema y hágalo coincidir con una situación que ya haya tenido. Una vez que se ha identificado el análisis de modelo, hay un pequeño número de ecuaciones para elegir que sean apropiadas para ese modelo, a veces una sola ecuación. Por lo tanto, **el modelo le indica qué ecuación(es) utilizar para la representación matemática**.

Apliquemos la ecuación 2.2 para construir el primer análisis de modelo para resolver problemas. Considere una partícula que se mueve con una velocidad constante. El modelo de **partícula bajo velocidad constante** se aplica a *cualquier* situación en la que una entidad que se pueda representar como partícula se mueva con velocidad constante. Esta situación ocurre con frecuencia, de modo que este modelo es importante.

Si la velocidad de una partícula es constante, su velocidad instantánea en cualquier instante durante un intervalo de tiempo es la misma que la velocidad promedio durante el intervalo. Esto es, $v_x = v_{x,\text{prom}}$. Debido a esto, la ecuación 2.2 proporciona una ecuación útil para la representación matemática de esta situación:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.6}$$

Al recordar que $\Delta x = x_f - x_i$, se ve que $v_x = (x_f - x_i)/\Delta t$, o bien

$$x_f = x_i + v_x \Delta t$$

Esta ecuación dice que la posición de la partícula está dada por la suma de su posición original x_i en el tiempo $t = 0$ más el desplazamiento $v_x \Delta t$ que ocurre durante el intervalo de tiempo Δt. En la práctica, por lo general se elige el tiempo al principio del intervalo como $t_i = 0$ y el tiempo al final del intervalo como $t_f = t$, de modo que la ecuación se convierte en

$$x_f = x_i + v_x t \quad (\text{para } v_x \text{ constante}) \tag{2.7}$$

Posición como una función del tiempo para el modelo de la partícula bajo velocidad constante

Las ecuaciones 2.6 y 2.7 son las ecuaciones básicas que se utilizan en el modelo de una partícula bajo velocidad constante. Cuando se ha identificado el modelo que ha de analizarse en un problema para una partícula bajo velocidad constante, se puede voltear hacia estas ecuaciones.

La figura 2.5 es una representación gráfica de la partícula bajo velocidad constante. En esta gráfica posición-tiempo, la pendiente de la recta que representa el movimiento es constante e igual a la magnitud de la velocidad. La ecuación 2.7, que es la ecuación de una línea recta, es la representación matemática del modelo de partícula bajo velocidad constante. La pendiente de la línea recta es v_x y la ordenada al origen y es x_i en ambas representaciones.

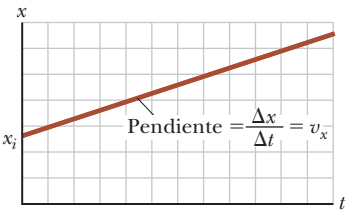


Figura 2.5 Gráfica posición-tiempo para una partícula bajo velocidad constante. El valor de la velocidad constante es la pendiente de la recta.

En el ejemplo 2.4 se muestra una aplicación de la partícula bajo el modelo de velocidad constante. Observe el icono de análisis de modelo AM, que se utiliza para identificar ejemplos en los que se emplean análisis de modelo en la solución. Debido a los amplios beneficios de la utilización del método del análisis de modelo, se dará cuenta que un gran número de los ejemplos en el libro llevarán este icono.

Ejemplo 2.4 Modelado de un corredor como una partícula AM

Una kinesióloga está estudiando la biomecánica del cuerpo humano. (Kinesiología es el estudio del movimiento del cuerpo humano. Note la conexión a la palabra cinemática.) Ella determina la velocidad de un sujeto experimental mientras corre a lo largo de una línea recta con una rapidez constante. La kinesióloga activa el cronómetro cuando el corredor pasa por un punto dado y lo detiene después que el corredor pasa por otro punto a 20 m de distancia. El intervalo de tiempo que indica el cronómetro es 4.0 s.

(A) ¿Cuál es la velocidad del corredor

continúa

2.4 continuación

SOLUCIÓN

Modelamos al corredor en movimiento como partícula porque su tamaño y el movimiento de brazos y piernas son detalles innecesarios. Puesto que el problema establece que el sujeto corre con una rapidez constante, se modela como una *partícula bajo velocidad constante.*

Habiendo identificado el modelo, se aplica la ecuación 2.6 para encontrar la velocidad constante del corredor:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} = \frac{20\text{ m} - 0}{4.0\text{ s}} = 5.0\text{ m/s}$$

(B) Si el corredor continúa su movimiento después de desactivar el cronómetro, ¿cuál es su posición después de transcurridos 10 s?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 2.7 y la rapidez que encontró en el inciso (A) para descubrir la posición de la partícula en el tiempo $t = 10$ s:

$$x_f = x_i + v_x t = 0 + (5.0\text{ m/s})(10\text{ s}) = 50\text{ m}$$

¿Es el resultado del inciso (A) una velocidad razonable para un ser humano? ¿Cómo se compara con rapideces de récord mundial en carreras de 100 m y 200 m? Observe que el valor en el inciso (B) es más del doble que el de la posición de 20 m donde se desactivó el cronómetro. ¿Este valor es consistente con el tiempo de 10 s que es más del doble que el tiempo de 4.0 s?

Las manipulaciones matemáticas para la partícula bajo velocidad constante están contenidas en la ecuación 2.6 y la siguiente, la ecuación 2.7. Estas ecuaciones sirven para resolver cualquier variable que resulte desconocida en las ecuaciones, si las otras variables son conocidas. Por ejemplo, en el inciso (B) del ejemplo 2.4 se encuentra la posición cuando la velocidad y el tiempo se conocen. De igual modo, si se conocen la velocidad y la posición final se aplica la ecuación 2.7 para encontrar el tiempo cuando el corredor está en dicha posición.

Una partícula bajo velocidad constante se mueve con una rapidez constante a lo largo de una línea recta. Ahora considere una partícula que se mueve con una rapidez constante a lo largo de una trayectoria curva. Esta situación se representa con el **modelo de partícula bajo rapidez constante**. La ecuación básica para este modelo es la ecuación 2.3, con la rapidez promedio v_{prom} sustituida por la rapidez constante v:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \tag{2.8}$$

Como ejemplo, considere una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular. Si la rapidez es 5.00 m/s y el radio de la trayectoria es de 10.0 m, se calcula el intervalo de tiempo requerido para completar un viaje alrededor del círculo:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(10.0\text{ m})}{5.00\text{ m/s}} = 12.6\text{ s}$$

Análisis de modelo — Partícula bajo velocidad constante

Imagínese un objeto en movimiento que puede ser modelado como una partícula. Si se mueve con rapidez constante por un desplazamiento Δx, en línea recta en un intervalo de tiempo Δt, su velocidad constante es

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.6}$$

La posición de la partícula como una función de tiempo está dada por

$$x_f = x_i + v_x t \tag{2.7}$$



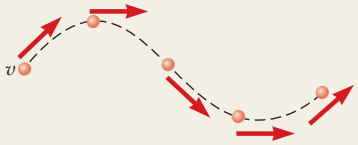
Ejemplos:

- un meteoroide viaja a través del espacio libre de gravedad
- un automóvil que viaja a una rapidez constante sobre una autopista recta
- un corredor que viaja a rapidez constante en un camino perfectamente recto
- un objeto que se mueve con rapidez terminal a través de un medio viscoso (capítulo 6)

Análisis de modelo **Partículas bajo rapidez constante**

Imagínese un objeto en movimiento que puede ser modelado como una partícula. Si se mueve con una rapidez constante a través de una distancia d a lo largo de una línea recta o una trayectoria curva en un intervalo de tiempo Δt, su rapidez constante es

$$v = \frac{d}{\Delta t} \tag{2.8}$$



Ejemplos:

- un planeta que viaja alrededor de una órbita perfectamente circular
- un automóvil que viaja con una rapidez constante en una pista curva
- un corredor que viaja con rapidez constante en una trayectoria curva
- una partícula cargada que se mueve a través de un campo magnético uniforme (capítulo 29)

2.4 Aceleración

En el ejemplo 2.3 se trabajó con una situación común en la cual la velocidad de una partícula cambia mientras se mueve. Cuando la velocidad de ésta cambia con el tiempo, se dice que la partícula *acelera*. Por ejemplo, la magnitud de la velocidad de un automóvil aumenta cuando se pisa el acelerador y disminuye cuando se aplican los frenos. Vea cómo cuantificar la aceleración.

Considere que un objeto representado como una partícula en movimiento a lo largo del eje x tiene una velocidad inicial v_{xi} en el tiempo t_i en la posición Ⓐ y una velocidad final v_{xf} en el tiempo t_f, en la posición Ⓑ como en la figura 2.6a. La curva roja en la figura 2.6b muestra cómo cambia la velocidad con el tiempo. La **aceleración promedio** $a_{x,\text{prom}}$ de la partícula se define como el cambio en velocidadΔv_x dividido entre el intervalo de tiempo t durante el que ocurre el cambio:

$$a_{x,\text{prom}} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \tag{2.9}$$

◀ Aceleración promedio

Como con la velocidad, cuando el movimiento a analizar sea unidimensional se usan los signos positivo y negativo para indicar la dirección de la aceleración. Puesto que las dimensiones de velocidad son L/T y la dimensión de tiempo es T, la aceleración tiene dimensiones de longitud divididas entre el tiempo al cuadrado, o L/T^2. La unidad del SI de aceleración es metros por segundo al cuadrado (m/s^2). Es más sencillo interpretar estas unidades si piensa en ellas como metros por segundo por segundo. Por ejemplo, considere que un objeto tiene una aceleración de $+2\ m/s^2$. Se puede formar una imagen mental del objeto que tiene una velocidad a lo largo de una línea recta y aumenta 2 m/s durante cada intervalo de 1 s. Si el objeto parte del

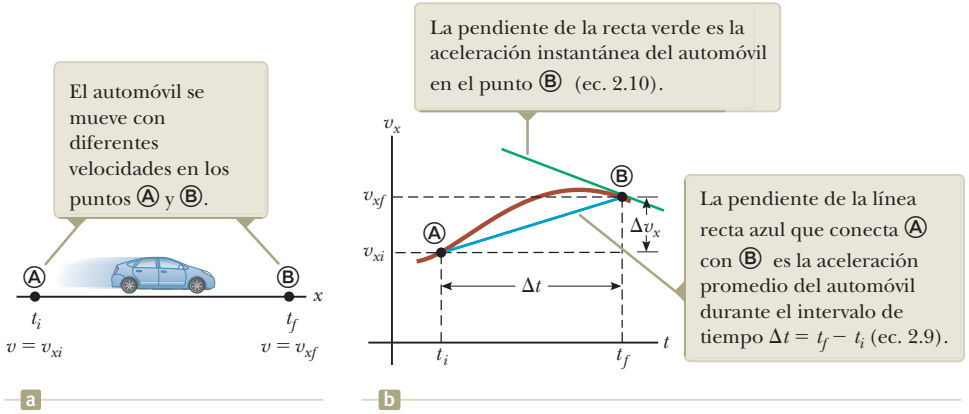


Figura 2.6 (a) Un automóvil, modelado como partícula, que se mueve a lo largo del eje x de Ⓐ a Ⓑ, tiene velocidad v_{xi} en $t = t_i$ y velocidad v_{xf} en $t = t_f$. (b) Gráfica velocidad-tiempo (roja-café) para la partícula que se mueve en una línea recta.

reposo, debe ser capaz de representarlo moviéndose con una velocidad de +2 m/s después de 1 s, a +4 m/s después de 2 s, etcétera.

En algunas situaciones el valor de la aceleración promedio puede ser diferente durante distintos intervalos de tiempo. Por lo tanto, es útil definir la **aceleración instantánea** como el límite de la aceleración promedio conforme Δt tiende a cero. Este concepto es análogo a la definición de velocidad instantánea discutida en la sección 2.2. Si imaginamos que el punto Ⓐ se acerca más y más al punto Ⓑ en la figura 2.6a y toma el límite de $\Delta v_x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero, se obtiene la aceleración instantánea en el punto Ⓑ:

Aceleración instantánea ▶

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \tag{2.10}$$

Esto es: la aceleración instantánea es igual a la derivada de la velocidad respecto al tiempo, que por definición es la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo. La pendiente de la línea verde en la figura 2.6b es igual a la aceleración instantánea en el punto Ⓑ. Observe que la figura 2.6b es una gráfica de la *velocidad-tiempo,* no es una gráfica de la *posición-tiempo* como en las figuras 2.1b, 2.3, 2.4 y 2.5. Por lo tanto, vemos que así como la velocidad de una partícula en movimiento es la pendiente en un punto sobre la gráfica x–t de la partícula, la aceleración de una partícula es la pendiente en un punto sobre la gráfica v_x–t de la partícula. Uno puede interpretar la derivada de la velocidad respecto al tiempo como la relación de cambio de velocidad en el tiempo. Si a_x es positiva, la aceleración está en la dirección x positiva; si a_x es negativa, la aceleración está en la dirección x negativa.

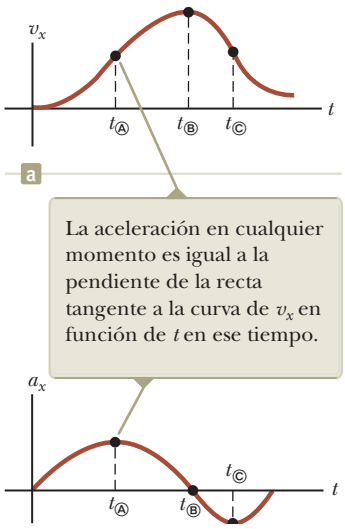


Figura 2.7 (a) La gráfica de velocidad-tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x. (b) La aceleración instantánea puede obtenerse a partir de la gráfica de velocidad-tiempo.

La figura 2.7 ilustra cómo una gráfica aceleración-tiempo se relaciona con una gráfica velocidad-tiempo. La aceleración en cualquier tiempo es la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo en dicho tiempo. Los valores positivos de la aceleración corresponden a los puntos en la figura 2.7a, donde la velocidad aumenta en la dirección x positiva. La aceleración alcanza un máximo en el tiempo $t_Ⓐ$, cuando la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo es un máximo. Después, la aceleración llega a cero en el tiempo $t_Ⓐ$, cuando la velocidad es un máximo (esto es: cuando la pendiente de la gráfica v_x–t es cero). La aceleración es negativa cuando la velocidad disminuye en la dirección x positiva, y llega a su valor más negativo en el tiempo $t_Ⓒ$.

Examen rápido 2.3 Haga una gráfica velocidad-tiempo para el automóvil de la figura 2.1a. Suponga que la rapidez límite para el camino en el que se desplaza el auto es 30 km/h. ¿Cierto o falso? El automóvil supera el límite de rapidez en algún momento dentro del intervalo de tiempo 0 − 50 s.

Para el caso de movimiento en una línea recta, la dirección de la velocidad de un objeto y la dirección de su aceleración se relacionan del modo siguiente. Cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en la misma dirección, el objeto aumenta su rapidez. Por otra parte, cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en direcciones opuestas, el objeto frena.

Para ayudar con esta discusión de los signos de velocidad y aceleración, se relaciona la aceleración de un objeto con la fuerza total ejercida sobre el objeto. En el capítulo 5 se establece formalmente que la **fuerza de un objeto es proporcional a la aceleración del mismo**:

$$F_x \propto a_x \tag{2.11}$$

Esta proporcionalidad indica que la aceleración es causada por una fuerza. Más aún, fuerza y aceleración son vectores, y los vectores actúan en la misma dirección. Debido a esto, piense acerca de los signos de la velocidad y la aceleración al considerar una fuerza aplicada a un objeto y que causa su aceleración. Suponga que velocidad y aceleración están en la misma dirección. Esta situación corresponde a un objeto que experimenta una fuerza que actúa en la misma dirección que su velocidad. En este caso, ¡el objeto aumenta su rapidez! Ahora suponga que velocidad y

aceleración están en direcciones opuestas. En esta situación, el objeto se mueve en alguna dirección y experimenta una fuerza que actúa en la dirección opuesta. Por lo tanto, ¡el objeto frena! Es muy útil igualar la dirección de la aceleración a la dirección de una fuerza, porque es más fácil, a partir de la experiencia cotidiana, pensar acerca de qué efecto tendrá una fuerza sobre un objeto que pensar sólo en términos de la dirección de la aceleración.

Examen rápido 2.4 Si un automóvil viaja hacia el Este y frena, ¿cuál es la dirección de la fuerza sobre el automóvil que hace que frene? **(a)** hacia el Este, **(b)** hacia el Oeste, **(c)** ni al Este ni al Oeste.

Desde ahora se usará el término *aceleración* para dar a entender aceleración instantánea. Cuando se hable de aceleración promedio, siempre se usará el adjetivo *promedio*. Puesto que $v_x = dx/dt$, la aceleración también se escribe como

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2.12)$$

Esto es: en un movimiento unidimensional, la aceleración es igual a la *segunda derivada* de x respecto del tiempo.

Prevención de riesgos ocultos 2.4

Aceleración negativa Tenga en mente que *la aceleración negativa no necesariamente significa que un objeto está frenando.* Si la aceleración es negativa y la velocidad es negativa, ¡el objeto está aumentando velocidad!

Prevención de riesgos ocultos 2.5

Desaceleración La palabra *desaceleración* tiene la connotación popular de *frenar*. En este libro no se usará esta palabra porque confunde la definición dada para aceleración negativa.

Ejemplo conceptual 2.5 Relaciones gráficas entre x, v_x y a_x

La posición de un objeto que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo, como en la figura 2.8a. Grafique la velocidad en función del tiempo y la aceleración en función del tiempo para el objeto.

SOLUCIÓN

La velocidad en cualquier instante es la pendiente de la tangente a la gráfica x–t en dicho instante. Entre $t = 0$ y $t = t_A$, la pendiente de la gráfica x-t aumenta uniformemente, de modo que la velocidad aumenta linealmente, como se muestra en la figura 2.8b. Entre t_A y t_B, la pendiente de la gráfica x–t es constante, de esa manera la velocidad permanece constante. Entre t_B y t_D, la pendiente de la gráfica x–t disminuye, de igual manera el valor de la velocidad en la gráfica v_x–t disminuye. En t_D, la pendiente de la gráfica x–t es cero, por eso la velocidad es cero en dicho instante. Entre t_D y t_E, la pendiente de la gráfica x–t y también la velocidad son negativas y disminuyen uniformemente en este intervalo. En el intervalo t_E a t_F, la pendiente de la gráfica x–t todavía es negativa, y en t_F va a cero. Por último, después de t_F, la pendiente de la gráfica x–t es cero, lo que significa que el objeto está en reposo para $t > t_F$.

La aceleración en cualquier instante es la pendiente de la tangente a la gráfica v_x–t en dicho instante. En la figura 2.8c se muestra la gráfica de aceleración en función del tiempo para ese objeto. La aceleración es constante y positiva entre 0 y t_A, donde la pendiente de la gráfica v_x–t es positiva. Es cero entre t_A y t_B y para $t > t_F$ porque la pendiente de la gráfica v_x–t es cero en estos tiempos. Es negativa entre t_B y t_E porque la pendiente de la gráfica v_x–t es negativa durante ese intervalo. Entre t_E y t_F la aceleración es positiva, como lo es entre 0 y t_A, pero mayor en valor porque la pendiente de la gráfica v_x–t es más inclinada.

Observe que los cambios súbitos en aceleración que se muestran en la figura 2.8c no son físicos. Tales cambios instantáneos no ocurren en la realidad.

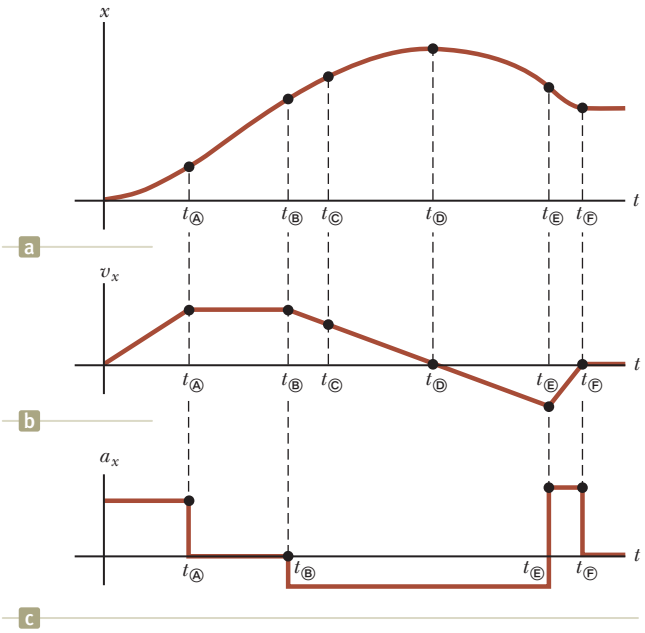


Figura 2.8 (Ejemplo conceptual 2.5) (a) Gráfica posición-tiempo para un objeto que se mueve a lo largo del eje x. (b) La gráfica velocidad-tiempo para el objeto se obtiene al medir la pendiente de la gráfica posición-tiempo en cada instante. (c) La gráfica aceleración-tiempo para el objeto se obtiene al medir la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo en cada instante.

Ejemplo 2.6 Aceleración promedio e instantánea

La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje x varía de acuerdo con la expresión $v_x = (40 - 5t^2)$, donde v_x está en m/s y t está en segundos.

(A) Encuentre la aceleración promedio en el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 2.0$ s.

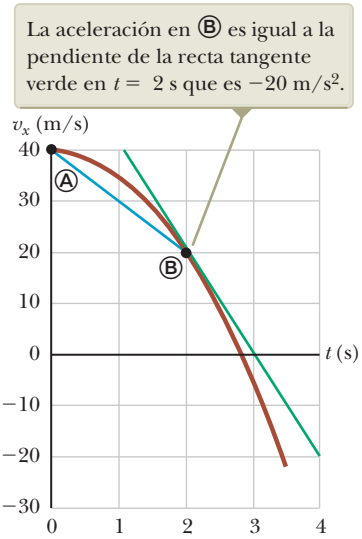


Figura 2.9 (Ejemplo 2.6) Gráfica velocidad-tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la expresión $v_x = 40 - 5t^2$.

SOLUCIÓN

Piense qué hace la partícula a partir de la representación matemática. ¿Se mueve en $t = 0$? ¿En qué dirección? ¿Aumenta velocidad o frena? La figura 2.9 es una gráfica v_x–t que se creó a partir de la expresión de velocidad en función del tiempo dada en el enunciado del problema. Puesto que la pendiente de toda la curva v_x–t es negativa, se espera que la aceleración sea negativa.

Encuentre las velocidades en $t_i = t_Ⓐ = 0$ y $t_f = t_Ⓑ = 2.0$ s al sustituir estos valores de t en la expresión para la velocidad:

$$v_{xⒶ} = 40 - 5t_Ⓐ^2 = 40 - 5(0)^2 = +40 \text{ m/s}$$
$$v_{xⒷ} = 40 - 5t_Ⓑ^2 = 40 - 5(2.0)^2 = +20 \text{ m/s}$$

Encuentre la aceleración promedio en el intervalo de tiempo especificado $\Delta t = t_Ⓑ - t_Ⓐ = 2.0$ s:

$$a_{x\text{prom}} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{v_{xⒷ} - v_{xⒶ}}{t_Ⓑ - t_Ⓐ} = \frac{20 \text{ m/s} - 40 \text{ m/s}}{2.0 \text{ s} - 0 \text{ s}}$$
$$= \boxed{-10 \text{ m/s}^2}$$

El signo negativo es consistente con las expectativas: la aceleración promedio, representada por la pendiente de la recta azul que une los puntos inicial y final en la gráfica velocidad-tiempo, es negativa.

(B) Determine la aceleración en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

Al saber que la velocidad inicial en cualquier tiempo t es $v_{xi} = 40 - 5t^2$, encuentre la velocidad en cualquier tiempo ulterior $t + \Delta t$:

$$v_{xf} = 40 - 5(t + \Delta t)^2 = 40 - 5t^2 - 10t\,\Delta t - 5(\Delta t)^2$$

Encuentre el cambio en velocidad en el intervalo de tiempo Δt:

$$\Delta v_x = v_{xf} - v_{xi} = -10t\,\Delta t - 5(\Delta t)^2$$

Para encontrar la aceleración en cualquier tiempo t, divida esta expresión entre Δt y tome el límite del resultado conforme Δt tiende a cero:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (-10t - 5\,\Delta t) = -10t$$

Sustituya $t = 2.0$ s:

$$a_x = (-10)(2.0) \text{ m/s}^2 = \boxed{-20 \text{ m/s}^2}$$

Puesto que la velocidad de la partícula es positiva y la aceleración es negativa en este instante, la partícula disminuye su velocidad.

Note que las respuestas a los incisos (A) y (B) son diferentes. La aceleración promedio en (A) es la pendiente de la recta azul que en la figura 2.9 conecta los puntos Ⓐ y Ⓑ. La aceleración instantánea en (B) es la pendiente de la recta verde tangente a la curva en el punto Ⓑ. Repare también en que la aceleración *no* es constante en este ejemplo. Las situaciones que involucran aceleración constante se tratan en la sección 2.6.

Hasta el momento se han evaluado las derivadas de una función al comenzar con la definición de la función y luego tomar el límite de una razón específica. Si está familiarizado con el cálculo, reconocerá que hay reglas específicas para tomar derivadas. Estas reglas, que se mencionan en el Apéndice B.6, le permiten evaluar derivadas rápidamente. Por ejemplo, una regla dice que la derivada de cualquier constante es cero. Como otro ejemplo, considere que x es proporcional a alguna potencia de t, como en la expresión

$$x = At^n$$

donde A y n son constantes. (Esta expresión es una forma funcional muy común.) La derivada de x respecto a t es

$$\frac{dx}{dt} = nAt^{n-1}$$

Al aplicar esta regla al ejemplo 2.6, en el que $v_x = 40 - 5t^2$, de inmediato se encuentra que la aceleración es $a_x = dv_x/dt = -10t$, como se encontró en el inciso (B) del ejemplo.

2.5 Diagramas de movimiento

Con frecuencia los conceptos de velocidad y aceleración se confunden uno con otro, pero en realidad son cantidades muy diferentes. Al formar una representación mental de un objeto en movimiento, a veces es útil usar una representación pictórica llamada *diagrama de movimiento* para describir la velocidad y la aceleración mientras un objeto está en movimiento.

Un diagrama de movimiento se forma al imaginar una fotografía *estroboscópica* de un objeto en movimiento, que muestra varias imágenes del objeto tomadas conforme la luz estroboscópica destella en intervalos constantes. La figura 2.1a es un diagrama de movimiento para el automóvil estudiado en la sección 2.1. La figura 2.10 representa tres conjuntos de fotografías estroboscópicas de automóviles que se mueven a lo largo de una autopista recta en una sola dirección, de izquierda a derecha. Los intervalos de tiempo entre los destellos del estroboscopio son iguales en cada parte del diagrama. De modo que, para no confundir las dos cantidades vectoriales, en la figura 2.10 se usa rojo para los vectores velocidad y morado para los vectores aceleración. Los vectores se muestran en varios instantes durante el movimiento del objeto. Describa el movimiento del automóvil en cada diagrama.

En la figura 2.10a las imágenes del automóvil están igualmente espaciadas, lo que muestra que el automóvil se mueve a través del mismo desplazamiento en cada intervalo de tiempo. Este espaciamiento igual es consistente con el automóvil que se mueve con *velocidad positiva constante* y *aceleración cero*. Se podría modelar el automóvil como una partícula y describirlo con el modelo de partícula bajo velocidad constante.

En la figura 2.10b las imágenes se separan más conforme avanza el tiempo. En este caso, el vector velocidad aumenta en longitud con el tiempo, porque el desplazamiento del automóvil entre posiciones adyacentes aumenta en el tiempo. Esta característica sugiere que el automóvil se mueve con una velocidad positiva y una aceleración positiva. La velocidad y la aceleración están en la misma dirección. En términos de la anterior discusión de fuerza, imagine una fuerza que jala al automóvil en la misma dirección en que se mueve: aumenta velocidad.

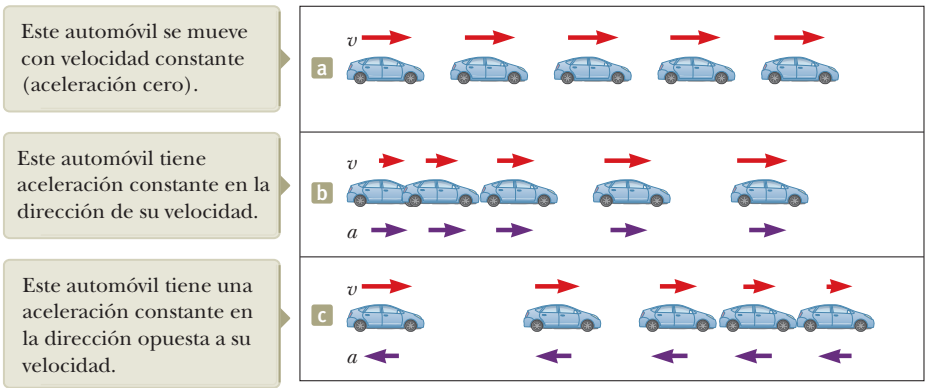


Figura 2.10 Diagramas de movimiento de un automóvil que se mueve a lo largo de una carretera recta en una sola dirección. La velocidad en cada instante está indicada por una flecha roja, y la aceleración constante se indica mediante una flecha de color morado.

En la figura 2.10c, el automóvil frena conforme se mueve a la derecha porque su desplazamiento entre imágenes adyacentes disminuye con el tiempo. Este caso sugiere que el automóvil se mueve hacia la derecha con una aceleración negativa. La longitud del vector velocidad disminuye en el tiempo y eventualmente llega a cero. A partir de este diagrama se ve que los vectores aceleración y velocidad *no* están en la misma dirección. El automóvil se mueve con una *velocidad positiva*, pero con una *aceleración negativa*. (Este tipo de movimiento se muestra para un automóvil que derrapa hasta detenerse después de aplicar los frenos.) La velocidad y la aceleración están en direcciones opuestas. En términos de la anterior discusión de fuerza, imagine una fuerza que jala el automóvil en dirección opuesta a la que se mueve: frena.

Los vectores aceleración morado en los incisos (b) y (c) de la figura 2.10 tienen todos la misma longitud. Por lo tanto, estos diagramas representan movimiento de una *partícula bajo aceleración constante*. Este modelo importante de análisis se discutirá en la siguiente sección.

Examen rápido 2.5 ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero? **(a)** Si un automóvil viaja hacia el Este, su aceleración debe estar hacia el Este. **(b)** Si un automóvil frena, su aceleración debe ser negativa. **(c)** Una partícula con aceleración constante nunca puede detenerse ni permanecer detenida.

2.6 Análisis de modelo: la partícula bajo aceleración constante

Si la aceleración de una partícula varía con el tiempo, su movimiento es complejo y difícil de analizar. Sin embargo, un tipo muy común y simple de movimiento unidimensional es aquel en el que la aceleración es constante. En tal caso, la aceleración promedio $a_{x,\text{prom}}$ en cualquier intervalo de tiempo es numéricamente igual a la aceleración instantánea a_x en cualquier instante dentro del intervalo, y la velocidad cambia con la misma proporción a lo largo del movimiento. Esta situación ocurre con suficiente frecuencia como para que se le identifique como un análisis de modelo: la **partícula bajo aceleración constante**. En la discusión que sigue se generan varias ecuaciones que describen el movimiento de una partícula para este modelo.

Si en la ecuación 2.9 sustituye $a_{x,\text{prom}}$ con a_x y toma $t_i = 0$ y t_f como cualquier tiempo t, encontramos que

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t - 0}$$

o

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \quad (\text{para } a_x \text{ constante}) \tag{2.13}$$

Esta poderosa expresión permite determinar la velocidad de un objeto en *cualquier* tiempo t, si se conoce la velocidad inicial v_{xi} del objeto y su aceleración a_x (constante). En la figura 2.11b se muestra una gráfica velocidad-tiempo para este movimiento con aceleración constante. La gráfica es una línea recta, cuya pendiente es la aceleración a_x; la pendiente (constante) es consistente con $a_x = dv_x/dt$ constante. Note que la pendiente es positiva, lo que indica una aceleración positiva. Si la aceleración fuese negativa, la pendiente de la recta en la figura 2.11b sería negativa. Cuando la aceleración es constante, la gráfica de aceleración en función del tiempo (figura 2.11c) es una línea recta que tiene una pendiente cero.

Puesto que la velocidad con aceleración constante varía linealmente en el tiempo, de acuerdo con la ecuación 2.13, se expresa la velocidad promedio en cualquier intervalo de tiempo como la media aritmética de la velocidad inicial v_{xi} y la velocidad final v_{xf}:

$$v_{x,\text{prom}} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \quad (\text{para } a_x \text{ constante}) \tag{2.14}$$

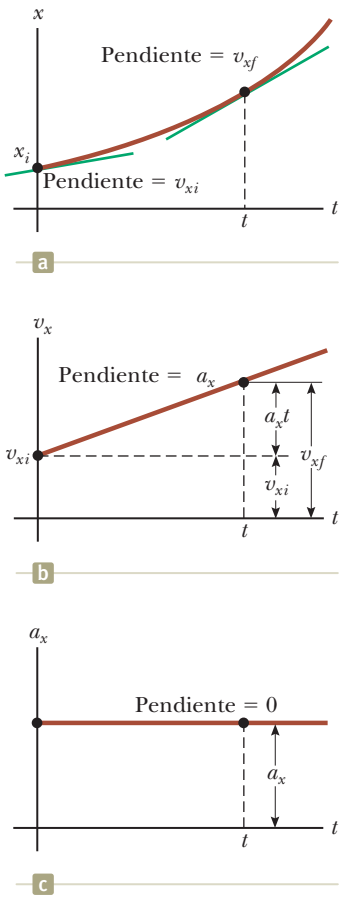


Figura 2.11 Una partícula bajo aceleración constante a_x que se mueve a lo largo del eje x: (a) gráfica posición-tiempo, (b) gráfica velocidad-tiempo y (c) gráfica aceleración-tiempo.

Note que esta expresión para la velocidad promedio *sólo* se aplica en situaciones en que la aceleración es constante.

Ahora es necesario aplicar las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.14 para obtener la posición de un objeto como función del tiempo. Al recordar que x en la ecuación 2.2 representa $x_f - x_i$ y reconocer que $\Delta t = t_f - t_i = t - 0 = t$, se encuentra que

$$x_f - x_i = v_{x,\text{prom}}\, t = \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\, t$$

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\, t \quad (\text{para } a_x \text{ constante}) \tag{2.15}$$

Posición como una función de la velocidad y el tiempo para la partícula bajo el modelo de aceleración constante

Esta ecuación proporciona la posición final de la partícula en el tiempo t en términos de las velocidades inicial y final.

Otra expresión útil para la posición de una partícula bajo aceleración constante se obtiene al sustituir la ecuación 2.13 en la ecuación 2.15:

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}[v_{xi} + (v_{xi} + a_x t)]\, t$$

$$x_f = x_i + v_{xi} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 \quad (\text{para } a_x \text{ constante}) \tag{2.16}$$

Posición como una función del tiempo para la partícula bajo el modelo de aceleración constante

Esta ecuación proporciona la posición final de la partícula en el tiempo t en términos de la posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración constante.

La gráfica posición-tiempo para movimiento con aceleración constante (positiva) que se muestra en la figura 2.11a se obtiene de la ecuación 2.16. Note que la curva es una parábola. La pendiente de la recta tangente a esta curva en $t = 0$ es igual a la velocidad inicial v_{xi}, y la pendiente de la recta tangente en cualquier tiempo posterior t es igual a la velocidad v_{xf} en dicho tiempo.

Por último, es posible obtener una expresión para la velocidad final que no contenga tiempo como variable al sustituir el valor de t de la ecuación 2.13 en la ecuación 2.15:

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\left(\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}\right) = x_i + \frac{v_{xf}^2 - v_{xi}^2}{2a_x}$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \quad (\text{para } a_x \text{ constante}) \tag{2.17}$$

Velocidad como una función de la posición para la partícula bajo el modelo de aceleración constante

Esta ecuación proporciona la velocidad final en términos de la velocidad inicial, la aceleración constante y la posición de la partícula.

Para movimiento con aceleración cero, se ve de las ecuaciones 2.13 y 2.16 que

$$\left.\begin{aligned} v_{xf} &= v_{xi} = v_x \\ x_f &= x_i + v_x t \end{aligned}\right\} \quad \text{cuando } a_x = 0$$

Esto es, cuando la aceleración de una partícula es cero, su velocidad es constante y su posición cambia linealmente con el tiempo. En términos de modelos, cuando la aceleración de una partícula es cero, el modelo de partícula bajo aceleración constante se reduce al modelo de partícula bajo velocidad constante (sección 2.3).

Las ecuaciones de la 2.13 a la 2.17 son **ecuaciones cinemáticas** útiles para resolver cualquier problema que involucre una partícula bajo aceleración constante en una dimensión. Estas ecuaciones se presentan juntas en la página 38. La elección de cuál ecuación usar en una situación dada depende de qué sepa de antemano. A veces es necesario usar dos de estas ecuaciones para resolver dos incógnitas. Debe reconocer que las cantidades que varían durante el movimiento son la posición x_f, la velocidad v_{xf} y el tiempo t.

Al resolver numerosos ejercicios y problemas obtendrá mucha experiencia en el uso de estas ecuaciones. Muchas veces descubrirá que se puede usar más de un método para obtener una solución. Recuerde que estas ecuaciones de cinemática *no se pueden* usar en una situación en que la aceleración varía con el tiempo. Son útiles sólo cuando la aceleración es constante.

Examen rápido 2.6 En la figura 2.12 relacione cada gráfica v_x–t de la parte superior con la gráfica a_x–t de la parte inferior que mejor describa el movimiento.

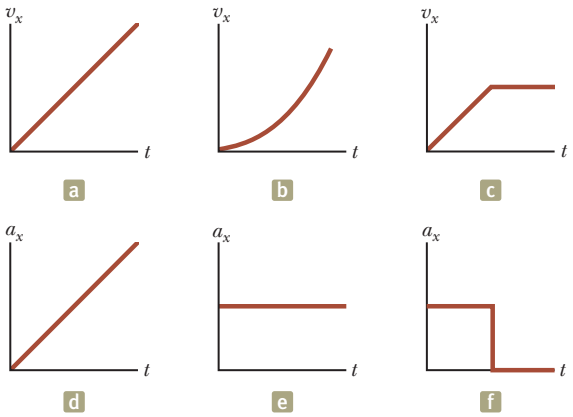


Figura 2.12 (Examen rápido 2.6) Los incisos (a), (b) y (c) son gráficas v_x–t de objetos en movimiento unidimensional. Las posibles aceleraciones de cada objeto se muestran en forma desordenada en (d), (e) y (f).

Análisis de modelo Partículas bajo aceleración constante

Imagínese un objeto en movimiento que se puede modelar como una partícula. Si se comienza desde la posición inicial x_i y velocidad v_{xi} y se mueve en una línea recta con una aceleración constante a_x, su posición posterior y la velocidad se describen por las siguientes ecuaciones cinemáticas:

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \tag{2.13}$$

$$v_{x,\text{prom}} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \tag{2.14}$$

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \tag{2.15}$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \tag{2.16}$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \tag{2.17}$$



Ejemplos

- un automóvil acelerando a un ritmo constante a lo largo de una autopista recta
- un objeto que cae en ausencia de resistencia del aire (sección 2.7)
- un objeto sobre el que actúa una fuerza neta constante (capítulo 5)
- una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme (capítulo 23)

Ejemplo 2.7 Aterrizaje en portaaviones AM

Un jet aterriza en un portaaviones a 140 mi/h (≈ 63 m/s).

(A) ¿Cuál es su aceleración (supuesta constante) si se detiene en 2.0 s debido a un cable de arresto que traba al jet y lo deja en reposo?

SOLUCIÓN

Es posible que haya visto películas o programas de televisión en los que un jet aterriza sobre un portaaviones y se lleva al reposo sorprendentemente rápido mediante un cable de arresto. Una lectura cuidadosa del problema revela que, además de estar dada la rapidez inicial de 63 m/s, también se sabe que la rapidez final es cero. Puesto que la aceleración del jet se supone constante, lo modelamos como una *partícula bajo aceleración constante*. El eje x se define como la dirección de movimiento del jet. Note también que no se tiene información acerca del cambio en posición del jet mientras frena.

2.7 continuación

La ecuación 2.13 es la única en el modelo de partícula bajo aceleración constante que no involucra la posición, de modo que se le usa para encontrar la aceleración del jet, representado como partícula:

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t} \approx \frac{0 - 63\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s}} = -32\ \text{m/s}^2$$

(B) Si el jet toca al portaaviones en la posición $x_i = 0$, ¿cuál es su posición final?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 2.15 para resolver la posición final:

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t = 0 + \tfrac{1}{2}(63\ \text{m/s} + 0)(2.0\ \text{s}) = 63\ \text{m}$$

Dado el tamaño del portaaviones, una longitud de 63 m parece razonable para detener al jet. La idea de usar cables de arresto para frenar a la aeronave que aterriza y permitirle aterrizar con seguridad en los barcos surgió en la Primera Guerra Mundial. Los cables todavía son una parte vital de la operación de los modernos portaaviones.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que el jet aterriza en la cubierta del portaaviones con una rapidez mayor que 63 m/s pero tiene la misma aceleración debida al cable calculada en el inciso (A). ¿Cómo cambiará esto la respuesta del inciso (B)?

Respuesta Si el jet viaja más rápido que al principio se detendrá más lejos de su punto de partida, de modo que la respuesta del inciso (B) sería más grande. Matemáticamente, en la ecuación 2.15 se ve que, si v_{xi} es más grande, x_f será más grande.

Ejemplo 2.8 ¡Observe el límite de rapidez! AM

Un automóvil que viaja con una rapidez constante de 45.0 m/s pasa por donde está un patrullero en motocicleta oculto detrás de un anuncio espectacular. Un segundo después de que el automóvil pasa el anuncio, el patrullero sale de su escondite para detener al automóvil, que acelera con una razón constante de 3.00 m/s². ¿Cuánto tiempo tarda en dar alcance al automóvil?

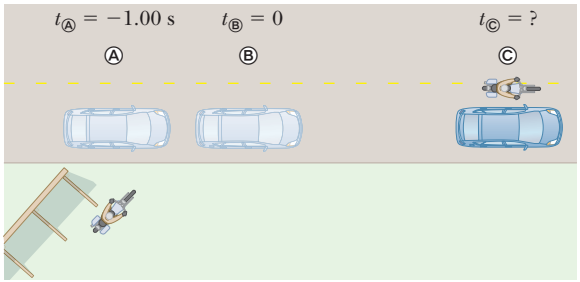


Figura 2.13 (Ejemplo 2.8) Un automóvil rápido pasa ante un patrullero escondido.

SOLUCIÓN

Una representación pictórica (figura 2.13) ayuda a clarificar la secuencia de eventos. El automóvil se modela como una *partícula bajo velocidad constante* y el patrullero se modela como una *partícula bajo aceleración constante*.

Primero, escriba expresiones para la posición de cada vehículo como función del tiempo. Es conveniente elegir la posición del anuncio como el origen y hacer $t_Ⓑ = 0$ como el tiempo en que el patrullero comienza a moverse. En dicho instante, el automóvil ya recorrió una distancia de 45.0 m desde el anuncio, porque viajó con una rapidez constante de $v_x = 45.0$ m/s durante 1 s. Por lo tanto, la posición inicial del automóvil es $x_Ⓑ = 45.0$ m.

Usando el modelo de partícula bajo aceleración constante, se aplica la ecuación 2.7 para obtener la posición del automóvil en cualquier tiempo t:

$$v_{x\,\text{automóvil}} = x_Ⓑ + v_{x\,\text{automóvil}}\,t$$

Una revisión rápida muestra que, en $t = 0$, esta expresión da la posición inicial correcta del automóvil cuando el patrullero comienza a moverse: $x_{\text{automóvil}} = x_Ⓑ = 45.0$ m.

El patrullero parte del reposo en $t_Ⓑ = 0$ y acelera a $a_x = 3.00$ m/s² alejándose del origen. Use la ecuación 2.16 para dar la posición en cualquier tiempo t:

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$
$$x_{\text{patrullero}} = 0 + (0)t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

Iguale las dos posiciones para representar al patrullero dando alcance al automóvil en la posición Ⓒ:

$$x_{\text{patrullero}} = x_{\text{automóvil}}$$
$$\tfrac{1}{2}a_x t^2 = x_Ⓑ + v_{x\,\text{automóvil}}\,t$$

continúa

2.8 continuación

Simplifique para obtener una ecuación cuadrática:

$$\tfrac{1}{2}a_x t^2 - v_{x\,\text{automóvil}}\, t - x_{\text{Ⓑ}} = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática para el tiempo en que el policía atrapa al automóvil (para obtener ayuda en la solución de ecuaciones cuadráticas, consulte el Apéndice B.2):

$$t = \frac{v_{x\,\text{automóvil}} \pm \sqrt{v_{x\,\text{automóvil}}^2 + 2a_x x_{\text{Ⓑ}}}}{a_x}$$

$$(1)\quad t = \frac{v_{x\,\text{automóvil}}}{a_x} \pm \sqrt{\frac{v_{x\,\text{automóvil}}^2}{a_x^{\,2}} + \frac{2x_{\text{Ⓑ}}}{a_x}}$$

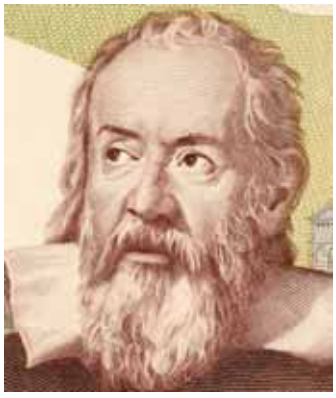
Se evalúa la solución, se elige la raíz positiva, ya que es la única opción coherente con un tiempo $t > 0$:

$$t = \frac{45.0\ \text{m/s}}{3.00\ \text{m/s}^2} + \sqrt{\frac{(45.0\ \text{m/s})^2}{(3.00\ \text{m/s}^2)^2} + \frac{2(45.0\ \text{m})}{3.00\ \text{m/s}^2}} = 31.0\ \text{s}$$

¿Por qué no elegimos $t = 0$ como el tiempo en que el automóvil pasa al patrullero? Si así lo hiciéramos, no seríamos capaces de usar el modelo de partícula bajo aceleración constante para el policía. Su aceleración sería cero para el primer segundo y 3.00 m/s^2 durante el tiempo restante. Al definir el tiempo $t = 0$ como cuando la policía comienza a moverse, podemos usar el modelo partícula bajo aceleración constante de su movimiento para todos los tiempos positivos.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el patrullero tiene una motocicleta más poderosa con una aceleración mayor? ¿Cómo cambiaría el tiempo en que el patrullero da alcance al automóvil?

Respuesta Si la motocicleta tuviese una aceleración mayor, el patrullero alcanzaría al automóvil más rápido, de modo que la respuesta para el tiempo sería menor que 31 s. Debido a que todos los términos en el lado derecho de la ecuación (1) tienen la aceleración a_x en el denominador, se ve simbólicamente que el aumento de la aceleración disminuirá el tiempo en que el patrullero atrapa el coche.



Georgios Kollidas/Shutterstock.com

Galileo Galilei
Físico y astrónomo italiano (1564-1642)
Galileo formuló las leyes que gobiernan el movimiento de los objetos en caída libre e hizo muchos otros descubrimientos reveladores en física y astronomía. Galileo defendió públicamente la afirmación de Nicolás Copérnico de que el Sol está en el centro del Universo (sistema heliocéntrico). Publicó *Diálogo sobre dos nuevos sistemas del mundo* para apoyar el modelo copernicano, que la Iglesia católica declaró herético.

2.7 Objetos en caída libre

Es bien sabido que, en ausencia de resistencia del aire, todos los objetos que se dejan caer cerca de la superficie de la Tierra caen hacia ella con la misma aceleración constante bajo la influencia de la gravedad de la Tierra. No fue sino hasta alrededor de 1600 que se aceptó esta conclusión. Antes de esta época, las enseñanzas del filósofo griego Aristóteles (384-322 a.C.) sostenían que los objetos más pesados caían más rápido que los ligeros.

El italiano Galileo Galilei (1564-1642) originó las ideas actuales acerca de los objetos que caen. Hay una leyenda de que él demostró el comportamiento de los objetos que caen al observar que dos pesos diferentes soltados simultáneamente de la torre inclinada de Pisa golpeaban el suelo aproximadamente al mismo tiempo. Aunque hay ciertas dudas de que llevó a cabo este experimento particular, está bien establecido que Galileo realizó muchos experimentos sobre objetos en movimiento en planos inclinados. En sus experimentos hacía rodar bolas por un plano ligeramente inclinado y medía las distancias que recorrían en intervalos de tiempo sucesivos. El propósito del plano inclinado era reducir la aceleración, lo que hizo posible que tomara mediciones precisas de los intervalos de tiempo. Al aumentar gradualmente la pendiente del plano, al final fue capaz de extraer conclusiones acerca de los objetos en caída libre, porque una bola en caída libre es equivalente a una bola que se mueve por un plano inclinado.

Tal vez quiera intentar el siguiente experimento. Suelte simultáneamente, desde la misma altura, una moneda y un trozo de papel arrugado. Si los efectos de la resistencia del aire son despreciables, ambos tendrán el mismo movimiento y golpearán el suelo al mismo tiempo. En el caso idealizado, en el que la resistencia del aire está ausente, a tal movimiento se le conoce como *caída libre*. Si este mismo experimento

se pudiese realizar en un vacío, en el que la resistencia del aire realmente es despreciable, el papel y la moneda caerían con la misma aceleración aun cuando el papel no esté arrugado. El 2 de agosto de 1971, el astronauta David Scott realizó tal demostración en la Luna. Soltó simultáneamente un martillo y una pluma y los dos objetos cayeron al mismo tiempo en la superficie lunar. ¡Seguramente esta simple demostración habría complacido a Galileo!

Cuando se usa la expresión *objeto en caída libre* no necesariamente se hace referencia a un objeto que se suelta desde el reposo. Un objeto en caída libre es cualquier objeto que se mueve libremente sólo bajo la influencia de la gravedad, sin importar su movimiento inicial. Los objetos que se lanzan hacia arriba o abajo y los que se liberan desde el reposo están todos en caída libre una vez que se liberan. Cualquier objeto en caída libre experimenta una aceleración dirigida hacia abajo, sin importar su movimiento inicial.

La magnitud de la *aceleración de caída libre,* también llamada *aceleración debida a la gravedad,* se denotará mediante el símbolo g. El valor de g cerca de la superficie de la Tierra disminuye conforme aumenta la altitud. Además, ocurren ligeras variaciones en g con cambios en la latitud. En la superficie de la Tierra, el valor de g es aproximadamente 9.80 m/s^2. A menos que se establezca de otro modo, se usará este valor para g cuando se realicen cálculos. Para hacer estimaciones rápidas, use $g = 10$ m/s^2.

Si se ignora la resistencia del aire y se supone que la aceleración de caída libre no varía con la altitud en distancias verticales cortas, el movimiento de un objeto en caída libre que se mueve verticalmente es equivalente al movimiento de una partícula bajo aceleración constante en una dimensión. Debido a eso, se aplican las ecuaciones desarrolladas en la sección 2.6 para que se aplique el modelo de una partícula bajo aceleración constante. La única modificación que se necesita hacer en estas ecuaciones para los objetos en caída libre es notar que el movimiento es en la dirección vertical (la dirección y) en lugar de en la dirección horizontal (x) y que la aceleración es hacia abajo y tiene una magnitud de 9.80 m/s^2. En consecuencia, siempre se elegirá $a_y = -g = -9.80$ m/s^2, donde el signo negativo significa que la aceleración de un objeto en caída libre es hacia abajo. En el capítulo 13 se estudiará cómo tratar con las variaciones en g con la altitud.

Examen rápido 2.7 Examine las siguientes opciones: (a) aumenta, (b) disminuye, (c) aumenta y luego disminuye, (d) disminuye y luego aumenta, (e) permanece igual. A partir de estas opciones, seleccione lo que le ocurre a **(i)** la aceleración y **(ii)** la rapidez de una bola después de que se lanza hacia arriba en el aire.

Prevención de riesgos ocultos 2.6

***g* y g** Asegúrese de no confundir el símbolo cursivo g para la aceleración en caída libre con el símbolo no cursivo g que se usa como abreviatura de la unidad gramo.

Prevención de riesgos ocultos 2.7

***g* es un número positivo.** Es tentador sustituir -9.80 m/s^2 por g, pero resista la tentación. La aceleración gravitacional descendente se indica explícitamente al establecer la aceleración como $a_y = -g$.

Prevención de riesgos ocultos 2.8

Aceleración en lo alto del movimiento Un error común es considerar que la aceleración de un proyectil en lo alto de su trayectoria es cero. Aunque la velocidad en lo alto del movimiento de un objeto que se lanza hacia arriba momentáneamente va a cero, *la aceleración todavía corresponde a la gravedad* en este punto. Si la velocidad y la aceleración fuesen cero, el proyectil permanecería en lo alto.

Ejemplo conceptual 2.9 Los paracaidistas osados

Un paracaidista salta de un helicóptero suspendido. Pocos segundos después, salta otro paracaidista y ambos caen a lo largo de la misma línea vertical. Ignore la resistencia del aire, de modo que ambos paracaidistas caen con la misma aceleración. ¿La diferencia en sus magnitudes de velocidad permanece igual a lo largo de la caída? ¿La distancia vertical entre ellos permanece igual durante la caída?

SOLUCIÓN

En cualquier instante dado, las magnitudes de velocidad de los paracaidistas son diferentes porque uno salta primero. Sin embargo, en cualquier intervalo de tiempo Δt después de este instante, los dos paracaidistas aumentan sus rapideces en la misma cantidad porque tienen la misma aceleración. Por lo tanto, la diferencia en sus magnitudes de velocidad permanece igual a lo largo de la caída.

El primero que saltó siempre tiene una mayor rapidez que el segundo. Por lo tanto, en un intervalo de tiempo dado, el primer paracaidista cubre una mayor distancia que el segundo. En consecuencia, la distancia de separación entre ellos aumenta.

Ejemplo 2.10 ¡No es un mal lanzamiento para un novato! AM

A una piedra que se lanza desde lo alto de un edificio se le da una velocidad inicial de 20.0 m/s directo hacia arriba. El edificio tiene 50.0 m de alto y la piedra apenas libra el borde del techo en su camino hacia abajo, como se muestra en la figura 2.14.

(A) Use $t_{Ⓐ} = 0$ como el tiempo cuando la piedra deja la mano del lanzador en la posición Ⓐ y determine el tiempo en que la piedra llega a su altura máxima.

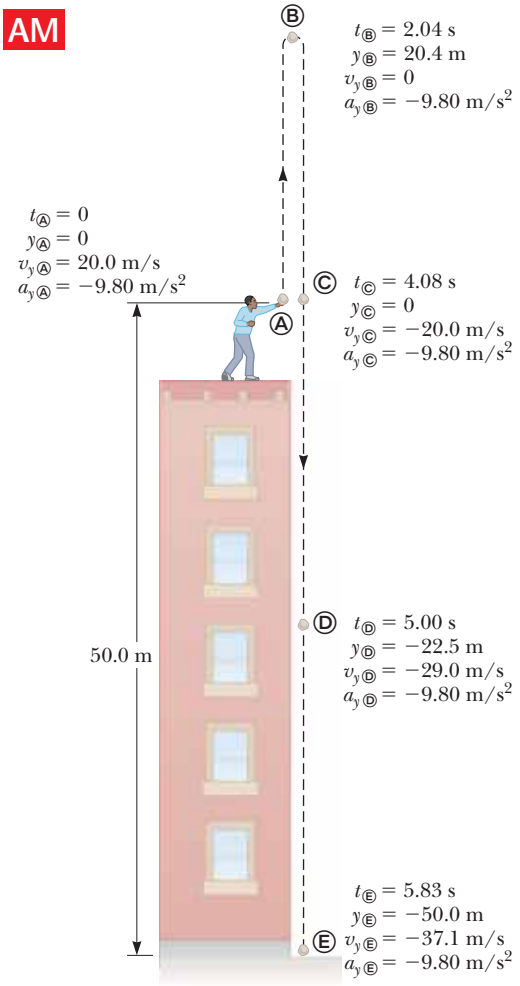


Figura 2.14 (Ejemplo 2.10) Valores de posición, velocidad y aceleración en diferentes tiempos para una piedra en caída libre que se lanza inicialmente hacia arriba con una velocidad $v_{yi} = 20.0$ m/s. Muchas de las cantidades en las etiquetas para los puntos en el movimiento de la piedra se calculan en el ejemplo. ¿Puede verificar los valores que no están calculados?

SOLUCIÓN

Tal vez usted tenga experiencia en soltar objetos o lanzarlos hacia arriba y observarlos caer, de modo que este problema debe describir una experiencia familiar. Para simular esta situación, lance un pequeño objeto hacia arriba y observe el intervalo de tiempo necesario para que caiga al suelo. Ahora imagine que lanza ese objeto hacia arriba desde la azotea de un edificio. Debido a que la piedra está en caída libre, se modela como una *partícula bajo aceleración constante* debida a la gravedad.

Considere que la velocidad inicial es positiva porque la piedra es lanzada hacia arriba. La velocidad cambia de signo después de que la piedra alcanza su punto más alto, pero la aceleración de la piedra será *siempre* hacia abajo de manera que siempre tendrá un valor negativo. Seleccione un punto inicial justo después de que la piedra sale de la mano de la persona y un punto final en la altura máxima de su vuelo.

Use la ecuación 2.13 para calcular el tiempo en que la piedra llega a su altura máxima:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t \quad \rightarrow \quad t = \frac{v_{yf} - v_{yi}}{a_y}$$

Sustituya valores numéricos:

$$t = t_{Ⓑ} = \frac{0 - 20.0 \text{ m/s}}{-9.80 \text{ m/s}^2} = \boxed{2.04 \text{ s}}$$

(B) Encuentre la altura máxima de la piedra.

SOLUCIÓN

Al igual que en el inciso (A), seleccione los puntos inicial y final al principio y al final del vuelo hacia arriba.

Sea $y_{Ⓐ} = 0$ y sustituya el tiempo del inciso (A) en la ecuación 2.16 para encontrar la altura máxima:

$$y_{máx} = y_{Ⓑ} = y_{Ⓐ} + v_{xⒶ} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2$$

$$y_{Ⓑ} = 0 + (20.0 \text{ m/s})(2.04 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)(2.04 \text{ s})^2 = \boxed{20.4 \text{ m}}$$

(C) Determine la velocidad de la piedra cuando regresa a la altura desde la que se lanzó.

SOLUCIÓN

Seleccione el punto inicial en el que se lanzó la piedra y el punto final, cuando pasa por esta posición bajando.

Sustituya los valores conocidos en la ecuación 2.17:

$$v_{yⒸ}^2 = v_{yⒶ}^2 + 2a_y(y_Ⓒ - y_Ⓐ)$$

$$v_{yⒸ}^2 = (20.0 \text{ m/s})^2 + 2(-9.80 \text{ m/s}^2)(0 - 0) = 400 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_{yⒸ} = \boxed{-20.0 \text{ m/s}}$$

2.10 continuación

Cuando se saca la raíz cuadrada, se elige una raíz positiva o una negativa. Se elige la raíz negativa porque se sabe que la piedra se mueve hacia abajo al punto Ⓒ. La velocidad de la piedra cuando llega de vuelta a su altura original es igual en magnitud a su velocidad inicial pero es opuesta en dirección.

(D) Encuentre la velocidad y posición de la piedra en $t = 5.00$ s.

SOLUCIÓN

Seleccione el punto inicial en el que se lanzó la piedra y el punto final, cuando pasa esta posición bajando.

Calcule la velocidad en Ⓓ a partir de la ecuación 2.13:

$$v_{y\text{Ⓓ}} = v_{y\text{Ⓐ}} + a_y t = 20.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ s}) = -29.0 \text{ m/s}$$

Use la ecuación 2.16 para encontrar la posición de la piedra en $t_{\text{Ⓓ}} = 5.00$ s:

$$\begin{aligned} y_{\text{Ⓓ}} &= y_{\text{Ⓐ}} + v_{y\text{Ⓐ}} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2 \\ &= 0 + (20.0 \text{ m/s})(5.00 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ s})^2 \\ &= -22.5 \text{ m} \end{aligned}$$

La elección del tiempo definida como $t = 0$ es arbitraria y depende de usted seleccionarla. Como ejemplo de esta arbitrariedad, elija $t = 0$ como el tiempo en que la piedra está en el punto más alto de su movimiento. Luego resuelva los incisos (C) y (D) de nuevo usando este nuevo instante inicial y note que sus respuestas son iguales que las anteriores.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el edificio tuviese 30.0 m de altura en lugar de 50.0 m? ¿Qué respuestas cambiarían en los incisos (A) a (D)?

Respuesta Ninguna de las respuestas cambiaría. Todo el movimiento tiene lugar en el aire durante los primeros 5.00 s. (Observe que incluso para un edificio de 30.0 m de alto, la piedra está arriba del suelo en $t = 5.00$ s.) Por lo tanto, la altura del edificio no es un problema. Matemáticamente, si se observan de nuevo los cálculos, se ve que nunca se ingresó la altura del edificio en ninguna ecuación.

2.8 Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo

Esta sección supone que el lector está familiarizado con las técnicas del cálculo integral. Si aún no estudia integración en su curso de cálculo, debe saltar esta sección o cubrirla después de que se familiarice con la integración.

La velocidad de una partícula que se mueve en línea recta se obtiene si se conoce su posición como función del tiempo. En términos matemáticos, la velocidad es igual a la derivada de la posición respecto al tiempo. También es posible encontrar la posición de una partícula si se conoce su velocidad como función del tiempo. En cálculo, al procedimiento que se usa para realizar esta tarea se le conoce como *integración* o como encontrar la *antiderivada*. En términos gráficos, es equivalente a encontrar el área bajo una curva.

Ponga por caso que la gráfica v_x–t para una partícula que se mueve a lo largo del eje x es como se muestra en la figura 2.15. Divida el intervalo de tiempo $t_f - t_i$ en muchos pequeños intervalos, cada uno de duración Δt_n. A partir de la definición de velocidad promedio es claro que el desplazamiento de la partícula durante cualquier intervalo pequeño, como el sombreado en la figura 2.15, está dado por $\Delta x_n = v_{xn,\text{prom}} \Delta t_n$, donde $v_{xn,\text{prom}}$ es la velocidad promedio en dicho intervalo. En consecuencia, el desplazamiento durante este pequeño intervalo simplemente es el área del rectángulo sombreado. El desplazamiento total para el intervalo $t_f - t_i$ es la suma de las áreas de todos los rectángulos desde t_i hasta t_f:

$$\Delta x = \sum_n v_{xn,\text{ prom}} \Delta t_n$$

donde el símbolo Σ (letra griega mayúscula sigma) significa una suma que incluye todos los términos, esto es, todos los valores de n. Ahora, conforme los intervalos se hacen cada vez más pequeños, el número de términos en la suma aumenta y la suma

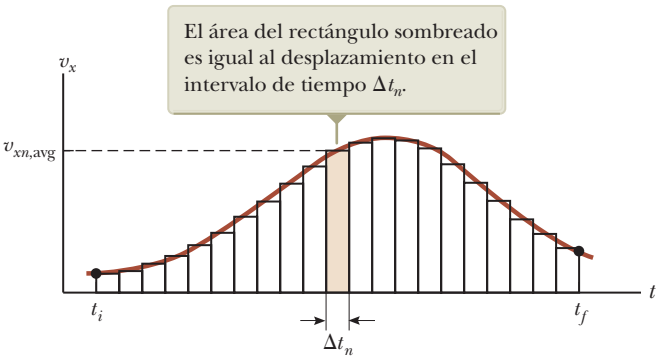


Figura 2.15 Velocidad en función del tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x. El área total bajo la curva es el desplazamiento total de la partícula.

tiende a un valor igual al área bajo la gráfica velocidad-tiempo. Debido a esto, en el límite $n \to \infty$, o $\Delta t_n \to 0$, el desplazamiento es

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n v_{xn,\text{prom}}\, \Delta t_n \tag{2.18}$$

Si se conoce la gráfica v_x–t para un movimiento a lo largo de una línea recta, se obtiene el desplazamiento durante cualquier intervalo de tiempo al medir el área bajo la curva correspondiente a dicho intervalo de tiempo.

El límite de la suma que se muestra en la ecuación 2.18 se llama **integral definida** y se escribe

Integral definida ▶

$$\lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n v_{xn,\text{prom}}\, \Delta t_n = \int_{t_i}^{t_f} v_x(t)\, dt \tag{2.19}$$

donde $v_x(t)$ denota la velocidad en cualquier tiempo t. Si se conoce la forma funcional explícita de $v_x(t)$ y se proporcionan los límites, la integral puede evaluarse. A veces la gráfica v_x–t para una partícula en movimiento tiene una forma mucho más simple que la mostrada en la figura 2.15. Por ejemplo, suponga que un objeto se describe con el modelo de una partícula bajo velocidad constante. En este caso, la gráfica v_x–t es una recta horizontal, como en la figura 2.16, y el desplazamiento de la partícula durante el intervalo de tiempo t simplemente es el área del rectángulo sombreado:

$$\Delta x = v_{xi}\, \Delta t \text{ (cuando } v_x = v_{xi} = \text{constante)}$$

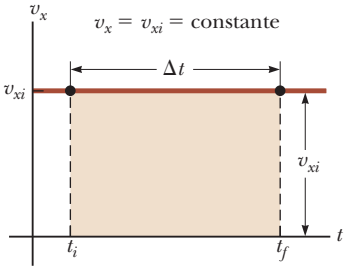


Figura 2.16 Curva velocidad-tiempo para una partícula que se mueve con velocidad constante v_{xi}. El desplazamiento de la partícula durante el intervalo de tiempo $t_f - t_i$ es igual al área del rectángulo sombreado.

Ecuaciones cinemáticas

Ahora se aplican las ecuaciones que definen la aceleración y velocidad para deducir dos de las ecuaciones cinemáticas, las ecuaciones 2.13 y 2.16.

La ecuación que define la aceleración (ec. 2.10),

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

se puede escribir como $dv_x = a_x\, dt$, o, en términos de una integral (o antiderivada), como

$$v_{xf} - v_{xi} = \int_0^t a_x\, dt$$

Para el caso especial en el que la aceleración es constante, a_x se puede remover de la integral para dar

$$v_{xf} - v_{xi} = a_x \int_0^t dt = a_x(t - 0) = a_x t \tag{2.20}$$

que es la ecuación 2.13 del modelo de la partícula bajo aceleración constante.

Ahora considere la ecuación que define la velocidad (ec. 2.5):

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Esta ecuación se escribe como $dx = v_x\,dt$, o en forma integral como

$$x_f - x_i = \int_0^t v_x\,dt$$

Puesto que $v_x = v_{xf} = v_{xi} + a_x t$, esta expresión se convierte en

$$x_f - x_i = \int_0^t (v_{xi} + a_x t)\,dt = \int_0^t v_{xi}\,dt + a_x \int_0^t t\,dt = v_{xi}(t - 0) + a_x\left(\frac{t^2}{2} - 0\right)$$

$$x_f - x_i = v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

que es la ecuación 2.16 en la partícula bajo el modelo de aceleración constante.

Además de lo que espera aprender acerca de conceptos físicos, una experiencia muy valiosa que debe desarrollar de sus cursos de física es la habilidad para resolver problemas complicados. La forma en que los físicos abordan situaciones complejas y las descomponen en trozos manejables es extremadamente útil. La siguiente es una estrategia general para resolver problemas que lo guían a través de las etapas. Para ayudarlo a recordar las etapas de la estrategia, éstas son *conceptualizar*, *categorizar*, *analizar* y *finalizar*.

ESTRATEGIA GENERAL PARA RESOLVER PROBLEMAS

Conceptualizar

- La primera cosa que debe hacer cuando aborde un problema es *pensar* y *comprender* la situación. Estudie cuidadosamente cualesquiera de las representaciones de la información (por ejemplo: diagramas, gráficas, tablas o fotografías) que acompañen al problema. Imagine una película, que corra en su mente, de lo que sucede en el problema.
- Si no se le proporciona una representación pictórica, casi siempre debe hacer un dibujo rápido de la situación. Indique cualquiera de los valores conocidos, ya sea en una tabla o directamente en su bosquejo.
- Ahora enfóquese en qué información algebraica o numérica se proporciona en el problema. Lea con cuidado el enunciado del problema y busque frases clave como "parte del reposo" ($v_i = 0$), "se detiene" ($v_f = 0$) o "cae libremente" ($a_y = -g = -9.80\ \text{m/s}^2$).
- Ahora enfóquese en el resultado que se espera del problema resuelto. ¿Exactamente qué es lo que plantea la pregunta? ¿El resultado final será numérico o algebraico? ¿Sabe qué unidades esperar?
- No olvide incorporar información de su propia experiencia y sentido común. ¿Cómo sería una respuesta razonable? Por ejemplo, no esperaría calcular la rapidez de un automóvil como 5×10^6 m/s.

Categorizar

- Una vez que tenga una buena idea de lo que trata el problema, necesita *simplificar* el problema. Quite los detalles que no sean importantes para la solución. Por ejemplo, modele un objeto en movimiento como partícula. Si es adecuado, ignore la resistencia del aire o la fricción entre un objeto que se desliza y una superficie.
- Cuando simplifique el problema, es importante *categorizar* el problema. ¿Es un simple problema de sustitución en el que los números se sustituyen en una ecuación? Si es así, es probable que el problema termine cuando realice esta sustitución. Si no, enfrenta lo que se llama *problema analítico*: la situación se debe analizar más profundamente para llegar a una solución.
- Si es un problema analítico, necesita categorizarlo aún más. ¿Ha visto este tipo de problemas antes? ¿Cae en la creciente lista de tipos de problemas que ha resuelto anteriormente? Si es así, identifique cualquier análisis de modelo apropiado al problema para preparar la etapa a analizar siguiente. Los primeros tres tipos de análisis de modelos se vieron en este capítulo: partícula bajo velocidad constante, partícula bajo rapidez constante y partícula bajo aceleración constante. Ser capaz de clasificar un problema con un análisis de modelo hace mucho más sencillo tender un plan para resolverlo. Por ejemplo, si su simplificación muestra que el problema se puede tratar como una partícula bajo aceleración constante y ya resolvió un problema similar (como los ejemplos de la sección 2.6), la solución al presente problema sigue un patrón similar.

continúa

Analizar

- Ahora debe analizar el problema y esforzarse por una solución matemática. Puesto que ya categorizó el problema e identificó un análisis de modelo, no debe ser muy difícil seleccionar ecuaciones relevantes que se apliquen al tipo de situación en el problema. Por ejemplo, si involucra una partícula bajo aceleración constante, las ecuaciones de la 2.13 a la 2.17 son relevantes.
- Use álgebra (y cálculo, si es necesario) para resolver simbólicamente la variable desconocida en términos de lo que está dado. Sustituya los números adecuados, calcule el resultado y redondee al número adecuado a cifras significativas.

Finalizar

- Examine su respuesta numérica. ¿Tiene las unidades correctas? ¿Satisface las expectativas de su conceptualización del problema? ¿Qué hay acerca de la forma algebraica del resultado? ¿Tiene sentido? Examine las variables del problema para ver si la respuesta cambiaría en una forma físicamente significativa si las variables aumentan o disminuyen drásticamente o incluso si se vuelven cero. Buscar casos limitados para ver si producen valores esperados es una forma muy útil de asegurarse de que obtiene resultados razonables.
- Piense acerca de cómo se compara este problema con otros que ha resuelto. ¿Cómo fue similar? ¿En qué formas críticas difiere? ¿Por qué se asignó este problema? ¿Puede imaginar qué aprendió al hacerlo? Si es una nueva categoría de problema, asegúrese de que lo comprendió para que pueda usarlo como modelo para resolver problemas similares en el futuro.

Cuando resuelva problemas complejos, es posible que necesite identificar una serie de subproblemas y aplicar la estrategia para resolver cada uno. Para problemas simples, probablemente no necesite esta estrategia. Sin embargo, cuando intente resolver un problema y no sepa qué hacer a continuación, recuerde las etapas en la estrategia y úselas como guía.

Para practicar sería útil que vuelva a revisar los ejemplos trabajados en este capítulo e identifique los pasos *conceptualizar*, *categorizar*, *analizar* y *finalizar*. En el resto de este libro se etiquetarán estas etapas en los ejemplos trabajados. Muchos capítulos del libro incluyen una sección de "Estrategia para resolución de problemas" que le ayudarán a través de los puntos difíciles. Estas secciones se organizan de acuerdo con esta "Estrategia general para resolver problemas" y se hacen a la medida de los tipos específicos de problemas que se abordan en dicho capítulo.

Para aclarar cómo funciona esta estrategia, repetimos el ejemplo 2.7 más adelante con los pasos concretos de la estrategia identificada.

Al **conceptualizar** un problema, trate de entender la situación que se presenta en el enunciado del problema. Estudie cuidadosamente las representaciones de la información (por ejemplo, diagramas, gráficas, tablas o fotografías) que acompañan el problema. Imagínese una película, que se ejecuta en su mente, de lo que ocurre en el problema.

Simplificar el problema. Elimine los detalles que no son importantes para la solución. Después **clasifique** el problema. ¿Es un problema de sustitución simple de tal manera que los números pueden ser sustituidos en una ecuación simple o una definición? Si no, se enfrenta a un problema de análisis. En este caso, identifique el análisis de modelo apropiado.

Ejemplo 2.7 Aterrizaje en portaaviones AM

Un jet aterriza en un portaaviones a 140 mi/h (≈ 63 m/s).

(A) ¿Cuál es su aceleración (supuesta constante) si se detiene en 2.0 s debido a un cable de arresto que traba al jet y lo deja en reposo?

SOLUCIÓN

Conceptualizar

Es posible que haya visto películas o programas de televisión en los que un jet aterriza sobre un portaaviones y se lleva al reposo sorprendentemente rápido mediante un cable de arresto. Una lectura cuidadosa del problema revela que, además de estar dada la rapidez inicial de 63 m/s, también se sabe que la rapidez final es cero.

Categorizar

Debido a que la aceleración del jet se supone constante, la modelamos como una *partícula bajo aceleración constante.*

2.7 continuación

Analizar

Definimos nuestro eje x como la dirección de movimiento del jet. Tenga en cuenta que no tenemos ninguna información sobre el cambio de posición del jet mientras se está desacelerando.

La ecuación 2.13 es la única ecuación en la partícula bajo el modelo de aceleración constante que no implique la posición, así que lo utilizan para encontrar la aceleración del jet, modelado como una partícula:

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t} = \frac{0 - 63\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s}}$$

$$= -32\ \text{m/s}^2$$

(B) Si el avión aterriza en la posición $x_i = 0$, ¿cuál es su posición final?

SOLUCIÓN

Utilice la ecuación 2.15 para resolver la posición final: $x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t = 0 + \frac{1}{2}(63\ \text{m/s} + 0)(2.0\ \text{s}) = 63\ \text{m}$

Finalizar

Dado el tamaño del portaaviones, una longitud de 63 m parece razonable para detener al jet. La idea de usar cables de arresto para frenar a la aeronave que aterriza y permitirle aterrizar con seguridad en los barcos surgió en la Primera Guerra Mundial. Los cables todavía son una parte vital de la operación de los modernos portaaviones.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que el jet aterriza en la cubierta del portaaviones con una rapidez mayor que 63 m/s pero tiene la misma aceleración debida al cable calculada en el inciso (A). ¿Cómo cambiará esto la respuesta del inciso (B)?

Respuesta Si el jet viaja más rápido que al principio se detendrá más lejos de su punto de partida, de modo que la respuesta del inciso (B) sería más grande. Matemáticamente, en la ecuación 2.15 se ve que si v_{xi} es más grande, x_f será más grande.

Analizar el problema. Seleccione ahora ecuaciones relevantes del análisis de modelo. Resuelva simbólicamente para la variable desconocida en términos de lo que se da. Sustituya los números correspondientes, calcule el resultado y redondee al número adecuado de cifras significativas.

Finalizar el problema. Examine la respuesta numérica. ¿Tiene las unidades correctas? ¿Se ajusta a sus expectativas desde su conceptualización del problema? ¿Tiene sentido el resultado? ¿Qué pasa con la forma algebraica de los resultados? Examine las variables en el problema para ver si la respuesta cambiaría en una forma significativa física si las variables se incrementaron o disminuyeron drásticamente o incluso se hicieron cero.

¿Qué pasaría si? Preguntas que aparecerán en muchos ejemplos en el texto, y que ofrecen una variación en la situación que se acaba de explorar. Esta característica le invita a pensar en los resultados del ejemplo y le ayuda en la comprensión conceptual de los principios.

Resumen

Definiciones

Cuando una partícula se mueve a lo largo del eje x desde alguna posición inicial x_i hasta alguna posición final x_f, su **desplazamiento** es

$$\Delta x \equiv x_f - x_i \qquad (2.1)$$

La **velocidad promedio** de una partícula durante cierto intervalo de tiempo es el desplazamiento x dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho desplazamiento:

$$v_{x,\text{prom}} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

La **rapidez promedio** de una partícula es igual a la razón de la distancia total que recorre al intervalo de tiempo total durante el que recorre dicha distancia:

$$v_{\text{prom}} \equiv \frac{d}{\Delta t} \qquad (2.3)$$

continúa

La **velocidad instantánea** de una partícula se define como el límite de la razón $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero. Por definición, este límite es igual a la derivada de x respecto a t, o la razón de cambio en el tiempo de la posición:

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (2.5)$$

La **rapidez instantánea** de una partícula es igual a la magnitud de su velocidad instantánea.

La **aceleración promedio** de una partícula se define como la relación de cambio en su velocidad v_x dividida entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

$$a_{x,\text{prom}} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \qquad (2.9)$$

La **aceleración instantánea** es igual al límite de la razón $\Delta v_x/\Delta t$ conforme Δt tiende a 0. Por definición, este límite es igual a la derivada de v_x respecto a t, o la tasa de cambio de la velocidad en el tiempo:

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad (2.10)$$

Conceptos y principios

Cuando la velocidad y la aceleración de un objeto están en la misma dirección, el objeto aumenta su velocidad. Por otra parte, cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en direcciones opuestas, el objeto frena. Recuerde que $F_x \propto a_x$ es una forma útil de identificar la dirección de la aceleración al asociarla con una fuerza.

Un objeto en caída libre en presencia de la gravedad de la Tierra experimenta aceleración de caída libre dirigida hacia el centro de la Tierra. Si la resistencia del aire es despreciable, si el movimiento ocurre cerca de la superficie de la Tierra, y si el intervalo del movimiento es pequeño comparado con el radio de la Tierra, la aceleración de caída libre $a_y = -g$ es constante durante el rango de movimiento, donde g es igual a 9.80 m/s^2.

Los problemas complicados se abordan mejor en una forma organizada. Recuerde y aplique los pasos conceptualizar, categorizar, analizar y finalizar de la **Estrategia general para resolver problemas** cuando los necesite.

Una ayuda importante para la resolución de problemas es el uso de **análisis de modelos**. Los análisis de modelos son situaciones que hemos visto en problemas anteriores. Cada análisis de modelo tiene una o más ecuaciones asociadas con ella. Cuando resuelva un nuevo problema, identifique el análisis de modelo que corresponde al mismo. El modelo le dirá qué ecuaciones utilizar. Los tres primeros análisis de modelos presentados en este capítulo se resumen a continuación.

Análisis de modelos para resolver problemas

Partícula bajo velocidad constante. Si una partícula se mueve en línea recta con una rapidez constante v_x, su velocidad constante está dada por

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.6)$$

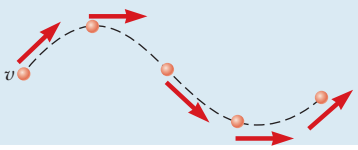
y su posición está dada por

$$x_f = x_i + v_x t \qquad (2.7)$$



Partícula bajo rapidez constante. Si una partícula se mueve una distancia d a lo largo de una trayectoria curva o recta con rapidez constante, su rapidez constante está dada por

$$v = \frac{d}{\Delta t} \qquad (2.8)$$



Partícula bajo aceleración constante. Si una partícula se mueve en línea recta con aceleración constante a_x, su movimiento se describe mediante las ecuaciones cinemáticas:

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \qquad (2.13)$$

$$v_{x,\text{prom}} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \qquad (2.14)$$

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \qquad (2.15)$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad (2.16)$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \qquad (2.17)$$



Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Una gota de aceite cae en línea recta hacia abajo en el camino desde el motor de un automóvil en movimiento cada 5 s. La figura PO2.1 muestra el patrón de las gotas que quedan en el pavimento. ¿Cuál es la rapidez promedio del automóvil en esta sección de su movimiento? (a) 20 m/s, (b) 24 m/s, (c) 30 m/s, (d) 100 m/s, (e) 120 m/s.

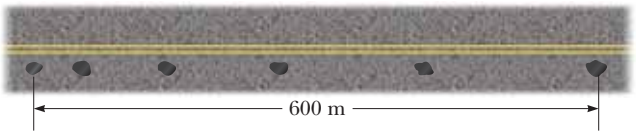


Figura PO2.1

2. Un auto de carreras parte del reposo en $t = 0$ y alcanza una velocidad final v en el tiempo t. Si la aceleración del auto es constante durante este tiempo, ¿cuál de los siguientes enunciados son verdaderos? (a) El automóvil recorre una distancia vt. (b) La velocidad promedio del auto es $v/2$. (c) La magnitud de la aceleración del auto es v/t. (d) La velocidad del automóvil permanece constante. (e) Ninguno de los enunciados del (a) al (d) es verdadero.

3. Un malabarista lanza un juego de bolos hacia arriba en el aire. Después de que el bolo deja la mano y mientras está en el aire, ¿qué enunciado es verdadero? (a) La velocidad del bolo está siempre en la misma dirección que su aceleración. (b) La velocidad del bolo nunca está en la misma dirección que su aceleración. (c) La aceleración del bolo es cero. (d) La velocidad del bolo es opuesta a su aceleración en la subida. (e) La velocidad del bolo está en la misma dirección que su aceleración en el camino hacia arriba.

4. Al aplicar las ecuaciones de la cinemática para un objeto en movimiento en una dimensión, ¿cuál de los siguientes enunciados *debe* ser verdadero? (a) La velocidad del objeto debe permanecer constante. (b) La aceleración del objeto debe permanecer constante. (c) La velocidad del objeto debe aumentar con el tiempo. (d) La posición del objeto debe aumentar con el tiempo. (e) La velocidad del objeto debe estar siempre en la misma dirección que su aceleración.

5. Se dispara una bala de cañón hacia arriba desde el suelo con una rapidez inicial de 225 m/s. Después de cuánto tiempo está la bala a una altura de 6.20×10^2 m por encima del suelo y se mueve hacia abajo? (a) 2.96 s (b) 17.3 s (c) 25.4 s (d) 33.6 s (e) 43.0 s

6. Se lanza una flecha hacia arriba en el aire con una rapidez inicial de 15.0 m/s. Después de cuánto tiempo se está moviendo la flecha hacia abajo con una rapidez de 8.00 m/s? (a) 0.714 s (b) 1.24 s (c) 1.87 s (d) 2.35 s (e) 3.22 s

7. Cuando el piloto invierte la hélice en un bote que se mueve al Norte, el bote se mueve con una aceleración dirigida al Sur. Si la aceleración del bote sigue constante en magnitud y dirección, ¿qué le ocurrirá al bote (elija una)? (a) Eventualmente se detendrá y luego permanecerá en reposo. (b) Al final se detendrá y luego comenzará a aumentar rapidez en la dirección hacia adelante. (c) Eventualmente se detendrá y luego comenzará a aumentar rapidez en la dirección contraria. (d) Nunca se detendrá sino que perderá rapidez cada vez más lentamente por siempre. (e) Nunca se detendrá sino que continuará ganando rapidez en la dirección hacia adelante.

8. Se lanza una roca hacia abajo desde la parte superior de una torre de 40.0 m de altura con una velocidad inicial de 12 m/s. Suponiendo la resistencia del aire despreciable, ¿cuál es la velocidad de la roca justo antes de golpear el suelo? (a) 28 m/s (b) 30 m/s (c) 56 m/s (d) 784 m/s (e) Se necesita más información.

9. Un monopatín parte del reposo y se mueve hacia abajo de una colina con una aceleración constante en una línea recta, viajando durante 6 s. En un segundo ensayo, parte del reposo y se mueve a lo largo de la misma línea recta con la misma aceleración durante sólo 2 s. ¿De qué manera se compara su desplazamiento desde su punto de partida de este segundo ensayo con el del primer ensayo? (a) un tercio de largo (b) tres veces más largo (c) un noveno de largo (d) nueve veces más grande (e) $1/\sqrt{3}$ veces de largo.

10. En otro planeta, se deja caer una canica desde el reposo en la parte superior de un acantilado. Cae 4.00 m en el primer segundo de su movimiento. ¿Qué distancia adicional cae en el próximo 1 s? (a) 4.00 m (b) 8.00 m (c) 12.0 m (d) 16.0 m (e) 20.0 m

11. Para un objeto que se mueve a lo largo del eje x, se hacen muchas mediciones de su posición, las suficientes como para generar una gráfica suave y precisa de x en función de t. ¿Cuál de las siguientes cantidades para el objeto *no se puede* obtener *sólo* de esta gráfica? (a) La velocidad en cualquier instante, (b) la aceleración en cualquier instante, (c) el desplazamiento durante algún intervalo de tiempo, (d) la velocidad promedio durante algún intervalo de tiempo, (e) la rapidez en cualquier instante

12. Se deja caer una piedra a partir del reposo desde lo alto de un acantilado y cae 4.9 m en un tiempo de 1.0 s. ¿Cuánto caerá en los siguientes 2.0 s? (a) 9.8 m (b) 19.6 m (c) 39 m (d) 44 m (e) ninguna de las anteriores.

13. Un estudiante en lo alto de un edificio de altura h lanza una bola hacia arriba con una rapidez v_i y luego lanza una segunda bola hacia abajo con la misma rapidez inicial v_i. Justo antes de llegar al suelo, ¿es la rapidez final de la pelota lanzada hacia arriba (a) más grande, (b) más pequeña o (c) de la misma magnitud, comparada con la rapidez final de la pelota lanzada hacia abajo?

14. Usted suelta una bola desde una ventana ubicada en un piso superior de un edificio. Golpea el suelo con rapidez v. Ahora repite la caída, pero le pide a un amigo abajo en el suelo que lance otra bola hacia arriba con rapidez v. Su amigo lanza la bola hacia arriba en el mismo momento en que usted suelta la suya desde la ventana. En alguna posición, las bolas pasan una a la otra. ¿Esta ubicación está (a) *en* el punto medio entre la ventana y el suelo, (b) *arriba* de este punto o c) *abajo* de este punto?

15. Se libera una piedra a partir del reposo a cierta altura, cae libremente y alcanza una rapidez de impacto de 4 m/s en el suelo. Después la partícula se lanza hacia abajo con una rapidez inicial de 3 m/s desde la misma altura. ¿Cuál

es su rapidez en el suelo? (a) 4 m/s, (b) 5 m/s, (c) 6 m/s, (d) 7 m/s, (e) 8 m/s

16. Se lanza hacia arriba una pelota en el aire. En esta situación, ¿son cero tanto la velocidad instantánea como la aceleración? (a) en el camino hacia arriba (b) en la parte superior de su trayectoria de vuelo (c) en el camino hacia abajo (d) a la mitad hacia arriba y a la mitad hacia abajo (e) ninguna de las anteriores.

17. Una bola de hule duro, que no es afectada por la resistencia del aire en su movimiento, se lanza hacia arriba desde la altura del hombro; cae a la acera, rebota a una altura máxima un poco menor y se atrapa en su camino hacia abajo. Este movimiento se representa en la figura PO2.17, donde las posiciones sucesivas de la bola, de Ⓐ a Ⓔ, no están igualmente espaciadas en el tiempo. En el punto Ⓓ el centro de la bola está en su punto más bajo del movimiento. El movimiento de la bola es a lo largo de una línea recta, pero el diagrama muestra posiciones sucesivas corridas a la derecha para evitar traslape. Elija la dirección positiva y hacia arriba. (a) Clasifique las situaciones de la Ⓐ a la Ⓔ de acuerdo con la rapidez de la bola $|v_y|$ en cada punto, con la rapidez más grande primero. (b) Clasifique las mismas situaciones de acuerdo con la aceleración a_y de la bola en cada punto. (En ambas clasificaciones, recuerde que cero es mayor que un valor negativo. Si dos valores son iguales, muestre que son iguales en su clasificación.)

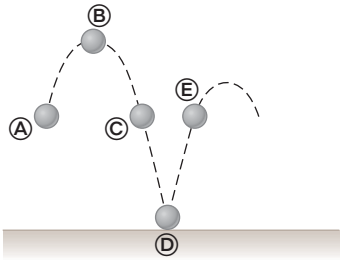
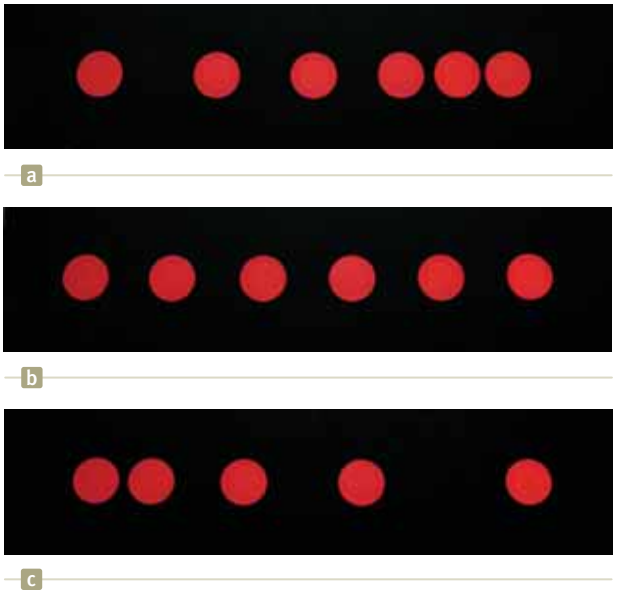


Figura PO2.17

18. Cada una de las fotografías estroboscópicas (a), (b) y (c) de la figura PO2.18 se tomó de un solo disco que se mueve hacia la derecha, que se toma como la dirección positiva. Dentro de cada fotografía el intervalo de tiempo entre imágenes es constante. (i) ¿Cuál fotografía muestra movimiento con aceleración cero? (ii) ¿Cuál fotografía muestra movimiento con aceleración positiva? (iii) ¿Cuál fotografía muestra movimiento con aceleración negativa?



© Cengage Learning/Charles D. Winters

Figura PO2.18 Pregunta objetiva 18 y problema 23

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Si la velocidad promedio de un objeto es cero en cierto intervalo de tiempo, ¿qué puede decir acerca del desplazamiento del objeto durante dicho intervalo?

2. Intente el siguiente experimento lejos del tráfico, donde pueda hacerlo a salvo. Con el automóvil que usted conduzca moviéndose lentamente en un camino recto a nivel, cambie la velocidad a neutral y deje que el automóvil se deslice. En el momento en que el automóvil llegue a un alto completo, pise fuerte el freno y note lo que siente. Ahora repita el experimento en una pendiente muy ligera hacia arriba. Explique la diferencia de lo que se siente en ambos casos. (Brian Popp sugirió la idea para esta pregunta.)

3. Si un automóvil está viajando hacia el Este, ¿puede su aceleración estar dirigida hacia el Oeste? Explique.

4. Si la velocidad de una partícula es cero, ¿puede la aceleración de la partícula ser cero? Explique.

5. Si la velocidad de una partícula es distinta de cero, ¿puede la aceleración de la partícula ser cero? Explique.

6. Usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba para que deje el suelo con una velocidad de +5.00 m/s. (a) ¿Cuál es su velocidad cuando alcanza su máxima altura? (b) ¿Cuál es su aceleración en este punto? (c) ¿Cuál es la velocidad con la que regresa al nivel del suelo? (d) ¿Cuál es su aceleración en este punto?

7. (a) ¿Las ecuaciones de cinemática (ecs. 2.13–2.17) se usan en una situación en que la aceleración varía en el tiempo? (b) ¿Se pueden usar cuando la aceleración es cero?

8. (a) ¿La velocidad instantánea de un objeto en un instante de tiempo alguna vez es mayor en magnitud que la velocidad promedio en un intervalo de tiempo que contenga al instante? (b) ¿Alguna vez es menor?

9. Dos automóviles se mueven en la misma dirección en pistas paralelas a lo largo de una autopista. En algún instante, la velocidad del automóvil A supera la velocidad del automóvil B. ¿Esto significa que la aceleración de A es mayor que la de B? Explique.

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 2.1 Posición, velocidad y rapidez

1. En la figura P2.1 se muestra la posición en función del tiempo para cierta partícula que se mueve a lo largo del eje x. Encuentre la velocidad promedio en los siguientes intervalos de tiempo. (a) 0 a 2 s, (b) 0 a 4 s, (c) 2 s a 4 s, (d) 4 s a 7 s, (e) 0 a 8 s.

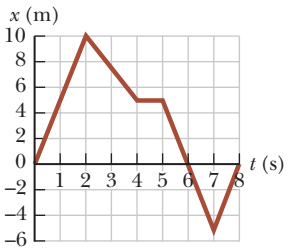


Figura P2.1 Problemas 1 y 9.

2. La rapidez de un impulso nervioso en el cuerpo humano es de aproximadamente 100 m/s. Si su dedo del pie tropieza accidentalmente en la oscuridad, estime el tiempo que tarda el impulso nervioso en viajar a su cerebro.

3. Una persona camina, primero, con rapidez constante de 5.00 m/s a lo largo de una línea recta desde el punto Ⓐ al punto Ⓑ y luego de regreso a lo largo de la recta de Ⓑ a Ⓐ con una rapidez constante de 3.00 m/s. (a) ¿Cuál es su rapidez promedio durante todo el viaje? (b) ¿Cuál es su velocidad promedio durante todo el viaje?

4. Una partícula se mueve de acuerdo con la ecuación $x = 10t^2$, donde x está en metros y t en segundos. (a) Encuentre la velocidad promedio para el intervalo de tiempo de 2.00 s a 3.00 s. (b) Encuentre la velocidad promedio para el intervalo de tiempo de 2.00 s a 2.10 s.

5. La posición de un carro de derby se observó en varios momentos; los resultados se resumen en la tabla siguiente. Encuentre la velocidad promedio del auto para (a) el primer segundo, (b) los últimos 3 s y c) todo el periodo de observación.

t (s)	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
x (m)	0	2.3	9.2	20.7	36.8	57.5

Sección 2.2 Velocidad y rapidez instantáneas

6. La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $x = 3t^2$, donde x está en metros y t en segundos. Evalúe su posición (a) en $t = 3.00$ s y (b) en 3.00 s + Δt. (c) Evalúe el límite de $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero para encontrar la velocidad en $t = 3.00$ s.

7. En la figura P2.7 se muestra una gráfica posición-tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x. (a) Encuentre la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $t = 1.50$ s a $t = 4.00$ s. (b) Determine la velocidad instantánea en $t = 2.00$ s al medir la pendiente de la recta tangente que se muestra en la gráfica. (c) ¿En qué valor de t la velocidad es cero?

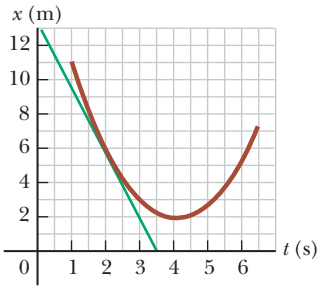


Figura P2.7

8. Una atleta parte desde un extremo de una piscina de longitud L en $t = 0$ y llega en el otro extremo en el tiempo t_1. Nada hacia atrás y llega a la posición de partida en el tiempo t_2. Si ella está nadando inicialmente en la dirección x positiva, determine sus velocidades promedio simbólicamente en (a) la primera parte del nado, (b) la segunda mitad del nado y (c) el recorrido redondo. (d) ¿Cuál es su velocidad promedio para el recorrido redondo?

9. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula descrita en la figura P2.1 en los siguientes tiempos: (a) $t = 1.0$ s, (b) $t = 3.0$ s, (c) $t = 4.5$ s, (d) $t = 7.5$ s.

Sección 2.3 Análisis de modelo: la partícula bajo velocidad constante

10. **Problema de repaso.** Las placas norteamericana y europea de la corteza de la Tierra se estaban separando con una rapidez relativa de aproximadamente 25 mm/año. Considere la rapidez como constante y encuentre cuándo se empezó a abrir la brecha entre ellas, hasta alcanzar el ancho actual de 2.9×10^3 mi.

11. Una liebre y una tortuga compiten en una carrera en una ruta de 1.00 km de largo. La tortuga caminando a marcha lenta con una rapidez de 0.200 m/s se dirige hacia la línea de meta. La liebre corre a su máxima rapidez de 8.00 m/s hacia la meta durante 0.800 km y luego se detiene para fastidiar a la tortuga cuando ésta finalmente la pasa. La liebre espera un tiempo después de que la tortuga la pasa y luego corre hacia la línea de meta de nuevo a 8.00 m/s. Tanto la liebre como la tortuga cruzan la línea de meta exactamente en el mismo instante. Suponga que los animales, cuando se mueven, lo hacen uniformemente con sus respectivas rapideces. (a) ¿A qué distancia está la tortuga de la línea de meta cuando la liebre reanuda la carrera? (b) ¿Durante cuánto tiempo estuvo parada la liebre?

12. Un automóvil viaja una distancia d a lo largo de una línea recta con una rapidez constante de 60.0 mi/h y luego otra distancia d en la misma dirección con otra rapidez constante. La velocidad promedio durante todo el viaje es 30.0 mi/h. (a) ¿Cuál es la rapidez constante con la que el auto se movió durante la segunda distancia d? (b) **¿Qué pasaría si?** Supongamos que la segunda distancia d se viaja en la dirección opuesta, que olvidó algo y tuvo que regresar a casa con la misma rapidez constante tal que se encontró en el inciso (a). ¿Cuál es la velocidad promedio para este viaje? (c) ¿Cuál es la rapidez promedio de este nuevo viaje?

13. Una persona que hace un viaje conduce con una rapidez constante de 89.5 km/h, excepto por una parada de descanso de 22.0 min. Si la rapidez promedio de la persona es de 77.8 km/h, (a) ¿cuánto tiempo invierte la persona en el viaje y (b) qué tan lejos llegará?

Sección 2.4 Aceleración

14. **Problema de repaso.** Una superbola de 50.0 g que viaja a 25.0 m/s bota en una pared de ladrillo y rebota a 22.0 m/s. Una cámara de alta rapidez registra este evento. Si la bola está en contacto con la pared durante 3.50 ms, ¿cuál es la magnitud de la aceleración promedio de la bola durante este intervalo de tiempo?

15. En la figura P2.15 se muestra una gráfica velocidad-tiempo de un objeto que se mueve a lo largo del eje x. (a) Trace una gráfica de la aceleración en función del tiempo. Determine la aceleración promedio del objeto en los intervalos de tiempo (b) $t = 5.00$ s a $t = 15.0$ s y (c) $t = 0$ a $t = 20.0$ s.

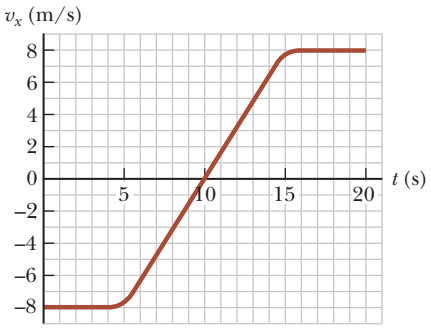


Figura P2.15

16. Una niña rueda una canica sobre una pista con dobleces que mide 100 cm de largo, como se muestra en la figura P2.16. Use x para representar la posición de la canica a lo largo de la pista. En las secciones horizontales de $x = 0$ a $x = 20$ cm y de $x = 40$ cm a $x = 60$ cm, la canica rueda con rapidez constante. En las secciones de pendiente, la rapidez de la canica cambia de manera uniforme. En los lugares donde la pendiente cambia, la canica permanece en la pista y no experimenta cambios súbitos en rapidez. La niña da a la canica cierta rapidez inicial en $x = 0$ y $t = 0$ y luego la observa rodar a $x = 90$ cm, donde regresa, y eventualmente regresa a $x = 0$ con la misma rapidez con la que al inicio la niña la liberó. Trace gráficas de x en función de t, v_x en función de t y a_x en función de t, alineadas verticalmente con sus ejes de tiempo idénticos, para mostrar el movimiento de la canica. No podrá colocar números distintos a cero en el eje horizontal o en los ejes de velocidad o aceleración, pero muestre las formas correctas de las gráficas.

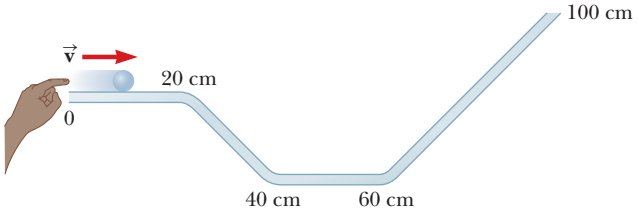


Figura P2.16

17. La figura P2.17 muestra una gráfica de v_x en función de t para el movimiento de un motociclista mientras parte del reposo y se mueve a lo largo del camino en línea recta. (a) Encuentre la aceleración promedio para el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 6.00$ s. (b) Estime el tiempo en que la aceleración tiene su mayor valor positivo y el valor de la aceleración en dicho instante. (c) ¿Cuándo la aceleración es cero? (d) Estime el máximo valor negativo de la aceleración y el tiempo en el que ocurre.

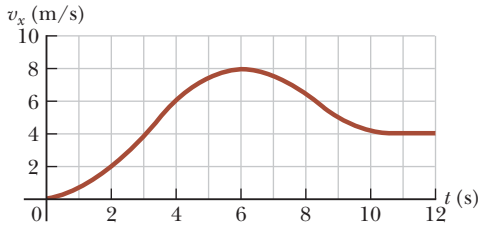


Figura P2.17

18. (a) Use los datos del problema 5 para construir una gráfica suave de posición en función del tiempo. (b) Con la construcción de rectas tangentes a la curva $x(t)$, encuentre la velocidad instantánea del automóvil en varios instantes. (c) Grafique la velocidad instantánea en función del tiempo y, a partir de la gráfica, determine la aceleración promedio del automóvil. (d) ¿Cuál fue la velocidad inicial del automóvil?

19. Una partícula parte del reposo y acelera como se muestra en la figura P2.19. Determine (a) la rapidez de la partícula en $t = 10.0$ s y en $t = 20.0$ s y (b) la distancia recorrida en los primeros 20.0 s.

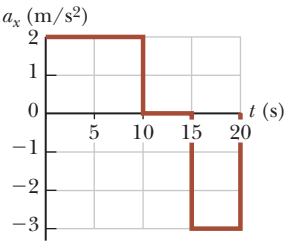


Figura P2.19

20. Un objeto se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la ecuación $x = 3.00t^2 + 2.00t + 3.00$, donde x está en metros y t está en segundos. Determine (a) la rapidez promedio entre $t = 2.00$ s y $t = 3.00$ s, (b) la rapidez instantánea en $t = 2.00$ s y $t = 3.00$ s, (c) la aceleración promedio entre $t = 2.00$ s y $t = 3.00$ s, y (d) la aceleración instantánea en $t = 2.00$ s y $t = 3.00$ s. (e) ¿En qué tiempo alcanza el objeto al reposo?

21. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la ecuación $x = 2.00 + 3.00t + 1.00t^2$, donde x está en metros y t en segundos. En $t = 3.00$ s, encuentre (a) la posición de la partícula, (b) su velocidad y (c) su aceleración.

Sección 2.5 Diagramas de movimiento

22. Dibuje diagramas de movimiento para (a) un objeto que se mueve a la derecha con rapidez constante, (b) un objeto

que se mueve a la derecha y está aumentando su rapidez de modo constante, (c) un objeto que se mueve a la derecha y está disminuyendo su rapidez de modo constante, (d) un objeto que se mueve a la izquierda y aumenta su rapidez a razón constante, y (e) un objeto que se mueve a la izquierda y frena a rapidez constante. (f) ¿Cómo modificaría su dibujo si los cambios en rapidez no fuesen uniformes; esto es, si la rapidez no cambiara de modo constante?

23. Cada una de las fotografías estroboscópicas (a), (b) y (c) en la figura PO2.18 se tomó de un solo disco que se mueve hacia la derecha, que se considera como la dirección positiva. Dentro de cada fotografía el intervalo de tiempo entre imágenes es constante. Para cada fotografía prepare gráficas de x en función de t, v_x en función de t y a_x en función de t, alineadas verticalmente con sus ejes de tiempo idénticos, para mostrar el movimiento del disco. No podrá colocar números distintos de cero sobre los ejes, pero muestre los tamaños relativos correctos sobre las gráficas.

Sección 2.6 Análisis de modelo: la partícula bajo aceleración constante

24. La distancia mínima necesaria para detener un automóvil en movimiento a 35.0 mi/h es 40.0 ft. ¿Cuál es la distancia mínima para detenerse para el mismo automóvil cuando se mueve a 70.0 mi/h, suponiendo la misma aceleración?

25. Un electrón en un tubo de rayos catódicos acelera uniformemente desde una rapidez de 2.00×10^4 m/s a 6.00×10^6 m/s en 1.50 cm. (a) ¿En qué intervalo de tiempo el electrón recorre estos 1.50 cm? (b) ¿Cuál es su aceleración?

26. Una lancha rápida se mueve a 30.0 m/s hacia una boya que está 100 m por delante. El piloto ralentiza el barco con una aceleración constante de -3.50 m/s^2 reduciendo el acelerador. (a) ¿Cuánto tiempo tarda la lancha en llegar a la boya? (b) ¿Cuál es la velocidad de la lancha cuando llega a la boya?

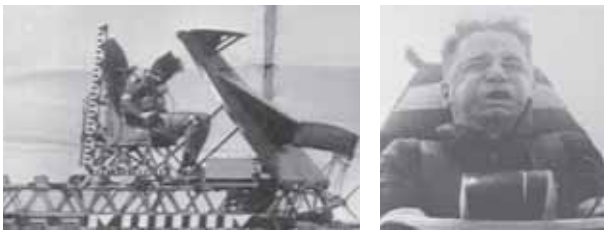
27. Considere una porción de aire en un tubo recto que se mueve con una aceleración constante de -4.00 m/s^2 y tiene una velocidad de 13.0 m/s a las 10:05:00 a.m. (a) ¿Cuál es su velocidad a las 10:05:01 a.m.? (b) ¿A las 10:05:04 a.m.? (c) ¿A las 10:04:59 a.m.? (d) Describa la forma de una gráfica de velocidad en función del tiempo para esta porción de aire. (e) Argumente a favor o en contra del enunciado "conocer un solo valor de la aceleración constante de un objeto es como conocer toda una lista de valores para su velocidad".

28. Un camión cubre 40.0 m en 8.50 s mientras frena suavemente con una rapidez final de 2.80 m/s. (a) Encuentre su rapidez original. (b) Encuentre su aceleración.

29. Un objeto que se mueve con aceleración uniforme tiene una velocidad de 12.0 cm/s en la dirección x positiva cuando su coordenada x es 3.00 cm. Si su coordenada x, 2.00 s después es de -5.00 cm, ¿cuál es su aceleración?

30. En el ejemplo 2.7 se investigó un aterrizaje de jet en un portaaviones. En una maniobra posterior, el jet viene para un aterrizaje en tierra firme con una rapidez de 100 m/s, y su aceleración puede tener una magnitud máxima de 5.00 m/s^2, hasta alcanzar el reposo. (a) Desde el momento en que el avión toca la pista de aterrizaje, ¿cuál es el intervalo de tiempo mínimo necesario antes de que pueda alcanzar el reposo? (b) ¿Puede que el jet aterrice en un pequeño aeropuerto de la isla tropical, donde la pista es de 0.800 km de largo? (c) Explique su respuesta.

31. Problema de repaso. El coronel John P. Stapp, de la fuerza aérea de Estados Unidos, participó en un estudio para ver si un piloto de jet podría sobrevivir a una expulsión de emergencia. El 19 de marzo de 1954 viajó en un trineo impulsado por cohete que se movió por una pista con una rapidez de 632 mi/h. Él y el trineo llegaron al reposo en 1.40 s con seguridad (figura P2.31). Determine (a) la aceleración negativa que experimentó y (b) la distancia que recorrió durante esta aceleración negativa.



izquierda cortesía de U.S. Air Force; *derecha*, NASA/Photo Researchers, Inc.

Figura P2.31 (*izquierda*) El coronel John Stapp y su trineo cohete alcanzan el reposo en un intervalo de tiempo muy corto. (*derecha*) El rostro de Stapp es contraído por el estrés de la rápida aceleración negativa.

32. Resuelva el ejemplo 2.8 mediante un método gráfico. En la misma gráfica trace posición en función del tiempo para el automóvil y el oficial de policía. De la intersección de las dos curvas lea el tiempo cuando el patrullero alcanza al automóvil.

33. Un camión en una carretera recta parte del reposo, con una aceleración de 2.00 m/s^2 hasta que alcanza una velocidad de 20.0 m/s. Luego, el camión viaja durante 20.0 s a velocidad constante hasta que se aplican los frenos, deteniendo al camión en una forma uniforme en 5.00 s más. (a) ¿Por cuánto tiempo está el camión en movimiento? (b) ¿Cuál es la velocidad promedio del camión para el movimiento descrito?

34. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* A partir del reposo, una rinoceronte de carga se mueve 50.0 m en una línea recta en 10.0 s. Su aceleración es constante durante todo el movimiento, y su rapidez final es de 8.00 m/s.

35. El conductor de un automóvil aplica los frenos cuando ve un árbol que bloquea el camino. El automóvil frena uniformemente con una aceleración de -5.60 m/s^2 durante 4.20 s, y hace marcas de derrape rectas de 62.4 m de largo que terminan en el árbol. ¿Con qué rapidez golpea el automóvil el árbol?

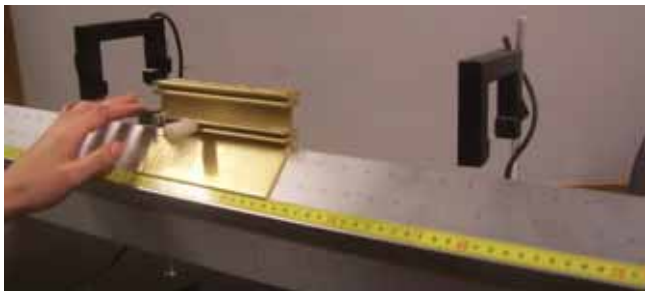
36. En el modelo de partícula bajo aceleración constante se identifican las variables y parámetros v_{xi}, v_{xf}, a_x, t y $x_f - x_i$. De las ecuaciones en el modelo, ecuaciones 2.13–2.17, la primera no involucra $x_f - x_i$, la segunda y tercera no contienen a_x, la cuarta omite v_{xf} y la última deja fuera t. De modo que, para completar el conjunto, debe haber una ecuación que *no* involucre v_{xi}. (a) Dedúzcala a partir de las otras. (b) Use la ecuación del inciso (a) para resolver el problema 35 en un paso.

37. Una lancha rápida se desplaza en línea recta y aumenta su rapidez uniformemente de $v_i = 20.0$ m/s a $v_f = 30.0$ m/s en un desplazamiento Δx de 200 m. Queremos encontrar el intervalo de tiempo necesario para que la lancha

recorra este desplazamiento. (a) Dibuje un sistema coordenado para esta situación (b) ¿Qué análisis de modelo es el más apropiado para describir esta situación? (c) A partir del análisis de modelo, ¿qué ecuación es la más apropiada para encontrar la aceleración de la lancha rápida? (d) Resuelva la ecuación seleccionada en el inciso (c) simbólicamente para la aceleración del barco en términos de v_i, v_f y Δx. (e) Sustituya los valores numéricos para obtener la aceleración numéricamente. (f) Encuentre el intervalo de tiempo antes mencionado.

38. Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su posición está dada por la ecuación $x = 2 + 3t - 4t^2$, con x en metros y t en segundos. Determine (*a*) su posición cuando cambia de dirección y (*b*) su velocidad cuando regresa a la posición que tenía en $t = 0$.

39. Un deslizador de longitud ℓ en una pista de aire se mueve a través de una fotopuerta estacionaria. Una fotopuerta (figura P2.39) es un dispositivo que mide el intervalo de tiempo Δt_d durante el cual el deslizador bloquea un haz de luz infrarroja que pasa a través de la fotopuerta. La razón $v_d = \ell/\Delta t_d$ es la velocidad promedio del deslizador durante esta parte de su movimiento. Suponga que el deslizador se mueve con aceleración constante. (a) Argumente a favor o en contra de la idea de que v_d es igual a la velocidad instantánea del deslizador cuando está a la mitad de la fotopuerta en el espacio. (b) Argumente a favor o en contra de la idea de que v_d es igual a la velocidad instantánea del deslizador cuando está a la mitad de la fotopuerta en el tiempo.



Ralph McGrew

Figura P2.39 Problemas 39 y 40.

40. Un deslizador de 12.4 cm de longitud se mueve sobre una pista de aire con aceleración constante. Transcurre un intervalo de tiempo de 0.628 s entre el momento cuando su extremo frontal pasa un punto fijo Ⓐ a lo largo de la pista y el momento cuando su extremo trasero pasa este punto. A continuación, transcurre un intervalo de tiempo de 1.39 s entre el momento cuando el extremo trasero del deslizador pasa el punto Ⓐ y el momento cuando el extremo frontal del deslizador pasa un segundo punto Ⓑ más lejos en la pista. Después de ello, transcurren 0.431 s adicionales hasta que el extremo trasero del deslizador pasa el punto Ⓑ. (a) Encuentre la rapidez promedio del deslizador conforme pasa el punto Ⓐ. (b) Encuentre la aceleración del deslizador. (c) Explique cómo calcula la aceleración sin saber la distancia entre los puntos Ⓐ y Ⓑ.

41. Un objeto se mueve con una aceleración constante de 4.00 m/s^2 y durante un intervalo de tiempo alcanza una velocidad final de 12.0 m/s. (a) Si su velocidad inicial es de 6.00 m/s, ¿cuál es su desplazamiento durante el intervalo de tiempo? (b) ¿Cuál es la distancia que recorre durante este intervalo? (c) Si la velocidad inicial es de −6.00 m/s, ¿cuál es su desplazamiento durante el intervalo de tiempo? (d) ¿Cuál es la distancia total que recorre durante el intervalo en el inciso (c)?

42. En $t = 0$, un carro de juguete se pone a rodar en una pista recta con posición inicial de 15.00 cm, velocidad inicial de −3.50 cm/s y aceleración constante de 2.40 cm/s^2. En el mismo momento, otro carro de juguete se pone a rodar en una pista adyacente con posición inicial de 10.0 cm, una velocidad inicial de +5.50 cm/s y aceleración constante cero. (a) ¿En qué tiempo, si hay alguno, los dos carros tienen iguales rapideces? (b) ¿Cuáles son sus rapideces en dicho tiempo? (c) ¿En qué tiempo(s), si hay alguno, los carros se rebasan mutuamente? (d) ¿Cuáles son sus ubicaciones en dicho tiempo? (e) Explique la diferencia entre la pregunta (a) y la pregunta (c) tan claramente como le sea posible.

43. La figura P2.43 representa parte de los datos de desempeño de un automóvil propiedad de un orgulloso estudiante de física. (a) Calcule la distancia total recorrida al calcular el área bajo la línea de la gráfica. (b) ¿Qué distancia recorre el automóvil entre los tiempos $t = 10$ s y $t = 40$ s? (c) Dibuje una gráfica de su aceleración en función del tiempo entre $t = 0$ y $t = 50$ s. (d) Escriba una ecuación para x como función del tiempo para cada fase del movimiento, representado por los segmentos $0a$, ab y bc. (e) ¿Cuál es la velocidad promedio del automóvil entre $t = 0$ y $t = 50$ s?

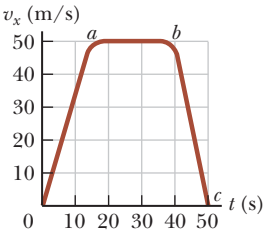


Figura P2.43

44. Un jugador de hockey está de pie sobre los patines en un estanque congelado cuando un jugador del equipo contrario, que se mueve con una velocidad uniforme de 12.0 m/s, patina con el disco. Después de 3.00 s, el primer jugador se decide a perseguir a su oponente. Si acelera uniformemente a 4.00 m/s^2, (a) ¿cuánto tiempo le tomó para atrapar a su oponente y (b) ¿qué distancia ha recorrido en ese tiempo? (Suponga que el jugador con el disco permanece en movimiento con rapidez constante.)

Sección 2.7 Objetos en caída libre

Nota: En todos los problemas de esta sección, ignorar los efectos de la resistencia del aire.

45. En el capítulo 9, vamos a definir el centro de masa de un objeto y demostrar que su movimiento es descrito por el modelo de la partícula bajo aceleración constante cuando actúan fuerzas constantes sobre el objeto. Un gimnasta salta directamente arriba, con su centro de masa moviéndose a 2.80 m/s cuando abandona el suelo. ¿Qué tan alto por encima de este punto está el centro de masa (a) 0.100 s, (b) 0.200 s, (c) 0.300 s y (d) 0.500 s a partir de entonces?

46. Un atacante en la base de la pared de un castillo de 3.65 m de alto lanza una roca recta hacia arriba con una rapidez de 7.40 m/s a una altura de 1.55 m sobre el suelo. (a) ¿La roca llegará a lo alto de la pared? (b) Si es así, ¿cuál es su rapidez en lo alto? Si no, ¿qué rapidez inicial debe tener para llegar a lo alto? (c) Encuentre el cambio en rapidez

de una roca lanzada recta hacia abajo desde lo alto de la pared con una rapidez inicial de 7.40 m/s y que se mueve entre los mismos dos puntos. (d) ¿El cambio en rapidez de la roca que se mueve hacia abajo concuerda con la magnitud del cambio de rapidez de la roca que se mueve hacia arriba entre las mismas elevaciones? Explique físicamente por qué sí o por qué no concuerda.

47. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Emily desafía a su amigo David a atrapar un billete de dólar del modo siguiente. Ella sostiene el billete verticalmente, como se muestra en la figura P2.47, con el centro del billete entre los dedos índice y pulgar de David, quien debe atrapar el billete después de que Emily lo libere sin mover su mano hacia abajo. Sin previo aviso, Emily libera el billete. David toma el billete sin mover la mano hacia abajo. El tiempo de reacción de David es igual al tiempo promedio de reacción humano.


© Cengage Learning/George Semple

Figura P2.47

48. Se golpea una pelota de béisbol de modo que viaja recto hacia arriba después de ser golpeada por el bat. Un aficionado observa que a la bola le toma 3.00 s llegar a su máxima altura. Encuentre (a) la velocidad inicial de la bola y (b) la altura que alcanza.

49. Es posible disparar una flecha con una rapidez tan alta como 100 m/s. (a) Si se puede ignorar la fricción, ¿qué tan rápido se lanzaría una flecha con este aumento de rapidez si disparo hacia arriba? (b) ¿Cuánto tiempo estaría la flecha en el aire?

50. La altura de un helicóptero sobre el suelo está dada por $h = 3.00t^3$, donde h está en metros y t en segundos. Después de 2.00 s, el helicóptero libera una pequeña valija de correo. ¿Cuánto tiempo después de su liberación, la valija llega al suelo?

51. Una bola se lanza directamente hacia arriba, con una rapidez inicial de 8.00 m/s, desde una altura de 30.0 m. ¿Después de qué intervalo de tiempo la bola golpea al suelo?

52. Se lanza una pelota hacia arriba desde el suelo con una rapidez inicial de 25 m/s; en el mismo instante se deja caer otra pelota desde un edificio de 15 m de altura. ¿Después de cuánto tiempo estarán las pelotas a la misma altura por encima del suelo?

53. Una estudiante lanza un conjunto de llaves verticalmente hacia arriba a su hermana de fraternidad, quien está en una ventana 4.00 m arriba. La segunda estudiante atrapa las llaves 1.50 s después. (a) ¿Con qué velocidad inicial se lanzaron las llaves? (b) ¿Cuál fue la velocidad de las llaves justo antes de ser atrapadas?

54. Al tiempo $t = 0$, una estudiante lanza un juego de llaves verticalmente hacia arriba a su hermana de fraternidad, que está en una ventana a una distancia h arriba. La segunda estudiante atrapa las llaves al tiempo t. (a) ¿Con qué velocidad inicial se lanzaron las llaves? (b) ¿Cuál era la velocidad de las llaves justo antes de que fueran capturadas?

55. Un osado vaquero sentado en la rama de un árbol desea caer verticalmente sobre un caballo que galopa bajo el árbol. La rapidez constante del caballo es 10.0 m/s y la distancia desde la rama hasta el nivel de la silla de montar es 3.00 m. (a) ¿Cuál debe ser la distancia horizontal entre la silla y la rama cuando el vaquero haga su movimiento? (b) ¿Qué intervalo de tiempo está en el aire?

56. Un paquete se deja caer en el tiempo $t = 0$ desde un helicóptero que está descendiendo de manera constante con una rapidez v_i. (a) ¿Cuál es la rapidez del paquete en términos de v_i, g, y t? (b) ¿Qué distancia vertical d es la del helicóptero en términos de g y t? (c) ¿Cuáles son las respuestas a los incisos (a) y (b) si el helicóptero se eleva con la misma rapidez de manera uniforme?

Sección 2.8 Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo

57. Los ingenieros automotrices se refieren a la tasa de cambio de la aceleración en el tiempo como el "jalón". Suponga que un objeto se mueve en una dimensión tal que su jalón J es constante. (a) Determine expresiones para su aceleración $a_x(t)$, velocidad $v_x(t)$ y posición $x(t)$, dado que su aceleración, velocidad y posición iniciales son a_{xi},v_{xi} y x_i, respectivamente. (b) Muestre que $a_x^2 = a_{xi}^2 + 2J(v_x - v_{xi})$.

58. Un estudiante conduce un ciclomotor a lo largo de un camino recto como se describe por la gráfica velocidad en función del tiempo de la figura P2.58. Bosqueje esta gráfica en medio de una hoja de papel gráfico. (a) Directamente sobre su gráfica, bosqueje una gráfica de la posición en función del tiempo y alinee las coordenadas de tiempo de las dos gráficas. (b) Bosqueje una gráfica de la aceleración en función del tiempo directamente bajo de la gráfica velocidad-tiempo, y de nuevo alinee las coordenadas de tiempo. Sobre cada gráfica muestre los valores numéricos de x y a_x para todos los puntos de inflexión. (c) ¿Cuál es la aceleración en $t = 6.00$ s? (d) Encuentre la posición (relativa al punto de partida) en $t = 6.00$ s. (e) ¿Cuál es la posición final del ciclomotor en $t = 9.00$ s?

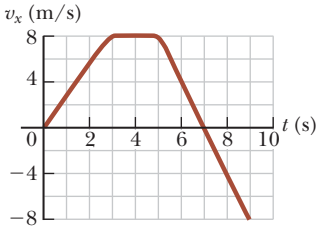


Figura P2.58

59. La rapidez de una bala mientras viaja por el cañón de un rifle hacia la abertura está dada por

$$v = (-5.00 \times 10^7)t^2 + (3.00 \times 10^5)t$$

donde v está en metros por segundo y t en segundos. La aceleración de la bala justo cuando sale del cañón es cero. (a) Determine la aceleración y posición de la bala como función del tiempo cuando la bala está en el cañón. (b) Determine el intervalo de tiempo durante el que la bala acelera. (c) Encuentre la rapidez a la que sale del cañón la bala. (d) ¿Cuál es la longitud del cañón?

Problemas adicionales

60. Cierto fabricante de automóviles afirma que su automóvil deportivo de lujo se acelerará desde el reposo hasta una rapidez de 42.0 m/s en 8.00 s. (a) Determine la aceleración promedio del automóvil. (b) Suponga que el automóvil se

mueve con aceleración constante. Encuentre la distancia que viaja el automóvil en los primeros 8.00 s. (c) ¿Cuál es la rapidez del automóvil 10.0 s después de que comienza su movimiento si puede continuar moviéndose con la misma aceleración?

61. La espumadora *Philaenus spumarius* es supuestamente el mejor saltador en el reino animal. Para iniciar un salto, este insecto es capaz de acelerar a 4.00 km/s² en una distancia de 2.00 mm, ya que endereza sus especialmente adaptadas "piernas saltadoras". Suponga que la aceleración es constante. (a) Encuentre la velocidad ascendente con la que el insecto despega. (b) ¿En qué intervalo de tiempo se alcanza esta velocidad? (c) ¿A qué altura saltaría el insecto si la resistencia del aire fuera insignificante? La altura real a la que llega es aproximadamente de 70 cm, por lo que la resistencia del aire debe ser una fuerza importante en el salto de la espumadora.

62. Un objeto está en $x = 0$ en $t = 0$ y se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la gráfica velocidad-tiempo de la figura P2.62. (a) ¿Cuál es la aceleración del objeto entre 0 y 4.0 s? (b) ¿Cuál es la aceleración del objeto entre 4.0 s y 9.0 s? (c) ¿Cuál es la aceleración del objeto entre 13.0 s y 18.0 s? (d) ¿En qué tiempo (s) el objeto se mueve con la rapidez más baja? (e) ¿En qué tiempo el objeto está más lejos de $x = 0$? (f) ¿Cuál es la posición final x del objeto en $t = 18.0$ s? (g) ¿A través de qué distancia total el objeto se mueve entre $t = 0$ y $t = 18.0$ s?

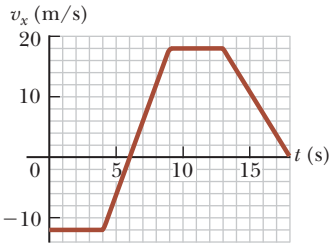


Figura P2.62

63. Un inquisitivo estudiante de física y montañista asciende un risco de 50.0 m que cuelga sobre un tranquilo ojo de agua. Lanza dos piedras verticalmente hacia abajo, con una separación de 1.00 s y observa que causan una sola salpicadura. La primera piedra tiene una rapidez inicial de 2.00 m/s. (a) ¿Cuánto tiempo después de liberar la primera piedra las dos piedras golpean el agua? (b) ¿Qué velocidad inicial debe tener la segunda piedra si deben golpear simultáneamente? (c) ¿Cuál es la rapidez de cada piedra en el instante en que las dos golpean el agua?

64. En la figura 2.11b, el área bajo la curva velocidad en función del tiempo y entre el eje vertical y el tiempo t (línea discontinua vertical) representa el desplazamiento. Como se muestra, esta área consiste de un rectángulo y un triángulo. (a) Calcule sus áreas y (b) explique cómo se compara la suma de las dos áreas con la expresión en el lado derecho de la ecuación 2.16.

65. Una bola parte del reposo y acelera en 0.500 m/s² mientras se mueve por un plano inclinado de 9.00 m de largo. Cuando llega a la parte inferior, la bola rueda a otro plano, donde alcanza el reposo después de moverse 15.0 m en ese plano. (a) ¿Cuál es la rapidez de la bola en la parte inferior del primer plano? (b) ¿Durante qué intervalo de tiempo la bola rueda hacia abajo por el primer plano? (c) ¿Cuál es la aceleración a lo largo del segundo plano? (d) ¿Cuál es la rapidez de la bola a 8.00 m a lo largo del segundo plano?

66. Una mujer informó haber caído 144 metros del piso 17 de un edificio, cayendo sobre una caja de metal del ventilador que aplastó a una profundidad de 18.0 pulg. Ella sufrió sólo heridas leves. Ignorando la resistencia del aire, calcule (a) la rapidez de la mujer justo antes de que chocó con el ventilador y (b) su aceleración promedio mientras está en contacto con la caja. (c) Modele su aceleración como constante, calcule el intervalo de tiempo que se tardó en aplastar la caja.

67. Un ascensor se mueve hacia abajo en un edificio alto con una rapidez constante de 5.00 m/s. Exactamente 5.00 s después la parte superior de la cabina del ascensor pasa por un perno fijado flojamente en la pared del pozo del ascensor, el perno cae a partir del reposo. (a) ¿En qué tiempo golpeó el perno la parte superior del elevador que aún está descendiendo? (b) ¿En qué sentido este problema es similar al ejemplo 2.8? (c) Estime la altura del piso más alto desde el cual puede caer el perno si el ascensor alcanza la planta baja antes de que el perno golpee la parte superior del elevador.

68. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un tren de carga viaja lentamente con una rapidez constante de 16.0 m/s. Detrás del tren de carga en la misma vía está un tren de pasajeros que viaja en la misma dirección a 40.0 m/s. Cuando la parte delantera del tren de pasajeros está a 58.5 m de la parte trasera del tren de carga, el ingeniero del tren de pasajeros reconoce el peligro y frena su tren, haciendo que el tren se mueva con una aceleración −3.00 m/s². Debido a la acción del ingeniero, los trenes no chocan.

69. El Acela es un tren eléctrico en la ruta Washington-Nueva York-Boston y transporta pasajeros a 170 mi/h. En la figura P2.69 se muestra una gráfica velocidad-tiempo para el Acela. (a) Describa el movimiento del tren en cada intervalo de tiempo sucesivo. (b) Encuentre la aceleración máxima positiva del tren en la gráfica del movimiento. (c) Encuentre el desplazamiento del tren, en millas, entre $t = 0$ y $t = 200$ s.

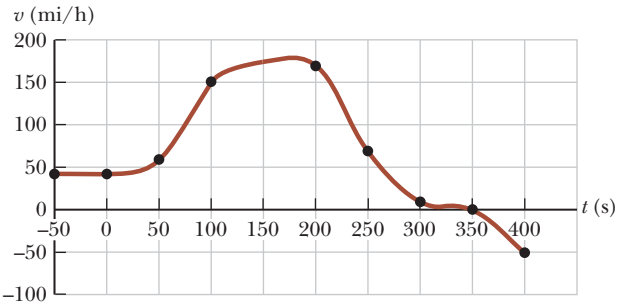


Figura P2.69 Gráfica velocidad frente a tiempo para el Acela.

70. Dos objetos se mueven con velocidad inicial de −8.00 m/s, velocidad final de 16.0 m/s y aceleraciones constantes. (a) El primer objeto tiene un desplazamiento de 20.0 m. Encuentre su aceleración. (b) El segundo objeto recorre una distancia total de 22.0 m. Encuentre su aceleración.

71. En $t = 0$, un atleta corriendo en una competencia de carrera en una pista recta larga, con una velocidad cons-

tante v_1, está atrás una distancia d_1 de un segundo atleta que corre con una velocidad constante v_2. (a) ¿En qué circunstancias es el primer atleta capaz de superar al segundo atleta? (b) Encuentre el tiempo t en el que el primer atleta alcanza al segundo atleta, en términos de d_1, v_1 y v_2. (c) ¿A qué distancia mínima d_2 del atleta líder debe encontrarse la línea de meta para que el atleta que va detrás al menos pueda empatar en el primer lugar? Exprese d_2 en términos de d_1, v_1 y v_2 utilizando el resultado del inciso (b).

72. Un cohete de prueba se dispara verticalmente hacia arriba desde un pozo. Una catapulta le da una rapidez inicial de 80.0 m/s a nivel del suelo. Después se encienden sus motores y acelera hacia arriba a 4.00 m/s^2 hasta que llega a una altitud de 1 000 m. En este punto sus motores fallan y el cohete entra en caída libre, con una aceleración de −9.80 m/s^2. (a) ¿Para qué intervalo de tiempo el cohete está en movimiento sobre el suelo? (b) ¿Cuál es su altitud máxima? (c) ¿Cuál es su velocidad justo antes de chocar con la Tierra? (Necesitará considerar el movimiento mientras el motor funciona por separado del movimiento en caída libre.)

73. Kathy prueba su nuevo automóvil deportivo corriendo con Stan, que es un experimentado corredor, pero Kathy deja la línea de partida 1.00 s antes que Stan. Stan se mueve con una aceleración constante de 3.50 m/s^2 y Kathy mantiene una aceleración de 4.90 m/s^2. Encuentre (a) el tiempo en que Kathy alcanza a Stan, (b) la distancia que recorre antes de alcanzarlo y (c) las rapideces de ambos automóviles en el instante en que lo alcanza.

74. Dos estudiantes están en un balcón a una distancia h arriba de la calle. Un estudiante lanza una pelota verticalmente hacia abajo con una rapidez v_i y, al mismo tiempo, el otro estudiante lanza una bola verticalmente hacia arriba a la misma rapidez. Responda las siguientes preguntas simbólicamente en términos de v_i, g, h, t. (a) ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre el momento que la primera pelota y la segunda pelota pegan en el suelo? (b) Calcule la velocidad de cada bola al pegar en el suelo. (c) ¿A qué distancia se encuentran las bolas en un tiempo t después de que se lanzan y antes de que peguen en el suelo?

75. Dos objetos, A y B, se conectan mediante una barra rígida que tiene longitud L. Los objetos se deslizan a lo largo de rieles guía perpendiculares, como se muestra en la figura P2.75. Suponga que A se desliza hacia la izquierda con una rapidez constante v. (a) Encuentre la velocidad de B como una función del ángulo θ. (b) Describa v_B en relación con v. ¿Es v_B siempre menor que v, mayor que v, o igual a v, o tiene alguna otra relación?

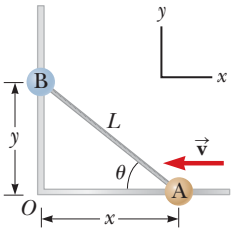


Figura P2.75

76. Astronautas en un planeta distante lanzan una roca al aire. Con la ayuda de una cámara que toma fotografías con una rapidez uniforme, registran la altura de la roca como función del tiempo, como se da en la tabla siguiente. (a) Encuentre la velocidad promedio de la roca en el intervalo de tiempo entre cada medición y la siguiente. (b) Use estas velocidades promedio para aproximar velocidades instantáneas en los puntos medios de los intervalos de tiempo y haga una gráfica de la velocidad como función del tiempo. (c) ¿La roca se mueve con aceleración constante? Si es así, trace una línea recta de mejor ajuste en la gráfica y calcule su pendiente para encontrar la aceleración.

Tiempo (s)	Altura (m)	Tiempo (s)	Altura (m)
0.00	5.00	2.75	7.62
0.25	5.75	3.00	7.25
0.50	6.40	3.25	6.77
0.75	6.94	3.50	6.20
1.00	7.38	3.75	5.52
1.25	7.72	4.00	4.73
1.50	7.96	4.25	3.85
1.75	8.10	4.50	2.86
2.00	8.13	4.75	1.77
2.25	8.07	5.00	0.58
2.50	7.90		

77. Una automovilista conduce por una carretera recta a una rapidez constante de 15.0 m/s. Justo cuando pasa una motocicleta estacionada de un oficial de policía, el oficial comienza a acelerar a 2.00 m/s^2 para alcanzarla. Suponiendo que el oficial mantiene esta aceleración, (a) determine el intervalo de tiempo requerido para que el policía alcance a la automovilista. Encuentre (b) la rapidez y (c) el desplazamiento total del oficial cuando alcanza a la automovilista.

78. Un tren de pasajeros viaja entre dos estaciones del centro de la ciudad. Puesto que las estaciones sólo están separadas 1.00 km, el tren nunca alcanza su máxima rapidez de viaje posible. Durante las horas de tráfico el ingeniero minimiza el intervalo de tiempo Δt entre las dos estaciones al acelerar durante un intervalo de tiempo Δt_1 a razón de $a_1 = 0.100$ m/s^2 para luego frenar inmediatamente con una aceleración $a_2 = -0.500$ m/s^2 en un intervalo de tiempo Δt_2. Encuentre el intervalo de tiempo mínimo de viaje Δt y el intervalo de tiempo Δt_1.

79. Liz llega de prisa a un andén del metro para encontrar su tren que está a punto de partir. Se detiene y mira los carros que pasan. Cada carro tiene una longitud de 8.60 m. El primero se mueve pasándola en 1.50 s y el segundo en 1.10 s. Encuentre la aceleración constante del tren.

80. Una bola de hule duro, liberada a la altura del pecho, cae al pavimento y rebota de vuelta casi a la misma altura. Cuando está en contacto con el pavimento, el lado inferior de la bola se aplana temporalmente. Suponga que la profundidad máxima de la abolladura es del orden de 1 cm. Calcule una estimación del orden de magnitud para la aceleración máxima de la bola mientras está en contacto con el pavimento. Establezca sus suposiciones, las cantidades que estimó y los valores que estimó para ellas.

Problemas de desafío

81. Un automóvil azul de 4.52 m de longitud se mueve hacia el Norte por una carretera que se cruza con otro camino perpendicular (fig. P2.81, página 58). El ancho de la intersección del extremo cercano al lejano es de 28.0 m. El automóvil azul tiene una aceleración constante de magnitud 2.10 m/s^2 dirigida al Sur. El intervalo de tiempo requerido para que el frente del automóvil azul pase de la orilla cercana (Sur) de la intersección a la orilla norte de la

intersección es 3.10 s. (a) ¿A qué distancia está el frente del automóvil azul de la orilla sur de la intersección cuando se detiene? (b) ¿Para qué intervalo de tiempo está *cualquier* parte del automóvil azul dentro de los límites de la intersección? (c) Un automóvil rojo está en reposo en la carretera de intersección perpendicular. Conforme el frente del automóvil azul entra en la intersección, el automóvil rojo parte del reposo y acelera al Este a 5.60 m/s^2. ¿Cuál es la distancia mínima desde la orilla más cercana (Oeste) de la intersección en la cual el frente del automóvil rojo puede comenzar su movimiento si éste entra en la intersección después de que el automóvil azul ha entrado completamente a la izquierda de la intersección? (d) Si el automóvil rojo comienza su movimiento en la posición dada por la respuesta del inciso (c), ¿con qué rapidez se introduce éste en la intersección?

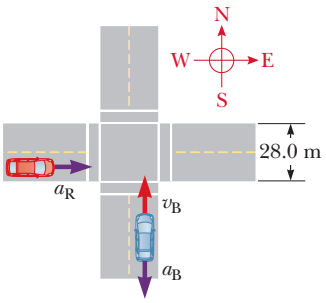


Figura P2.81

82. Problema de repaso. Tan pronto como el semáforo se pone verde, un automóvil acelera a partir del reposo a 50.0 mi/h con una aceleración constante de 9.00 mi/h/s. En el carril de bicicletas al lado, un ciclista acelera desde el reposo hasta 20.0 mi/h con una aceleración constante de 13.0 mi/h/s. Cada vehículo mantiene una velocidad constante después de alcanzar su rapidez máxima. (a) ¿Durante qué intervalo de tiempo está la bicicleta por delante del automóvil? (*b*) ¿Para qué distancia máxima la bicicleta está delante del automóvil?

83. En una carrera de 100 m de mujeres, a Laura, acelerando de manera uniforme, le toma 2.00 s, y a Healan 3.00 s alcanzar sus velocidades máximas, que mantienen cada una de ellas durante el resto de la carrera. Cruzan la línea de meta al mismo tiempo, estableciendo ambas un récord mundial de 10.4 s. (a) ¿Cuál es la aceleración de cada atleta? (b) ¿Cuáles son sus respectivas rapideces máximas? (c) ¿Qué atleta está por delante en la marca de 6.00 s, y por cuánto? (d) ¿Cuál es la distancia máxima en que Healan está detrás de Laura, y en qué tiempo ocurre eso?

84. Dos varillas delgadas se sujetan en el interior de un anillo circular, como se muestra en la figura P2.84. Una varilla de longitud D es vertical, y la otra de longitud L forma un ángulo θ con la horizontal. Las dos varillas y el anillo están en un plano vertical. Dos pequeñas cuentas están libres para deslizarse sin fricción a lo largo de las varillas. (a) Si las dos cuentas se liberan simultáneamente a partir del reposo desde las posiciones que se muestran, use su intuición y conjeture qué cuenta llega al fondo primero. (b) Halle una expresión para el intervalo de tiempo necesario para que la cuenta roja caiga del punto Ⓐ al punto Ⓒ en términos de g y D. (c) Encuentre una expresión para el intervalo de tiempo requerido para que la cuenta azul se deslice desde el punto Ⓑ al punto Ⓒ en términos de g, L y θ. (*d*) Demuestre que los dos intervalos de tiempo encontrados en los incisos (b) y (c) son iguales. *Sugerencia*: ¿cuál es el ángulo entre las cuerdas Ⓐ Ⓑ y Ⓑ Ⓒ del círculo? (e) ¿Estos resultados le sorprenden? ¿Su conjetura intuitiva del inciso (a) es correcta? Este problema se inspiró en un artículo de Thomas B. Greenslade, Jr., "La paradoja de Galileo", *Phys. Teach.* 46, 294 (mayo de 2008).

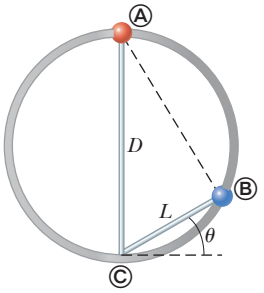


Figura P2.84

85. Un hombre deja caer una piedra en un pozo. (a) El hombre escucha el sonido del chapoteo 2.40 s después de que suelta la piedra a partir del reposo. La rapidez del sonido en el aire (a temperatura ambiente) es de 336 m/s. ¿A qué distancia por debajo de la parte superior del pozo está la superficie del agua? (b) ¿Qué pasaría si? Si se ignora el tiempo de viaje para el sonido, ¿qué porcentaje de error se introduce cuando se calcula la profundidad del pozo?

CAPÍTULO

3

Vectores



Un poste indicador en San Petersburgo, Florida, muestra la distancia y la dirección de varias ciudades. Las cantidades que se definen con una magnitud y una dirección se llaman cantidades vectoriales.
(Raymond A. Serway)

3.1 Sistemas coordenados

3.2 Cantidades vectoriales y escalares

3.3 Algunas propiedades de los vectores

3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios

En nuestro estudio de la física, a menudo tenemos que trabajar con cantidades físicas que tienen tanto propiedades numéricas como de dirección. Como se indicó en la sección 2.1, las cantidades de esta naturaleza son cantidades vectoriales. Este capítulo se ocupa principalmente de las propiedades generales de cantidades vectoriales. Se discute la suma y resta de cantidades vectoriales, junto con algunas aplicaciones comunes a situaciones físicas.

Las cantidades vectoriales se utilizan en todo el texto. Por lo tanto, es imperativo que usted domine las técnicas descritas en este capítulo.

3.1 Sistemas coordenados

Muchos aspectos de la física involucran una descripción de una ubicación en el espacio. Por ejemplo, en el capítulo 2 se vio que la descripción matemática del movimiento de un objeto requiere un método para describir la posición del objeto en varios tiempos. En dos dimensiones esta descripción se logra con el uso del sistema de coordenadas cartesianas, en el que ejes perpendiculares cruzan en un punto definido como el origen O (figura 3.1). Las coordenadas cartesianas también se llaman *coordenadas rectangulares*.

A veces es más conveniente representar un punto en un plano por sus *coordenadas polares planas* (r, θ), como se muestra en la figura 3.2a (página 60). En este *sistema de coordenadas polares*, r es la distancia desde el origen hasta el punto que tiene coordenadas cartesianas (x, y) y θ es el ángulo entre un eje fijo y una recta dibujada desde el origen hasta el punto. El eje fijo es el eje x positivo y θ se mide contra el sentido de

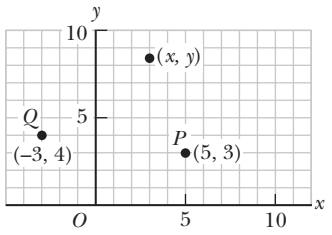


Figura 3.1 Designación de puntos en un sistema coordenado cartesiano. Cualquier punto se etiqueta con las coordenadas (x, y).

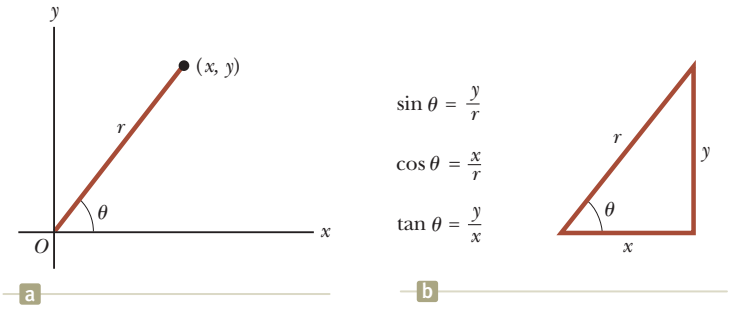


Figura 3.2 (a) Las coordenadas polares planas de un punto se representan mediante la distancia r y el ángulo θ, donde θ se mide contra el sentido de las manecillas del reloj a partir del eje x positivo. (b) El triángulo rectángulo se usa para relacionar (x, y) con (r, θ).

las manecillas del reloj desde el mismo. Del triángulo rectángulo de la figura 3.2b, se encuentra que sen $\theta = y/r$ y que cos $\theta = x/r$. (En el Apéndice B.4 se presenta una revisión de las funciones trigonométricas.) En consecuencia, si parte con las coordenadas polares planas de cualquier punto, al aplicar las siguientes ecuaciones obtiene las coordenadas cartesianas usando las ecuaciones

Coordenadas cartesianas en términos de las coordenadas polares

$$x = r\cos\theta \tag{3.1}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{3.2}$$

Además, las definiciones de trigonometría dicen que

Coordenadas polares en términos de las coordenadas cartesianas

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \tag{3.3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.4}$$

La ecuación 3.4 es el conocido teorema de Pitágoras.

Estas cuatro expresiones, que relacionan las coordenadas (x, y) con las coordenadas (r, θ), se aplican sólo cuando θ se define como se muestra en la figura 3.2a; en otras palabras, cuando θ es positivo, es un ángulo que se mide contra el sentido de las manecillas del reloj a partir del eje x positivo. (Algunas calculadoras científicas realizan conversiones entre coordenadas cartesianas y polares en función de estas convenciones estándar.) Si como eje de referencia para el ángulo polar θ se elige otro distinto del eje x positivo o si el sentido de θ creciente se elige de modo diferente, cambiarán las expresiones que relacionan los dos conjuntos de coordenadas.

Ejemplo 3.1 Coordenadas polares

Las coordenadas cartesianas de un punto en el plano xy son $(x, y) = (-3.50, -2.50)$ m, como se muestra en la figura 3.3. Encuentre las coordenadas polares de este punto.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El dibujo de la figura 3.3 ayuda a formar conceptos del problema. Queremos encontrar r y θ. Esperamos que r sea unos cuantos metros y que θ sea mayor de 180°.

Categorizar A partir del enunciado del problema y de la etapa Conceptualizar, se entiende que simplemente se convierte de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Debido a esto, se considera este ejemplo como un problema de sustitución. Dichos problemas por lo general no tienen una etapa de análisis amplia distinta de la sustitución de números en una ecuación dada. De igual modo, la etapa Finalizar consiste principalmente en comprobar las unidades y asegurarse de que la respuesta es razonable y

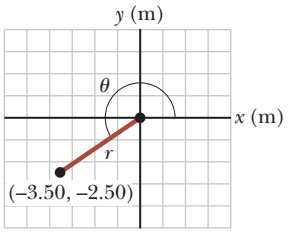


Figura 3.3 (Ejemplo 3.1) Encuentre las coordenadas polares cuando las coordenadas cartesianas están dadas.

3.1 continuación

consistente con nuestras expectativas. En consecuencia, para problemas de sustitución, no se marcarán las etapas Analizar y Finalizar.

Aplique la ecuación 3.4 para encontrar r:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50\ \text{m})^2 + (-2.50\ \text{m})^2} = 4.30\ \text{m}$$

Aplique la ecuación 3.3 para hallar θ:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50\ \text{m}}{-3.50\ \text{m}} = 0.714$$

$$\theta = 216°$$

Note que debe usar los signos de x y y para encontrar que el punto se encuentra en el tercer cuadrante del sistema coordenado. Esto es, $\theta = 216°$, no 35.5°, cuya tangente también es 0.714. Ambas respuestas concuerdan con nuestras expectativas de la etapa Conceptualizar.

3.2 Cantidades vectoriales y escalares

Ahora se describirá formalmente la diferencia entre cantidades escalares y cantidades vectoriales. Cuando quiere saber la temperatura exterior para saber cómo vestirse, la única información que necesita es un número y la unidad "grados C" o "grados F". Así, la temperatura es un ejemplo de *cantidad escalar*:

> Una **cantidad escalar** se especifica por completo mediante un valor único con una unidad adecuada y no tiene dirección.

Otros ejemplos de cantidades escalares son volumen, masa, rapidez e intervalos de tiempo. Algunos escalares como la masa y la rapidez siempre son positivos. Para manipular cantidades escalares se usan las reglas de aritmética ordinaria.

Si se prepara para pilotear un pequeño avión y necesita saber la velocidad del viento, debe conocer tanto la rapidez del viento como su dirección. Puesto que la dirección es importante para una especificación completa, la velocidad es una *cantidad vectorial*:

> Una **cantidad vectorial** se especifica por completo mediante un número y unidades apropiadas más una dirección.

Otro ejemplo de una cantidad vectorial es el desplazamiento, como ya sabe por el capítulo 2. Suponga que una partícula se mueve desde algún punto Ⓐ hasta algún punto Ⓑ a lo largo de una trayectoria recta, como se muestra en la figura 3.4. Tal desplazamiento se representa con el dibujo de una flecha de Ⓐ a Ⓑ, en el que la punta de la flecha apunta alejándose del punto de partida. La dirección de la punta de flecha representa la dirección del desplazamiento y la longitud de la flecha representa la magnitud del desplazamiento. Si la partícula viaja a lo largo de alguna otra trayectoria de Ⓐ a Ⓑ, como se muestra mediante la línea discontinua en la figura 3.4, su desplazamiento todavía es la flecha dibujada de Ⓐ a Ⓑ. El desplazamiento sólo depende de las posiciones inicial y final, de modo que el vector desplazamiento es independiente de la trayectoria que toma la partícula entre estos dos puntos.

En este texto se usa una letra en negrita con una flecha sobre ella, como $\vec{\mathbf{A}}$, para representar un vector. Otra notación común para vectores, con la que se debe familiarizar, es un carácter en negrita: $\mathbf{A}$. La magnitud del vector $\vec{\mathbf{A}}$ se escribe A o $|\vec{\mathbf{A}}|$. La magnitud de un vector tiene unidades físicas, como metros para desplazamiento o metros por segundo para velocidad. La magnitud de un vector *siempre* es un número positivo.

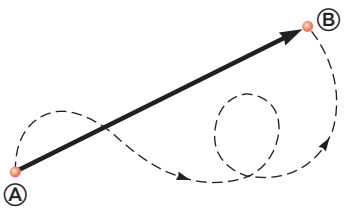


Figura 3.4 Conforme una partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ a lo largo de una trayectoria arbitraria representada por la línea discontinua, su desplazamiento es una cantidad vectorial que se muestra mediante la flecha dibujada de Ⓐ a Ⓑ.

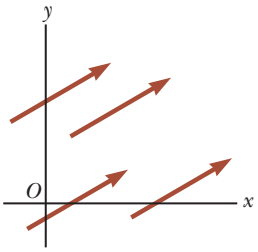


Figura 3.5 Estos cuatro vectores son iguales porque tienen longitudes iguales y apuntan en la misma dirección.

Examen rápido 3.1 ¿Cuáles de las siguientes son cantidades vectoriales y cuáles son cantidades escalares? **(a)** su edad **(b)** aceleración **(c)** velocidad **(d)** rapidez **(e)** masa

3.3 Algunas propiedades de los vectores

En esta sección se indagarán las propiedades generales de los vectores que representan cantidades físicas. También se discute cómo sumar y restar vectores con el uso de métodos algebraicos y geométricos.

Igualdad de dos vectores

Para muchos propósitos, dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se definen como iguales si tienen la misma magnitud y si apuntan en la misma dirección. Esto es, $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$ sólo si $A = B$ y si $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ apuntan en la misma dirección a lo largo de rectas paralelas. Por ejemplo, todos los vectores en la figura 3.5 son iguales aun cuando tengan diferentes puntos de inicio. Dicha propiedad permite mover, en un diagrama, un vector a una posición paralela a sí mismo sin afectar al vector.

Prevención de riesgos ocultos 3.1

Suma vectorial contra suma escalar Note que $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{C}}$ es muy diferente de $A + B = C$. La primera ecuación es una suma vectorial, que se debe manejar con cuidado, con un método gráfico. La segunda ecuación es una simple suma algebraica de números que se manejan con las reglas normales de aritmética.

Suma de vectores

Una forma conveniente de describir las reglas para sumar vectores es mediante un método gráfico. Para sumar el vector $\vec{\mathbf{B}}$ al vector $\vec{\mathbf{A}}$, primero dibuje el vector $\vec{\mathbf{A}}$ en papel gráfico, con su magnitud representada mediante una escala de longitud conveniente, y luego dibuje el vector $\vec{\mathbf{B}}$ a la misma escala, con su origen iniciando desde la punta de $\vec{\mathbf{A}}$, como se muestra en la figura 3.6. El **vector resultante** $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ es el vector que se dibuja desde el origen de $\vec{\mathbf{A}}$ a la punta de $\vec{\mathbf{B}}$.

También se usa una construcción geométrica para sumar más de dos vectores, como se muestra en la figura 3.7 para el caso de cuatro vectores. El vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{D}}$ es el vector que completa el polígono. En otras palabras, $\vec{\mathbf{R}}$ es el vector dibujado desde el origen del primer vector a la punta del último vector. Esta técnica para sumar vectores con frecuencia se llama "método de la poligonal".

Cuando se suman dos vectores, la suma es independiente del orden de la adición. (Quizás esto parezca trivial, pero como verá en el capítulo 11, el orden es importante cuando se multiplican vectores. Los procedimientos para multiplicar vectores se analizan en los capítulos 7 y 11.) Esta propiedad, que se aprecia en la construcción geométrica de la figura 3.8, se conoce como **ley conmutativa de la suma**:

Ley conmutativa de la suma ▶

$$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \qquad (3.5)$$

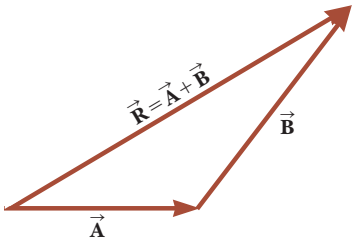


Figura 3.6 Cuando el vector $\vec{\mathbf{B}}$ se suma al vector $\vec{\mathbf{A}}$, la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ es el vector que va del origen de $\vec{\mathbf{A}}$ a la punta de $\vec{\mathbf{B}}$.

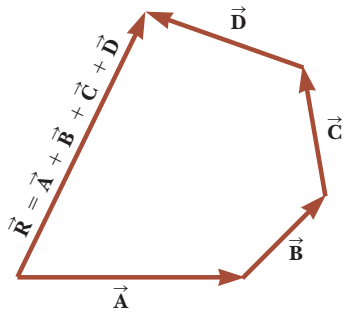


Figura 3.7 Construcción geométrica para sumar cuatro vectores. El vector resultante $\vec{\mathbf{R}}$ es por definición el que completa el polígono.

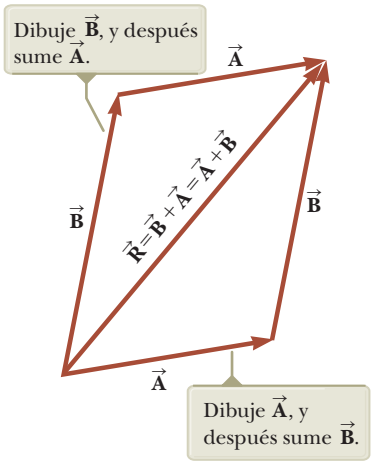


Figura 3.8 Esta construcción muestra que $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}$ o, en otras palabras, que la suma vectorial es conmutativa.

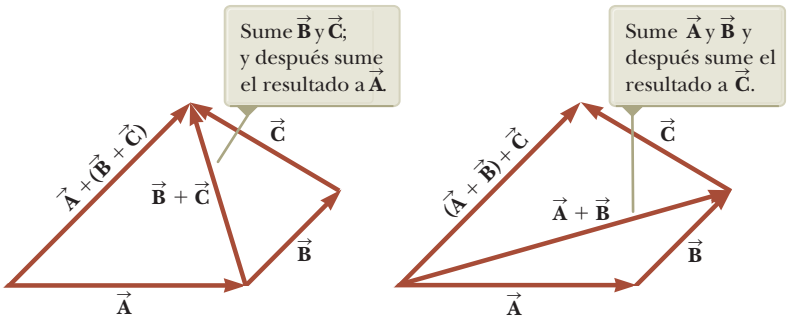


Figura 3.9 Construcciones geométricas para verificar la ley asociativa de la suma.

Cuando se suman tres o más vectores, su suma es independiente de la forma en la cual se agrupan los vectores individuales. En la figura 3.9 se muestra una prueba geométrica de esta regla para tres vectores. Esta propiedad se llama **ley asociativa de la suma**:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \qquad (3.6)$$

◀ Ley asociativa de la suma

En resumen, **una cantidad vectorial tiene tanto magnitud como dirección y también obedece las leyes de la suma vectorial,** como se describe en las figuras de la 3.6 a la 3.9. Cuando se suman dos o más vectores, todos deben tener las mismas unidades y deben ser del mismo tipo de cantidad. No tiene sentido sumar un vector velocidad (por ejemplo, 60 km/h hacia el Este) con un vector desplazamiento (por ejemplo, 200 km al Norte), porque estos vectores representan diferentes cantidades físicas. La misma regla se aplica a los escalares. Por ejemplo, no tiene sentido sumar intervalos de tiempo con temperaturas.

Negativo de un vector

El negativo del vector $\vec{A}$ se define como el vector que, cuando se suma con $\vec{A}$, da cero para la suma vectorial. Esto es: $\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$. Los vectores $\vec{A}$ y $-\vec{A}$ tienen la misma magnitud pero apuntan en direcciones opuestas.

Resta de vectores

La operación de resta vectorial utiliza la definición del negativo de un vector. Se define la operación $\vec{A} - \vec{B}$ como el vector $-\vec{B}$ que se suma al vector $\vec{A}$:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \qquad (3.7)$$

En la figura 3.10a se ilustra la construcción geométrica para restar dos vectores de esta forma.

Otra forma de observar la resta vectorial es notar que la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es lo que se debe sumar al segundo vector para obtener el pri-

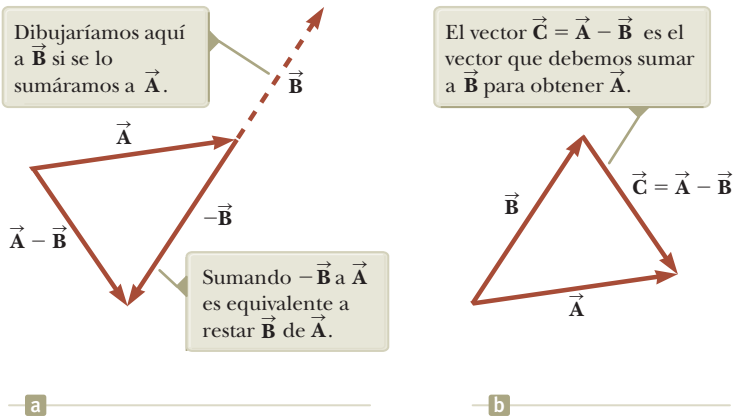


Figura 3.10 (a) Esta construcción muestra cómo restar el vector $\vec{B}$ del vector $\vec{A}$. El vector $-\vec{B}$ es igual en magnitud al vector $\vec{B}$ y apunta en la dirección opuesta. (b) Una segunda forma de mirar al vector resta.

mero. En este caso, como muestra la figura 3.10b, el vector $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ apunta desde la punta del segundo vector a la punta del primero.

Multiplicación de un vector por un escalar

Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ se multiplica por una cantidad escalar positiva m, el producto $m\vec{\mathbf{A}}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\vec{\mathbf{A}}$ y magnitud mA. Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ se multiplica por una cantidad escalar negativa $-m$, el producto $-m\vec{\mathbf{A}}$ tiene una dirección opuesta a $\vec{\mathbf{A}}$. Por ejemplo, el vector $5\vec{\mathbf{A}}$ es cinco veces más largo que $\vec{\mathbf{A}}$ y apunta en la misma dirección que $\vec{\mathbf{A}}$ el vector $-\frac{1}{3}\vec{\mathbf{A}}$; es un tercio la longitud de $\vec{\mathbf{A}}$ y apunta en la dirección opuesta a $\vec{\mathbf{A}}$.

Examen rápido 3.2 Las magnitudes de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son $A = 12$ unidades y $B = 8$ unidades. ¿Cuál de los siguientes pares de números representa los valores *más grandes* y *más pequeños* posibles para la magnitud del vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$? **(a)** 14.4 unidades, 4 unidades, **(b)** 12 unidades, 8 unidades, **(c)** 20 unidades, 4 unidades, **(d)** ninguna de estas respuestas.

Examen rápido 3.3 Si el vector $\vec{\mathbf{B}}$ se suma al vector $\vec{\mathbf{A}}$, ¿cuáles *dos* de las siguientes opciones deben ser verdaderas para que el vector resultante sea igual a cero? **(a)** $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son paralelos y en la misma dirección. **(b)** $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son paralelos y en direcciones opuestas. **(c)** $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen la misma magnitud. **(d)** $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son perpendiculares.

Ejemplo 3.2 Un viaje de vacaciones

Un automóvil viaja 20.0 km al Norte y luego a 35.0 km en una dirección 60.0° al noroeste, como se muestra en la figura 3.11a. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del automóvil.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ dibujados en la figura 3.11a ayudan a conceptualizar el problema. También se ha dibujado el vector resultante $\vec{\mathbf{R}}$. Esperamos que su magnitud sea de unas pocas decenas de kilómetros. El ángulo β que hace que el vector resultante con el eje y se espera que sea menos de 60°, el ángulo que el vector $\vec{\mathbf{B}}$ hace con el eje y.

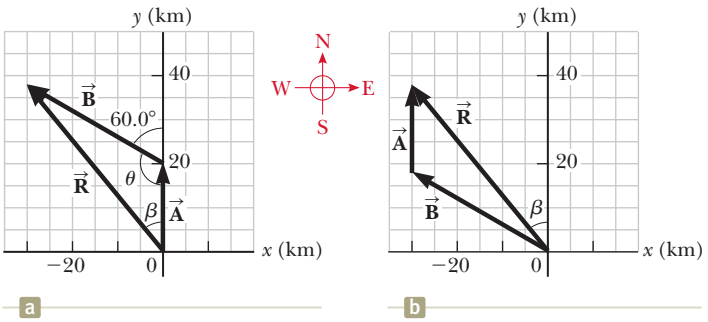


Figura 3.11 (Ejemplo 3.2) (a) Método gráfico para encontrar el vector de desplazamiento resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$. (b) Sumando los vectores en orden inverso $(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}})$ da el mismo resultado para $\vec{\mathbf{R}}$

Categorizar Este ejemplo se puede clasificar como un simple problema de análisis acerca de suma vectorial. El desplazamiento $\vec{\mathbf{R}}$ es la resultante cuando se suman los dos desplazamientos individuales $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Además, se puede clasificar como un problema acerca del análisis de triángulos, así que se acude a la experiencia en geometría y trigonometría.

Analizar En este ejemplo se muestran dos formas para analizar el problema de encontrar la resultante de dos vectores. La primera es resolver el problema mediante la geometría, con el uso de papel graficado y un transportador para medir la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ y su dirección en la figura 3.11a. (De hecho, aun cuando sepa que va a realizar un cálculo, debe bosquejar los vectores para comprobar sus resultados.) Con una regla y transportador ordinarios, típicamente un buen diagrama da respuestas con dos dígitos pero no con una precisión de tres dígitos. ¡Intente usar estas herramientas en $\vec{\mathbf{R}}$ en la figura 3.11a y compare con el análisis trigonométrico que se muestra a continuación!

La segunda forma de resolver el problema es analizarlo con álgebra. La magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ se obtiene a partir de la ley de cosenos, tal como se aplica al triángulo en la figura 3.11a (véase el Apéndice B.4).

Aplique $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$ de la ley de cosenos para encontrar R:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

Sustituya valores numéricos y note que $\theta = 180° - 60° = 120°$:

$$R = \sqrt{(20.0\text{ km})^2 + (35.0\text{ km})^2 - 2(20.0\text{ km})(35.0\text{ km})\cos 120°}$$
$$= 48.2\text{ km}$$

3.2 continuación

Aplique la ley de senos (Apéndice B.4) para encontrar la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ medida desde la dirección norte:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{B} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{R}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{B}{R}\operatorname{sen}\theta = \frac{35.0\ \text{km}}{48.2\ \text{km}}\operatorname{sen}120^\circ = 0.629$$

$$\beta = 38.9^\circ$$

El desplazamiento resultante del automóvil es 48.2 km, con una dirección de 38.9° al noroeste.

Finalizar ¿El ángulo β que se calculó, concuerda con una estimación realizada al observar la figura 3.11a o con un ángulo real medido del diagrama con el uso del método de la poligonal? ¿Es razonable que la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ sea mayor que la de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$? ¿Las unidades de $\vec{\mathbf{R}}$ son correctas?

Aunque el método de la poligonal para sumar vectores funciona bien, tiene dos desventajas. Primera, algunas personas encuentran abrumador el uso de las leyes de cosenos y senos. Segunda, sólo resulta un triángulo si suma dos vectores. Si suma tres o más vectores, la forma geométrica resultante no es un triángulo. En la sección 3.4 se explora un nuevo método para sumar vectores que abordará estas dos desventajas.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que el viaje se realiza considerando los dos vectores en orden inverso: 35.0 km con dirección 60.0° al noroeste primero y después 20.0 km al Norte. ¿Cómo cambiarían la magnitud y dirección del vector resultante?

Respuesta No cambiarían. La ley conmutativa para la suma vectorial dice que el orden de los vectores en una suma es irrelevante. Gráficamente, la figura 3.11b muestra que los vectores sumados en orden inverso proporcionan el mismo vector resultante.

3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios

El método gráfico de suma de vectores no se recomienda cuando se requiere gran precisión o en problemas tridimensionales. En esta sección se describe un método de suma de vectores que utiliza las proyecciones de los vectores a lo largo de los ejes coordenados. Dichas proyecciones se llaman **componentes** del vector o sus **componentes rectangulares**. Cualquier vector se puede describir por completo mediante sus componentes.

Considere un vector $\vec{\mathbf{A}}$ que se encuentra en el plano xy y forma un ángulo arbitrario θ con el eje positivo x, como se muestra en la figura 3.12a. Este vector se puede expresar como la suma de otros dos *vectores componentes* $\vec{\mathbf{A}}_x$, que es paralelo al eje x, y $\vec{\mathbf{A}}_y$, que es paralelo al eje y. De la figura 3.12b se ve que los tres vectores forman un triángulo rectángulo y que $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_x + \vec{\mathbf{A}}_y$. Con frecuencia se hará alusión a las "componentes de un vector $\vec{\mathbf{A}}$", escritas A_x y A_y (la notación es sin negritas). La componente A_x representa la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje x, y la componente A_y representa la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje y. Estas componentes pueden ser positivas o negativas. La componente A_x es positiva si el vector componente A_x apunta en la dirección x positiva y es negativa si $\vec{\mathbf{A}}$ apunta en la dirección x negativa. Lo mismo es cierto para la componente A_y.

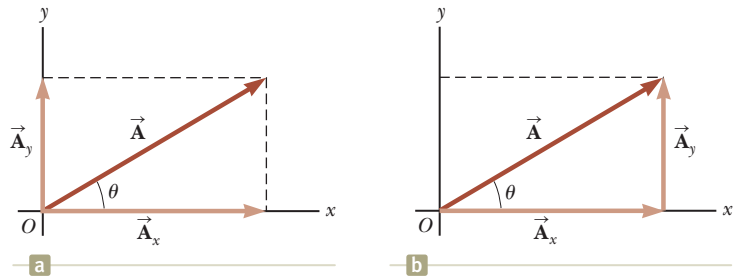


Figura 3.12 (a) Un vector $\vec{\mathbf{A}}$ que se encuentra en el plano xy se representa mediante sus vectores componentes $\vec{\mathbf{A}}_x$ y $\vec{\mathbf{A}}_y$. (b) El vector componente $\vec{\mathbf{A}}_y$ se puede mover hacia la derecha de modo que se sume a $\vec{\mathbf{A}}_x$. La suma vectorial de los vectores componentes es $\vec{\mathbf{A}}$. Estos tres vectores forman un triángulo rectángulo.

Prevención de riesgos ocultos 3.2

Componentes *x* y *y* Las ecuaciones 3.8 y 3.9 asocian el coseno del ángulo con la componente *x* y el seno del ángulo con la componente *y*. Esta asociación es cierta *sólo* porque el ángulo θ se midió respecto del eje *x*, así que no memorice estas ecuaciones. Si θ se mide en relación con el eje *y* (como en algunos problemas), éstas serán ecuaciones incorrectas. Piense acerca de cuál lado del triángulo, que contenga las componentes, es adyacente al ángulo y cuál es lado opuesto y luego asigne el coseno y el seno en concordancia.

De la figura 3.12 y de la definición de seno y coseno, es claro que $\cos\theta = A_x/A$ y que $\operatorname{sen}\theta = A_y/A$. Por tanto, las componentes de $\vec{\mathbf{A}}$ son

$$A_x = A\cos\theta \tag{3.8}$$

$$A_y = A\operatorname{sen}\theta \tag{3.9}$$

Las magnitudes de estas componentes son las longitudes de los dos lados de un triángulo rectángulo con una hipotenusa de longitud *A*. Debido a esto, la magnitud y la dirección de $\vec{\mathbf{A}}$ se relacionan con sus componentes mediante las expresiones

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{3.10}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \tag{3.11}$$

Observe que los signos de las componentes A_x y A_y dependen del ángulo θ. Por ejemplo, si $\theta = 120°$, A_x es negativa y A_y positiva. Si $\theta = 225°$, tanto A_x como A_y son negativas. La figura 3.13 resume los signos de las componentes cuando $\vec{\mathbf{A}}$ se encuentra en varios cuadrantes.

Cuando resuelva problemas, especifique un vector $\vec{\mathbf{A}}$ con sus componentes A_x y A_y o con su magnitud y dirección *A* y θ.

Suponga que trabaja un problema físico que requiere descomponer un vector en sus componentes. En muchas aplicaciones, es conveniente expresar las componentes en un sistema coordenado que tenga ejes que no sean horizontales ni verticales, pero que sean mutuamente perpendiculares. Por ejemplo, se considerará el movimiento de los objetos que se deslizan por planos inclinados. Para tales ejemplos, conviene orientar el eje *x* paralelo al plano y el eje *y* perpendicular al plano.

Examen rápido 3.4 Elija la respuesta correcta para hacer verdadera la oración: una componente de un vector es **(a)** siempre, **(b)** nunca o **(c)** a veces mayor que la magnitud del vector.

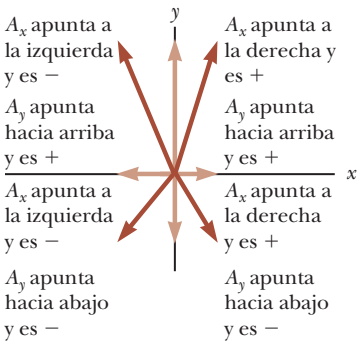


Figura 3.13 Los signos de las componentes de un vector $\vec{\mathbf{A}}$ dependen del cuadrante en el que se ubica el vector.

Vectores unitarios

Las cantidades vectoriales con frecuencia se expresan en términos de vectores unitarios. Un **vector unitario** es un vector sin dimensiones que tiene una magnitud de exactamente 1. Los vectores unitarios se usan para especificar una dirección conocida y no tienen otro significado físico. Son útiles exclusivamente como una convención para describir una dirección en el espacio. Se usarán los símbolos $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ para representar los vectores unitarios que apuntan en las direcciones *x*, *y* y *z* positivas, respectivamente. (Los "sombreros", o circunflejos, sobre los símbolos son una notación estándar para vectores unitarios.) Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$ forman un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares en un sistema coordenado de mano derecha, como se muestra en la figura 3.14a. La magnitud de cada vector unitario es igual a 1; esto es, $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1$.

Considere un vector $\vec{\mathbf{A}}$ que se encuentra en el plano *xy*, como se muestra en la figura 3.14b. El producto de la componente A_x y el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$ es el vector com-

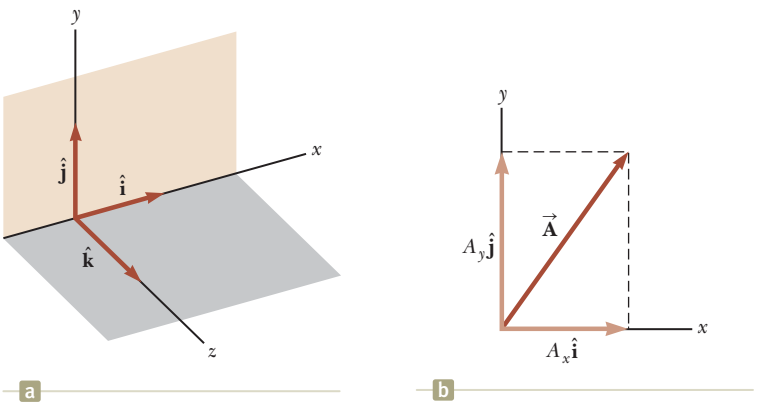


Figura 3.14 (a) Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$ se dirigen a lo largo de los ejes *x*, *y* y *z*, respectivamente. (b) El vector $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$ que se encuentra en el plano *xy* tiene componentes A_x y A_y.

ponente $\hat{\mathbf{i}}$, que se encuentra en el eje x y tiene magnitud $|A_x|$. Del mismo modo, $\vec{\mathbf{A}}_y = A_y\hat{\mathbf{j}}$ es el vector componente de magnitud $|A_y|$ que se encuentra en el eje y. Por tanto, la notación en vectores unitarios para el vector $\vec{\mathbf{A}}$ es

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \tag{3.12}$$

Por ejemplo, considere un punto que se encuentra en el plano xy y tiene coordenadas cartesianas (x, y), como en la figura 3.15. El punto se especifica mediante el **vector de posición** $\vec{\mathbf{r}}$, que en forma de vectores unitarios está dado por

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} \tag{3.13}$$

Esta notación indica que las componentes de $\vec{\mathbf{r}}$ son las coordenadas x y y.

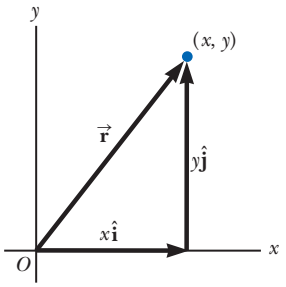


Figura 3.15 El punto cuyas coordenadas cartesianas son (x, y) se representa mediante el vector posición $\vec{\mathbf{r}} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}$.

Ahora, ¿cómo usar las componentes para sumar vectores cuando el método gráfico no es suficientemente preciso? Suponga que quiere sumar el vector $\vec{\mathbf{B}}$ al vector $\vec{\mathbf{A}}$ en la ecuación 3.12, donde el vector $\vec{\mathbf{B}}$ tiene componentes B_x y B_y. Debido a la conveniencia contable de los vectores unitarios, todo lo que se hace es sumar las componentes x y y por separado. El vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ es

$$\vec{\mathbf{R}} = (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) + (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}})$$

o

$$\vec{\mathbf{R}} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} \tag{3.14}$$

Puesto que $\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$, se ve que las componentes del vector resultante son

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x \\ R_y &= A_y + B_y \end{aligned} \tag{3.15}$$

Por lo tanto, vemos que en el método de componentes de suma de vectores, sumamos todas las componentes x para encontrar la componente x del vector resultante y usamos el mismo proceso para las componentes y. Podemos comprobar esta suma por componentes con una construcción geométrica como se muestra en la figura 3.16.

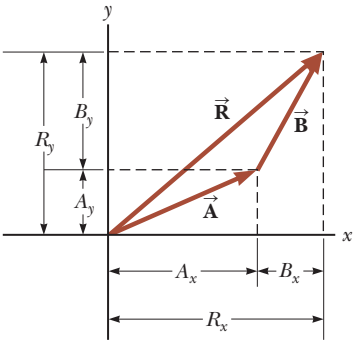


Figura 3.16 Esta construcción geométrica para la suma de dos vectores muestra la relación entre las componentes de la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ y las componentes de los vectores individuales.

La magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ y el ángulo que forma con el eje x se obtienen de sus componentes con las relaciones

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2} \tag{3.16}$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \tag{3.17}$$

En ocasiones es necesario considerar situaciones que implican movimiento en tres componentes direccionales. La extensión de los métodos a vectores tridimensionales es directa. Si $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen componentes x, y y z, se expresan en la forma

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \tag{3.18}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}} \tag{3.19}$$

La suma de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es

$$\vec{\mathbf{R}} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{k}} \tag{3.20}$$

Observe que la ecuación 3.20 difiere de la ecuación 3.14: en la ecuación 3.20, el vector resultante también tiene una componente z, $R_z = A_z + B_z$. Si un vector $\vec{\mathbf{R}}$ tiene componentes x, y y z, la magnitud del vector es $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$.El ángulo θ_x que $\vec{\mathbf{R}}$ forma con el eje x se encuentra de la expresión $\cos\theta_x = R_x/R$, con expresiones similares para los ángulos respecto de los ejes y y z.

La extensión de este método para la suma de más de dos vectores también es sencilla. Por ejemplo, $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} = (A_x + B_x + C_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y + C_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z + C_z)\hat{\mathbf{k}}$. Hemos descrito la suma de vectores de desplazamiento en esta sección ya que estos tipos de vectores son fáciles de visualizar. También podemos sumar

Prevención de riesgos ocultos 3.3

Tangentes en calculadoras La ecuación 3.17 involucra el cálculo de un ángulo mediante una función tangente. Por lo general, la función tangente inversa en las calculadoras proporciona un ángulo entre $-90°$ y $+90°$. En consecuencia, si el vector que se estudia se encuentra en el segundo o tercer cuadrantes, el ángulo medido desde el eje x positivo será el ángulo que dé su calculadora más 180°.

otros tipos de vectores, tales como la velocidad, fuerza, y vectores de campo eléctrico, lo que vamos a hacer en los siguientes capítulos.

Examen rápido 3.5 ¿Para cuáles de los siguientes vectores la magnitud del vector es igual a una de las componentes del vector? **(a)** $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$ **(b)** $\vec{\mathbf{B}} = -3\hat{\mathbf{j}}$ **(c)** $\vec{\mathbf{C}} = +5\hat{\mathbf{k}}$

Ejemplo 3.3 La suma de dos vectores

Encuentre la suma de dos vectores de desplazamiento $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ que se encuentran en el plano xy y está dada por

$$\vec{\mathbf{A}} = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\ \text{m} \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{B}} = (2.0\hat{\mathbf{i}} - 4.0\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}$$

SOLUCIÓN

Conceptualizar Puede conceptualizar la situación al dibujar los vectores en papel gráfico.

Categorizar Clasifique este ejemplo como un simple problema de sustitución. Al comparar esta expresión para $\vec{\mathbf{A}}$ con la expresión general $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$, es claro que $A_x = 2.0$ m, $A_y = 2.0$ m y $A_z = 0$. Del mismo modo, $B_x = 2.0$ m, $B_y = -4.0$ m y $B_z = 0$. Podemos utilizar un enfoque de dos dimensiones porque no hay componentes z.

Aplique la ecuación 3.14 para obtener el vector resultante $\vec{\mathbf{R}}$:
$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = (2.0 + 2.0)\hat{\mathbf{i}}\ \text{m} + (2.0 - 4.0)\hat{\mathbf{j}}\ \text{m}$$

Evalúe los componentes de $\vec{\mathbf{R}}$:
$$R_x = 4.0\ \text{m} \qquad R_y = -2.0\ \text{m}$$

Aplique la ecuación 3.16 para encontrar la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$:
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4.0\ \text{m})^2 + (-2.0\ \text{m})^2} = \sqrt{20}\ \text{m} = 4.5\ \text{m}$$

Encuentre la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ a partir de la ecuación 3.17:
$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2.0\ \text{m}}{4.0\ \text{m}} = -0.50$$

Es probable que su calculadora dé la respuesta $-27°$ para $\theta = \tan^{-1}(-0.50)$. Esta respuesta es correcta si se le interpreta como $27°$ en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x. La forma estándar es citar los ángulos medidos contra el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $+x$, y que el ángulo para este vector es $\theta = 333°$.

Ejemplo 3.4 El desplazamiento resultante

Una partícula experimenta tres desplazamientos consecutivos: $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 = (15\hat{\mathbf{i}} + 30\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}})$ cm, $\Delta\vec{\mathbf{r}}_2 = (23\hat{\mathbf{i}} - 14\hat{\mathbf{j}} - 5.0\hat{\mathbf{k}})$ cm y $\Delta\vec{\mathbf{r}}_3 = (-13\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}})$ cm. Encuentre las componentes, en notación de vector unitario, del desplazamiento resultante y su magnitud.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Aunque x es suficiente para ubicar un punto en una dimensión, es necesario un vector $\vec{\mathbf{r}}$ para ubicar un punto en dos o tres dimensiones. La notación $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ es una generalización del desplazamiento unidimensional Δx en la ecuación 2.1. Los desplazamientos tridimensionales son más difíciles de conceptualizar que los de dos dimensiones, porque no se pueden dibujar en papel.

Para este problema, imagine que traza con su lápiz, en un papel gráfico en el que ya dibujó los ejes x y y, el origen. Mueva su lápiz 15 cm a la derecha a lo largo del eje x, luego 30 cm hacia arriba a lo largo del eje y y luego 12 cm en dirección *perpendicular hacia usted*. Este procedimiento proporciona el desplazamiento descrito por $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1$. Desde este punto, mueva su lápiz 23 cm a la derecha, paralelo al eje x, luego 14 cm paralelo al papel en la dirección $-y$ y luego 5.0 cm en dirección perpendicular, alejándose de usted, hacia el papel. Ahora está en el desplazamiento desde el origen descrito por $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_2$. Desde este punto, mueva su lápiz 13 cm a la izquierda en la dirección $-x$ y (¡finalmente!) 15 cm paralelo al papel gráfico, a lo largo del eje y. Su posición final está a un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_2 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_3$ desde el origen.

3.4 continuación

Categorizar A pesar de la difícil conceptualización en tres dimensiones, se puede clasificar este problema como un problema de sustitución debido a los cuidadosos métodos contables desarrollados para vectores. La manipulación matemática sigue la pista de este movimiento a lo largo de tres ejes perpendiculares en una forma organizada y compacta, como se aprecia a continuación.

Para encontrar el desplazamiento resultante sume los tres vectores:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\mathbf{r}} &= \Delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_2 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_3 \\ &= (15 + 23 - 13)\hat{\mathbf{i}}\ \text{cm} + (30 - 14 + 15)\hat{\mathbf{j}}\ \text{cm} + (12 - 5.0 + 0)\hat{\mathbf{k}}\ \text{cm} \\ &= (25\hat{\mathbf{i}} + 31\hat{\mathbf{j}} + 7.0\hat{\mathbf{k}})\ \text{cm}\end{aligned}$$

Encuentre la magnitud del vector resultante:

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ &= \sqrt{(25\ \text{cm})^2 + (31\ \text{cm})^2 + (7.0\ \text{cm})^2} = 40\ \text{cm}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5 De paseo

Una excursionista comienza un viaje al caminar primero 25.0 km hacia el sureste desde su vehículo. Se detiene y levanta su tienda para pasar la noche. En el segundo día, camina 40.0 km en una dirección 60.0° al noreste, punto en el que descubre una torre de guardabosque.

(A) Determine las componentes del desplazamiento de la excursionista para cada día.

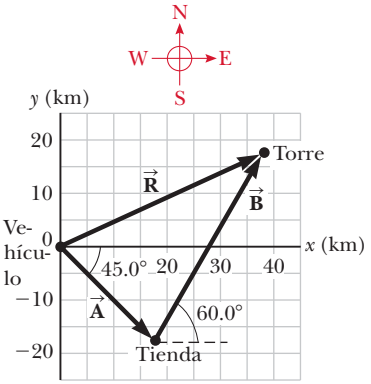


Figura 3.17 (Ejemplo 3.5) El desplazamiento total de la excursionista es el vector $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Conceptúe el problema mediante el dibujo de un bosquejo como el de la figura 3.17. Si los vectores desplazamiento del primero y segundo días se denotan como $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, respectivamente, y se usa el vehículo como el origen de las coordenadas, se obtienen los vectores que se muestran en la figura 3.17.

Categorizar Al dibujar el resultante $\vec{\mathbf{R}}$, se clasifica este problema como uno que antes se resolvió: una suma de dos vectores. Ahora debe entender el poder de la categorización: muchos problemas nuevos son muy similares a problemas que ya se han resuelto, si se tiene cuidado al conceptualizarlos. Una vez dibujados los vectores desplazamiento y clasificado el problema, ya no se trata sólo de una excursionista, una caminata, un vehículo, una tienda o una torre. Es un problema acerca de suma vectorial, que ya ha resuelto.

Analizar El desplazamiento $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una magnitud de 25.0 km y se dirige 45.0° abajo del eje x positivo.

Encuentre las componentes de $\vec{\mathbf{A}}$ con las ecuaciones 3.8 y 3.9:

$$A_x = A\cos(-45.0°) = (25.0\ \text{km})(0.707) = 17.7\ \text{km}$$
$$A_y = A\,\text{sen}(-45.0°) = (25.0\ \text{km})(-0.707) = -17.7\ \text{km}$$

El valor negativo de A_y indica que la excursionista camina en la dirección y negativa durante el primer día. Los signos de A_x y A_y también son evidentes en la figura 3.17.

Halle las componentes de $\vec{\mathbf{B}}$ con las ecuaciones 3.8 y 3.9:

$$B_x = B\cos 60.0° = (40.0\ \text{km})(0.500) = 20.0\ \text{km}$$
$$B_y = B\,\text{sen}\ 60.0° = (40.0\ \text{km})(0.866) = 34.6\ \text{km}$$

(B) Determine las componentes del desplazamiento resultante de la excursionista $\vec{\mathbf{R}}$ para el viaje. Encuentre una expresión para $\vec{\mathbf{R}}$ en términos de vectores unitarios.

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 3.15 para encontrar las componentes del desplazamiento resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$:

$$R_x = A_x + B_x = 17.7\ \text{km} + 20.0\ \text{km} = 37.7\ \text{km}$$
$$R_y = A_y + B_y = -17.7\ \text{km} + 34.6\ \text{km} = 17.0\ \text{km}$$

continúa

3.5 continuación

Escriba el desplazamiento total en forma de vector unitario: $\vec{\mathbf{R}} = (37.7\hat{\mathbf{i}} + 17.0\hat{\mathbf{j}})$ km

Finalizar Al observar la representación gráfica de la figura 3.17, se estima que la posición de la torre es aproximadamente (38 km, 17 km), que es consistente con las componentes de $\vec{\mathbf{R}}$ en el resultado de la posición final de la excursionista. Además, ambas componentes de $\vec{\mathbf{R}}$ son positivas, lo que coloca la posición final en el primer cuadrante del sistema coordenado, lo que también es consistente con la figura 3.17.

¿QUÉ PASARÍA SI? Después de llegar a la torre, la excursionista quiere regresar a su vehículo a lo largo de una sola línea recta. ¿Cuáles son las componentes del vector que representa esta caminata? ¿Cuál debe ser la dirección de la caminata?

Respuesta El vector deseado $\vec{\mathbf{R}}_{\text{vehículo}}$ es el negativo del vector $\vec{\mathbf{R}}$:

$$\vec{\mathbf{R}}_{\text{vehículo}} = -\vec{\mathbf{R}} = (-37.7\hat{\mathbf{i}} - 17.0\hat{\mathbf{j}})\text{km}$$

La dirección se encuentra al calcular el ángulo que el vector forma con el eje x:

$$\tan\theta = \frac{R_{\text{vehículo},y}}{R_{\text{vehículo},x}} = \frac{-17.0\text{ km}}{-37.7\text{ km}} = 0.450$$

que da un ángulo de $\theta = 204.2°$, o $24.2°$ al suroeste.

Resumen

Definiciones

Las **cantidades escalares** son las que sólo tienen un valor numérico y no tienen dirección asociada.

Las **cantidades vectoriales** tienen tanto magnitud como dirección y obedecen las leyes de la suma vectorial. La magnitud de un vector *siempre* es un número positivo.

Conceptos y principios

Cuando se suman dos o más vectores, deben tener las mismas unidades y todos ellos deben ser del mismo tipo de cantidad. Se pueden sumar gráficamente dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. En este método (figura 3.6), el vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ corre del origen de $\vec{\mathbf{A}}$ a la punta de $\vec{\mathbf{B}}$.

Un segundo método de suma de vectores involucra las **componentes** de los vectores. La componente x, A_x del vector $\vec{\mathbf{A}}$ es igual a la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje x de un sistema coordenado, donde $A_x = A\cos\theta$. La componente y, A_y de $\vec{\mathbf{A}}$ es la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje y, donde $A_y = A\,\text{sen}\,\theta$.

Si un vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una componente x, A_x y una componente y, A_y, el vector se expresa en forma de vectores unitarios como $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$. En esta notación, $\hat{\mathbf{i}}$ es un vector unitario que apunta en la dirección x positiva y $\hat{\mathbf{j}}$ es un vector unitario que apunta en la dirección y positiva. Puesto que $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ son vectores unitarios, $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = 1$.

El resultante de dos o más vectores se encuentra al descomponer todos los vectores en sus componentes x y y, sumar sus componentes resultantes x y y, y luego usar el teorema de Pitágoras para encontrar la magnitud del vector resultante. Se puede encontrar el ángulo que forma el vector resultante respecto del eje x al usar una función trigonométrica adecuada.

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. ¿Cuál es la magnitud del vector $(10\hat{\mathbf{i}} - 10\hat{\mathbf{k}})$ m/s? (a) 0, (b) 10 m/s, (c) −10 m/s, (d) 10 m/s, (e) 14.1 m/s.

2. Un vector situado en el plano *xy* tiene componentes de signo opuesto. ¿En qué cuadrante debe estar el vector? (a) el primer cuadrante (b) el segundo cuadrante (c) el tercer cuadrante (d) el cuarto cuadrante (e) ya sea el segundo o el cuarto cuadrante.

3. La figura PO3.3 muestra dos vectores, $\vec{\mathbf{D}}_1$ y $\vec{\mathbf{D}}_2$.. ¿Cuál de las posibilidades de la (a) a la (d) es el vector $\vec{\mathbf{D}}_2 - 2\vec{\mathbf{D}}_1$, o (e) no es ninguna de ellas?

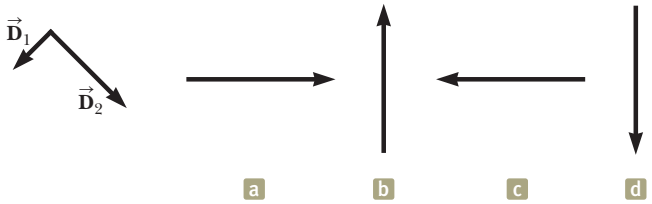


Figura PO3.3

4. La herramienta de corte en un torno está dada por dos desplazamientos, uno de 4 cm de magnitud y otro de 3 cm de magnitud, en cada una de las cinco situaciones de la (a) a la (e), diagramadas en la figura PO3.4. Ordene estas situaciones de acuerdo con la magnitud del desplazamiento total de la herramienta, poniendo primero la situación con la mayor magnitud resultante. Si el desplazamiento total es del mismo tamaño en dos situaciones, dé a dichas letras igual disposición.

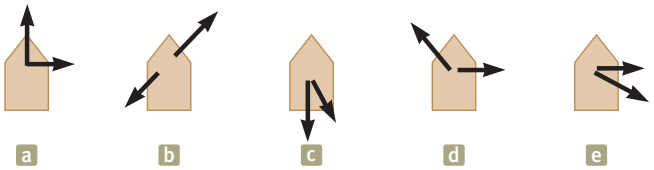


Figura PO3.4

5. La magnitud del vector $\vec{\mathbf{A}}$ es de 8 km, y la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ es de 6 km. ¿Cuál de los siguientes son posibles valores para la magnitud de $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$? Elija todas las posibles respuestas. (a) 10 km (b) 8 km (c) 2 km (d) 0 (e) −2 km.

6. Sea el vector $\vec{\mathbf{A}}$ que apunta desde el origen al segundo cuadrante del plano *xy* y el vector $\vec{\mathbf{B}}$ que apunta desde el origen al cuarto cuadrante. ¿En qué cuadrante debe estar el vector $\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}$? (a) primero, (b) segundo, (c) tercero o (d) cuarto, o (e) ¿hay más de una posible respuesta?

7. Sí o no: ¿cada una de las siguientes cantidades es un vector? (a) fuerza, (b) temperatura, (c) el volumen de agua en una lata, (d) las calificaciones de un programa de televisión, (e) la altura de un edificio, (f) la velocidad de un automóvil deportivo, (g) la edad del Universo.

8. ¿Cuál es la componente *y* del vector $(3\hat{\mathbf{i}} - 8\hat{\mathbf{k}})$ m/s? (a) 3 m/s, (b) −8 m/s, (c) 0, (d) 8 m/s, (e) ninguna de estas respuestas.

9. ¿Cuál es la componente *x* del vector que se muestra en la figura PO3.9? (a) 3 cm, (b) 6 cm, (c) −4 cm, (d) −6 cm, (e) ninguna de estas respuestas.

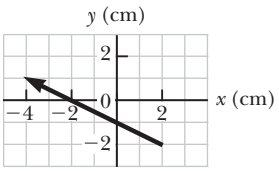


Figura PO3.9 Preguntas objetivas 9 y 10.

10. ¿Cuál es la componente *y* del vector que se muestra en la figura PO3.9? (a) 3 cm, (b) 6 cm, (c) −4 cm, (d) −6 cm, (e) ninguna de estas respuestas.

11. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ se encuentra en el plano *xy*. Sus dos componentes serán negativas si se encuentra en cuál(es) cuadrante(s)? (a) el primer cuadrante, (b) el segundo cuadrante, (c) el tercer cuadrante, (d) el cuarto cuadrante, (e) el segundo o el cuarto cuadrante.

12. Un submarino se sumerge desde la superficie del agua en un ángulo de 30° bajo la horizontal, siguiendo una trayectoria recta de 50 m de largo. ¿A qué distancia está el submarino de la superficie del agua? (a) 50 m, (b) 50 m/sen 30°, (c) (50 m) sen 30°, (d) (50 m) cos 30°, (e) ninguna de estas respuestas.

13. Un vector apunta desde el origen al segundo cuadrante del plano *xy*. ¿Qué se puede concluir acerca de sus componentes? (a) Las dos componentes son positivas. (b) La componente *x* es positiva, y la componente *y* es negativa. (c) La componente *x* es negativa, y la componente *y* es positiva. (d) Las dos componentes son negativas. (e) Más de una respuesta es posible.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. ¿Es posible sumar una cantidad vectorial a una cantidad escalar? Explique.

2. ¿La magnitud de un vector puede tener un valor negativo? Explique.

3. Un libro se mueve una vez alrededor del perímetro de una mesa con dimensiones 1.0 m por 2.0 m. Si el libro termina en su posición inicial, (a) ¿cuál es su desplazamiento?, (b) ¿cuál es la distancia recorrida?

4. Si el componente del vector $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo de la dirección del vector $\vec{\mathbf{B}}$ es cero, ¿qué puede concluir acerca de los dos vectores?

5. En cierta calculadora, la función tangente inversa devuelve un valor entre −90° y +90°. ¿En qué casos este valor indicará correctamente la dirección de un vector en el plano *xy*, dando su ángulo medido en sentido antihorario desde el eje *x* positivo? ¿En qué casos será incorrecto?

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 3.1 Sistemas coordenados

1. Las coordenadas polares de un punto son $r = 5.50$ m y $\theta = 240°$. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de este punto?

2. Las coordenadas rectangulares de un punto están dadas por $(2, y)$, y sus coordenadas polares son $(r, 30°)$. Determine (a) el valor de y, y (b) el valor de r.

3. Dos puntos en el plano xy tienen coordenadas cartesianas $(2.00, -4.00)$ m y $(-3.00, 3.00)$ m. Determine: (a) la distancia entre estos puntos y (b) sus coordenadas polares.

4. Dos puntos en un plano tienen coordenadas polares (2.50 m, 30.0°) y (3.80 m, 120.0°). Determine (a) las coordenadas cartesianas de estos puntos y (b) la distancia entre ellos.

5. Las coordenadas polares de un cierto punto son ($r = 4.30$ cm, $\theta = 214°$). (a) Encuentre sus coordenadas cartesianas x y y. Encuentre las coordenadas polares de los puntos con coordenadas cartesianas (b) $(-x, y)$, (c) $(-2x, -2y)$, y (d) $(3x, -3y)$.

6. Sean las coordenadas polares del punto (x, y), (r, θ). Determine las coordenadas polares para los puntos (a) $(-x, y)$, (b) $(-2x, -2y)$, y (c) $(3x, -3y)$.

Sección 3.2 Cantidades vectoriales y escalares

Sección 3.3 Algunas propiedades de los vectores

7. Una topógrafa mide la distancia a través de un río recto con el siguiente método (figura P3.7). Partiendo directamente a través de un árbol en la orilla opuesta, camina 100 m a lo largo del margen del río para establecer una línea base. Luego observa hacia el árbol. El ángulo de su línea base al árbol es de $\theta = 35.0°$. ¿Qué tan ancho es el río?

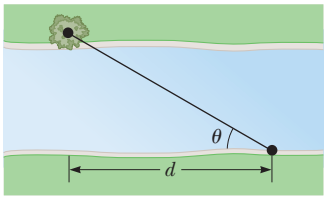


Figura P3.7

8. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una magnitud de 29 unidades y puntos en la dirección y positiva. Cuando el vector $\vec{\mathbf{B}}$ se suma al vector $\vec{\mathbf{A}}$, el vector resultante $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ apunta en dirección y negativa con una magnitud de 14 unidades. Encuentre la magnitud y la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$.

9. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Una patinadora se desliza a lo largo de una trayectoria circular. Se define un cierto punto en la trayectoria como su origen. Posteriormente, se pasa a través de un punto en el cual la distancia que ha viajado a lo largo del camino desde el origen es más pequeña que la magnitud de su vector de desplazamiento desde el origen.

10. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ de 6.00 unidades de magnitud actúa sobre un objeto en el origen en una dirección 30.0° sobre el eje x positivo (figura P3.10). Una segunda fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2$ de 5.00 unidades de magnitud actúa sobre el objeto en la dirección del eje y positivo. Encuentre gráficamente la magnitud y la dirección de la fuerza resultante $\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2$.

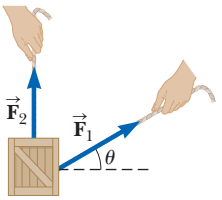


Figura P3.10

11. En la figura P3.11 se muestran los vectores de desplazamiento $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, cuya magnitud es de 3.00 m. La dirección del vector $\vec{\mathbf{A}}$ es $\theta = 30.0°$. Encuentre gráficamente (a) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$, (b) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, (c) $\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}$, y (d) $\vec{\mathbf{A}} - 2\vec{\mathbf{B}}$. (Reporte todos los ángulos en sentido antihorario desde el eje x positivo.)

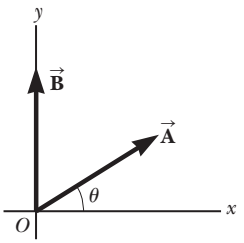


Figura P3.11
Problemas 11 y 22.

12. Tres desplazamientos son $\vec{\mathbf{A}} = 200$ m al Sur, $\vec{\mathbf{B}} = 250$ m al Oeste y $\vec{\mathbf{C}} = 150$ m a 30.0° al noreste. (a) Construya un diagrama separado para cada una de las siguientes posibles formas de sumar estos vectores: $\vec{\mathbf{R}}_1 = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$; $\vec{\mathbf{R}}_2 = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{A}}$; $\vec{\mathbf{R}}_3 = \vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}$. (b) Explique qué puede concluir al comparar los diagramas.

13. Un carro de montaña rusa se mueve 200 pies horizontalmente y luego se eleva 135 pies a un ángulo de 30.0° sobre la horizontal. A continuación viaja 135 pies a un ángulo de 40.0° hacia abajo. ¿Cuál es su desplazamiento desde su punto de partida? Use técnicas gráficas.

14. Un avión vuela desde el campo base al lago A, a 280 km de distancia en la dirección 20.0° al noreste. Después de soltar suministros vuela al lago B, que está a 190 km a 30.0° al noroeste del lago A. Determine gráficamente la distancia y dirección desde el lago B al campo base.

Sección 3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios

15. Un vector tiene una componente x de −25.0 unidades y otra componente y de 40.0 unidades. Encuentre la magnitud y dirección de este vector.

16. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una magnitud de 35.0 unidades y apunta en la dirección de 325° en sentido antihorario desde el eje x positivo. Calcule las componentes x y y de este vector.

17. Una minivan viaja en línea recta al Norte en el carril derecho de una autopista a 28.0 m/s. Un camper pasa a la minivan y luego cambia del carril izquierdo al derecho. Mientras lo hace, la trayectoria del camper sobre el camino es un desplazamiento recto a 8.50° al noreste. Para evitar chocar con la minivan, la distancia norte–sur entre la defensa trasera del camper y la defensa delantera de la minivan no debe disminuir. (a) ¿El camper puede conducirse para satisfacer este requisito? (b) Explique su respuesta.

18. Una persona camina 25.0° al noreste durante 3.10 km. ¿Qué distancia tendría que caminar hacia el Norte y hacia el Este para llegar a la misma posición?

19. Obtenga expresiones en forma de componentes para los vectores de posición que tienen las siguientes coordenadas polares: (a) 12.8 m, 150°, (b) 3.30 cm, 60.0°, (c) 22.0 pulg, 215°.

20. Una chica que entrega periódicos cubre su ruta al viajar 3.00 cuadras al Oeste, 4.00 cuadras al Norte y luego 6.00 cuadras al Este. (a) ¿Cuál es su desplazamiento resultante? (b) ¿Cuál es la distancia total que recorre?

21. Mientras explora una cueva, una espeleóloga comienza en la entrada y se mueve las siguientes distancias en un plano horizontal. Va 75.0 m al Norte, 250 m al Este, 125 m a un ángulo de 30.0° al noreste y 150 m al Sur. Encuentre su desplazamiento resultante desde la entrada de la cueva. La figura P3.21 sugiere la situación pero no está dibujada a escala.

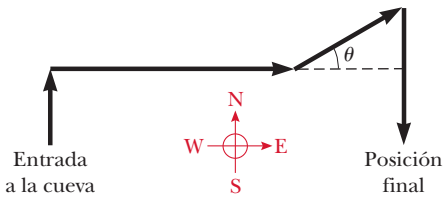


Figura P3.21

22. Use el método de componentes para sumar los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ que se muestran en la figura P3.11. Ambos vectores tienen magnitudes de 3.00 m y el vector $\vec{\mathbf{A}}$ hace un ángulo de $\theta = 30.0°$ con el eje x. Exprese la resultante $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ en notación de vector unitario.

23. Considere los dos vectores $\vec{\mathbf{A}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$. Calcule (a) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ (b) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, (c) $|\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}|$, (d) $|\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}|$, y (e) las direcciones de $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$.

24. Un mapa sugiere que Atlanta está a 730 millas en una dirección de 5.00° al noreste desde Dallas. El mismo mapa muestra que Chicago está a 560 millas en una dirección de 21.0° al noroeste desde Atlanta. La figura P3.24 muestra las ubicaciones de estas tres ciudades. Represente la Tierra como plana y use esta información para encontrar el desplazamiento de Dallas a Chicago.



Figura P3.24

25. Su perro está corriendo alrededor de la hierba en el patio trasero. Él experimenta desplazamientos sucesivos 3.50 m al Sur, 8.20 m al noreste, y 15.0 m al Oeste. ¿Cuál es el desplazamiento resultante?

26. Dados los vectores $\vec{\mathbf{A}} = 2.00\hat{\mathbf{i}} + 6.00\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 3.00\hat{\mathbf{i}} - 2.00\hat{\mathbf{j}}$, (a) dibuje la suma vectorial $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ y la diferencia vectorial $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$. (b) Calcule $\vec{\mathbf{C}}$ y $\vec{\mathbf{D}}$ en términos de vectores unitarios. (c) Calcule $\vec{\mathbf{C}}$ y $\vec{\mathbf{D}}$ en términos de coordenadas polares, con ángulos medidos respecto del eje positivo x.

27. Un golfista novato necesita tres golpes para meter la bola. Los desplazamientos sucesivos de la bola son: 4.00 m al Norte, 2.00 m al noreste y 1.00 m a 30.0° al suroeste (figura P3.27). Si parte del mismo punto inicial, ¿cuál sería el desplazamiento más sencillo que un golfista experto necesitaría para hacer el hoyo?

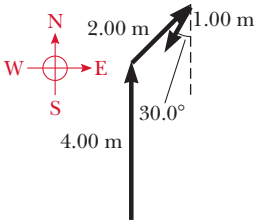


Figura P3.27

28. Una pendiente de esquiar cubierta de nieve forma un ángulo de 35.0° con la horizontal. Cuando un esquiador cae a plomo por la colina, una porción de nieve salpicada se proyecta a una posición máxima de 1.50 m a 16.0° de la vertical en dirección arriba de la colina, como se muestra en la figura P3.28. Encuentre las componentes de su posición máxima (a) paralela a la superficie y (b) perpendicular a la superficie.

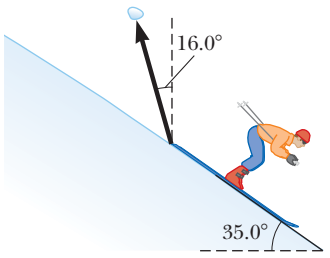


Figura P3.28

29. La vista desde el helicóptero en la figura P3.29 (página 74) muestra a dos personas jalando una mula terca. La persona de la derecha tira con una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ de magnitud 120 N y dirección de $\theta_1 = 60.0°$. La persona de la

izquierda jala con una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2$ de 80.0 N y dirección de $\theta_2 = 75.0°$ Encuentre (a) la fuerza única que es equivalente a las dos fuerzas que se muestran y (b) la fuerza que una tercera persona tendría que ejercer sobre la mula para hacer que la fuerza resultante sea igual a cero. Las fuerzas se miden en unidades de newtons (representadas por N).

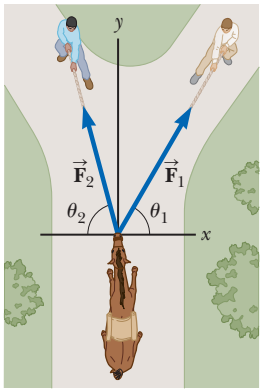


Figura P3.29

30. En un juego de futbol americano, un mariscal de campo toma el balón desde la línea de golpeo, corre hacia atrás una distancia de 10.0 yardas y luego corre de manera lateral paralelo a la línea de golpeo 15.0 yardas. En este punto, lanza un pase recto hacia adelante 50.0 yardas perpendicular a la línea de golpeo. ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento resultante del balón?

31. Considere los tres vectores desplazamiento $\vec{\mathbf{A}} = (3\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}})$ m, $\vec{\mathbf{B}} = (\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}})$ m, y $\vec{\mathbf{C}} = (-2\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}})$ m. Use el método de componentes para determinar (a) la magnitud y dirección del vector $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$ y (b) la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$.

32. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene componentes x y y de −8.70 cm y 15.0 cm, respectivamente; el vector $\vec{\mathbf{B}}$ tiene componentes x y y de 13.2 cm y −6.60 cm, respectivamente. Si $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} + 3\vec{\mathbf{C}} = 0$, ¿cuáles son las componentes de $\vec{\mathbf{C}}$?

33. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene componentes x, y y z de 8.00, 12.0 y −4.00 unidades, respectivamente. (a) Escriba una expresión vectorial para $\vec{\mathbf{A}}$ en notación de vector unitario. (b) Obtenga una expresión en vectores unitarios para un vector $\vec{\mathbf{B}}$ de un cuarto de longitud de $\vec{\mathbf{A}}$ que apunte en la misma dirección que $\vec{\mathbf{A}}$. (c) Obtenga una expresión en vectores unitarios para un vector $\vec{\mathbf{C}}$ tres veces la longitud de $\vec{\mathbf{A}}$ que apunte en la dirección opuesta a la dirección de $\vec{\mathbf{A}}$.

34. El vector $\vec{\mathbf{B}}$ tiene componentes x, y y z de 4.00, 6.00 y 3.00 unidades, respectivamente. Calcule (a) la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ y (b) los ángulos que $\vec{\mathbf{B}}$ forma con los ejes coordenados.

35. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una componente x negativa de 3.00 unidades de longitud y un componente y positiva de 2.00 unidades de longitud. (a) Determine una expresión para $\vec{\mathbf{A}}$ en notación de vectores unitarios. (b) Determine la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{A}}$. (c) ¿Qué vector $\vec{\mathbf{B}}$, cuando se suma a $\vec{\mathbf{A}}$, da un vector resultante sin componente x y una componente y negativa de 4.00 unidades de longitud?

36. Dados los vectores desplazamiento $\vec{\mathbf{A}} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}})$ m y $\vec{\mathbf{B}} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 7\hat{\mathbf{k}})$ m, encuentre las magnitudes de los siguientes vectores y exprese cada uno en términos de sus componentes rectangulares. (a) $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ (b) $\vec{\mathbf{D}} = 2\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$

37. (a) Con $\vec{\mathbf{A}} = (6.00\hat{\mathbf{i}} - 8.00\hat{\mathbf{j}})$ unidades, $\vec{\mathbf{B}} = (-8.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})$ unidades y $\vec{\mathbf{C}} = (26.0\hat{\mathbf{i}} + 19.0\hat{\mathbf{j}})$ unidades, determine a y b tal que $a\vec{\mathbf{A}} + b\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} = 0$. (b) Un estudiante aprendió que una sola ecuación no se puede resolver para determinar valores para más de una incógnita en ella. ¿Cómo podría explicarle que tanto a como b se pueden determinar a partir de la ecuación que se usó en el inciso (a)?

38. En la figura P3.38 se muestran tres vectores desplazamiento de una pelota de croquet, donde $|\vec{\mathbf{A}}| = 20.0$ unidades, $|\vec{\mathbf{B}}| = 40.0$ unidades y $|\vec{\mathbf{C}}| = 30.0$ unidades. Encuentre (a) la resultante en notación de vectores unitarios y (b) la magnitud y dirección del desplazamiento resultante.

39. Un hombre que empuja una podadora por el suelo hace que experimente dos desplazamientos. El primero tiene una magnitud de 150 cm y forma un ángulo de 120° con el eje x positivo. El desplazamiento resultante tiene una magnitud de 140 cm y se dirige a un ángulo de 35.0° con el eje x positivo. Encuentre la magnitud y dirección del segundo desplazamiento.

40. La figura P3.40 muestra proporciones típicas de las anatomías del varón (m) y de la mujer (f). Los desplazamientos $\vec{\mathbf{d}}_{1m}$ y $\vec{\mathbf{d}}_{1f}$ de la planta de los pies hasta el ombligo tienen magnitudes de 104 cm y 84.0 cm, respectivamente. Los desplazamientos $\vec{\mathbf{d}}_{2m}$ y $\vec{\mathbf{d}}_{2f}$ desde el ombligo hasta las yemas de los dedos extendidas tienen magnitudes de 100 cm y 86.0 cm, respectivamente. Encuentre la suma vectorial de estos desplazamientos $\vec{\mathbf{d}}_3 = \vec{\mathbf{d}}_1 + \vec{\mathbf{d}}_2$ para las dos personas.

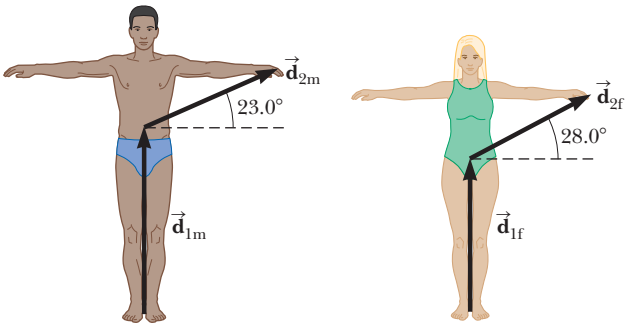


Figura P3.40

41. Exprese en notación de vectores nitarios los siguientes vectores, cada uno de los cuales tiene 17.0 cm de magnitud. (a) El vector $\vec{\mathbf{E}}$ se dirige 27.0° contra las manecillas el reloj desde el eje x positivo. (b) El vector $\vec{\mathbf{F}}$ se dirige 27.0° contra las manecillas del reloj desde el eje y positivo. (c) El vector $\vec{\mathbf{G}}$ se dirige 27.0° en sentido de las manecillas del reloj desde el eje y negativo.

42. Una estación de radar ubica un barco hundido en un intervalo de 17.3 km y orientación 136° en sentido de las manecillas del reloj desde el Norte. Desde la misma estación, un avión de rescate está en un intervalo horizontal de 19.6 km, 153° en sentido de las manecillas del reloj desde el Norte, con elevación de 2.20 km. (a) Escriba el vector de posición para el barco en relación con el avión, con $\hat{\mathbf{i}}$ que representa el Este, $\hat{\mathbf{j}}$ el Norte y $\hat{\mathbf{k}}$ hacia arriba. (b) ¿Qué tan separados están el avión y el barco?

43. **Problema de repaso** Conforme pasa sobre la isla Gran Bahamas, el ojo de un huracán se mueve en una dirección 60.0° al noroeste con una rapidez de 41.0 km/h. (a) ¿Cuál es la expresión en vector unitario para la velocidad del huracán? Se mantiene esta velocidad por 3.00 h, después el curso del huracán cambia súbitamente al Norte y su rapidez baja a 25.0 km/h. Esta nueva velocidad se man-

tiene durante 1.50 h. (b) ¿Cuál es la expresión en vector unitario de la nueva velocidad del huracán? (c) ¿Cuál es la expresión de vector unitario para el desplazamiento del huracán durante las primeras 3.00 h? (d) ¿Cuál es la expresión de vector unitario para el desplazamiento del huracán durante la última 1.50 h? (e) ¿A qué distancia de Gran Bahamas está el ojo 4.50 h después de que pasa sobre la isla?

44. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un comprador que empuja un carrito a través de un mercado sigue las direcciones a los productos enlatados y se mueve a través de un desplazamiento de $8.00\hat{\mathbf{i}}$ m por un pasillo. Luego hace un giro de 90.0° y se mueve 3.00 m a lo largo del eje *y*. A continuación, hace otro giro de 90.0° y se mueve a lo largo de 4.00 m del eje *x*. *Cada* comprador que siga estas instrucciones correctamente termina a 5.00 m del punto de partida.

45. **Problema de repaso.** Usted está de pie sobre el suelo en el origen de un sistema coordenado. Un avión vuela sobre usted con velocidad constante paralela al eje *x* y a una altura fija de 7.60×10^3 m. En el tiempo $t = 0$ el avión está directamente arriba de usted de modo que el vector que va de usted a él es $\vec{\mathbf{P}}_0 = 7.60 \times 10^3\hat{\mathbf{j}}$ m. En $t = 30.0$ s, el vector de posición que va de usted al avión es $\vec{\mathbf{P}}_{30} = (8.04 \times 10^3\hat{\mathbf{i}} + 7.60 \times 10^3\hat{\mathbf{j}})$ m como se ve en la figura P3.45. Determine la magnitud y orientación del vector de posición del avión en $t = 45.0$ s.

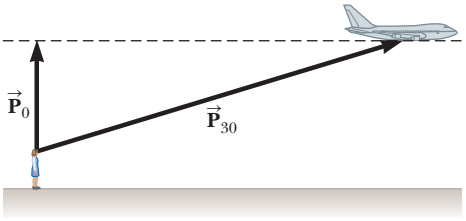


Figura P3.45

46. En la figura P3.46, el segmento de recta representa una trayectoria desde el punto con vector de posición $(5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$ m al punto con posición $(16\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}})$ m. El punto Ⓐ está en dicha trayectoria, a una fracción *f* del camino hacia el destino. (a) Encuentre el vector de posición del punto Ⓐ en términos de *f*. (b) Evalúe la expresión del inciso (a) en el caso $f = 0$. (c) Explique si el resultado en (b) es razonable. (d) Evalúe la expresión para $f = 1$. (e) Explique si el resultado en (d) es razonable.

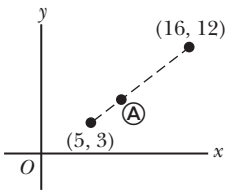


Figura P3.46 El punto Ⓐ está a una fracción *f* de la distancia desde el punto inicial (5, 3) al punto final (16, 12).

47. En la operación de ensamblado que se ilustra en la figura P3.47, un robot primero mueve un objeto en recta hacia arriba y después también al Este, alrededor de un arco que forma un cuarto de círculo de 4.80 cm de radio que se encuentra en un plano vertical este–oeste. Luego el robot mueve el objeto hacia arriba y al Norte, a través de un cuarto de círculo de 3.70 cm de radio que se encuentra en un plano vertical norte–sur. Encuentre (a) la magnitud del desplazamiento total del objeto y (b) el ángulo que el desplazamiento total forma con la vertical.

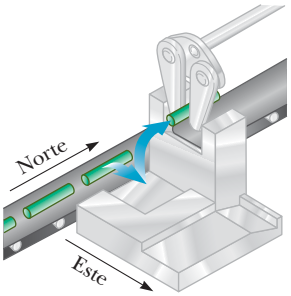


Figura P3.47

Problemas adicionales

48. Una mosca aterriza en la pared de una habitación. La esquina inferior izquierda de la pared se selecciona como el origen de un sistema coordenado cartesiano bidimensional. Si la mosca se ubica en el punto que tiene coordenadas (2.00, 1.00) m. (a) ¿A qué distancia está de la esquina de la habitación? (b) ¿Cuál es su posición en coordenadas polares?

49. Conforme va recogiendo a sus pasajeros en una camioneta, un conductor pasa por cuatro desplazamientos sucesivos representados por la expresión

$$(-6.30\text{ b})\hat{\mathbf{i}} - (4.00\text{ b}\cos 40°)\hat{\mathbf{i}} - (4.00\text{ b}\,\text{sen}\ 40°)\hat{\mathbf{j}}$$
$$+ (3.00\text{ b}\cos 50°)\hat{\mathbf{i}} - (3.00\text{ b}\,\text{sen}\ 50°)\hat{\mathbf{j}} - (5.00\text{ b})\hat{\mathbf{j}}$$

Aquí b representa una cuadra de la ciudad, una conveniente unidad de distancia de tamaño uniforme; $\hat{\mathbf{i}}$ es Este y $\hat{\mathbf{j}}$ es Norte. Los desplazamientos en 40° y 50° representan viajes en las carreteras de la ciudad que están en estos ángulos en las calles principales de Este a Oeste y Norte-Sur. (a) Dibuje un mapa de los desplazamientos sucesivos. (b) ¿Qué distancia total recorrió? (c) Calcule la magnitud y dirección de su desplazamiento total. La estructura lógica de este problema y de muchos problemas en capítulos posteriores la sugirieron Alan van Heuvelen y David Maloney, *American Journal of Physics*, **67**(3) pp. 252–256, marzo de 1999.

50. Un avión jet, que al inicio se mueve a 300 mi/h al Este, súbitamente entra a una región donde el viento sopla a 100 mi/h hacia la dirección de 30.0° al noreste. ¿Cuáles son la nueva rapidez y dirección del avión en relación con el nivel de la tierra?

51. Una persona que sale a caminar sigue la trayectoria que se muestra en la figura P3.51. El viaje total consiste en cuatro trayectorias en línea recta. Al final de la caminata, ¿cuál es el desplazamiento resultante de la persona, medido desde el punto de partida?

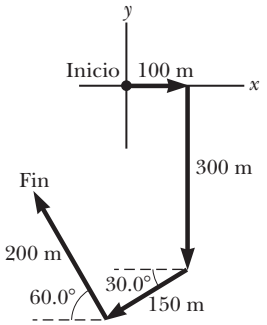


Figura P3.51

52. Encuentre las componentes horizontal y vertical del desplazamiento de 100 m de un superhéroe que vuela desde la parte superior de un edificio alto siguiendo la ruta

que se muestra en la figura P3.52.

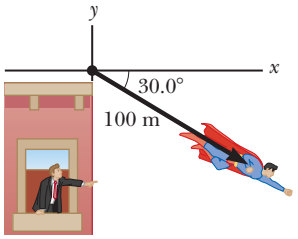


Figura P3.52

53. Problema de repaso. El animal de peluche más grande del mundo es una víbora de 420 m de largo, construida por niños noruegos. Suponga que la víbora se encuentra en un parque, como se muestra en la figura P3.53, y forma dos lados rectos de un ángulo de 105°, con un lado de 240 m de largo. Olaf e Inge corren una competencia que inventan. Inge corre directamente desde la cola de la víbora a su cabeza, y Olaf parte del mismo lugar en el mismo momento pero corre a lo largo de la víbora. (a) Si ambos niños corren uniformemente a 12.0 km/h, ¿cuánto tiempo antes que Olaf, Inge llega a la cabeza de la víbora? (b) Si Inge corre la carrera de nuevo a una velocidad constante de 12.0 km/h, a qué velocidad constante debe correr Olaf para llegar al final de la serpiente al mismo tiempo que Inge?

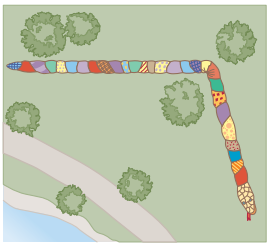


Figura P3.53

54. Un controlador de tráfico aéreo observa dos aeronaves en la pantalla de su radar. La primera está a una altitud de 800 m, 19.2 km de distancia horizontal y 25.0° al suroeste. La segunda está a una altitud de 1 100 m, 17.6 km de distancia horizontal y 20.0° al suroeste. ¿Cuál es la distancia entre las dos aeronaves? (Coloque el eje x al Oeste, el eje y al Sur y el eje z vertical.)

55. En la figura P3.55, una araña está descansando después de comenzar a girar su red. La fuerza gravitacional sobre la araña ejerce una fuerza descendente de 0.150 N en la unión de los tres hilos de seda. La unión soporta diferentes fuerzas de tensión en los dos hilos por encima de ella de manera que la fuerza resultante sobre la unión es cero. Los dos hilos inclinados son perpendiculares, y hemos elegido los ejes x y y a lo largo de ellos. La tensión T_x es 0.127 N. Encuentre (a) la tensión T_y, (b) el ángulo del eje x con la horizontal, y (c) el ángulo del eje y con la horizontal.

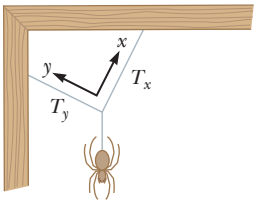


Figura P3.55

56. El rectángulo que se muestra en la figura P3.56 tiene lados paralelos al eje x y al eje y. Los vectores de posición de las dos esquinas son $\vec{\mathbf{A}} = 10.0$ m a 50.0° y $\vec{\mathbf{B}} = 12.0$ m a 30.0°. (a) Encuentre el perímetro del rectángulo. (b) Determine la magnitud y la dirección del vector desde el origen de la esquina superior derecha del rectángulo.

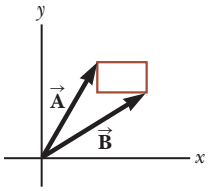


Figura P3.56

57. Un vector está dado por $\vec{\mathbf{R}} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$. Encuentre (a) las magnitudes de las componentes x, y y z, (b) la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ y (c) los ángulos entre $\vec{\mathbf{R}}$ y los ejes x, y y z.

58. Un barco transbordador lleva turistas entre tres islas. Navega de la primera isla a la segunda isla, a 4.76 km de distancia, en una dirección 37.0° al noreste. Luego navega de la segunda isla a la tercera en una dirección de 69.0° al noroeste. Por último, regresa a la primera isla y navega en una dirección 28.0° al sureste. Calcule la distancia entre (a) la segunda y tercera islas, y (b) la primera y tercera islas.

59. Dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen magnitudes exactamente iguales. Para que la magnitud de $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ sea 100 veces más grande que la magnitud de $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, ¿cuál debe ser el ángulo entre ellos?

60. Dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen magnitudes exactamente iguales. Para que la magnitud de $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ sea n veces más grande que la magnitud de $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, ¿cuál debe ser el ángulo entre ellos?

61. Sea $\vec{\mathbf{A}} = 60.0$ cm a 270° medido desde la horizontal. Sea $\vec{\mathbf{B}} = 80.0$ cm a cierto ángulo θ. (a) Encuentre la magnitud de $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ como función de θ. (b) De la respuesta del inciso (a), ¿para qué valor de θ $|\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}|$ toma su valor máximo? ¿Cuál es dicho valor máximo? (c) De la respuesta del inciso (a), ¿para qué valor de θ $|\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}|$ toma su valor mínimo? (d) Sin hacer referencia a la respuesta del inciso (a), argumente si las respuestas de los incisos (b) y (c) tienen o no tienen sentido.

62. Después de que una pelota rueda por el borde de una mesa horizontal en el tiempo $t = 0$, su velocidad como función del tiempo está dada por

$$\vec{\mathbf{v}} = 1.2\hat{\mathbf{i}} - 9.8t\hat{\mathbf{j}}$$

donde $\vec{\mathbf{v}}$ está en metros por segundo y t está en segundos. El desplazamiento de la bola al caer del borde de la mesa, en el intervalo de tiempo de 0.380 s durante el cual está en vuelo, está dado por

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \int_0^{0.380\text{ s}} \vec{\mathbf{v}}\, dt$$

Para realizar la integral, puede usar el teorema del cálculo

$$\int [A + Bf(x)]dx = \int A\, dx + B\int f(x)\, dx$$

Considere las unidades y los vectores unitarios como constantes, representados por A y B. Haga la integración para calcular el desplazamiento de la pelota desde un extremo de la mesa en 0.380 s.

63. Problema de repaso. La posición instantánea de un objeto se especifica por su vector de posición dirigido desde un origen fijo a la posición del objeto, representado como partícula. Suponga para cierto objeto que el vector de posición es una función de tiempo dado por $\vec{\mathbf{r}} = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2t\hat{\mathbf{k}}$, donde $\vec{\mathbf{r}}$ está en metros y t en segundos. (a) Evalúe $d\vec{\mathbf{r}}/dt$. (b) ¿Qué cantidad física representa $d\vec{\mathbf{r}}/dt$ respecto del objeto?

64. Ecoturistas utilizan su indicador de sistema de posicionamiento global para determinar su ubicación dentro de un

jardín botánico como latitud 0.002 43 grados al sur del Ecuador, longitud 75.642 38 grados Oeste. Ellos desean visitar un árbol en la latitud 0.001 62 grados Norte, longitud 75.644 26 grados Oeste. (a) Determine la distancia de la línea recta y la dirección en la que se puede caminar para alcanzar el árbol de la siguiente manera. Primero modele la Tierra como una esfera de radio 6.37×10^6 m para determinar las componentes hacia el Oeste y hacia el Norte de desplazamiento necesario, en metros. Luego modele la Tierra como un plano superficial para completar el cálculo. (b) Explique por qué es posible utilizar estos dos modelos geométricos juntos para resolver el problema.

65. Un paralelepípedo rectangular tiene dimensiones a, b y c, como se muestra en la figura P3.65. (a) Obtenga una expresión vectorial para el vector de la cara diagonal $\vec{\mathbf{R}}_1$. (b) ¿Cuál es la magnitud de este vector? (c) Observe que $\vec{\mathbf{R}}_1$, $c\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{R}}_2$ forman un triángulo rectángulo. Obtenga una expresión vectorial para el vector diagonal al cuerpo $\vec{\mathbf{R}}_2$.

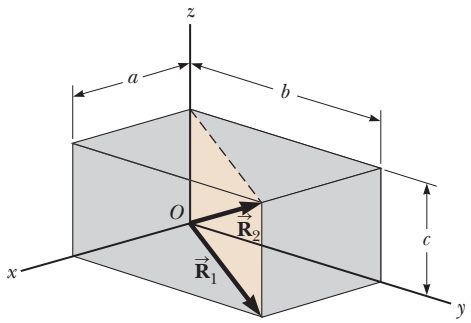


Figura P3.65

66. Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen iguales magnitudes de 5.00. La suma de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es el vector $6.00\hat{\mathbf{j}}$. Determine el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

Problema de desafío

67. Un pirata ha enterrado su tesoro en una isla con cinco árboles situados en los puntos (30.0 m, −20.0 m), (60.0 m, 80.0 m), (−10.0 m, −10.0 m), (40.0 m, −30.0 m) y (−70.0 m, 60.0 m), todos medidos con respecto a algún origen, como se muestra en la figura P3.67. Su diario de a bordo le instruye comenzar en el árbol A y avanzar hacia el árbol B, pero cubrir sólo la mitad de la distancia entre A y B. Luego, moverse al árbol C, cubrir un tercio de la distancia entre su ubicación actual y C. Después avanzar hacia el árbol D, cubriendo un cuarto de la distancia entre donde está y D. Finalmente avanzar hacia el árbol E, cubriendo una quinta parte de la distancia entre usted y E, detenerse y cavar. (a) Suponga que tiene correctamente determinado el orden en que el pirata etiquetó los árboles como A, B, C, D y E, como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde dejó su tesoro enterrado? (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Y si no se sabe muy bien la forma en que el pirata etiquetó los árboles? ¿Cómo modificaría la respuesta si ha modificado el orden de los árboles, por ejemplo, a B(30 m, −20 m), A(60 m, 80 m), E(−10 m, −10 m), C(40 m, −30 m) y D(−70 m, 60 m)? Establezca un razonamiento para mostrar que la respuesta no depende del orden en que se etiqueten los árboles.

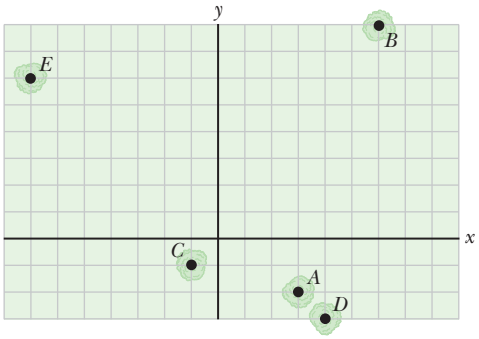


Figura P3.67

CAPÍTULO

4

Movimiento en dos dimensiones

4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante

4.3 Movimiento de proyectil

4.4 Análisis de modelo: partícula en movimiento circular uniforme

4.5 Aceleraciones tangencial y radial

4.6 Velocidad y aceleración relativas



Fuegos artificiales estallan en el Puente Sydney del Puerto de Nueva Gales del Sur, Australia. Observe la trayectoria parabólica de las brasas proyectadas en el aire. Todos los proyectiles siguen una trayectoria parabólica en ausencia de resistencia del aire. (*Graham Monro/Photolibrary/Jupiter Images*)

En este capítulo se explora la cinemática de una partícula que se mueve en dos dimensiones. Conocer lo básico del movimiento bidimensional permitirá, en futuros capítulos, examinar una diversidad de movimientos que van desde el movimiento de satélites en órbita al movimiento de electrones en un campo eléctrico uniforme. Primero se estudia, con detalle, la naturaleza vectorial de la posición, la velocidad y la aceleración. A continuación se considera el movimiento de proyectiles y el movimiento circular uniforme como casos especiales de movimiento en dos dimensiones. También se discute el concepto del movimiento relativo, que muestra por qué los observadores en diferentes marcos de referencia pueden medir posiciones y velocidades distintas para una partícula dada.

4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

En el capítulo 2 se mostró que el movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta como el eje x se conoce por completo si se conoce su posición como función del tiempo. Ahora esta idea se amplía al movimiento bidimensional de una partícula en el plano xy. Se comienza por describir la posición de la partícula. En una dimensión, un solo valor numérico describe la posición de la partícula, pero en dos dimensiones, se indica su ubicación mediante su **vector de posición** $\vec{\mathbf{r}}_i$, que se dibuja desde el origen de algún sistema coordenado a la posición de la partícula en el plano xy, como en la figura 4.1. En el tiempo t_i, la partícula está en el punto Ⓐ, descrito por el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_i$. En un tiempo posterior t_f, está en el punto Ⓑ, descrito por su vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_f$. La trayectoria de Ⓐ a Ⓑ no necesariamente es una línea recta. Conforme la partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, su vector de posición cambia de $\vec{\mathbf{r}}_i$ a $\vec{\mathbf{r}}_f$. Como aprendió en el capítulo 2, el desplaza-

miento es un vector, y el desplazamiento de la partícula es la diferencia entre su posición final y su posición inicial. Ahora se define el vector desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ para una partícula, tal como la que se muestra en la figura 4.1, como la diferencia entre su vector de posición final y su vector de posición inicial:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} \equiv \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i \tag{4.1}$$

◀ Vector desplazamiento

En la figura 4.1 se indica la dirección de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. Como se ve en la figura, la magnitud de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ es *menor* que la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria curva que sigue la partícula.

Como vio en el capítulo 2, con frecuencia es útil cuantificar el movimiento al obtener la relación de un desplazamiento, dividido entre el intervalo de tiempo durante el que ocurre dicho desplazamiento, que proporciona la razón de cambio de la posición. La cinemática bidimensional (o tridimensional) es similar a la cinemática unidimensional, pero ahora se debe usar toda la notación vectorial completa en lugar de signos positivos y negativos para indicar la dirección del movimiento.

La **velocidad promedio** $\vec{\mathbf{v}}_{\text{prom}}$ de una partícula durante el intervalo de tiempo Δt se define como el desplazamiento de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} \tag{4.2}$$

◀ Velocidad promedio

Al multiplicar o dividir una cantidad vectorial por una cantidad escalar positiva como Δt sólo cambia la magnitud del vector, no su dirección. Puesto que el desplazamiento es una cantidad vectorial y el intervalo de tiempo es una cantidad escalar positiva, se concluye que la velocidad promedio es una cantidad vectorial dirigida a lo largo de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. Compare la ecuación 4.2 con su contraparte unidimensional, ecuación 2.2.

La velocidad promedio entre los puntos es *independiente de la trayectoria*; porque la velocidad promedio es proporcional al desplazamiento, que sólo depende de los vectores de posición inicial y final y no de la trayectoria seguida. Al igual que el movimiento unidimensional, si una partícula comienza su movimiento en algún punto y regresa a dicho punto a través de cualquier trayectoria, su velocidad promedio es cero para este viaje, porque su desplazamiento es cero. Considere de nuevo a los jugadores de basquetbol en la cancha de la figura 2.2 (página 23). En la ocasión anterior sólo se consideró su movimiento unidimensional de ida y vuelta entre las canastas. Sin embargo, en realidad, se mueven sobre una superficie bidimensional, y corren de ida y vuelta entre las canastas así como de izquierda a derecha a través del ancho de la cancha. Al iniciar desde una canasta, un jugador puede seguir una trayectoria bidimensional muy complicada. No obstante, hasta regresar a la canasta original, la velocidad promedio de un jugador es cero porque el desplazamiento del jugador para todo el viaje es cero.

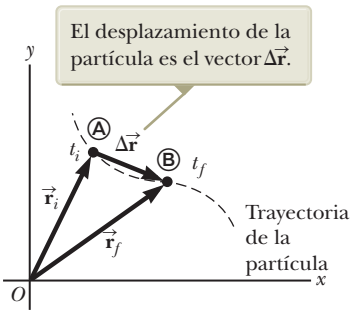


Figura 4.1 Una partícula que se mueve en el plano xy se ubica con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$, que se dibuja desde el origen hasta la partícula. El desplazamiento de la partícula conforme se mueve de Ⓐ a Ⓑ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ es igual al vector $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i$.

Considere de nuevo el movimiento de una partícula entre dos puntos en el plano xy como se muestra en la figura 4.2 (página 80). La curva punteada muestra la trayectoria de la partícula. Conforme el intervalo de tiempo sobre el que se observa el movimiento se vuelve más y más pequeño (esto es, a medida que Ⓑ se mueve a Ⓑ′ y después a Ⓑ″, y así sucesivamente), la dirección del desplazamiento tiende a la recta tangente a la trayectoria en Ⓐ. La **velocidad instantánea** $\vec{\mathbf{v}}$ se define como el límite de la velocidad promedio $\Delta\vec{\mathbf{r}}/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \tag{4.3}$$

◀ Velocidad instantánea

Esto es, la velocidad instantánea es igual a la derivada del vector de posición respecto del tiempo. La dirección del vector velocidad instantánea en cualquier punto en la trayectoria de una partícula es a lo largo de una recta tangente a la trayectoria en dicho punto y en la dirección del movimiento. Compare la ecuación 4.3 con la correspondiente versión unidimensional, ecuación 2.5.

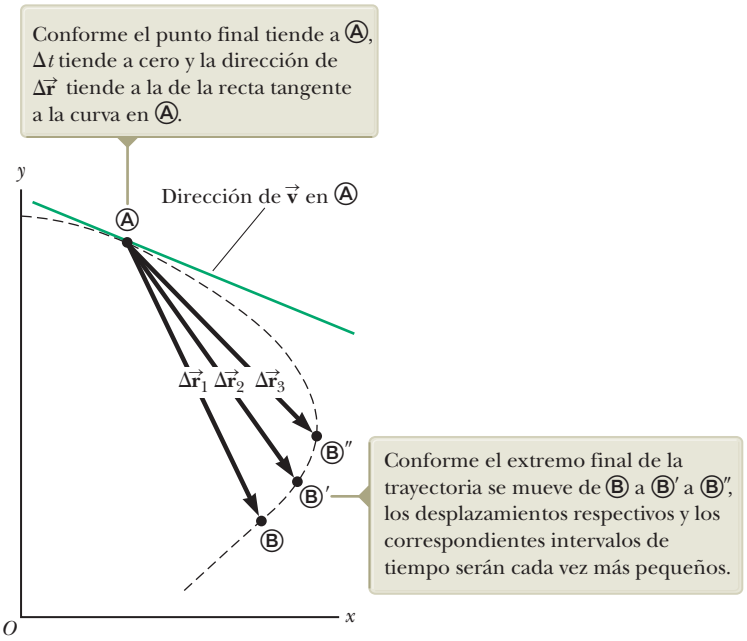


Figura 4.2 A medida que una partícula se mueve entre dos puntos, su velocidad promedio está en la dirección del vector desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. Por definición, la velocidad instantánea en Ⓐ se dirige a lo largo de la recta tangente a la curva en Ⓐ.

La magnitud del vector velocidad instantánea $v = |\vec{\mathbf{v}}|$ de una partícula se llama *rapidez* de la partícula, que es una cantidad escalar.

Cuando una partícula se mueve de un punto a otro a lo largo de cierta trayectoria, su vector velocidad instantánea cambia de $\vec{\mathbf{v}}_i$ en el tiempo t_i a $\vec{\mathbf{v}}_f$ en el tiempo t_f. Conocer la velocidad en dichos puntos permite determinar la aceleración promedio de la partícula. La **aceleración promedio** $\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}}$ de una partícula se define como el cambio en su vector velocidad instantánea $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

Aceleración promedio ▶

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i}{t_f - t_i} \tag{4.4}$$

Puesto que $\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}}$ es la razón de una cantidad vectorial $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ y una cantidad escalar positiva Δt, se concluye que la aceleración promedio es una cantidad vectorial dirigida a lo largo de $\Delta\vec{\mathbf{v}}$. Como se indica en la figura 4.3, la dirección de $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ se encuentra al sumar el vector $-\vec{\mathbf{v}}_i$ (el negativo de $\vec{\mathbf{v}}_i$) al vector $\vec{\mathbf{v}}_f$ porque, por definición, $\Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i$. Compare la ecuación 4.4 con la ecuación 2.9.

Cuando la aceleración promedio de una partícula cambia en el transcurso de diferentes intervalos de tiempo, es útil definir su aceleración instantánea. La **aceleración instantánea** $\vec{\mathbf{a}}$ se define como el valor límite de la razón $\Delta\vec{\mathbf{v}}/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:

Aceleración instantánea ▶

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \tag{4.5}$$

En otras palabras, la aceleración instantánea es igual a la derivada del vector velocidad respecto del tiempo. Compare la ecuación 4.5 con la ecuación (2.10).

Prevención de riesgos ocultos 4.1

Suma vectorial Aunque la suma vectorial discutida en el capítulo 3 involucra vectores desplazamiento, la suma vectorial se puede aplicar a cualquier tipo de cantidad vectorial. Por ejemplo, la figura 4.3 muestra la suma de vectores velocidad con el uso del método gráfico.

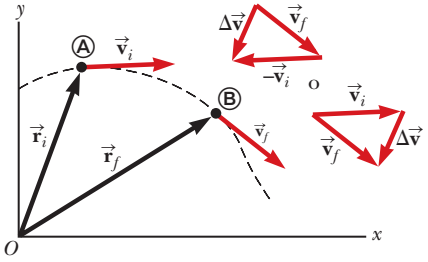


Figura 4.3 Una partícula se mueve de la posición Ⓐ a la posición Ⓑ. Su vector velocidad cambia de $\vec{\mathbf{v}}_i$ a $\vec{\mathbf{v}}_f$. Los diagramas vectoriales arriba a la derecha muestran dos formas de determinar el vector $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ de las velocidades inicial y final.

Pueden ocurrir varios cambios cuando una partícula se acelera. En primer lugar, la magnitud del vector velocidad (rapidez) puede cambiar con el tiempo como en un movimiento rectilíneo (unidimensional). En segundo lugar, la dirección del vector de velocidad puede cambiar con el tiempo, incluso si su magnitud (velocidad) se mantiene constante, como en el movimiento de dos dimensiones a lo largo de una trayectoria curva. Por último, tanto la magnitud como la dirección del vector velocidad puede cambiar de forma simultánea.

Examen rápido 4.1 Considere los siguientes controles en un automóvil en movimiento: acelerador, freno, volante. ¿En esta lista cuáles son los controles que provocan una aceleración en el automóvil? **(a)** Los tres controles, **(b)** el acelerador y el freno, **(c)** sólo el freno, **(d)** sólo el acelerador, **(e)** sólo el volante.

4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante

En la sección 2.5 se investigó el movimiento unidimensional de una partícula bajo aceleración constante y se desarrolló el modelo de partícula bajo aceleración constante. Ahora considere el movimiento bidimensional durante el cual la aceleración de una partícula permanece constante tanto en magnitud como en dirección. Como se verá, este método es útil para analizar algunos tipos comunes de movimiento.

Antes de embarcarse en esta investigación, es necesario enfatizar un punto importante en cuanto al movimiento bidimensional. Imagine un disco de hockey de aire que se mueve en línea recta a lo largo de una superficie perfectamente a nivel y libre de fricción de una mesa de hockey de aire. La figura 4.4a muestra un diagrama de movimiento desde arriba de este disco. Recuerde que en la sección 2.4 se vinculó la aceleración de un objeto con una fuerza sobre el objeto. Puesto que no hay fuerzas sobre el disco en el plano horizontal, se mueve con velocidad constante en la dirección x. Ahora suponga que sopla sobre el disco cuando pasa por su posición, con la fuerza de su soplido *exactamente* hacia la dirección y. Puesto que la fuerza de este soplido no tiene componente en la dirección x, no causa aceleración en la dirección x. Sólo una aceleración momentánea en la dirección y, lo que imprime al disco una componente de velocidad y constante una vez que la fuerza del soplido cesa. Después de soplar sobre el disco, su componente de velocidad en la dirección x no cambia, como se muestra en la figura 4.4b. La idea general de este experimento simple es que el **movimiento en dos dimensiones se puede representar como dos movimientos *independientes* en cada una de las dos direcciones perpendiculares asociadas con los ejes x y y. Esto es: cualquier influencia en la dirección y no afecta el movimiento en la dirección x y viceversa**.

El vector de posición para una partícula que se mueve en el plano xy se puede escribir

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} \tag{4.6}$$

donde x, y y $\vec{\mathbf{r}}$ cambian con el tiempo a medida que la partícula se mueve mientras los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ permanecen constantes. Si se conoce el vector de posición, la velocidad de la partícula se puede obtener a partir de las ecuaciones 4.3 y 4.6, que dan

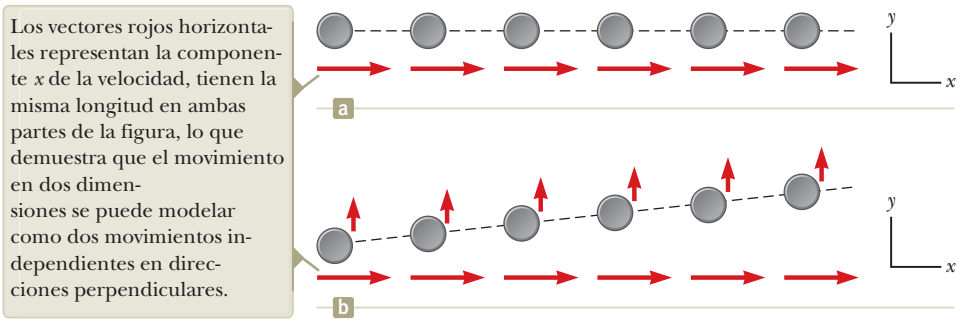


Figura 4.4 (a) Un disco se mueve a través de una mesa de hockey de aire horizontal con velocidad constante en la dirección x. (b) Después de aplicar al disco un soplido en la dirección y, el disco gana una componente y de velocidad, pero la componente x no es afectada por la fuerza en la dirección perpendicular.

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} \tag{4.7}$$

Puesto que la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ de la partícula se supone constante en esta discusión, sus componentes a_x y a_y también son constantes. Por lo tanto, se le puede representar como una partícula bajo aceleración constante independiente en cada una de las dos direcciones y aplicar las ecuaciones de cinemática por separado a las componentes x y y del vector velocidad. Al sustituir, de la ecuación 2.13, $v_{xf} = v_{xi} + a_x t$ y $v_{yf} = v_{yi} + a_y t$ en la ecuación 4.7 para determinar la velocidad final en cualquier tiempo t, se obtiene

$$\vec{\mathbf{v}}_f = (v_{xi} + a_x t)\hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t)\hat{\mathbf{j}} = (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}}) + (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t$$

Vector velocidad como una función del tiempo para una partícula bajo aceleración constante en dos dimensiones

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t \tag{4.8}$$

Este resultado establece que la velocidad de una partícula en algún tiempo t es igual a la suma vectorial de su velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_i$ en el tiempo $t = 0$ y la velocidad adicional $\vec{\mathbf{a}}t$ adquirida en el tiempo t como resultado de aceleración constante. La ecuación 4.8 es la versión vectorial de la ecuación 2.13.

De igual modo, de la ecuación 2.16 se sabe que las coordenadas x y y de una partícula que se mueve con aceleración constante son

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad y_f = y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación 4.6 (y etiquetar el vector de posición final $\vec{\mathbf{r}}_f$) se obtiene

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}_f &= (x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2)\hat{\mathbf{i}} + (y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2)\hat{\mathbf{j}} \\ &= (x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}}) + (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}})t + \tfrac{1}{2}(a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t^2\end{aligned}$$

Vector de posición como una función del tiempo para una partícula bajo aceleración constante en dos dimensiones

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2 \tag{4.9}$$

que es la versión vectorial de la ecuación 2.16. La ecuación 4.9 dice que el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_f$ de una partícula es la suma vectorial de la posición original $\vec{\mathbf{r}}_i$, un desplazamiento $\vec{\mathbf{v}}_i t$ que surge de la velocidad inicial de la partícula y un desplazamiento $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$ que resulta de la aceleración constante de la partícula.

Podemos considerar a las ecuaciones 4.8 y 4.9 como la representación matemática de una versión en dos dimensiones del modelo de la partícula bajo aceleración constante. En la figura 4.5 se muestran representaciones gráficas de las ecuaciones 4.8 y 4.9. Las componentes de los vectores de posición y velocidad también se ilustran en la figura. Note en la figura 4.5a que $\vec{\mathbf{v}}_f$ por lo general no está a lo largo de la dirección de $\vec{\mathbf{v}}_i$ o de $\vec{\mathbf{a}}$ porque la correspondencia entre dichas cantidades es una expresión vectorial. Por la misma justificación, de la figura 4.5b, se ve que $\vec{\mathbf{r}}_f$ por lo general no está a lo largo de la dirección de $\vec{\mathbf{r}}_i$, $\vec{\mathbf{v}}_i$ o de $\vec{\mathbf{a}}$. Por último, observe que $\vec{\mathbf{v}}_f$ y $\vec{\mathbf{r}}_f$ en general no están en la misma dirección.

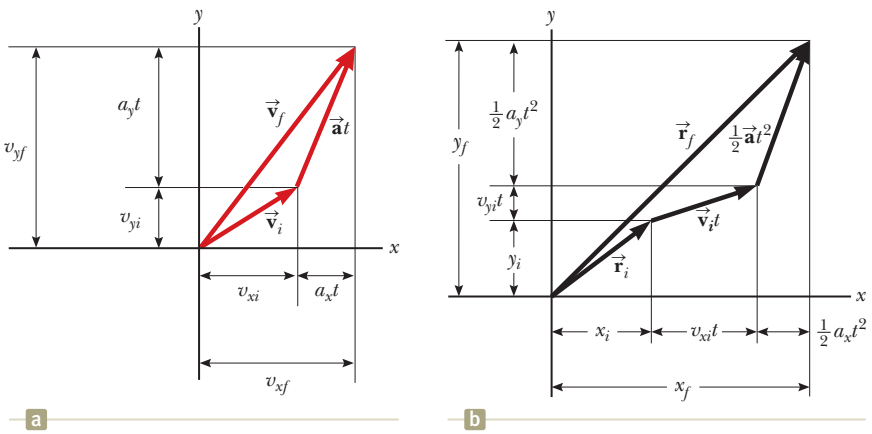


Figura 4.5 Representaciones y componentes vectoriales de (a) la velocidad y (b) la posición de una partícula bajo una aceleración constante en dos dimensiones.

Ejemplo 4.1 Movimiento en un plano AM

Una partícula que se mueve en el plano xy, parte del origen en $t = 0$ con una velocidad inicial que tiene una componente x de 20 m/s y otra componente y de −15 m/s. La partícula experimenta una aceleración en la dirección x, dada por $a_x = 4.0\ \text{m/s}^2$.

(A) Determine el vector velocidad total en cualquier momento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Las componentes de la velocidad inicial dicen que la partícula inicia su movimiento hacia la derecha y abajo. La componente x de velocidad comienza en 20 m/s y aumenta en 4.0 m/s cada segundo. La componente y de velocidad nunca cambia de su valor inicial de −15 m/s. En la figura 4.6 se bosqueja un diagrama de movimiento de la situación. Puesto que la partícula acelera en la dirección $+x$, su componente de velocidad en esta dirección aumenta y la trayectoria se curva, como se muestra en el diagrama. Note que el espaciamiento entre imágenes sucesivas aumenta conforme pasa el tiempo, porque la rapidez aumenta. La colocación de los vectores aceleración y velocidad en la figura 4.6 ayuda a conceptualizar aún más la situación.

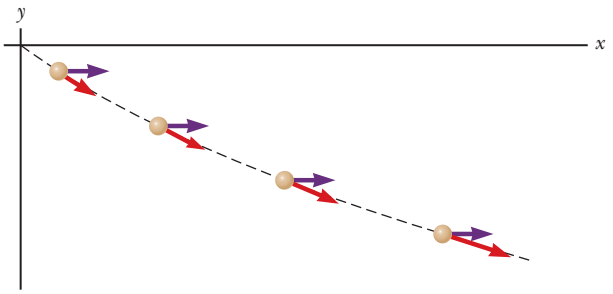


Figura 4.6 (Ejemplo 4.1) Diagrama de movimiento para la partícula.

Categorizar Puesto que la velocidad inicial tiene componentes en las direcciones x y y, este problema se clasifica como uno que supone una partícula que se mueve en dos dimensiones. Dado que la partícula sólo tiene una componente x de aceleración, la modelamos como una *partícula bajo aceleración constante* en la dirección x y una *partícula bajo velocidad constante* en la dirección y.

Analizar Para comenzar el análisis matemático, se hace $v_{xi} = 20\ \text{m/s}$, $v_{yi} = -15\ \text{m/s}$, $a_x = 4.0\ \text{m/s}^2$ y $a_y = 0$.

Aplique la ecuación 4.8 para el vector velocidad:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t = (v_{xi} + a_x t)\hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t)\hat{\mathbf{j}}$$

Sustituya valores numéricos con velocidades en metros por segundo y el tiempo en segundos:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = [20 + (4.0)t]\hat{\mathbf{i}} + [-15 + (0)t]\hat{\mathbf{j}}$$

$$(1)\quad \vec{\mathbf{v}}_f = [(20 + 4.0t)\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}]$$

Finalizar Note que la componente x de velocidad aumenta en el tiempo mientras la componente y permanece constante; este resultado es consistente con lo predicho.

(B) Calcule la velocidad y la rapidez de la partícula en $t = 5.0$ s y el ángulo que el vector velocidad forma con el eje x.

SOLUCIÓN

Analizar

Evalúe el resultado de la ecuación (1) en $t = 5.0$ s:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = [(20 + 4.0(5.0))\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}] = (40\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}$$

Determine el ángulo θ que $\vec{\mathbf{v}}_f$ forma con el eje x en $t = 5.0$ s:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{yf}}{v_{xf}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15\ \text{m/s}}{40\ \text{m/s}}\right) = -21°$$

Evalúe la rapidez de la partícula como la magnitud de $\vec{\mathbf{v}}_f$:

$$v_f = |\vec{\mathbf{v}}_f| = \sqrt{{v_{xf}}^2 + {v_{yf}}^2} = \sqrt{(40)^2 + (-15)^2}\ \text{m/s} = 43\ \text{m/s}$$

Finalizar El signo negativo para el ángulo θ indica que el vector velocidad se dirige a un ángulo de 21° abajo del eje x positivo. Note que, si se calcula v_i a partir de las componentes x y y de $\vec{\mathbf{v}}_i$, se encuentra que $v_f > v_i$. ¿Esto es consistente con la predicción?

(C) Determine las coordenadas x y y de la partícula en cualquier tiempo t y su vector de posición en este tiempo.

continúa

4.1 continuación

SOLUCIÓN

Analizar

Aplique las componentes de la ecuación 4.9 con $x_i = y_i = 0$ en $t = 0$ y con x y y en metros y t en segundos:

$$x_f = v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = 20t + 2.0t^2$$
$$y_f = v_{yi}t = -15t$$

Exprese el vector de posición de la partícula en cualquier tiempo t:

$$\vec{\mathbf{r}}_f = x_f\hat{\mathbf{i}} + y_f\hat{\mathbf{j}} = (20t + 2.0t^2)\hat{\mathbf{i}} - 15t\hat{\mathbf{j}}$$

Finalizar Considere ahora un caso límite para valores muy grandes de t.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Qué ocurriría si se espera un tiempo considerable y después se observa el movimiento de la partícula? ¿Cómo describiría el movimiento de la partícula para valores considerables del tiempo?

Respuesta Al observar la figura 4.6 es claro que la trayectoria de la partícula se curva hacia el eje x. No hay razón para suponer que esta tendencia cambiará, lo que sugiere que la trayectoria se volverá más y más paralela al eje x conforme crezca el tiempo. En términos matemáticos, la ecuación (1) muestra que la componente y de velocidad permanece constante mientras la componente x crece linealmente con t. Por lo tanto, cuando t es muy grande, la componente x de velocidad será mucho mayor que la componente y, lo que sugiere que el vector velocidad se volverá cada vez más paralelo al eje x. Las magnitudes de x_f como y_f continúan creciendo con el tiempo, aunque x_f crece mucho más rápido.

Prevención de riesgos ocultos 4.2

Aceleración en el punto más alto Como se discutió en la Prevención de riesgos ocultos 2.8, muchas personas afirman que la aceleración de un proyectil en el punto más alto de su trayectoria es cero. Este error surge de la confusión entre velocidad vertical cero y aceleración cero. Si el proyectil experimentara aceleración cero en el punto más alto, su velocidad en dicho punto no cambiaría; sucedería que, ¡desde ese momento el proyectil se movería horizontalmente con rapidez constante! Sin embargo, esto no ocurre, porque la aceleración *no* es cero en ninguna parte de la trayectoria.



Lester Lefkowitz/Taxi/Getty Images

Un soldador perfora una pesada viga de construcción con un soplete. Las chispas generadas en el proceso siguen trayectorias parabólicas.

4.3 Movimiento de proyectil

Quien haya observado una pelota de béisbol en movimiento ha observado el movimiento de un proyectil. La bola se mueve en una trayectoria curva y regresa al suelo. El **movimiento de proyectil** de un objeto es simple de analizar a partir de dos suposiciones: (1) la aceleración de caída libre es constante en el intervalo de movimiento y se dirige hacia abajo[1] y (2) el efecto de la resistencia del aire es despreciable.[2] Con estas suposiciones, se encuentra que la *trayectoria* de un proyectil *siempre* es una parábola, como se muestra en la figura 4.7. **A lo largo de este capítulo se usan estas suposiciones**.

La expresión para el vector de posición del proyectil como función del tiempo se sigue directamente de la ecuación 4.9, siendo su aceleración la de la gravedad, $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$:

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2 \qquad (4.10)$$

donde las componentes x y y de la velocidad inicial del proyectil son:

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i \qquad v_{yi} = v_i \operatorname{sen}\theta_i \qquad (4.11)$$

La expresión en la ecuación 4.10 se grafica en la figura 4.8, para un proyectil lanzado desde el origen, de modo que $\vec{\mathbf{r}}_i = 0$. La posición final de una partícula se considera como la superposición de su posición inicial $\vec{\mathbf{r}}_i$, el término $\vec{\mathbf{v}}_i t$, que es su desplazamiento si no hubiese aceleración presente; y el término $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$ que surge de su aceleración debida a la gravedad. En otras palabras, si no hubiera aceleración gravitacional, la partícula continuaría moviéndose a lo largo de una ruta recta en la dirección $\vec{\mathbf{v}}_i$. En consecuencia, la distancia vertical $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$ desde la que "cae" la partícula en línea recta, es la misma distancia desde la que caería un objeto que se deja caer desde el reposo durante el mismo intervalo de tiempo.

[1]Esta suposición es razonable en tanto el alcance del movimiento sea pequeño en comparación con el radio de la Tierra (6.4×10^6 m). En efecto, esto equivale a suponer que la Tierra es plana en el intervalo considerado del movimiento.

[2]Dicha suposición, por lo general, *no* está justificada, en especial a velocidades altas. Además, cualquier giro impartido a un proyectil, como el que se aplica cuando un pitcher lanza una bola curva, origina algunos efectos muy interesantes asociados con fuerzas aerodinámicas, que se discutirán en el capítulo 14.

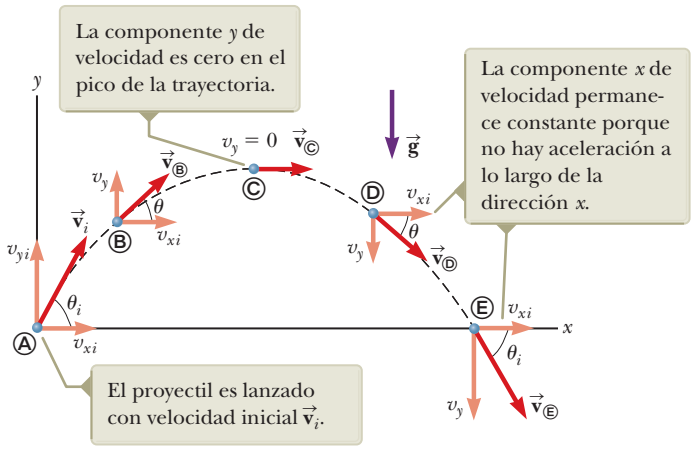


Figura 4.7 Trayectoria parabólica de un proyectil que sale del origen con velocidad $\vec{v}_i$. El vector velocidad $\vec{v}$ cambia con el tiempo tanto en magnitud como en dirección. Este cambio es el resultado de la aceleración $\vec{a} = \vec{g}$ en la dirección y negativa.

En la sección 4.2 se estableció que el movimiento en dos dimensiones con aceleración constante se puede analizar como una combinación de dos movimientos independientes en las direcciones x y y, con aceleraciones a_x y a_y. El movimiento de proyectiles también se maneja de esta forma, con aceleración $a_x = 0$ en la dirección x y una aceleración constante en la dirección y, $a_y = -g$. Por lo tanto, cuando resuelva problemas de movimiento de un proyectil, debe usar dos análisis de modelos: (1) movimiento de una partícula bajo velocidad constante en la dirección horizontal (ec. 2.7):

$$x_f = x_i + v_{xi}t$$

y (2) partícula bajo aceleración constante en la dirección vertical (ecs. 2.13-2.17 con x intercambiada por y y $a_y = -g$):

$$v_{yf} = v_{yi} - gt$$

$$v_{y,\text{prom}} = \frac{v_{yi} + v_{yf}}{2}$$

$$y_f = y_i + \tfrac{1}{2}(v_{yi} + v_{yf})t$$

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

Las componentes horizontal y vertical del movimiento de un proyectil son completamente independientes una de otra y se manejan por separado, con el tiempo t como la variable común para ambas componentes.

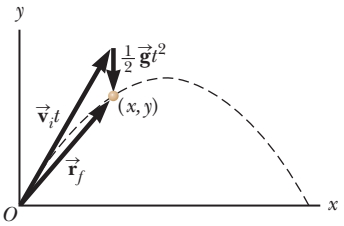


Figura 4.8 Vector de posición $\vec{r}_f$ de un proyectil lanzado desde el origen, cuya velocidad inicial en el origen es $\vec{v}_i$. El vector $\vec{v}_i t$ sería el desplazamiento del proyectil si no hubiera gravedad, y el vector $\frac{1}{2}\vec{g}t^2$ es su desplazamiento vertical en una trayectoria recta debido a su aceleración gravitacional descendente.

Examen rápido 4.2 **(i)** A medida que un proyectil lanzado hacia arriba se mueve en su trayectoria parabólica (como en la figura 4.8), ¿en qué punto a lo largo de su trayectoria los vectores velocidad y aceleración del proyectil son mutuamente perpendiculares? (a) En ninguna parte, (b) en el punto más alto, (c) en el punto de lanzamiento. **(ii)** Con las mismas opciones, ¿en qué punto son paralelos los vectores velocidad y aceleración del proyectil?

Alcance horizontal y altura máxima de un proyectil

Antes de embarcarse en algunos ejemplos. Consideremos un caso especial del movimiento de un proyectil que ocurre con frecuencia. Suponga que un proyectil es lanzado desde el origen en $t_i = 0$ con una componente v_{yi} positiva, como se muestra en la figura 4.9, y regresa al *mismo nivel horizontal*. Esta situación es común en los deportes, en pelotas de béisbol, balones de futbol y bolas de golf a menudo aterrizan en el mismo nivel desde el que se lanzaron.

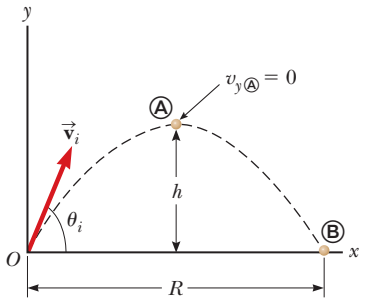


Figura 4.9 Proyectil lanzado sobre una superficie plana desde el origen en $t_i = 0$ con una velocidad inicial $\vec{v}_i$. La altura máxima del proyectil es h y el alcance horizontal es R. En Ⓐ, el máximo de la trayectoria, la partícula tiene coordenadas $(R/2, h)$.

Dos puntos en este movimiento son de especial interés para analizar: el punto máximo Ⓐ, que tiene coordenadas cartesianas $(R/2, h)$, y el punto Ⓑ, que tiene coordenadas $(R, 0)$. La distancia R se llama *alcance horizontal* del proyectil, y la distancia h es su altura máxima. Encuentre h y R matemáticamente a partir de v_i, θ_i y g.

Se puede determinar h al notar que, en el máximo, $v_{y\text{Ⓐ}} = 0$. Entonces, del modelo de partícula bajo aceleración constante, se puede usar la componente y de la versión de la ecuación 2.13 para determinar el tiempo $t_{\text{Ⓐ}}$ en que el proyectil alcanza el pico:

$$v_{yf} = v_{yi} - gt \quad \rightarrow \quad 0 = v_i \operatorname{sen} \theta_i - gt_{\text{Ⓐ}}$$

$$t_{\text{Ⓐ}} = \frac{v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g}$$

Sustituyendo esta expresión para $t_{\text{Ⓐ}}$ en la componente y de la versión de la ecuación 2.16 y remplazando $y_f = y_{\text{Ⓐ}}$ con h, se obtiene una expresión para h en términos de la magnitud y dirección del vector de velocidad inicial

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad h = (v_i \operatorname{sen} \theta_i)\frac{v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g} - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i}{2g} \tag{4.12}$$

El alcance R es la posición horizontal del proyectil en un tiempo que es el doble del tiempo en el que llega a su punto más alto, es decir, en el instante $t_{\text{Ⓑ}} = 2t_{\text{Ⓐ}}$. Usando el modelo de partícula bajo velocidad constante, notando que $v_{xi} = v_{x\text{Ⓑ}} = v_i \cos \theta_i$, y haciendo $x_{\text{Ⓑ}} = R$ en $t = 2t_{\text{Ⓐ}}$, encontramos que

$$x_f = x_i + v_{xi}t \quad \rightarrow \quad R = v_{xi}t_{\text{Ⓑ}} = (v_i \cos \theta_i)2t_{\text{Ⓐ}}$$

$$= (v_i \cos \theta_i)\frac{2v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g} = \frac{2v_i^2 \operatorname{sen} \theta_i \cos}{g}$$

Al aplicar la identidad $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ (véase el Apéndice B.4) se puede escribir R en la forma más compacta

$$R = \frac{v_i^2 \operatorname{sen} 2\theta_i}{g} \tag{4.13}$$

El valor máximo de R a partir de la ecuación 4.13 es $R_{\text{máx}} = v_i^2/g$. Este resultado tiene sentido porque el valor máximo de $\operatorname{sen} 2\theta_i$ es 1, lo que ocurre cuando $2\theta_i = 90°$. Debido a esto, R es un máximo cuando $\theta_i = 45°$.

La figura 4.10 ilustra varias trayectorias para un proyectil que tiene una rapidez inicial dada, pero se lanza a diferentes ángulos. Como puede ver, el alcance es máximo para $\theta_i = 45°$. Además, para cualquier θ_i distinta de 45°, se alcanza un punto con coordenadas cartesianas $(R, 0)$ al usar cualesquiera valores complementarios de θ_i, como 75° y 15°. Desde luego, la altura máxima y el tiempo de vuelo para uno de estos valores de θ_i son diferentes a causa de la altura máxima y el tiempo de vuelo para el valor complementario.

Examen rápido 4.3 Ordene los ángulos de lanzamiento para las cinco trayectorias de la figura 4.10 respecto del tiempo de vuelo, desde el tiempo de vuelo más corto al más largo.

Prevención de riesgos ocultos 4.3

La ecuación de alcance La ecuación 4.13 es útil para calcular R sólo para una trayectoria simétrica, como se muestra en la figura 4.10. Si la trayectoria no es simétrica, *no aplique esta ecuación*. Los modelos de partícula bajo velocidad constante y aceleración constante son importantes puntos de inicio, ya que dan las componentes de la posición y velocidad de *cualquier* proyectil que se mueve con aceleración constante en dos dimensiones en *cualquier* tiempo t.

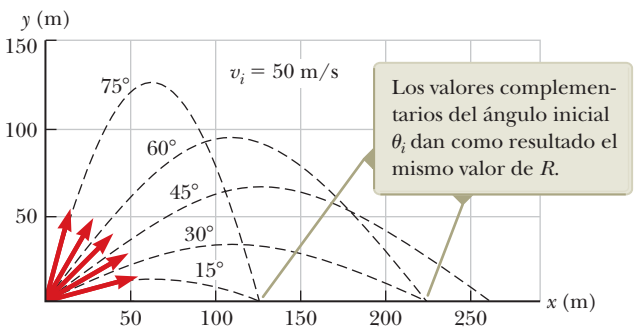


Figura 4.10 Un proyectil lanzado sobre una superficie plana desde el origen con una rapidez inicial de 50 m/s en varios ángulos de proyección.

Estrategia para resolución de problemas — Movimiento de proyectil

Cuando resuelva problemas de movimiento de proyectil, se sugiere el siguiente planteamiento:

1. Conceptualizar. Piense en lo que ocurre físicamente en el problema. Establezca la representación mental al imaginar el movimiento del proyectil a lo largo de su trayectoria.

2. Categorizar. Confirme que el problema supone una partícula en caída libre y que la resistencia del aire es despreciable. Seleccione un sistema coordenado con x en la dirección horizontal y y en la dirección vertical. Use la partícula bajo el modelo de velocidad constante para la componente x del movimiento. Use la partícula bajo el modelo de aceleración constante para la dirección y. En el caso especial del proyectil regresando al mismo nivel desde que fue lanzado, use las ecuaciones 4.12 y 4.13.

3. Analizar. Si se conoce el vector velocidad inicial, descompóngalo en componentes x y y. Seleccione la(s) ecuación(es) apropiada(s) de la partícula bajo el modelo de aceleración constante para el movimiento vertical y úselas junto con la ecuación 2.7 para el movimiento horizontal para resolver la(s) incógnita(s).

4. Finalizar. Una vez que determine su resultado, compruebe para ver si sus respuestas son consistentes con las representaciones mentales y gráficas y que sus resultados son realistas.

Ejemplo 4.2 — Salto de longitud

Un atleta que participa en salto de longitud (figura 4.11) deja el suelo a un ángulo de 20.0° sobre la horizontal y con una rapidez de 11.0 m/s.

(A) ¿Qué distancia salta en la dirección horizontal?



Sipa via AP Images

Figura 4.11 (Ejemplo 4.2) Romain Barras, de Francia, compite en el decatlón de salto de longitud de hombres en los Juegos Olímpicos de Beijing 2008.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los brazos y piernas de un atleta de salto de longitud se mueven en una forma compleja, pero este movimiento se ignorará. El movimiento del atleta se conceptualiza como equivalente al de un proyectil simple.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de movimiento de proyectil. Puesto que se conocen la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento, y ya que la altura final es la misma que la altura inicial, se confirma que el problema satisface las condiciones para aplicar las ecuaciones 4.12 y 4.13. Este planteamiento es la forma más directa de analizar este problema, aunque los métodos generales descritos siempre darán la respuesta correcta.

Analizar

Aplique la ecuación 4.13 para encontrar el alcance del saltador:

$$R = \frac{v_i^2 \operatorname{sen} 2\theta_i}{g} = \frac{(11.0\ \text{m/s})^2 \operatorname{sen}\ 2(20.0°)}{9.80\ \text{m/s}^2} = 7.94\ \text{m}$$

(B) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

SOLUCIÓN

Analizar

Encuentre la altura máxima alcanzada mediante la ecuación 4.12:

$$h = \frac{v_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i}{2g} = \frac{(11.0\ \text{m/s})^2 (\operatorname{sen}\ 20.0°)^2}{2(9.80\ \text{m/s}^2)} = 0.722\ \text{m}$$

Finalizar Encuentre las respuestas a los incisos (A) y (B) con el uso del método general. Los resultados deben concordar. Tratar al atleta como partícula es una simplificación; no obstante, los valores obtenidos son consistentes con la experiencia en los deportes. Podemos modelar un sistema complicado, como el del atleta en salto de longitud, como una partícula y aun así obtener resultados razonables.

Ejemplo 4.3 Tiro que da en el objetivo en cada ocasión AM

En una popular demostración, se dispara un proyectil a un objetivo en tal forma que el proyectil sale del cañón al mismo tiempo que el objetivo se suelta del reposo. Demuestre que, si el cañón se apunta inicialmente al objetivo fijo, el proyectil golpea al objetivo que cae como se muestra en la figura 4.12a.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Se forman conceptos del problema al estudiar la figura 4.12a. Note que el problema no pide valores numéricos. El resultado esperado debe involucrar un argumento algebraico.

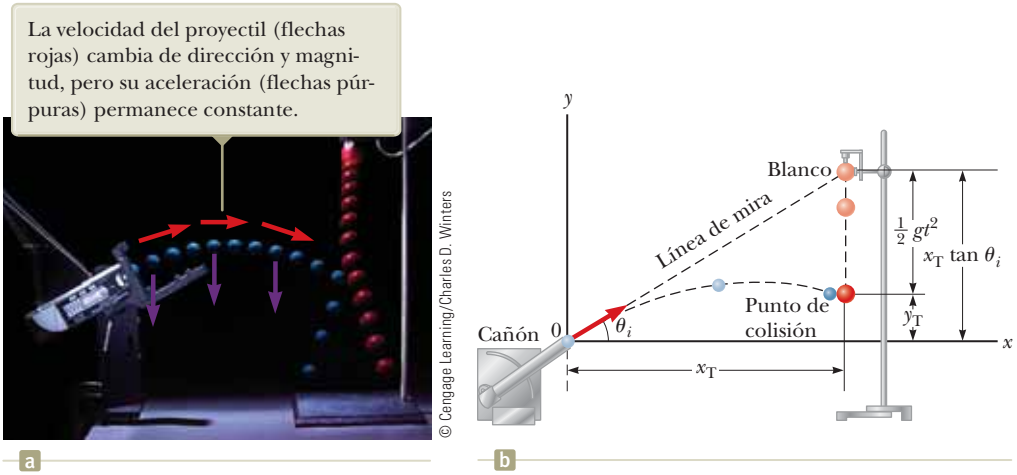


Figura 4.12 (Ejemplo 4.3) (a) Fotografía estroboscópica de la demostración proyecti-objetivo. Si el cañón se apunta directamente al objetivo y se dispara en el mismo instante cuando el objetivo comienza a caer, el proyectil golpeará el objetivo. (b) Diagrama esquemático de la demostración proyectil-objetivo.

Categorizar Debido a que ambos objetos sólo están subordinados a la gravedad, este problema se clasifica como uno que supone dos objetos en caída libre, el blanco en movimiento en una dimensión y el proyectil que se mueve en dos. El objetivo T se modela como una *partícula bajo aceleración constante* en la dirección y y una *partícula bajo velocidad constante* en la dirección x.

Analizar La figura 4.12b muestra que la coordenada y inicial y_{iT} del objetivo es $x_T \tan \theta_i$ y su velocidad inicial es cero. Cae con aceleración $a_y = -g$.

Escriba una expresión para la coordenada y del objetivo en cualquier momento después de liberarse y observe que su velocidad inicial es cero:

$$(1)\quad y_T = y_{iT} + (0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = x_T \tan \theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Escriba una expresión para la coordenada y del proyectil en cualquier momento:

$$(2)\quad y_P = y_{iP} + v_{yiP}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0 + (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Escriba una expresión para la coordenada x del proyectil en cualquier momento:

$$x_P = x_{iP} + v_{xiP}t = 0 + (v_{iP} \cos \theta_i)t = (v_{iP} \cos \theta_i)t$$

Resuelva esta expresión para el tiempo como función de la posición horizontal del proyectil:

$$t = \frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta_i}$$

Sustituya esta expresión en la ecuación (2):

$$(3)\quad y_P = (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)\left(\frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta_i}\right) - \tfrac{1}{2}gt^2 = x_P \tan \theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Finalizar Compare las ecuaciones (1) y (3). Se observa que cuando las coordenadas x del proyectil y el objetivo son las mismas (esto es, cuando $x_T = x_P$), sus coordenadas y conocidas por las ecuaciones (1) y (3) son las mismas y resulta una colisión.

Ejemplo 4.4 ¡Vaya brazo! AM

Una piedra es lanzada hacia arriba desde lo alto de un edificio a un ángulo de 30.0° con la horizontal y con una rapidez inicial de 20.0 m/s, como se muestra en la figura 4.13. La altura del edificio es de 45.0 m.

(A) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al suelo?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 4.13, en la que se indican la trayectoria y varios parámetros del movimiento de la piedra.

Categorizar Este problema se clasifica como un problema de movimiento de proyectil. La piedra se modela como una *partícula bajo aceleración constante* en la dirección y y una *partícula bajo velocidad constante* en la dirección x.

Analizar Se tiene la información $x_i = y_i = 0$, $y_f = -45.0$ m, $a_y = -g$ y $v_i = 20.0$ m/s (el valor numérico de y_f es negativo porque se eligió lo alto del edificio como el origen).

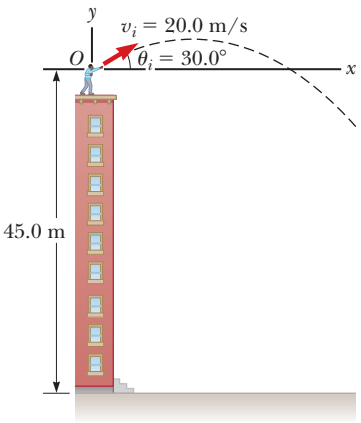


Figura 4.13 (Ejemplo 4.4) Una piedra se lanza desde lo alto de un edificio.

Encuentre las componentes x y y iniciales de velocidad de la piedra:

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i = (20.0 \text{ m/s}) \cos 30.0° = 17.3 \text{ m/s}$$

$$v_{yi} = v_i \operatorname{sen}\theta_i = (20.0 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 30.0° = 10.0 \text{ m/s}$$

Exprese la posición vertical de la piedra a partir del modelo de aceleración constante:

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Sustituya valores numéricos:

$$-45.0 \text{ m} = 0 + (10.0 \text{ m/s})t + \tfrac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

Resuelva la ecuación cuadrática para t:

$$t = 4.22 \text{ s}$$

(B) ¿Cuál es la rapidez de la piedra justo antes de golpear el suelo?

SOLUCIÓN

Analizar Utilice la ecuación de la velocidad de la partícula bajo el modelo de aceleración constante para obtener la componente y de la velocidad de la piedra justo antes de que pegue en el suelo:

$$v_{yf} = v_{yi} - gt$$

Sustituya valores numéricos, usando $t = 4.22$ s:

$$v_{yf} = 10.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)(4.22 \text{ s}) = -31.3 \text{ m/s}$$

Use esta componente con la componente horizontal $v_{xf} = v_{xi} = 17.3$ m/s para encontrar la rapidez de la piedra en $t = 4.22$ s:

$$v_f = \sqrt{{v_{xf}}^2 + {v_{yf}}^2} = \sqrt{(17.3 \text{ m/s})^2 + (-31.3 \text{ m/s})^2} = 35.8 \text{ m/s}$$

Finalizar ¿Es razonable que la componente y de la velocidad final sea negativa? ¿Es razonable que la rapidez final sea mayor que la rapidez inicial de 20.0 m/s?

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Qué sucedería si un viento horizontal sopla en la misma dirección en la que se lanza la piedra y hace que ésta tenga una componente de aceleración horizontal $a_x = 0.500$ m/s^2? ¿Cuál inciso de este ejemplo, (A) o (B), tendrá una respuesta diferente?

Respuesta Recuerde que los movimientos en las direcciones x y y son independientes. Por lo tanto, el viento horizontal no puede afectar el movimiento vertical. El movimiento vertical determina el tiempo del proyectil en el aire, así que la respuesta al inciso (A) no cambia. El viento hace que la componente de velocidad horizontal aumente con el tiempo, de modo que la rapidez final será mayor en el inciso (B). Al tomar $a_x = 0.500$ m/s^2, se encuentra $v_{xf} = 19.4$ m/s y $v_f = 36.9$ m/s.

Ejemplo 4.5 El final del salto con esquíes AM

Una esquiadora deja la rampa y se desliza en la dirección horizontal con una rapidez de 25.0 m/s, como se muestra en la figura 4.14. El plano de aterrizaje bajo ella cae con una pendiente de 35.0°. ¿Dónde aterrizará sobre el plano?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este problema permite formar ideas a partir de los recuerdos de las competencias de esquí en los juegos olímpicos de invierno. Se estima que la esquiadora está en el aire durante alrededor de 4 s y recorre una distancia horizontal de casi 100 m. Se espera que el valor de d, la distancia recorrida a lo largo del plano, sea del mismo orden de magnitud.

Categorizar El problema se clasifica como el de una partícula en movimiento de proyectil. Como con otros problemas de movimiento de proyectil, usamos el modelo de *partícula bajo velocidad constante* para el movimiento horizontal y el modelo de *partícula bajo aceleración constante* para el movimiento vertical.

Analizar Es conveniente seleccionar el comienzo del salto como el origen. Las componentes de velocidad inicial son $v_{xi} = 25.0$ m/s y $v_{yi} = 0$. Del triángulo rectángulo de la figura 4.14, se ve que las coordenadas x y y de la esquiadora en el punto de aterrizaje están dadas por $x_f = d\cos\phi$ y $y_f = -d\,\text{sen}\,\phi$.

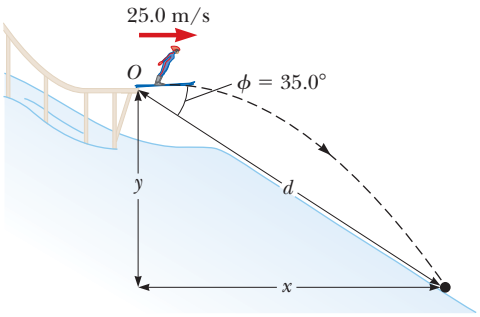


Figura 4.14 (Ejemplo 4.5) Una esquiadora baja la rampa moviéndose en una dirección horizontal.

Exprese las coordenadas de la saltadora como función del tiempo, usando el modelo de partícula bajo velocidad constante para x y la ecuación de la posición del modelo de partícula bajo aceleración constante para y:

$$(1)\quad x_f = v_{xi}t$$

$$(2)\quad y_f = v_{yi}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$(3)\quad d\cos\phi = v_{xi}t$$

$$(4)\quad -d\,\text{sen}\,\phi = -\tfrac{1}{2}gt^2$$

Resuelva la ecuación (3) para t y sustituya el resultado en la ecuación (4):

$$-d\,\text{sen}\,\phi = -\tfrac{1}{2}g\left(\frac{d\cos\phi}{v_{xi}}\right)^2$$

Resuelva para d y sustituya valores numéricos

$$d = \frac{2v_{xi}^2\,\text{sen}\,\phi}{g\cos^2\phi} = \frac{2(25.0\text{ m/s})^2\,\text{sen}\,35.0°}{(9.80\text{ m/s}^2)\cos^2 35.0°} = 109\text{ m}$$

Evalúe las coordenadas x y y del punto en el que aterriza la esquiadora:

$$x_f = d\cos\phi = (109\text{ m})\cos 35.0° = 89.3\text{ m}$$

$$y_f = -d\,\text{sen}\,\phi = -(109\text{ m})\,\text{sen}\,35.0° = -62.5\text{ m}$$

Finalizar Compare estos resultados con las expectativas. Se esperaba que la distancia horizontal estuviera en el orden de 100 m, y el resultado de 89.3 m de hecho está en este orden de magnitud. Puede ser útil calcular el intervalo de tiempo que la esquiadora está en el aire y compararlo con la estimación de aproximadamente 4 s.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que todo en este ejemplo es igual, excepto que la rampa se curva de modo que la esquiadora se proyecta hacia arriba en un ángulo desde el extremo de la pista. ¿Este diseño es mejor en términos de maximizar la longitud del salto?

Respuesta Si la velocidad inicial tiene una componente hacia arriba, la esquiadora estará en el aire más tiempo y, debido a esto, deberá viajar más. Sin embargo, inclinar el vector velocidad inicial hacia arriba *reduciría* realmente la componente horizontal de la velocidad inicial. En consecuencia, angular hacia arriba el extremo de la pista con un *gran* ángulo en realidad puede reducir la distancia. Considere el caso extremo: ¡la esquiadora se proyecta a 90° con la horizontal y simplemente va arriba y abajo en el extremo de la pista! Este argumento sugiere que debe haber un ángulo óptimo entre 0° y 90° que represente un equilibrio entre hacer el tiempo de vuelo más largo y la componente de velocidad horizontal más pequeña.

Encuentre matemáticamente este ángulo óptimo. Las ecuaciones de la (1) a la (4) se modifican de la forma siguiente, si supone que la esquiadora se proyecta a un ángulo θ respecto a la horizontal sobre un plano de aterrizaje con pendiente con un ángulo arbitrario ϕ:

$$(1)\text{ y }(3)\quad \rightarrow\quad x_f = (v_i\cos\theta)t = d\cos\phi$$

$$(2)\text{ y }(4)\quad \rightarrow\quad y_f = (v_i\,\text{sen}\,\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = -d\,\text{sen}\,\phi$$

4.5 continuación

Al eliminar el tiempo t entre estas ecuaciones y aplicando derivación para maximizar d en términos de θ, se llega (después de varias etapas; véase el problema 88) a la siguiente ecuación para el ángulo θ que da el valor máximo de d:

$$\theta = 45° - \frac{\phi}{2}$$

Para el ángulo de pendiente en la figura 4.14, $\phi = 35.0°$; esta ecuación resulta en un ángulo de lanzamiento óptimo de $\theta = 27.5°$. Para un ángulo de pendiente de $\phi = 0°$, que representa un plano horizontal, esta ecuación da un ángulo de lanzamiento óptimo de $\theta = 45°$, como se esperaría (véase la figura 4.10).

4.4 Análisis de modelo: partícula en movimiento circular uniforme

La figura 4.15a muestra un automóvil que se mueve en una trayectoria circular; describimos este movimiento con el nombre de **movimiento circular**. Si el automóvil se mueve en esta trayectoria con *rapidez constante v*, lo llamamos **movimiento circular uniforme**. Puesto que ocurre con tanta frecuencia, este tipo de movimiento se reconoce como un análisis de modelo llamado **partícula en movimiento circular uniforme**. En esta sección se analiza dicho modelo.

Con frecuencia sorprende a los estudiantes encontrar que aun cuando un objeto se mueva con rapidez constante en una trayectoria circular, *todavía tiene una aceleración*. Para ver por qué, considere la ecuación que define la aceleración, $\vec{\mathbf{a}} = d\vec{\mathbf{v}}/dt$ (ec. 4.5). Note que la aceleración depende del cambio en la *velocidad*. Puesto que la velocidad es una cantidad vectorial, una aceleración puede ocurrir en dos formas, como se mencionó en la sección 4.1: por un cambio en la *magnitud* de la velocidad y en la *dirección* de la velocidad. La última situación ocurre para un objeto que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular. El vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria del objeto y perpendicular al radio de la trayectoria circular. Por lo tanto, siempre está cambiando la dirección del vector velocidad.

Ahora se muestra que el vector aceleración en movimiento circular uniforme siempre es perpendicular a la trayectoria y siempre apunta hacia el centro del círculo. Si eso no fuera cierto, habría una componente de la aceleración paralela a la trayectoria y, debido a eso, paralela al vector velocidad. Tal componente de aceleración conduciría a un cambio en la rapidez de la partícula a lo largo de la trayectoria. Sin embargo, esta situación es inconsistente con la configuración de la situación: la partícula se mueve con rapidez constante a lo largo de la trayectoria. En consecuencia, para movimiento circular *uniforme*, el vector aceleración sólo puede tener una componente perpendicular a la trayectoria, que es hacia el centro del círculo.

Ahora encuentre la magnitud de la aceleración de la partícula. Considere el diagrama de los vectores de posición y velocidad de la figura 4.15b. La figura también muestra el vector que representa el cambio en posición $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ para un intervalo de tiempo arbitrario. La partícula sigue una trayectoria circular de radio r, de la que

Prevención de riesgos ocultos 4.4

Aceleración de una partícula en movimiento circular uniforme Recuerde que en física la aceleración se define como un cambio en la *velocidad*, no como un cambio en la *rapidez* (contrario a la interpretación cotidiana). En el movimiento circular, el vector velocidad siempre cambia de dirección, de modo que de hecho hay una aceleración.

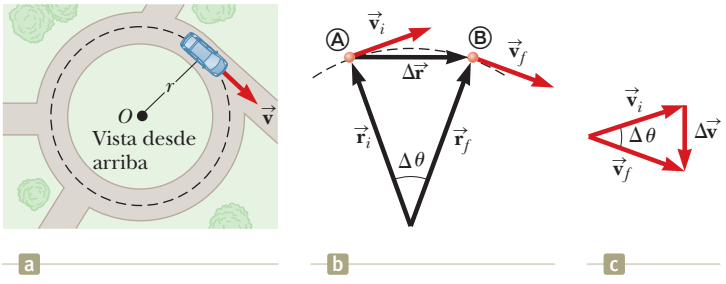


Figura 4.15 (a) Un automóvil que se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante experimenta movimiento circular uniforme. (b) Conforme una partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ, su vector velocidad cambia de $\vec{\mathbf{v}}_i$ a $\vec{\mathbf{v}}_f$. (c) Construcción para determinar la dirección del cambio en velocidad $\Delta\vec{\mathbf{v}}$, que es hacia el centro del círculo para $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ pequeño.

se muestra una parte mediante la curva discontinua. La partícula está en Ⓐ en el tiempo t_i y su velocidad en dicho tiempo es $\vec{\mathbf{v}}_i$; está en Ⓑ a algún tiempo ulterior t_f y su velocidad en dicho tiempo es v_f. Suponga también que v_i y v_f difieren sólo en dirección; sus magnitudes son las mismas (esto es, $v_i = v_f = v$, porque es movimiento circular *uniforme*).

En la figura 4.15c, los vectores velocidad de la figura 4.15b se volvieron a dibujar en un solo origen. El vector $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ conecta las puntas de los vectores, que representa la suma vectorial $\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \Delta\vec{\mathbf{v}}$. En las figuras 4.15b y 4.15c se identifican los triángulos que ayudan a analizar el movimiento. El ángulo $\Delta\theta$ entre los dos vectores de posición de la figura 4.15b es el mismo que el ángulo entre los vectores velocidad en la figura 4.15c, ya que el vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ siempre es perpendicular al vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$. Por lo tanto, los dos triángulos son semejantes. (Dos triángulos son semejantes si el ángulo entre cualquiera de los dos lados es el mismo para ambos triángulos y si la relación de las longitudes de dichos lados es la misma.) Ahora se puede escribir una correspondencia entre las longitudes de los lados para los dos triángulos de las figuras 4.15b y 4.15c:

$$\frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{r}$$

donde $v = v_i = v_f$ y $r = r_i = r_f$. Esta ecuación se resuelve para $|\Delta\vec{\mathbf{v}}|$ y la expresión obtenida se sustituye en la ecuación 4.4, $\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}} = \Delta\vec{\mathbf{v}}/\Delta t$, para dar la magnitud de la aceleración promedio sobre el intervalo de tiempo para que la partícula se mueva de Ⓐ a Ⓑ:

$$|\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}}| = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{|\Delta t|} = \frac{v|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{r\Delta t}$$

Ahora imagine que los puntos Ⓐ y Ⓑ en la figura 4.15b se hacen extremadamente cercanos entre sí. Conforme Ⓐ y Ⓑ se aproximan uno a otro, Δt tiende a cero, $|\Delta\vec{\mathbf{r}}|$ se aproxima a la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria circular y la razón $|\Delta\vec{\mathbf{r}}|/\Delta t$ se aproxima a la rapidez v. Además, la aceleración promedio se convierte en la aceleración instantánea en el punto Ⓐ. Por tanto, en el límite $\Delta t \to 0$, la magnitud de la aceleración es

Aceleración centrípeta de una partícula en movimiento circular uniforme

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad \textbf{(4.14)}$$

Una aceleración de esta naturaleza se llama **aceleración centrípeta** (*centrípeta* significa hacia el centro). El subíndice en el símbolo de aceleración recuerda que la aceleración es centrípeta.

En muchas situaciones es conveniente describir el movimiento de una partícula que se mueve con rapidez constante en un círculo de radio r en términos del **periodo** T, que se define como el intervalo de tiempo requerido para una revolución completa de la partícula. En el intervalo de tiempo T, la partícula se mueve una distancia de $2\pi r$, que es igual a la circunferencia de la trayectoria circular de la partícula. En consecuencia, puesto que su rapidez es igual a la circunferencia de la trayectoria circular dividida entre el periodo, o $v = 2\pi r/T$, se sigue que

Periodo de movimiento circular para una partícula con movimiento circular uniforme

$$T = \frac{2\pi r}{v} \qquad \textbf{(4.15)}$$

El periodo de una partícula en movimiento circular uniforme es una medida del número de segundos para una revolución de la partícula alrededor del círculo. El inverso del periodo es la *razón de rotación* y se mide en revoluciones por segundo. Ya que una revolución completa de la partícula alrededor del círculo corresponde a un ángulo de 2π radianes, el producto de 2π y la razón de rotación da la **velocidad angular** ω de la partícula, medido en radianes/s o s^{-1}:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \textbf{(4.16)}$$

Combinando esta ecuación con la ecuación 4.15, encontramos una relación entre la velocidad angular y la rapidez de traslación con la cual la partícula viaja en la trayectoria circular:

$$\omega = 2\pi\left(\frac{v}{2\pi r}\right) = \frac{v}{r} \quad \rightarrow \quad v = r\omega \tag{4.17}$$

La ecuación 4.17 demuestra que, para una rapidez angular fija, la rapidez de traslación se vuelve más grande cuanto más grande sea la posición radial. Por lo tanto, por ejemplo, si un tiovivo gira en una rapidez angular fija ω, un jinete en una posición externa grande r estará viajando a través del espacio más rápido que un jinete en una posición interior pequeña r. Vamos a investigar las ecuaciones 4.16 y 4.17 más profundamente en el capítulo 10.

Podemos expresar la aceleración centrípeta de una partícula en movimiento circular uniforme en términos de la velocidad angular combinando las ecuaciones 4.14 y 4.17:

$$a_c = \frac{(r\omega)^2}{r}$$

$$a_c = r\omega^2 \tag{4.18}$$

Se deben utilizar las ecuaciones 4.14–4.18 cuando la partícula en el modelo de movimiento circular uniforme se identifica como adecuada para una situación dada.

Prevención de riesgos ocultos 4.5

La aceleración centrípeta no es constante Al deducir la magnitud del vector aceleración centrípeta se encontró que es constante para el movimiento circular uniforme, pero *el vector aceleración centrípeta no es constante.* Siempre apunta hacia el centro del círculo, pero continuamente cambia de dirección conforme el objeto se mueve alrededor de la trayectoria circular.

Examen rápido 4.4 Una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio r con rapidez v. Luego aumenta su rapidez a $2v$ mientras viaja a lo largo de la misma trayectoria circular. **(i)** ¿En qué factor cambió la aceleración centrípeta de la partícula (elija una)? (a) 0.25, (b) 0.5, (c) 2, (d) 4, (e) imposible de determinar. **(ii)** De las mismas opciones, ¿en qué factor cambió el periodo de la partícula?

Análisis de modelo — Partícula en movimiento circular uniforme

Imagine un objeto en movimiento que se puede modelar como una partícula. Si se mueve en una trayectoria circular de radio r con una rapidez constante v, la magnitud de su aceleración centrípeta es

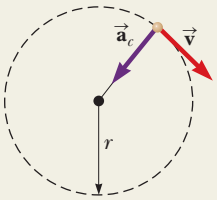
$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{4.14}$$

y el **periodo** de movimiento de la partícula está dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{4.15}$$

La **velocidad angular** de la partícula es

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{4.16}$$



Ejemplos:

- una roca girando alrededor de un círculo atada a una cuerda de longitud constante
- un planeta recorriendo una órbita perfectamente circular (capítulo 13)
- una partícula cargada moviéndose en un campo magnético uniforme (capítulo 29)
- un electrón en una órbita alrededor de un núcleo en el modelo de Bohr del átomo del hidrógeno (capítulo 42)

Ejemplo 4.6 Aceleración centrípeta de la Tierra AM

(A) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la Tierra a medida que se mueve en su órbita alrededor del Sol?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en una imagen mental de la Tierra en una órbita circular alrededor del Sol. La Tierra se representará como una partícula y su órbita se aproximará como circular (en realidad es ligeramente elíptica, como se explicará en el capítulo 13).

Categorizar El paso conceptualizar permite clasificar este problema como el de una *partícula en movimiento circular uniforme.*

Analizar No se conoce la rapidez orbital de la Tierra para sustituirla en la ecuación 4.14. Sin embargo, con ayuda de la ecuación 4.15, se da nueva forma a la ecuación 4.14 en términos del periodo de la órbita de la Tierra, que se sabe es un año, y el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, que es 1.496×10^{11} m.

continúa

4.6 continuación

Combine las ecuaciones 4.14 y 4.15: $$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Sustituya valores numéricos: $$a_c = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\ \text{m})}{(1\ \text{año})^2}\left(\frac{1\ \text{año}}{3.156 \times 10^7\ \text{s}}\right)^2 = 5.93 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

(B) ¿Cuál es la rapidez angular de la Tierra en su órbita alrededor del Sol?

SOLUCIÓN

Analizar

Sustituir los valores numéricos en la ecuación 4.16. $$\omega = \frac{2\pi}{1\ \text{año}}\left(\frac{1\ \text{año}}{3.156 \times 10^7\ \text{s}}\right) = 1.99 \times 10^{-7}\ \text{s}^{-1}$$

Finalizar La aceleración en el inciso **(A)** es mucho más pequeña que la aceleración en caída libre sobre la superficie de la Tierra. Una cosa importante aprendida aquí es la técnica para sustituir la rapidez v en la ecuación 4.14 en términos del periodo T del movimiento. En muchos problemas, es más probable que se conozca T en lugar de v. En el inciso (B), vemos que la rapidez angular de la Tierra es muy pequeña, lo que es de esperarse porque la Tierra tarda un año entero en recorrer la trayectoria circular una vez.

4.5 Aceleraciones tangencial y radial

Consideremos un movimiento más general que el que se presentó en la sección 4.4. Una partícula se mueve a la derecha a lo largo de una trayectoria curva, y su velocidad cambia *tanto* en magnitud como en dirección, como se describe en la figura 4.16. En esta situación, el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria; sin embargo, el vector de aceleración $\vec{\mathbf{a}}$, hace un ángulo con la trayectoria. En cada uno de los tres puntos Ⓐ, Ⓑ y Ⓒ en la figura 4.16, los círculos discontinuos azules representan la curvatura de la trayectoria real en cada punto. El radio de cada círculo es igual al radio de curvatura de la trayectoria en cada punto.

Conforme la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria curva en la figura 4.16, la dirección del vector aceleración total $\vec{\mathbf{a}}$ cambia de punto a punto. En cualquier instante, este vector se puede descomponer en dos componentes respecto de un origen en el centro del círculo discontinuo correspondiente a dicho instante: una componente radial a_r a lo largo del radio del círculo y una componente tangencial a_t perpendicular a este radio. El vector de aceleración *total* $\vec{\mathbf{a}}$ se puede escribir como el vector suma de los vectores componentes.

Aceleración total ▶ $$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t \qquad (4.19)$$

La componente de aceleración tangencial causa un cambio en la rapidez v de la partícula. Esta componente es paralela a la velocidad instantánea y su magnitud está dada por

Aceleración tangencial ▶ $$a_t = \left|\frac{dv}{dt}\right| \qquad (4.20)$$

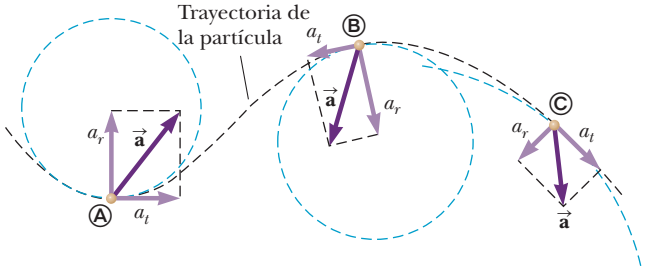


Figura 4.16 El movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva arbitraria que se encuentra en el plano xy. Si el vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ (siempre tangente a la trayectoria) cambia en dirección y magnitud, las componentes de la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ son una componente tangencial a_t y otra componente radial a_r.

La componente de aceleración radial surge de un cambio en dirección del vector velocidad y está dado por

$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r} \qquad (4.21)$$

◀ Aceleración radial

donde r es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto en cuestión. La componente radial de la aceleración se reconoce como la aceleración centrípeta discutida en la sección 4.4 considerando a la partícula en un modelo de movimiento circular uniforme. Sin embargo, aun en situaciones en que una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva con una rapidez variable, se puede utilizar la ecuación 4.14 para la aceleración centrípeta. En esta situación, la ecuación da la aceleración centrípeta *instantánea* en cualquier tiempo. El signo negativo en la ecuación 4.21 indica que la dirección de la aceleración centrípeta es hacia el centro del círculo que representa el radio de curvatura. La dirección es opuesta a la del vector unitario radial $\hat{\mathbf{r}}$, que siempre apunta alejándose del origen en el centro del círculo.

Puesto que $\vec{\mathbf{a}}_r$ y $\vec{\mathbf{a}}_t$ son vectores componentes perpendiculares de $\vec{\mathbf{a}}$, se sigue que la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}$ es $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$. En una rapidez conocida, a_r es grande cuando el radio de curvatura es pequeño (como en los puntos Ⓐ y Ⓑ de la figura 4.16) y pequeña cuando r es grande (en el punto Ⓒ). La dirección de $\vec{\mathbf{a}}_t$ está en la misma dirección que $\vec{\mathbf{v}}$ (si v aumenta) u opuesta a $\vec{\mathbf{v}}$ (si v disminuye, como en el punto Ⓑ).

En el movimiento circular uniforme, donde v es constante, $a_t = 0$ y la aceleración siempre es completamente radial, como se describe en la sección 4.4. En otras palabras, el movimiento circular uniforme es un caso especial de movimiento a lo largo de una trayectoria curva general. Además, si la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ no cambia, no existe aceleración radial y el movimiento es en una dimensión (en este caso, $a_r = 0$, pero a_t puede no ser cero).

Examen rápido 4.5 Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria y su rapidez aumenta con el tiempo. **(i)** ¿En cuál de los siguientes casos sus vectores aceleración y velocidad son paralelos? (a) Cuando la trayectoria es circular, (b) cuando la trayectoria es recta, (c) cuando la trayectoria es una parábola, (d) nunca. **(ii)** De las mismas opciones, ¿en cuál caso sus vectores aceleración y velocidad son perpendiculares en cualquier parte de la trayectoria?

Ejemplo 4.7 En la cumbre

Un automóvil muestra una aceleración constante de 0.300 m/s² paralela a la autopista. El automóvil pasa sobre una elevación en el camino tal que lo alto de la elevación tiene forma de arco de circunferencia con 500 m de radio. En el momento en que el automóvil está en lo alto de la elevación, su vector velocidad es horizontal y tiene una magnitud de 6.00 m/s. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector aceleración total para el automóvil en este instante?

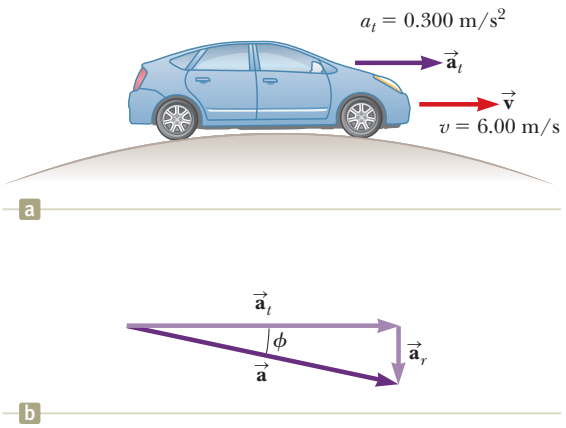


Figura 4.17 (Ejemplo 4.7) (a) Un automóvil pasa sobre una elevación que tiene forma de arco de circunferencia. (b) El vector aceleración total $\vec{\mathbf{a}}$ es la suma de los vectores aceleración tangencial y radial $\vec{\mathbf{a}}_t$ y $\vec{\mathbf{a}}_r$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Forme ideas de la situación con la figura 4.17a y cualquier experiencia que haya tenido al conducir sobre elevaciones en el camino.

Categorizar Puesto que el automóvil que acelera se mueve a lo largo de una trayectoria curva, este problema se clasifica como uno que involucra una partícula que experimenta aceleraciones tangencial y radial. Se reconoce que es un problema de sustitución relativamente simple.

El vector aceleración tangencial tiene magnitud de 0.300 m/s² y es horizontal. La aceleración radial está dada por la ecuación 4.21, con $v = 6.00$ m/s y $r = 500$ m. El vector aceleración radial se dirige en línea recta hacia abajo.

continúa

4.7 continuación

Evalúe la aceleración radial:

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{(6.00\ \text{m/s})^2}{500\ \text{m}} = -0.072\ 0\ \text{m/s}^2$$

Encuentre la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}$:

$$\sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(-0.072\ 0\ \text{m/s}^2)^2 + (0.300\ \text{m/s}^2)^2} = 0.309\ \text{m/s}^2$$

Encuentre el ángulo ϕ (véase la figura 4.17b) entre $\vec{\mathbf{a}}$ y la horizontal:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{a_r}{a_t} = \tan^{-1}\left(\frac{-0.072\ 0\ \text{m/s}^2}{0.300\ \text{m/s}^2}\right) = -13.5°$$

4.6 Velocidad y aceleración relativas

En esta sección se describe cómo se relacionan las observaciones realizadas por diferentes observadores en distintos marcos de referencia. Un marco de referencia se describe mediante un sistema coordenado cartesiano para el cual un observador está en reposo en relación con el origen.

Establezca conceptos de una situación modelo en la que habrá distintas observaciones para diferentes observadores. Considere a los dos observadores A y B a lo largo de la recta numérica de la figura 4.18a. El observador A se ubica a 5 unidades a la derecha del observador B. Ambos observadores miden la posición del punto *P*, que se ubica 5 unidades a la derecha del observador A. Suponga que cada observador decide que el origen está donde cada uno está parado sobre el eje *x*, como en la figura 4.18b. Advierta que los dos observadores están en desacuerdo acerca del valor de la posición del punto *P*. El observador A afirma que el punto *P* está situado en una posición con un valor de $x_A = +5$, mientras que el observador B afirma que se encuentra en una posición con un valor de $x_B = +10$. Ambos observadores están en lo correcto, aunque hagan mediciones diferentes. Sus medidas difieren porque realizan las mediciones desde diferentes marcos de referencia.

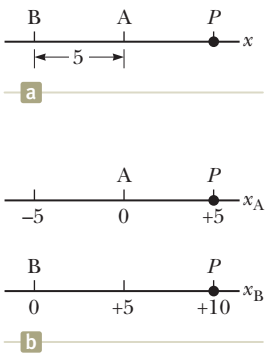


Figura 4.18 Diferentes observadores realizan mediciones diferentes. (a) El observador A está situado a 5 unidades a la derecha del observador B. Ambos observadores miden la posición de una partícula en *P*. (b) Si ambos observadores se ven ellos mismos en el origen de su propio sistema coordenado, no estarán de acuerdo con el valor de la posición de la partícula en *P*.

Imagine ahora que el observador B en la figura 4.18b se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x_B. Ahora las dos mediciones son incluso más diferentes. El observador A afirma que el punto *P* permanece en reposo en una posición con un valor de +5, mientras que el observador B afirma que la posición de *P* cambia continuamente con el tiempo, que incluso ¡lo pasa a él y se mueve más allá de donde él está! De nuevo, ambos observadores están en lo correcto, y la diferencia en sus observaciones surge de sus diferentes marcos de referencia.

Este fenómeno se explora aún más al considerar dos observadoras que miran a un hombre caminar sobre una banda transportadora en un aeropuerto en la figura 4.19. La mujer que está de pie en la banda transportadora ve que el hombre anda con una rapidez normal. La mujer que observa desde una posición fija ve al hombre moverse con una rapidez mayor, porque la rapidez de la banda transportadora se combina con su rapidez al andar. Ambas observadoras miran al mismo hombre y llegan a diferentes valores para su rapidez. Ambas están en lo correcto; la diferencia en sus observaciones resulta de la velocidad relativa de sus marcos de referencia.

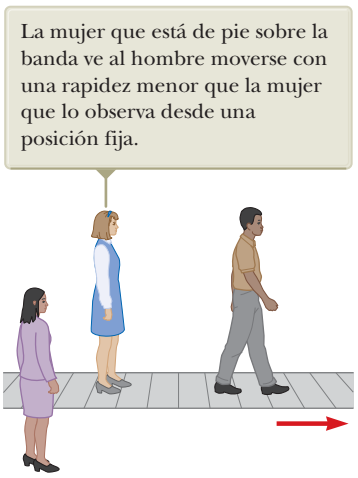


Figura 4.19 Dos observadoras miden la rapidez de un hombre que camina sobre una banda transportadora.

En una situación más general, considere una partícula ubicada en el punto *P* de la figura 4.20. Imagine que el movimiento de esta partícula lo describen dos observadores, A en un marco de referencia S_A fijo en relación con la Tierra y un segundo observador B en un marco de referencia S_B que se mueve hacia la derecha en relación con S_A (y debido a eso en relación con la Tierra) con una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. En esta discusión de velocidad relativa, se usa una notación de doble subíndice: el primer subíndice representa lo que se observa y el segundo representa quién realiza la observación. En consecuencia, la notación $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ significa la velocidad del observador B (y el marco unido S_B) medido por el observador A. Con esta notación, el observador B mide a A como si estuviera en movimiento hacia la izquierda con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{AB} = -\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. Para propósitos de esta discusión, coloque a cada observador en su respectivo origen.

El tiempo $t = 0$ se define como el instante en que los orígenes de los dos marcos de referencia coinciden en el espacio. Por lo tanto, en el tiempo *t*, los orígenes de

los marcos de referencia estarán separados una distancia $v_{BA}t$. La posición P de la partícula en relación con el observador A se marca con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$ y en relación con el observador B con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$, ambos en el tiempo t. A partir de la figura 4.20 se ve que los vectores $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ y $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$ se relacionan mutuamente a partir de la expresión

$$\vec{\mathbf{r}}_{PA} = \vec{\mathbf{r}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA}t \tag{4.22}$$

Al derivar la ecuación 4.19 respecto del tiempo, y notar que $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ es constante, se obtiene

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{PB}}{dt} + \vec{\mathbf{v}}_{BA}$$

$$\vec{\mathbf{u}}_{PA} = \vec{\mathbf{u}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA} \tag{4.23}$$

donde $\vec{\mathbf{u}}_{PA}$ es la velocidad de la partícula en P medida por el observador A y $\vec{\mathbf{u}}_{PB}$ es su velocidad medida por B. (El símbolo $\vec{\mathbf{u}}$ se usa para velocidad de partícula en lugar de $\vec{\mathbf{v}}$, que se usa para velocidad relativa de dos marcos de referencia.) Las ecuaciones 4.22 y 4.23 se conocen como **ecuaciones de transformación galileanas**. Relacionan la posición y velocidad de una partícula según las miden los observadores en movimiento relativo. Note el patrón de los subíndices en la ecuación 4.23. Cuando se suman velocidades relativas, los subíndices internos (B) son los mismos y los exteriores (P, A) igualan los subíndices de la velocidad en el lado izquierdo de la ecuación.

Aunque los observadores en dos marcos miden diferentes velocidades para la partícula, miden la *misma aceleración* cuando $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ es constante. Se puede verificar que, al tomar la derivada en el tiempo de la ecuación 4.23,

$$\frac{d\vec{\mathbf{u}}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{u}}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{BA}}{dt}$$

Puesto que $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ es constante, $d\vec{\mathbf{v}}_{BA}/dt = 0$. Por tanto, se concluye que $\vec{\mathbf{a}}_{PA} = \vec{\mathbf{a}}_{PB}$ porque $\vec{\mathbf{a}}_{PA} = d\vec{\mathbf{u}}_{PA}/dt$ y $\vec{\mathbf{a}}_{PB} = d\vec{\mathbf{u}}_{PB}/dt$. Esto es, la aceleración de la partícula medida por un observador en un marco de referencia es la misma que la medida por cualquier otro observador que se mueva con velocidad constante en relación con el primer marco.

Transformación de velocidad galileana

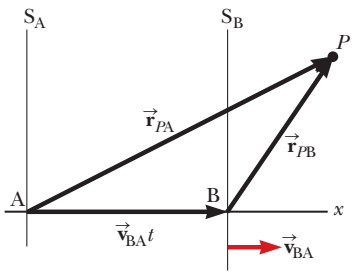


Figura 4.20 Una partícula ubicada en P es descrita por dos observadores, uno en el marco de referencia fijo S_A y el otro en el marco S_B, que se mueve hacia la derecha con una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. El vector $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ es el vector de posición de la partícula en relación con S_A y $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$ es su vector de posición en relación con S_B.

Ejemplo 4.8 Un bote que cruza un río

Un bote que cruza un río ancho se mueve con una rapidez de 10.0 km/h en relación con el agua. El agua en el río tiene una rapidez uniforme de 5.00 km/h hacia el Este en relación con la Tierra.

(A) Si el bote se dirige hacia el Norte, determine la velocidad del bote en relación con un observador que está de pie en cualquier orilla.

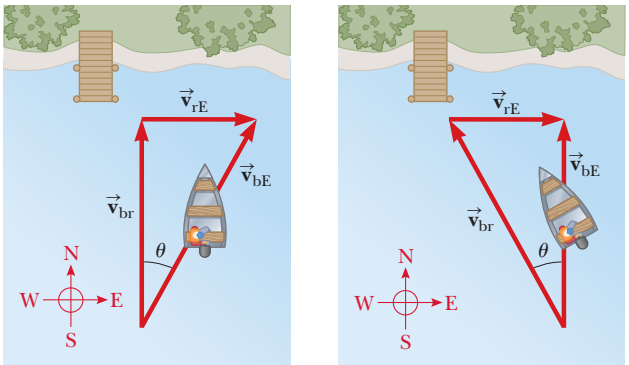


Figura 4.21 (Ejemplo 4.8) (a) Un bote se dirige directamente a través de un río y termina corriente abajo. (b) Para moverse directamente a través del río, el bote debe dirigirse corriente arriba.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que se mueve a través de un río mientras lo empuja la corriente. No será capaz de moverse directamente a través del río, sino que terminará corriente abajo, como muestra la figura 4.21a.

Categorizar Debido a las velocidades combinadas de usted con respecto al río y de éste con respecto a la tierra, es posible clasificar este problema como uno que involucra velocidades relativas.

Analizar Se conoce $\vec{\mathbf{v}}_{br}$, la velocidad del *bote* en relación con el *río*, y $\vec{\mathbf{v}}_{rE}$, la velocidad del *río* en relación con la *Tierra*. Lo que se debe encontrar es $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$, la velocidad del *bote* respecto de la Tierra. La relación entre estas tres cantidades es $\vec{\mathbf{v}}_{bE} = \vec{\mathbf{v}}_{br} + \vec{\mathbf{v}}_{rE}$. Los términos en la ecuación se deben manipular como cantidades vectoriales; los vectores se muestran en la figura 4.21a. La cantidad $\vec{\mathbf{v}}_{br}$ es hacia el Norte; $\vec{\mathbf{v}}_{rE}$ es hacia el Este, y la suma vectorial de los dos, $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$, está a un ángulo θ, como se define en la figura 4.21a.

continúa

4.8 continuación

Encuentre la rapidez v_{bE} del bote en relación con la Tierra mediante el teorema de Pitágoras:

$$v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 + v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0\ \text{km/h})^2 + (5.00\ \text{km/h})^2} = 11.2\ \text{km/h}$$

Encuentre la dirección de $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{br}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{10.0}\right) = 26.6°$$

Finalizar El bote se mueve con una rapidez de 11.2 km/h en la dirección 26.6° noreste en relación con la Tierra. Note que la rapidez de 11.2 km/h es mayor que la rapidez del bote de 10.0 km/h. La velocidad de la corriente se suma a la suya para darle una mayor rapidez. Observe en la figura 4.21a que su velocidad resultante está a un ángulo con la dirección recta a través del río, así que terminará corriente abajo, como se predijo.

(B) Si el bote viaja con la misma rapidez de 10.0 km/h en relación con el río y debe viajar al Norte, como se muestra en la figura 4.21b, ¿hacia dónde se debe dirigir?

SOLUCIÓN

Conceptualizar/categorizar Esta pregunta es una extensión del inciso (A), así que ya se tienen ideas y ya se clasificó el problema. Una característica nueva de la formación de conceptos es que ahora el bote se debe dirigir corriente arriba para ir recto a través del río.

Analizar Ahora el análisis involucra el nuevo triángulo que se muestra en la figura 4.21b. Como en el inciso (A), se conoce $\vec{\mathbf{v}}_{rE}$ y la magnitud del vector $\vec{\mathbf{v}}_{br}$ y se quiere que $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$ se dirija a través del río. Note la diferencia entre el triángulo de la figura 4.21a y el de la figura 4.21b: la hipotenusa de la figura 4.21b ya no es $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$.

Aplique el teorema de Pitágoras para hallar v_{bE}:

$$v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 - v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0\ \text{km/h})^2 - (5.00\ \text{km/h})^2} = 8.66\ \text{km/h}$$

Encuentre la dirección en la que se dirige el bote:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{bE}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{8.66}\right) = 30.0°$$

Finalizar El bote se debe dirigir corriente arriba de modo que viaje directamente hacia el Norte a través del río. Para la situación que se conoce, el bote debe dirigirse 30.0° al noroeste. Para corrientes más rápidas, el bote se debe dirigir corriente arriba en ángulos mayores.

¿QUÉ PASARÍA SI? Considere que los dos botes de los incisos (A) y (B) compiten al cruzar el río. ¿Cuál bote llega primero a la orilla opuesta?

Respuesta En el inciso (A), la velocidad de 10 km/h se dirige directamente a través del río. En el inciso (B), la velocidad que se dirige a través del río tiene una magnitud de sólo 8.66 km/h. Por lo tanto, el bote del inciso (A) tiene una componente de velocidad mayor directamente a través del río y llega primero.

Resumen

Definiciones

El **vector desplazamiento** $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ para una partícula es la diferencia entre su vector de posición final y su vector de posición inicial:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} \equiv \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i \tag{4.1}$$

La **velocidad promedio** de una partícula durante el intervalo de tiempo Δt se define como el desplazamiento de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{\mathbf{v}}_{prom} \equiv \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} \tag{4.2}$$

La **velocidad instantánea** de una partícula se define como el límite de la velocidad promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \tag{4.3}$$

La **aceleración promedio** de una partícula se define como el cambio en su vector velocidad instantánea dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i}{t_f - t_i} \tag{4.4}$$

La **aceleración instantánea** de una partícula se define como el valor límite de la aceleración promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \tag{4.5}$$

El **movimiento de proyectil** es una clase de movimiento en dos dimensiones, exhibido por un objeto que se lanza al aire cerca de la superficie de la Tierra y experimenta caída libre. Este movimiento común se puede analizar mediante la aplicación de la partícula bajo el modelo de velocidad constante para el movimiento del proyectil en la dirección x y la partícula bajo el modelo de aceleración constante ($a_y = -g$) en la dirección y.

Una partícula que se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante exhibe **movimiento circular uniforme**.

Conceptos y principios

Si una partícula se mueve con aceleración constante $\vec{\mathbf{a}}$ y tiene velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i$ y posición $\vec{\mathbf{r}}_i$ en $t = 0$, sus vectores velocidad y de posición en algún tiempo posterior t son

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t \tag{4.8}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2 \tag{4.9}$$

Para movimiento en dos dimensiones en el plano xy bajo aceleración constante, cada una de estas expresiones vectoriales es equivalente a dos expresiones componentes: una para el movimiento en la dirección x y otra para el movimiento en la dirección y.

Es útil pensar en el movimiento de proyectil en términos de una combinación de dos análisis de modelos: (1) la partícula bajo modelo de velocidad constante en la dirección x y (2) el modelo de partícula bajo aceleración constante en la dirección vertical con una aceleración descendente de magnitud $g = 9.80\ \text{m/s}^2$.

Una partícula en movimiento circular uniforme experimenta una aceleración radial $\vec{\mathbf{a}}_r$, puesto que la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ cambia en el tiempo. Esta aceleración se llama **aceleración centrípeta** y su dirección siempre es hacia el centro del círculo.

Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva en tal forma que tanto la magnitud como la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ cambian en el tiempo, la partícula tiene un vector aceleración que se puede describir mediante dos vectores componentes: (1) una componente del vector radial $\vec{\mathbf{a}}_r$ que causa el cambio en dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ y (2) una componente del vector tangencial $\vec{\mathbf{a}}_t$ que causa el cambio en la magnitud de $\vec{\mathbf{v}}$. La magnitud de $\vec{\mathbf{a}}_r$ es v^2/r y la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}_t$ es $|dv/dt|$.

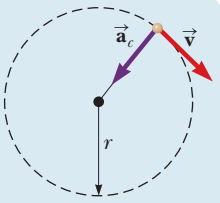
La velocidad $\vec{\mathbf{u}}_{PA}$ de una partícula medida en un marco de referencia fijo S_A se puede relacionar con la velocidad $\vec{\mathbf{u}}_{PB}$ de la misma partícula medida en un marco de referencia móvil S_B mediante

$$\vec{\mathbf{u}}_{PA} = \vec{\mathbf{u}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA} \tag{4.23}$$

donde $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ es la velocidad de S_B en relación con S_A.

Análisis de modelos para resolver problemas

Partícula en movimiento circular uniforme. Si una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio r con una rapidez constante v, la magnitud de su aceleración centrípeta está dada por



$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{4.14}$$

y el **periodo** del movimiento de la partícula está dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{4.15}$$

La **rapidez angular** de la partícula es

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{4.16}$$

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. La figura PO4.1 muestra una imagen desde el aire de un automóvil que entra a una curva de una autopista. Conforme el automóvil se mueve del punto 1 al punto 2, su rapidez se duplica. ¿Cuál vector, del (a) al (e), muestra la dirección de la aceleración promedio del automóvil entre estos dos puntos?

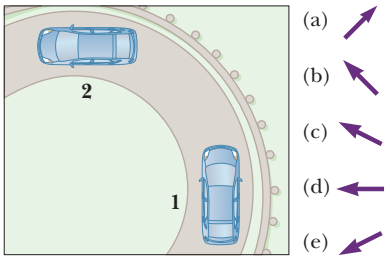


Figura PO4.1

2. Al entrar a su dormitorio, un estudiante lanza su mochila hacia arriba a la derecha con un ángulo de 45° con la horizontal (figura PO4.2). La resistencia del aire no afecta la mochila. Se mueve del punto Ⓐ inmediatamente después de dejar su mano, al punto Ⓑ en lo alto de su vuelo y al punto Ⓒ inmediatamente antes de aterrizar en su cama. (i) Ordene las siguientes componentes de velocidad horizontal y vertical de la más grande a la más pequeña. (a) $v_{Ⓐx}$, (b) $v_{Ⓐy}$, (c) $v_{Ⓑx}$, (d) $v_{Ⓑy}$, (e) $v_{Ⓒy}$. Note que cero es más grande que un número negativo. Si dos cantidades son iguales, muéstrelas como iguales en su lista. Si cualquier cantidad es igual que cero, muestre ese hecho en su lista. (ii) De igual modo, ordene las siguientes componentes de aceleración. (a) $a_{Ⓐx}$, (b) $a_{Ⓐy}$, (c) $a_{Ⓑx}$, (d) $a_{Ⓑy}$, (e) $a_{Ⓒy}$.

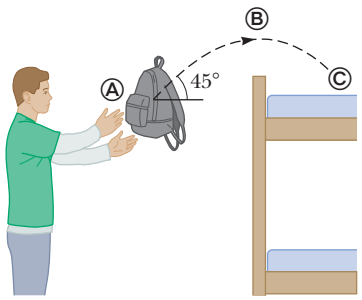


Figura PO4.2

3. Un estudiante lanza una pesada pelota roja horizontalmente desde un balcón de un edificio con una rapidez inicial v_i. Al mismo tiempo, un segundo estudiante deja caer una ligera pelota azul desde el balcón. Despreciando la resistencia del aire, ¿qué enunciado es verdadero? (a) La pelota azul llega primero al suelo. (b) Las pelotas llegan al suelo en el mismo instante. (c) La bola roja llega primero al suelo. (d) Ambas bolas pegan en el suelo con la misma rapidez. (e) Ninguno de los enunciados del (a) al (d) es verdadero.

4. Un proyectil se lanza sobre la Tierra con cierta velocidad inicial y se mueve sin resistencia del aire. Otro proyectil se lanza con la misma velocidad inicial en la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es 1/6 de g. ¿Cuál es la altitud máxima del proyectil en la Luna comparada con la del proyectil en la Tierra? (a) 1/6, (b) el mismo, (c) $\sqrt{6}$ veces, (d) 6 veces, (e) 36 veces.

5. ¿Un auto en movimiento alrededor de una pista circular con rapidez constante tiene (a) aceleración cero, (b) una aceleración en la dirección de su velocidad, (c) una aceleración dirigida lejos del centro de su trayectoria, (d) una aceleración dirigida hacia el centro de su trayectoria o (e) una aceleración con una dirección que no puede determinarse a partir de la información proporcionada?

6. Un astronauta golpea una pelota de golf en la Luna. ¿Cuál de las siguientes cantidades, si hay alguna, permanece constante conforme la bola recorre el vacío allí? (a) rapidez (b) aceleración (c) componente horizontal de la velocidad (d) componente vertical de la velocidad (e) velocidad.

7. Un proyectil se lanza sobre la Tierra con cierta velocidad inicial y se mueve sin resistencia del aire. Otro proyectil se lanza con la misma velocidad inicial en la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es 1/6 de g. ¿Cuál es el alcance del proyectil en la Luna comparado con el del proyectil en la Tierra? (a) 1/6, (b) el mismo, (c) $\sqrt{6}$ veces, (d) 6 veces, (e) 36 veces.

8. Una niña, que se mueve a 8 m/s sobre patines de ruedas, rebasa a un niño que se mueve a 5 m/s conforme ambos patinan en línea recta. El niño lanza una bola hacia atrás, hacia la niña, y le da una rapidez de 12 m/s en relación con él. ¿Cuál es la rapidez de la bola en relación con la niña, quien la atrapa? (a) (8 + 5 + 12) m/s, (b) (8 − 5 − 12) m/s, (c) (8 + 5 − 12) m/s, (d) (8 − 5 + 12) m/s, (e) (−8 + 5 + 12) m/s.

9. Un marinero deja caer una llave desde la parte superior del mástil vertical de un velero mientras el barco se mueve rápidamente y constantemente hacia adelante. ¿A dónde caerá la llave en la cubierta? (a) por delante de la base del mástil (b) en la base del mástil (c) detrás de la base del mástil (d) en el lado por donde sopla el viento en la base del mástil (e) ninguna de las opciones de (a) a (d) es verdadera.

10. Una pelota de béisbol es lanzada desde el jardín hacia el receptor. Cuando la pelota llega a su punto más alto, ¿qué enunciado es verdadero? (a) su velocidad y su aceleración son ambos cero (b) su velocidad no es cero, pero su aceleración es cero (c) su velocidad es perpendicular a su aceleración (d) su aceleración depende del ángulo en el que la pelota fue lanzada (e) ninguno de los enunciados del (a) al (d) es verdadero

11. Un juego de llaves en el extremo de una cuerda se hace pivotar constantemente en un círculo horizontal. En un intento, se mueve con rapidez v en un círculo de radio r. En un segundo intento, se mueve con mayor rapidez $4v$ en un círculo de radio $4r$. En el segundo intento, ¿cómo se compara el periodo de su movimiento con el periodo del primer ensayo? (a) es igual (b) es 4 veces mayor (c) es 1/4 parte (d) es 16 veces mayor (e) es 1/16.

12. Un tapón de goma en el extremo de una cuerda se balancea de manera estable en un círculo horizontal. En un intento, se mueve con rapidez v en un círculo de radio r. En un segundo intento, se mueve con una mayor rapidez $3v$ en un círculo de radio $3r$. ¿En este segundo intento, su aceleración es (a) la misma que en el primer intento, (b) tres veces mayor, (c) un tercio, (d) nueve veces mayor, (e) un noveno?

13. ¿En cuál de las siguientes situaciones es el objeto en movimiento modelado apropiadamente como un proyectil? Seleccione todas las respuestas correctas. (a) Se arroja un zapato en una dirección arbitraria. (b) Un avión que cruza el cielo con sus motores empuja el avión hacia adelante. (c) Un cohete sale de la plataforma de lanzamiento. (d) Un cohete se mueve a través del cielo, en mucho menos que la rapidez del sonido, después de que su combustible se ha consumido. (e) Un buzo tira una piedra bajo el agua.

14. Un camión ligero entra a una curva que tiene un radio de 150 m con una rapidez máxima de 32.0 m/s. Para tener la misma aceleración, ¿a qué rapidez máxima puede ir alrededor de una curva que tiene un radio de 75.0 m? (a) 64 m/s, (b) 45 m/s, (c) 32 m/s, (d) 23 m/s, (e) 16 m/s

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Una nave espacial se desplaza en el espacio con una velocidad constante. De súbito, una fuga de gas lateral de la nave le da una aceleración constante en una dirección perpendicular a la velocidad inicial. La orientación de la nave no cambia, así que la aceleración permanece perpendicular a la dirección original de la velocidad. ¿Cuál es la forma de la trayectoria seguida por la nave en esta situación?

2. Una patinadora sobre hielo ejecuta una figura de ocho, que consiste en dos trayectorias circulares iguales y tangentes. A lo largo de la primera trayectoria aumenta su rapidez uniformemente, y durante la segunda se mueve con una rapidez constante. Dibuje un diagrama de movimiento que muestre sus vectores velocidad y aceleración en varios puntos a lo largo de la trayectoria de movimiento.

3. Si usted conoce los vectores de posición de una partícula en dos puntos, a lo largo de su trayectoria, y también conoce el intervalo de tiempo durante el que se mueve de un punto al otro, ¿puede determinar la velocidad instantánea de la partícula? ¿Su velocidad promedio? Explique.

4. Describa cómo un conductor puede dirigir un automóvil que viaja con rapidez constante de modo que (a) la aceleración sea cero o (b) la magnitud de la aceleración permanezca constante.

5. Un proyectil es lanzado a cierto ángulo de la horizontal con una rapidez inicial v_i y resistencia del aire despreciable. (a) ¿El proyectil es un cuerpo en caída libre? (b) ¿Cuál es su aceleración en la dirección vertical? (c) ¿Cuál es su aceleración en la dirección horizontal?

6. Construya diagramas de movimiento que muestren la velocidad y la aceleración de un proyectil en varios puntos a lo largo de su trayectoria, si supone que (a) el proyectil se lanza horizontalmente y (b) el proyectil se lanza en un ángulo θ con la horizontal.

7. Explique si las siguientes partículas tienen o no una aceleración: (a) una partícula que se mueve en línea recta con rapidez constante y (b) una partícula que se mueve alrededor de una curva con rapidez constante.

Problemas

1. sencillo; 2. intermedio; 3. desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

1. Un motociclista se dirige al Sur a 20.0 m/s durante 3.00 min, luego da vuelta al Oeste y viaja a 25.0 m/s durante 2.00 min y finalmente viaja al noroeste a 30.0 m/s durante 1.00 min. Para este viaje de 6.00 min, encuentre (a) el desplazamiento vectorial total, (b) la rapidez promedio y (c) la velocidad promedio. Sea el eje x positivo que apunta al Este.

2. Cuando el Sol está directamente arriba, un halcón se clava hacia el suelo con una velocidad constante de 5.00 m/s a 60.0° bajo la horizontal. Calcule la rapidez de su sombra a nivel del suelo.

3. Supongamos que el vector de posición de una partícula está dado como una función del tiempo por $\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}}$, con $x(t) = at + b$ y $(y)t = ct^2 + d$, donde $a = 1.00$ m/s, $b = 1.00$ m, $c = 0.125$ m/s^2 y $d = 1.00$ m. (a) Calcule la velocidad promedio durante el intervalo de tiempo de $t = 2.00$ s a $t = 4.00$ s. (b) Determine la velocidad y la rapidez en $t = 2.00$ s.

4. Las coordenadas de un objeto que se mueve en el plano xy varían con el tiempo de acuerdo con $x = -5.00 \operatorname{sen} \omega t$ y $y = 4.00 - 5.00 \cos \omega t$, donde ω es una constante, x y y están en metros y t está en segundos. (a) Determine las componentes de velocidad del objeto en $t = 0$. (b) Determine las componentes de la aceleración del objeto en $t = 0$. (c) Escriba expresiones para el vector de posición, el vector velocidad y el vector aceleración del objeto en cualquier tiempo $t > 0$. (d) Describa la trayectoria del objeto en una gráfica xy.

5. Una bola de golf es golpeada con un tee en el borde de un risco. Sus coordenadas x y y como funciones del tiempo están dadas por las expresiones siguientes: $x = 18.0t$ y $y = 4.00t + 4.90t^2$ donde x y y están en metros y t en segundos. (a) Escriba una expresión vectorial para la posición de la bola como función del tiempo, con los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$. Al tomar derivadas, obtenga expresiones para (b) el vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ como función del tiempo y (c) el vector aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ como función del tiempo. (d) A continuación use la notación de vector unitario para escribir expresiones para la posición, la velocidad y la aceleración de la bola de golf, todas en $t = 3.00$ s.

Sección 4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante

6. Una partícula que inicialmente se ubica en el origen tiene una aceleración de $\vec{\mathbf{a}} = 3.00\hat{\mathbf{j}}$ m/s^2 y una velocidad inicial de $\vec{\mathbf{v}}_i = 5.00\hat{\mathbf{i}}$ m/s^2. Encuentre (a) el vector de posición de la partícula en cualquier tiempo t, (b) la velocidad de la partícula en cualquier tiempo t, (c) las coordenadas de la partícula en $t = 2.00$ s y (d) la rapidez de la partícula en $t = 2.00$ s.

7. El vector de posición de una partícula varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $\vec{\mathbf{r}} = 3.00\hat{\mathbf{i}} - 6.00t^2\hat{\mathbf{j}}$, donde $\vec{\mathbf{r}}$ está en metros y t en segundos. (a) Encuentre una expresión para la velocidad de la partícula como función del tiempo. (b) Determine la aceleración de la partícula como función del tiempo. (c) Calcule la posición y velocidad de la partícula en $t = 1.00$ s.

8. No es posible ver objetos muy pequeños, tales como virus, utilizando un microscopio óptico ordinario. Sin embargo, con un microscopio electrónico pueden verse estos objetos utilizando un haz de electrones en lugar de un haz de luz. La microscopia electrónica ha demostrado ser invaluable para la investigación de virus, membranas celulares y estructuras subcelulares, superficies bacterianas, receptores visuales, cloroplastos y propiedades contráctiles de los músculos. Las "lentes" de un microscopio electrónico consisten de campos eléctricos y magnéticos que controlan el haz de electrones. Como ejemplo de la manipulación de un haz de electrones, considere un electrón viajando lejos del origen en el eje x en el plano xy con velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_i = v_i\hat{\mathbf{i}}$. Al pasar por la región de $x = 0$ a $x = d$, el electrón experimenta aceleración $\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$, donde a_x y a_y son constantes. Para el caso $v_i = 1.80 \times 10^7$ m/s, $a_x = 8.00 \times 10^{14}$ m/s^2 y $a_y = 1.60 \times 10^{15}$ m/s^2, determine en $x = d = 0.010\ 0$ m: (a) la posición del electrón, (b) la velocidad del electrón, (c) la rapidez del electrón y (d) la dirección de desplazamiento del electrón (es decir, el ángulo entre su velocidad y el eje de x).

9. Un pez que nada en un plano horizontal tiene velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i = (4.00\hat{\mathbf{i}} + 1.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s en un punto en el océano donde la posición relativa a cierta roca es $\vec{\mathbf{r}}_i = (10.0\hat{\mathbf{i}} - 4.00\hat{\mathbf{j}})$ m. Después que el pez nada con aceleración constante durante 20.0 s, su velocidad es $\vec{\mathbf{v}} = (20.0\hat{\mathbf{i}} - 5.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. (a) ¿Cuáles son las componentes de la aceleración del pez? (b) ¿Cuál es la dirección de su aceleración respecto del vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$? (c) Si el pez mantiene aceleración constante, ¿dónde está en $t = 25.0$ s y en qué dirección se mueve?

10. **Problema de repaso.** Una moto de nieve está originalmente en el punto con el vector de posición 29.0 m a 95.0° medidos en sentido contrario a las manecillas con el eje x, moviéndose con velocidad 4.50 m/s a 40.0°. Se mueve con aceleración constante 1.90 m/s^2 a 200°. Después que han transcurrido 5.00 s, encuentre (a) su velocidad y (b) su vector de posición.

Sección 4.3 Movimiento de proyectil

Nota: En todos los problemas ignore la resistencia del aire y tome $g = 9.80$ m/s^2 en la superficie de la Tierra.

11. Los reyes mayas y muchos equipos de deportes de la escuela se llaman puma, puma concolor o león de montaña; el *Felis concolor* es el mejor saltador entre los animales. Puede saltar a una altura de 12.0 ft cuando sale del suelo con un ángulo de 45.0°. ¿Con qué rapidez, en unidades SI, sale del suelo para dar este salto?

12. Un astronauta en un planeta extraño encuentra que puede saltar una distancia máxima horizontal de 15.0 m si su rapidez inicial es de 3.00 m/s. ¿Cuál es la aceleración en caída libre en el planeta?

13. En un bar local, un cliente desliza sobre la barra un tarro de cerveza vacío para que lo vuelvan a llenar. La altura de la barra es de 1.22 m. El cantinero está momentáneamente distraído y no ve el tarro, que se desliza de la barra y golpea el suelo a 1.40 m de la base de la barra. (a) ¿Con qué velocidad el tarro dejó la barra? (b) ¿Cuál fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de golpear el suelo?

14. En un bar local, un cliente desliza sobre la barra un tarro de cerveza vacío para que lo vuelvan a llenar. La altura de la barra es h. El cantinero está momentáneamente distraído y no ve el tarro, que se desliza de la barra y golpea el suelo a d de la base de la barra. (a) ¿Con qué velocidad el tarro dejó la barra? (b) ¿Cuál fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de golpear el suelo?

15. Un proyectil se dispara en tal forma que su alcance horizontal es igual a tres veces su altura máxima. ¿Cuál es el ángulo de proyección?

16. Para iniciar una avalancha en una pendiente de la montaña, un obús de artillería es disparado con una velocidad inicial de 300 m/s a 55.0° sobre la horizontal. Explota en la ladera 42.0 s después de ser disparado. ¿Cuáles son las coordenadas x y y donde explota el obús, en relación con su punto de disparo?

17. Los salmones reales son capaces de moverse a través del agua especialmente rápido saltando fuera del agua periódicamente. Este comportamiento se llama *delfineo*. Suponga que un salmón que está nadando en agua salta fuera del agua con una velocidad de 6.26 m/s a 45.0° sobre la horizontal, navega por el aire una distancia L antes de volver al agua y luego nada la misma distancia L bajo el agua en una línea recta horizontal con velocidad 3.58 m/s antes de saltar de nuevo. (a) Determine la velocidad promedio de los peces para todo el proceso de saltar y nadar bajo el agua. (b) Considere el intervalo de tiempo requerido para viajar toda la distancia $2L$. ¿En qué porcentaje se reduce por el proceso de salto/natación este intervalo de tiempo en comparación con simplemente nadar bajo el agua a 3.58 m/s?

18. Una roca se lanza hacia arriba desde el suelo de tal forma que la altura máxima de su vuelo es igual a su alcance horizontal R. (a) ¿A qué ángulo θ se lanza la roca? (b) En términos del alcance original R, ¿cuál es el alcance $R_{máx}$ que

puede lograr la roca si se lanza a la misma rapidez pero en ángulo óptimo para alcance máximo? (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Su respuesta al inciso (a) cambiaría si la roca se lanza con la misma rapidez en un planeta diferente? Explique.

19. La rapidez de un proyectil cuando alcanza su máxima altura es la mitad de su velocidad cuando está en la mitad de su altura máxima. ¿Cuál es el ángulo de proyección inicial del proyectil?

20. Una pelota se lanzó desde una ventana del piso superior de un edificio. A la pelota se le dio una velocidad inicial de 8.00 m/s en un ángulo de 20.0° por debajo de la horizontal. Golpea el suelo 3.00 s más tarde. (a) ¿A qué distancia horizontalmente desde la base del edificio la bola pega en el suelo? (b) Encuentre la altura desde la que se lanzó el balón. (c) ¿Cuánto tiempo tarda el balón para llegar a un punto 10.0 m por debajo del nivel de lanzamiento?

21. Un bombero, a una distancia d de un edificio en llamas, dirige un chorro de agua desde una manguera en un ángulo θ_i sobre la horizontal, como se muestra en la figura P4.21. Si la rapidez inicial del chorro es v_i, ¿en qué altura h el agua golpea al edificio?

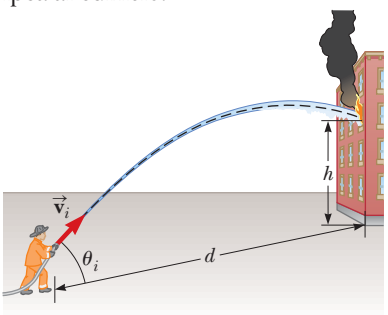


Figura P4.21

22. Una arquitecta que diseña jardines programa una cascada artificial en un parque de la ciudad. El agua fluirá a 1.70 m/s y dejará el extremo de un canal horizontal en lo alto de una pared vertical h = 2.35 m de altura, y desde ahí caerá en una piscina. (a) ¿El espacio detrás de la cascada será suficientemente ancho para un pasillo de peatones? (b) Para vender su plan al concejo de la ciudad, la arquitecta quiere construir un modelo a escala estándar a un doceavo del tamaño real. ¿Qué tan rápido debe fluir el agua en el canal del modelo?

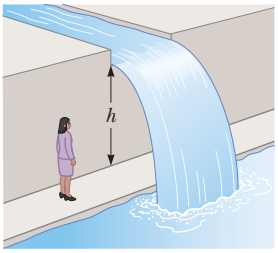


Figura P4.22

23. Un pateador debe hacer un gol de campo desde un punto a 36.0 m (casi de 40 yardas) de la zona de meta, y la mitad de los espectadores espera que la pelota libre la barra transversal, que tiene 3.05 m de alto. Cuando se patea, la pelota deja el suelo con una rapidez de 20.0 m/s en un ángulo de 53.0° de la horizontal. (a) ¿Por cuánto libra o queda corta la pelota de librar la barra? (b) ¿La pelota se aproxima a la barra transversal mientras aún se eleva o mientras va de caída?

24. Una estrella de basquetbol recorre horizontalmente 2.80 m en un salto para encestar la bola (figura P4.24a). Su movimiento a través del espacio se representa igual que el de una partícula en su *centro de masa*, que se definirá en el capítulo 9. Su centro de masa está a una altura de 1.02 m cuando deja el suelo. Llega a una altura máxima de 1.85 m sobre el suelo y está a una elevación de 0.900 m cuando toca el suelo de nuevo. Determine: (a) su tiempo de vuelo (su "tiempo colgado"), sus componentes de velocidad (b) horizontal, (c) la vertical en el instante de despegar y (d) su ángulo de despegue. (e) Por comparación, determine el tiempo colgado de una ciervo cola blanca que da un salto (figura P4.24b) con elevaciones de centro de masa y_i = 1.20 m, $y_{máx}$ = 2.50 m y y_f = 0.700 m.



© epa european pressphoto agency b.v. / Alamy



B. G. Smith/Shutterstock.com

a b

Figura P4.24

25. Un patio de juego está en el techo plano de una escuela 6.00 m arriba del nivel de la calle (figura P4.25). La pared vertical del edificio tiene h = 7.00 m de alto y forma una barda de 1 m de alto alrededor del patio. Una bola cae en la calle y un peatón la regresa lanzándola en un ángulo de θ = 53.0° sobre la horizontal a un punto d = 24.0 m desde la base de la pared del edificio. La bola tarda 2.20 s en llegar a un punto vertical sobre la pared. (a) Encuentre la rapidez a la que se lanzó la bola. (b) Determine la distancia vertical sobre la que libra la pared. (c) Encuentre la distancia desde la pared al punto en el techo donde aterriza la bola.

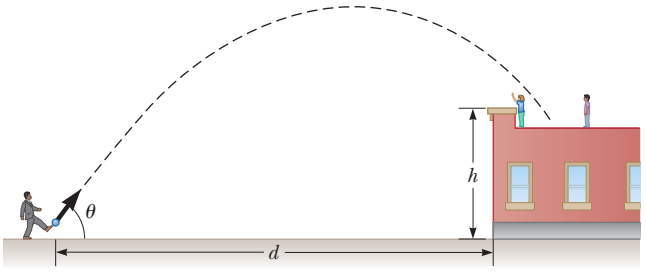


Figura P4.25

26. El movimiento de un cuerpo humano a través del espacio se representa como el movimiento de una partícula en el centro de masa del cuerpo, como se estudiará en el capítulo 9. Las componentes del desplazamiento del centro de masa de un atleta desde el principio hasta el fin de cierto salto se describen por las dos ecuaciones

$$x_f = 0 + (11.2\ \text{m/s})(\cos 18.5°)t$$

$$0.360\ \text{m} = 0.840\ \text{m} + (11.2\ \text{m/s})(\text{sen}\ 18.5°)t - \tfrac{1}{2}(9.80\ \text{m/s}^2)t^2$$

donde t es el tiempo en segundos en el cual el atleta aterriza. Identifique (a) la posición del atleta y (b) su vector velocidad en el punto de despegue. (c) ¿Qué distancia saltó el atleta?

27. Un jugador de futbol patea una roca horizontalmente desde un montículo de 40.0 m de alto hacia un estanque.

Si el jugador escucha el sonido del chapoteo 3.00 s después, ¿cuál fue la rapidez inicial dada a la roca? Suponga que la rapidez del sonido en el aire es 343 m/s.

28. Un proyectil es disparado desde lo alto de un acantilado de altura h sobre el océano. El proyectil se disparó a un ángulo θ por encima de la horizontal y con una velocidad inicial de v_i. (a) Encuentre una expresión simbólica en términos de las variables v_i, g y θ para el tiempo en que el proyectil alcanza la altura máxima. (b) Utilizando el resultado del inciso (a), encuentre una expresión para la altura máxima $h_{máx}$ sobre el océano alcanzada por el proyectil en términos de h, v_i, g y θ.

29. Un estudiante se encuentra de pie en el borde de un acantilado y lanza una piedra horizontalmente sobre el borde con una velocidad de v_i = 18.0 m/s. El acantilado tiene h = 50.0 m arriba del agua, como se muestra en la figura P4.29. (a) ¿Cuáles son las coordenadas de la posición inicial de la piedra? (b) ¿Cuáles son las componentes de la velocidad inicial de la piedra? (c) ¿Cuál es el análisis de modelo adecuado para el movimiento vertical de la piedra? (d) ¿Cuál es el análisis de modelo adecuado para el movimiento horizontal de la piedra? (e) Escriba ecuaciones simbólicas para las componentes x y y de la velocidad de la piedra como una función del tiempo. (f) Escriba ecuaciones simbólicas para la posición de la piedra como una función del tiempo. (g) ¿Cuánto tiempo después de ser lanzada la piedra golpeó el agua debajo del acantilado? (h) ¿Con qué velocidad y ángulo de impacto pegó la piedra?

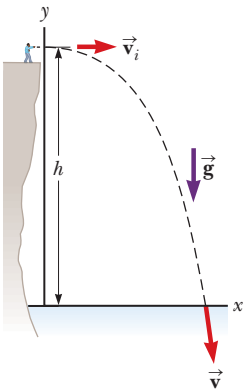


Figura P4.29

30. La distancia récord en el deporte de lanzar discos es de 81.1 m. Este lanzamiento de discos fue establecido por Steve Urner, de Estados Unidos, en 1981. Suponiendo que el ángulo de lanzamiento inicial fue de 45° y despreciando la resistencia del aire, determine (a) la velocidad inicial del proyectil y (b) el intervalo de tiempo total que voló el proyectil. (c) ¿Cómo cambiaría las respuestas si el alcance fuera el mismo pero el ángulo de lanzamiento fuera mayor que 45°. Explique.

31. Un niño está parado en un trampolín y lanza una piedra a una piscina. La piedra es lanzada desde una altura de 2.50 m sobre la superficie del agua con una velocidad de 4.00 m/s en un ángulo de 60.0° sobre la horizontal. Cuando la piedra pega en la superficie del agua, inmediatamente disminuye su rapidez a la mitad de la que tenía cuando pegó en el agua y mantiene esa rapidez en el agua. Después que la piedra entra en el agua, se mueve en línea recta en la dirección de la velocidad que tenía cuando golpeó el agua. Si la piscina es de 3.00 m de profundidad, ¿cuánto tiempo transcurre entre cuando se lanza la piedra y cuando pega en el fondo de la piscina?

32. Se hace un jonrón al pegarle a la pelota de béisbol de manera que libre una pared de 21.0 m de alto, situada a 130 m de la base de home. La bola es golpeada con un ángulo de 35.0° con la horizontal, y se desprecia la resistencia del aire. Encuentre (a) la rapidez inicial de la bola, (b) el tiempo que tarda la bola en llegar a la pared y (c) las componentes de la velocidad y la rapidez de la bola cuando llega a la pared. (Suponga que la bola es golpeada a una altura de 1.00 m del suelo).

Sección 4.4 Análisis de modelo: partícula en movimiento circular uniforme

Nota: Los problemas 6 y 13 del capítulo 6 se pueden asignar también en esta sección.

33. El atleta que se muestra en la figura P4.33 rota un disco de 1.00 kg a lo largo de una trayectoria circular de 1.06 m de radio. La rapidez máxima del disco es 20.0 m/s. Determine la magnitud de la aceleración radial máxima del disco.


Adrian Dennis/AFP/Getty Images

Figura P4.33

34. En el ejemplo 4.6 encontramos la aceleración centrípeta de la Tierra cuando gira alrededor del Sol. A partir de la información de la parte final del libro, calcule la aceleración radial de un punto en la superficie de la Tierra, en el Ecuador, debido a la rotación de la Tierra sobre su eje.

35. El metal fundido es importante en muchos procesos industriales. Se utiliza *fundición centrífuga* en la fabricación de tuberías, cojinetes y muchas otras estructuras. Se ha inventado una variedad de técnicas sofisticadas, pero la idea básica es la que se muestra en la figura P4.35. Un recinto cilíndrico gira rápida y constantemente sobre un eje horizontal. Se vierte metal fundido en el cilindro giratorio y luego se enfría, formando así el producto terminado. El girar el cilindro a una rapidez de rotación alta obliga a que el metal se solidifique fuertemente en el exterior. Las burbujas se desplazan hacia el eje, así no habrán huecos no deseados en el fundido. A veces se quiere formar un compuesto fundido, como para un cojinete. Ahí se vierte un fuerte acero en la superficie exterior y después dentro un revestimiento de metal especial de baja fricción. En algunas aplicaciones, a un metal muy fuerte se le da una capa de metal resistente a la corrosión. La fundición centrífuga da como resultado una fuerte unión entre las capas.

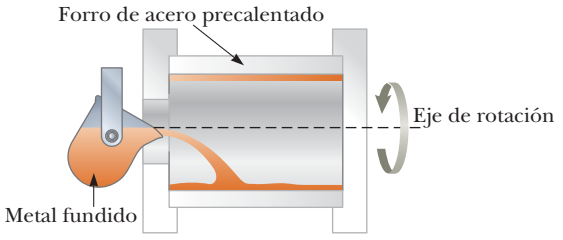


Figura P4.35

Supongamos que una camisa de cobre de radio interior 2.10 cm y radio exterior 2.20 cm va a ser fundida. Para eliminar las burbujas y dar alta integridad estructural, la aceleración centrípeta de cada pedacito de metal debe ser al menos de 100*g*. ¿Qué rapidez de rotación es necesaria? Establezca la respuesta en revoluciones por minuto.

36. Un neumático de 0.500 m de radio gira a una rapidez constante de 200 rev/min. Encuentre la rapidez y la aceleración de una pequeña piedra atascada en la banda de rodadura de los neumáticos (en su borde exterior).

37. **Problema de repaso.** La centrifugadora 20-*g* en el centro de investigación Ames de la NASA en Mountain View, California, es un tubo cilíndrico horizontal de 58.0 ft de largo y está representada en la figura P4.37. Suponga que un astronauta en entrenamiento se sienta en un asiento en un extremo, hacia el eje de rotación a 29.0 ft. Determine la rapidez de rotación, en revoluciones por segundo, requerida para dar a los astronautas una aceleración centrípeta de 20.0*g*.

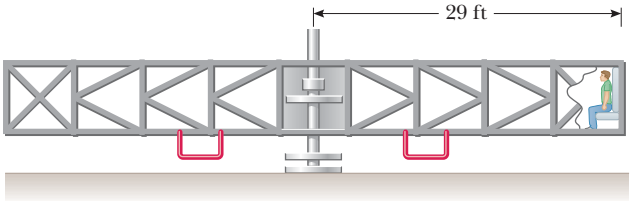


Figura P4.37

38. Un atleta batea una pelota, conectada al extremo de una cadena, en un círculo horizontal. El atleta es capaz de girar la bola con una rapidez de 8.00 rev/s cuando la longitud de la cadena es 0.600 m. ¿Cuando aumenta la longitud a 0.900 m, puede rotar la pelota sólo 6.00 rev/s. (a) ¿Cuál es la rapidez de rotación que da la mayor rapidez a la pelota? (b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la bola a 8.00 rev/s? (c) ¿Cuál es la aceleración centrípeta en 6.00 rev/s?

39. El astronauta que orbita a la Tierra en la figura P4.39 se está preparando para atracar con un satélite Westar VI. El satélite está en una órbita circular 600 km sobre la superficie de la Tierra, donde la aceleración de caída libre es 8.21 m/s^2. Tome el radio de la Tierra como 6 400 km: determine la rapidez del satélite y el intervalo de tiempo necesario para completar una órbita alrededor de la Tierra, que es el periodo del satélite.


NASA

Figura P4.39

Sección 4.5 Aceleraciones tangencial y radial

40. La figura P4.40 representa la aceleración total de una partícula que se mueve en el sentido de las manecillas del reloj en un círculo de 2.50 m de radio en cierto instante de tiempo. En este instante, encuentre (a) la aceleración radial de la partícula, (b) la rapidez de la partícula y (c) su aceleración tangencial.

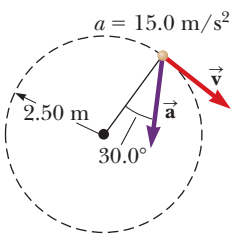


Figura P4.40

41. Un tren frena mientras entra a una curva horizontal cerrada, y frena de 90.0 km/h a 50.0 km/h en los 15.0 s que tarda en cubrir la curva. El radio de la curva es de 150 m. Calcule la aceleración en el momento que la rapidez del tren alcanza 50.0 km/h. Suponga que continúa frenando a este tiempo con la misma rapidez.

42. Una bola se balancea en un círculo vertical en el extremo de una cuerda de 1.50 m de largo. Cuando la bola está a 36.9° después del punto más bajo en su viaje hacia arriba, su aceleración total es $(-22.5\,\hat{\mathbf{i}} + 20.2\,\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2. En ese instante: (a) bosqueje un diagrama vectorial que muestre las componentes de su aceleración, (b) determine la magnitud de su aceleración radial y (c) determine la rapidez y velocidad de la bola.

43. (a) Una partícula que se mueve con rapidez instantánea de 3.00 m/s en una trayectoria con 2.00 m de radio de curvatura, ¿podría tener una aceleración de 6.00 m/s^2 de magnitud? (b) ¿Podría tener una aceleración de 4.00 m/s^2? En cada caso, si la respuesta es sí, explique cómo puede ocurrir; si la respuesta es no, explique por qué.

Sección 4.6 Velocidad y aceleración relativas

44. El piloto de un avión registra que la brújula indica un rumbo hacia el Oeste. La velocidad del avión respecto del aire es de 150 km/h. El aire se está moviendo con un viento de 30.0 km/h hacia el Norte. Encuentre la velocidad del avión en relación con el suelo.

45. Un avión mantiene una rapidez de 630 km/h en relación con el aire que está soplando mientras hace un viaje a una ciudad que está 750 km al Norte. (a) ¿Qué intervalo de tiempo es necesario para el viaje si el avión vuela a través de un viento que sopla a 35.0 km/h hacia el Sur? (b) ¿Qué intervalo de tiempo es necesario si hay viento de cola con la misma rapidez? (c) ¿Qué intervalo de tiempo es necesario si hay un viento que sopla a 35.0 km/h hacia el Este en relación con el suelo?

46. Una banda de transportación en un aeropuerto tiene una rapidez v_1 y una longitud L. Una mujer está parada en la banda conforme se mueve desde un extremo al otro, mientras un hombre con prisa camina para llegar a su vuelo con una velocidad de v_2 en relación con la banda de transportación. (a) ¿Qué intervalo de tiempo se requiere para que la mujer recorra la distancia L? (b) ¿Qué intervalo de tiempo es necesario para que el hombre recorra esta distancia? (c) Una segunda banda de transportación está situada junto a la primera. Es idéntica a la primera pero se mueve en dirección opuesta con velocidad v_1. Al mismo tiempo que el hombre empieza a caminar al inicio de la banda de transportación con rapidez v_2 en relación con su banda de transportación, un niño se para en la banda de transportación de al lado. El niño se encuentra en reposo en relación con esta segunda banda de transportación. ¿Cuánto tiempo después que se paró en la banda de transportación el hombre pasa al niño?

47. Una patrulla de policía que viaja a 95.0 km/h se mueve hacia el Oeste, persiguiendo a un automovilista que viaja a 80.0 km/h. (a) ¿Cuál es la velocidad de los automovilistas en relación con la patrulla? (b) ¿Cuál es la velocidad de la patrulla en relación con el automovilista? (c) Si originalmente están a una distancia de 250 m, ¿en qué intervalo de tiempo la patrulla rebasará al automovilista?

48. Un automóvil viaja hacia el Este con una rapidez de 50.0 km/h. Gotas de lluvia caen con una rapidez constante en vertical respecto de la Tierra. Las trazas de la lluvia en las ventanas laterales del automóvil forman un ángulo de 60.0° con la vertical. Encuentre la velocidad de la lluvia en relación con (a) el automóvil y (b) la Tierra.

49. Un tornillo cae desde el techo de un vagón de ferrocarril en movimiento que acelera hacia el Norte a razón de 2.50 m/s^2. (a) ¿Cuál es la aceleración del tornillo en relación con el vagón de ferrocarril? (b) ¿Cuál es la aceleración del tornillo en relación con la Tierra? (c) Describa la trayectoria del tornillo como la ve un observador dentro del vagón. (d) Describa la trayectoria del tornillo como la ve un observador fijo en la Tierra.

50. Un río tiene una rapidez estable de 0.500 m/s. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de 1.00 km y de regreso al punto de partida. (a) Si el estudiante puede nadar a una velocidad de 1.20 m/s en aguas tranquilas, ¿en cuánto tiempo hace el viaje? (b) ¿Cuánto tiempo se requiere para nadar la misma longitud? (c) Intuitivamente, ¿por qué tarda más nadando cuando hay corriente?

51. Un río tiene una rapidez estable v. Un estudiante nada corriente arriba una distancia d y de regreso al punto de partida. El estudiante puede nadar a una rapidez c en aguas tranquilas. (a) En términos de d, v y c, ¿en cuánto tiempo hace el viaje redondo? (b) ¿Cuánto tiempo requiere si las aguas están tranquilas? (c) ¿Qué intervalo de tiempo es más largo? Explique si siempre es más grande.

52. Un guardacostas detecta un barco no identificado a una distancia de 20.0 km en la dirección 15.0° al noreste. El barco viaja a 26.0 km/h en un curso a 40.0° al noreste. El guardacostas quiere enviar una lancha rápida para interceptar la nave e investigarla. Si la lancha rápida viaja a 50.0 km/h, ¿en qué dirección debe dirigirse? Exprese la dirección como una brújula que se orienta con el Norte.

53. Un estudiante de ciencias monta en un vagón plataforma de un tren que viaja a lo largo de una pista horizontal recta con una rapidez constante de 10.0 m/s. El estudiante lanza una bola en el aire a lo largo de una trayectoria que él juzga con un ángulo inicial de 60.0° sobre la horizontal y está en línea con la vía. La profesora del estudiante, que está de pie en el suelo cerca de ahí, observa que la bola se eleva verticalmente. ¿Qué tan alto ve elevarse la bola?

54. Un camión de granja se dirige al Este con una velocidad constante de 9.50 m/s en un tramo horizontal ilimitado del camino. Un niño se monta en la parte trasera del camión y lanza una lata de refresco hacia arriba (figura P4.54), y atrapa el proyectil en el mismo punto, pero 16.0 m más lejos en el camino. (a) Si el marco de referencia es el camión, ¿a qué ángulo con la vertical el niño lanza la lata? (b) ¿Cuál es la rapidez inicial de la lata en relación con el camión? (c) ¿Cuál es la forma de la trayectoria de la lata como la ve el niño? Un observador en el suelo observa al niño lanzar la lata y atraparla. En este marco de referencia, (d) describa la forma de la trayectoria de la lata y (e) determine la velocidad inicial de la lata.

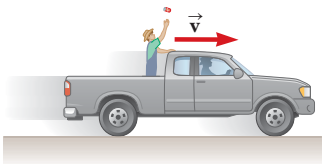


Figura P4.54

Problemas adicionales

55. Una bola en el extremo de una cuerda gira alrededor en un círculo horizontal de radio 0.300 m. El plano del círculo está a 1.20 m arriba del suelo. La cuerda se rompe y la bola aterriza a 2.00 m (horizontalmente) alejándose del punto sobre el suelo directamente debajo de la ubicación de la bola cuando se rompe la cuerda. Encuentre la aceleración radial de la pelota durante su movimiento circular.

56. Se lanza un balón con una rapidez inicial v_i en un ángulo θ_i con la horizontal. El alcance horizontal de la pelota es R, y la bola alcanza una altura máxima $R/6$. En términos de R y g, encuentre (a) el intervalo de tiempo durante el cual la bola está en movimiento, (b) la rapidez de la bola en la cima de su trayectoria, (c) la componente vertical de su velocidad inicial, (d) su rapidez inicial y (e) el ángulo θ_i. (f) Suponga que el balón es lanzado a la misma velocidad inicial que encontró en (d) pero en un ángulo apropiado para alcanzar la mayor altura que éste pueda. Determine esta altura. (g) Suponga que la bola se lanza con la misma rapidez inicial pero en un ángulo para el mayor alcance posible. Encuentre este alcance horizontal máximo.

57. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un adulto normalmente proporcionado camina enérgicamente a lo largo de una línea recta en la dirección de $+x$, parado y sosteniendo su brazo derecho vertical y junto a su cuerpo para que el brazo no se balancee. Su mano derecha sostiene una pelota a su lado a una distancia h arriba del piso. Cuando la pelota pasa por encima de un punto marcado como $x = 0$ en el piso horizontal, abre los dedos para soltar la bola a partir del reposo en relación con su mano. La pelota pega en el suelo por primera vez en la posición $x = 7.00h$.

58. Una partícula parte del origen con velocidad $5\hat{\mathbf{i}}$ m/s en $t = 0$ y se mueve en el plano xy con una aceleración variable dada por $\vec{\mathbf{a}} = (6\sqrt{t}\,\hat{\mathbf{j}})$, donde $\vec{\mathbf{a}}$ está en metros por segundo cuadrado y t está en segundos. (a) Determine la velocidad de la partícula como función del tiempo. (b) Determine la posición de la partícula como función del tiempo.

59. *El "cometa vómito".* Para el entrenamiento de astronautas y la prueba de equipo en gravedad cero, la NASA vuela un KC135A a lo largo de una trayectoria de vuelo parabólica. Como se muestra en la figura P4.59, la nave asciende desde 24 000 pies a 31 000 pies, donde entra a la parábola con una velocidad de 143 m/s y nariz alta a 45.0° y

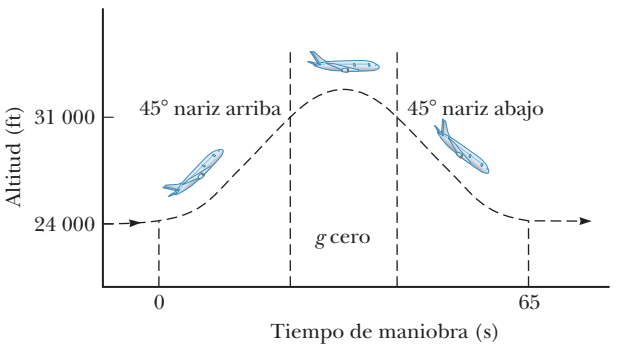


Figura P4.59

sale con velocidad de 143 m/s a 45.0° nariz baja. Durante esta porción del vuelo, la nave y los objetos dentro de su cabina acolchonada están en caída libre; los astronautas y el equipo flotan libremente como si no hubiera gravedad. ¿Cuáles son (a) la rapidez y (b) la altitud de la nave en lo alto de la maniobra? (c) ¿Cuál es el intervalo de tiempo que pasa en microgravedad cero?

60. Un jugador de baloncesto está de pie en el piso a 10.0 m de la canasta como en la figura P4.60. La altura de la cesta es de 3.05 m, y dispara la bola a un ángulo de 40.0° con la horizontal desde una altura a 2.00 m. (a) ¿Cuál es la aceleración de la pelota en el punto más alto en su trayectoria? (b) ¿Con qué rapidez debe el jugador lanzar la pelota para que pase por la canasta sin pegar en el tablero?

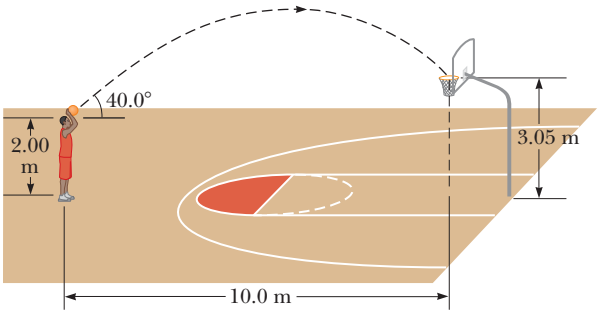


Figura P4.60

61. Lisa acelera en su Lamborghini a razón de $(3.00\hat{\mathbf{i}} - 2.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2, mientras que Jill acelera en su Jaguar a $(1.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2. Ambas empiezan a partir del reposo en el origen de un sistema de coordenadas *xy*. Después de 5.00 s, (a) ¿cuál es la rapidez de Lisa con respecto a Jill, (b) ¿a qué distancia están, y (c) ¿cuál es la aceleración de Lisa relativa a Jill?

62. Un chico tira una piedra horizontalmente desde la cima de un acantilado de altura h hacia el océano. La piedra golpea el océano a una distancia d desde la base del acantilado. En términos de h, d y g, encuentre expresiones para el tiempo t en que la piedra cae en el océano, (b) la rapidez inicial de la piedra, (c) la rapidez de la piedra justo antes de que llegue al océano y (d) la dirección de la velocidad de la piedra justo antes de que llegue al océano.

63. Una pulga está en el punto Ⓐ sobre un disco giratorio horizontal, a 10.0 cm del centro. El tocadiscos está girando a 33.3 rev/min en dirección de las manecillas del reloj. La pulga salta hacia arriba hasta una altura de 5.00 cm. En el despegue no tiene velocidad horizontal en relación con el tocadiscos. La pulga aterriza en el tocadiscos en el punto Ⓑ. Elija el origen de coordenadas en el centro del tocadiscos y el eje x positivo que pasa a través de Ⓐ en el momento del despegue. Entonces la posición original de la pulga es $10.0\hat{\mathbf{i}}$ cm. (a) Encuentre la posición del punto Ⓐ cuando aterriza la pulga. (b) Encuentre la posición del punto Ⓑ cuando aterriza la pulga.

64. Las ciudades A y B en la figura P4.64 están a una distancia de 80.0 km. Una persona se pone de acuerdo con su pareja en conducir desde la ciudad A y encontrarse con ella, que viene de la ciudad B, en el lago L. Los dos miembros de la pareja salen simultáneamente y conducen por 2.50 h en las direcciones que se muestra. El automóvil 1 tiene una rapidez de 90.0 km/h. Si los autos llegan simultáneamente al lago, ¿cuál es la velocidad del automóvil 2?

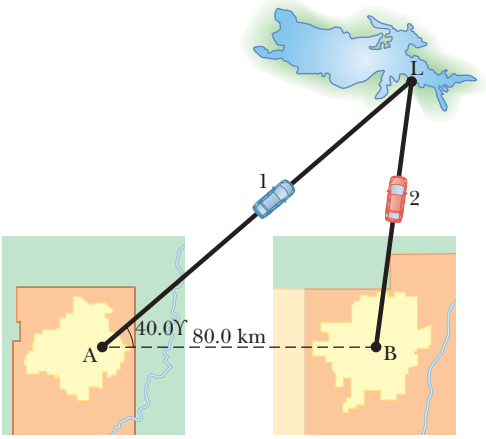


Figura P4.64

65. Una catapulta lanza un cohete en un ángulo de 53.0° sobre la horizontal con una rapidez inicial de 100 m/s. El motor de cohete empieza inmediatamente a propulsar y durante 3.00 s el cohete se mueve a lo largo de su línea inicial de movimiento con una aceleración de 30.0 m/s^2. Entonces su motor falla y el cohete procede a moverse en caída libre. Encuentre (a) la altura máxima alcanzada por el cohete, (b) su tiempo total de vuelo y (c) su alcance horizontal.

66. Se utiliza un cañón con una rapidez de boca de 1 000 m/s para iniciar una avalancha sobre la pendiente de una montaña. El objetivo está a 2 000 m desde el cañón horizontalmente y a 800 m arriba del cañón. ¿Con qué ángulo, por encima de la horizontal, se debe disparar el cañón?

67. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Albert Pujols hace un jonrón, de tal forma que la pelota libra la fila superior de las gradas, de 24.0 m de altura, situada a 130 m de la base de home. La bola es golpeada a 41.7 m/s en un ángulo de 35.0° con la horizontal, y la resistencia del aire es despreciable.

68. Mientras algún metal fundido salpica, una gota vuela hacia el Este con velocidad inicial v_i a un ángulo θ_i sobre la horizontal y otra gota vuela hacia el Oeste con la misma rapidez al mismo ángulo sobre la horizontal, como se muestra en la figura P4.68. En términos de v_i y θ_i, encuentre la distancia entre las gotas como función del tiempo.

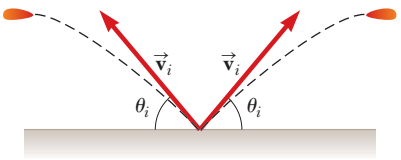


Figura P4.68

69. Un astronauta en la superficie de la Luna dispara un cañón para lanzar un paquete experimental, que deja el cañón con movimiento horizontal. Suponga que la aceleración de caída libre en la Luna es un sexto de la propia de la Tierra. (a) ¿Cuál debe ser la rapidez de boquilla del

paquete de modo que viaje completamente alrededor de la Luna y regrese a su ubicación original? (b) ¿Cuánto tarda este viaje alrededor de la Luna?

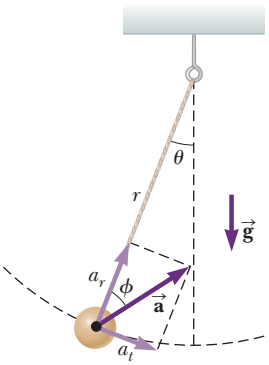


Figura P4.70

70. Un péndulo con un cordón de longitud $r = 1.00$ m se balancea en un plano vertical (figura P4.70). Cuando el péndulo está en las dos posiciones horizontales $\theta = 90.0°$ y $\theta = 270°$, su rapidez es 5.00 m/s. (a) Encuentre la magnitud de la aceleración radial y (b) la aceleración tangencial para estas posiciones. (c) Dibuje diagramas vectoriales para determinar la dirección de la aceleración total para estas dos posiciones. (d) Calcule la magnitud y dirección de la aceleración total en estas dos posiciones.

71. Un halcón vuela horizontalmente a 10.0 m/s en línea recta, a 200 m sobre el suelo. Un ratón que llevaba en sus garras se libera después de luchar. El halcón continúa en su ruta con la misma rapidez durante 2.00 s antes de intentar recuperar su presa, se clava en línea recta con rapidez constante y recaptura al ratón a 3.00 m sobre el suelo. (a) Si supone que la resistencia del aire no actúa sobre el ratón, encuentre la rapidez en picada del halcón. (b) ¿Qué ángulo formó el halcón con la horizontal durante su descenso? (c) ¿Durante cuánto tiempo el ratón experimentó la caída libre?

72. Se lanza un proyectil desde el punto $(x = 0, y = 0)$ con velocidad $(12.0\hat{\mathbf{i}} + 49.0\,\hat{\mathbf{j}})$ m/s en $t = 0$. (a) Tabule la distancia del proyectil $|\vec{\mathbf{r}}|$ desde el origen al final de cada segundo de allí en adelante, para $0 \leq t \leq 10$ s. También puede ser útil tabular las coordenadas x y y, y las componentes de velocidad v_x y v_y. (b) Observe que la distancia del proyectil desde su punto de partida aumenta con el tiempo, llega a un máximo y comienza a disminuir. Pruebe que la distancia es un máximo cuando el vector de posición es perpendicular a la velocidad. *Sugerencia*: argumente que si $\vec{\mathbf{v}}$ no es perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}$, entonces $|\vec{\mathbf{r}}|$ debe aumentar o disminuir. (c) Determine la magnitud de la distancia máxima. (d) Explique su método para resolver el inciso (c).

73. Un cañón de resorte se ubica en el borde de una mesa que está a 1.20 m sobre el suelo. Una bola de acero se lanza desde el cañón con rapidez v_i a 35.0° sobre la horizontal. (a) Encuentre la componente de desplazamiento horizontal de la bola al punto donde aterriza en el suelo como función de v_i. Esta función se escribe como $x(v_i)$. Evalúe x para (b) $v_i = 0.100$ m/s y para (c) $v_i = 100$ m/s. (d) Suponga que v_i está cerca de cero pero no es igual a cero. Muestre que un término en la respuesta al inciso (a) domina de modo que la función $x(v_i)$ se reduce a una forma más simple. (e) Si v_i es muy grande, ¿cuál es la forma aproximada de $x(v_i)$? (f) Describa la forma global de la gráfica de la función $x(v_i)$.

74. Un jardinero lanza una pelota de béisbol a su receptor en un intento de sacar un corredor del cuadro. La pelota rebota una vez antes de llegar al receptor. Suponga que el ángulo al que una pelota rebotada deja el suelo es el mismo que el ángulo al que el jardinero la lanzó, como se muestra en la figura P4.74, pero la rapidez de la pelota después del rebote es un medio de la que tenía antes del rebote. (a) Suponga que la pelota siempre se lanza con la misma rapidez inicial. ¿A qué ángulo θ el jardinero debe lanzar la pelota para hacer que recorra la misma distancia D con un rebote (trayectoria azul) que una bola lanzada hacia arriba a 45.0° sin rebote (trayectoria verde)? (b) Determine la razón del intervalo de tiempo para el lanzamiento de un rebote al tiempo de vuelo para el lanzamiento sin rebote.

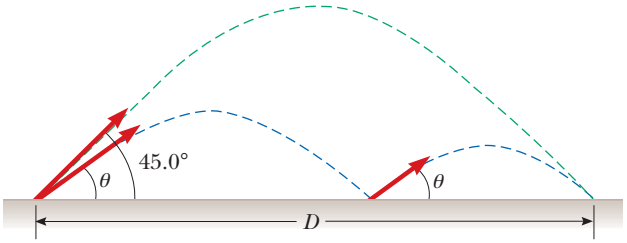


Figura P4.74

75. Un bombardero de la Segunda Guerra Mundial vuela horizontalmente sobre un terreno a nivel con una velocidad de 275 m/s en relación con la tierra y a una altitud de 3.00 km. El bombardero lanza una bomba. (a) ¿Qué distancia viaja la bomba horizontalmente entre su liberación y su impacto en el suelo? Ignore los efectos de la resistencia del aire. (b) El piloto mantiene el avión con su curso original, altitud y rapidez durante una tormenta de fuego antiaéreo. ¿Dónde está el avión cuando la bomba pega en el suelo? (c) La bomba pega en el blanco visto en el visor de bombardeo telescópico en el momento del lanzamiento de la bomba. ¿A qué ángulo con respecto a la vertical estaba el el visor de bombardeo?

76. Una camioneta cargada con melones se detiene súbitamente para evitar caer por el borde de un puente derrumbado (figura P4.76). El repentino frenado hace que algunos melones salgan volando de la camioneta. Un melón rueda sobre el borde con una rapidez inicial de $v_i = 10.0$ m/s en la dirección horizontal. Una sección transversal de la orilla tiene la forma de la mitad inferior de una parábola con su vértice en el extremo del camino y con la ecuación $y^2 = 16x$, donde x y y se miden en metros. ¿Cuáles son las coordenadas x y y del melón cuando revienta en la orilla?

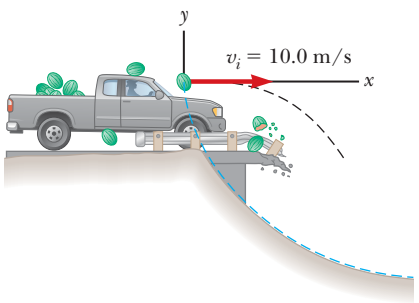


Figura P4.76 La línea punteada azul muestra la forma parabólica de la orilla.

77. Un automóvil estacionado en una pendiente pronunciada tiene vista hacia el océano, con un ángulo de 37.0° bajo la horizontal. El negligente conductor deja el automóvil en neutral y el freno de mano está defectuoso. A partir del reposo en $t = 0$, el automóvil rueda por la pendiente con una aceleración constante de 4.00 m/s^2 y recorre 50.0 m hasta el borde de un risco vertical. El risco está 30.0 m arriba del océano. Encuentre: (a) la rapidez del automóvil cuando llega al borde del risco, (b) el intervalo de tiempo transcurrido cuando llega ahí, (c) la velocidad del automóvil cuando amariza en el océano, (d) el intervalo de tiempo total que el automóvil está en movimiento y (e) la posición del automóvil cuando cae en el océano, en relación con la base del risco.

78. Un decidido coyote está nuevamente en persecución del elusivo correcaminos. El coyote usa un par de patines con ruedas de propulsión, que proporcionan una aceleración horizontal constante de 15.0 m/s^2 (figura P4.78). El coyote parte del reposo a 70.0 m de la orilla de un risco en el instante en que el correcaminos lo pasa en la dirección del risco. (a) Determine la rapidez mínima que debe tener para alcanzar el risco antes que el coyote. En el borde del risco, el correcaminos escapa al hacer un giro repentino, mientras el coyote continúa de frente. Los patines del coyote permanecen horizontales y continúan funcionando mientras el coyote está en vuelo, de modo que su aceleración mientras está en el aire es $(15.0\hat{\mathbf{i}} - 9.80\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2. (b) El risco está a 100 m sobre el suelo plano de un cañón. Determine dónde aterriza el coyote en el cañón. (c) Determine las componentes de la velocidad de impacto del coyote.

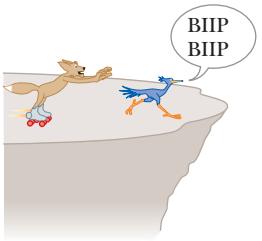


Figura P4.78

79. Un pescador emprende el viaje a contracorriente. Su pequeño bote, impulsado por un motor fuera de borda, viaja con rapidez constante v en aguas tranquilas. El agua circula con rapidez constante v_w menor. Recorre 2.00 km a contracorriente cuando su hielera cae del bote. Se da cuenta de la falta de la hielera sólo después de otros 15 minutos de ir a contracorriente. En ese punto, regresa río abajo, todo el tiempo viajando con la misma rapidez respecto del agua. Alcanza a la hielera justo cuando está próxima a la cascada en el punto de partida. ¿Con qué rapidez se mueven las aguas del río? Resuelva este problema en dos formas. (a) Primero, use la Tierra como marco de referencia. Respecto de la Tierra, el bote viaja a contracorriente con rapidez $v - v_w$ y río abajo a $v + v_w$. (b) Una segunda solución mucho más simple y más elegante se obtiene al usar el agua como marco de referencia. Este planteamiento tiene importantes aplicaciones en problemas mucho más complicados; por ejemplo, en el cálculo del movimiento de cohetes y satélites y en el análisis de la dispersión de partículas subatómicas de objetivos de gran masa.

80. No se lastime; no golpee su mano contra nada. Dentro de estas limitaciones, describa cómo dar a la mano una gran aceleración. Calcule el orden de magnitud de esta aceleración, indicando las cantidades que mide o estima y sus valores.

Problemas de desafío

81. Un esquiador deja una rampa de salto con una velocidad de $v = 10.0$ m/s a $\theta = 15.0°$ sobre la horizontal, como se muestra en la figura P4.81. La pendiente está inclinada a $\phi = 50.0°$ y la resistencia del aire es despreciable. Encuentre (a) la distancia desde la rampa hasta donde aterriza el esquiador y (b) las componentes de velocidad justo antes de aterrizar. (c) Explique cómo cree que afectan los resultados si se incluye la resistencia del aire.

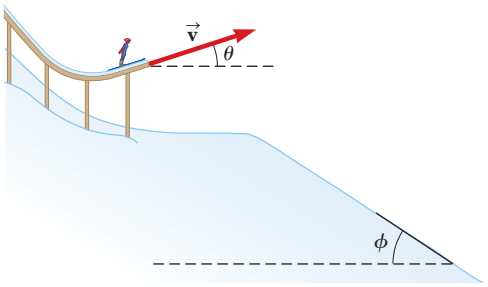


Figura P4.81

82. Dos nadadores, Chris y Sarah, parten desde el mismo punto en la orilla de una corriente ancha que circula con una rapidez v. Ambos se mueven con la misma rapidez c (donde $c > v$) en relación con el agua. Chris nada corriente abajo una distancia L y luego corriente arriba la misma distancia. Sarah nada de modo que su movimiento en relación con la Tierra es perpendicular a las orillas de la corriente. Ella nada la distancia L y luego de vuelta la misma distancia, de modo que ambos nadadores regresan al punto de partida. En términos de L, c y v, encuentre los intervalos de tiempo requeridos. (a) Para Chris de ida y vuelta, y (b) para Sarah de ida y vuelta. (c) Explique cuál nadador regresa primero.

83. El agua de un río fluye uniformemente con una rapidez constante de 2.50 m/s entre orillas paralelas separadas 80.0 m. Usted debe cruzar el río para entregar un paquete pero sólo puede nadar a 1.50 m/s. (a) Si quiere minimizar el tiempo en el agua, ¿en qué dirección debe nadar? (b) ¿Qué tan lejos irá a dar río abajo? (c) Si quiere minimizar la distancia río abajo, ¿qué dirección debe tomar? (d) ¿Qué tan lejos quedará río abajo?

84. Una persona de pie en lo alto de una roca hemisférica de radio R patea una bola (al inicio en reposo en lo alto de la roca) para darle velocidad horizontal $\vec{\mathbf{v}}_i$, como se muestra en la figura P4.84. (a) ¿Cuál debe ser su rapidez inicial mínima si la bola nunca debe golpear la roca después de que se patea? (b) Con esta rapidez inicial, ¿a qué distancia de la base de la roca la bola golpea el suelo?

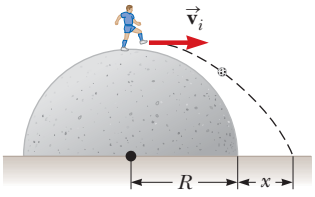


Figura P4.84

85. Un bombardero tiene una rapidez de 280 m/s en un ángulo θ por debajo de la horizontal. Cuando la altitud de la aeronave es de 2.15 km lanza una bomba, que posteriormente pega en un blanco en el suelo. La magnitud del desplazamiento desde el punto de lanzamiento de la bomba al objetivo es 3.25 km. Encuentre el ángulo θ.

86. Un proyectil es disparado hacia arriba en una pendiente (ángulo de inclinación ϕ) con una velocidad inicial v_i a un ángulo θ_i con respecto a la horizontal ($\theta_i > \phi$), como se muestra en la figura P4.86. (a) Demuestre que el proyectil viaja una distancia d hacia arriba de la pendiente, donde

$$d = \frac{2v_i^2 \cos\theta_i \operatorname{sen}(\theta_i - \phi)}{g \cos^2 \phi}$$

(b) ¿Para qué valor de θ_i es d un máximo, y cuál es ese valor máximo?

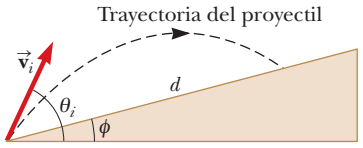


Figura P4.86

87. Un cohete de fuegos artificiales explota a una altura h, en el pico de su trayectoria vertical. Lanza fragmentos ardientes en todas direcciones, pero todos con la misma rapidez v. Pedazos de metal solidificado caen al suelo sin resistencia del aire. Encuentre el ángulo más pequeño tal que la velocidad final de impacto de un fragmento se haga horizontal.

88. En la sección ¿Qué pasaría si? del ejemplo 4.5, se afirmó que el intervalo máximo de un esquiador se presenta para un ángulo de lanzamiento θ dado por

$$\theta = 45° - \frac{\phi}{2}$$

donde ϕ es el ángulo que la colina forma con la horizontal en la figura 4.14. Compruebe esta afirmación al derivar esta ecuación.

89. Un barco enemigo está en el lado Este de una isla montañosa, como se muestra en la figura P4.89. El barco enemigo maniobra a 2 500 m del pico de una montaña de 1 800 m de alto y dispara proyectiles con una rapidez inicial de 250 m/s. Si la playa oeste está horizontalmente a 300 m del pico, ¿cuáles son las distancias desde la playa oeste a la que un barco puede estar seguro del bombardeo del barco enemigo?

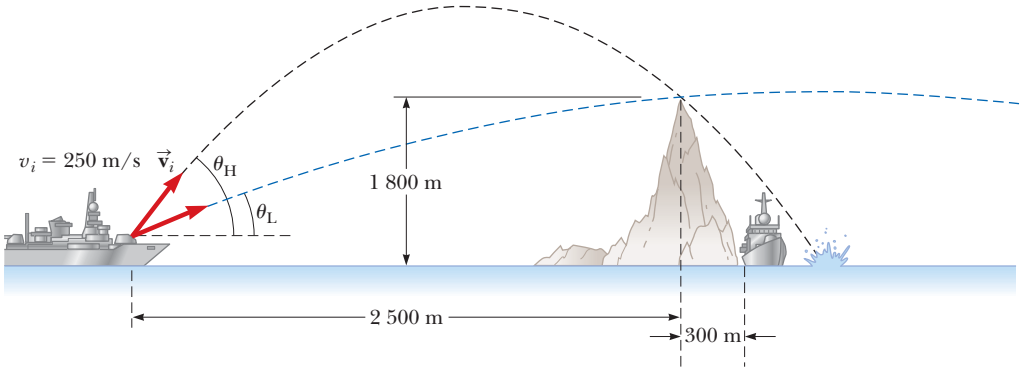


Figura P4.89

CAPÍTULO

5

Las leyes del movimiento



5.1 Concepto de fuerza

5.2 Primera ley de Newton y marcos inerciales

5.3 Masa

5.4 Segunda ley de Newton

5.5 Fuerza gravitacional y peso

5.6 Tercera ley de Newton

5.7 Análisis de modelos utilizando la segunda ley de Newton

5.8 Fuerzas de fricción

Una persona rema en una tranquila vía fluvial. El agua ejerce fuerzas sobre los remos para acelerar el bote. *(Tetra Images/Getty Images)*

En los capítulos 2 y 4 se describió el movimiento de un objeto en términos de su posi- ción, velocidad y aceleración sin considerar qué podría *influir* en dicho movimiento. Ahora se considera esa influencia: ¿por qué cambia el movimiento de un objeto? ¿Qué hace que un objeto permanezca en reposo y que otro acelere? ¿Por qué, en general, es más fácil mover un objeto pequeño que uno más grande? Los dos factores principales en los que es necesario reflexionar son las fuerzas que actúan sobre un objeto y la masa del objeto. En este capítulo se inicia el estudio de la *dinámica* al discutir las tres leyes de movimiento básicas, las cuales se relacionan con fuerzas y masas y que Isaac Newton formuló hace más de tres siglos.

5.1 Concepto de fuerza

Cada uno tiene una comprensión básica del concepto de fuerza a partir de la experiencia cotidiana. Cuando aleja un plato de comida vacío, ejerce una fuerza sobre él. De igual modo, cuando se lanza o patea una pelota se ejerce una fuerza sobre ella. En estos ejemplos, la palabra *fuerza* se refiere a una interacción con un objeto mediante actividad muscular y algún cambio en la velocidad del objeto. Sin embargo, las fuerzas no siempre causan movimiento. Por ejemplo, cuando está sentado, sobre su cuerpo actúa una fuerza gravitacional y aun así usted permanece fijo. Como segundo ejemplo, puede empujar (en otras palabras, ejercer una fuerza) sobre una gran roca y no ser capaz de moverla.

¿Qué fuerza (si la hay) hace que la Luna orbite la Tierra? Newton respondió esta y otras preguntas relacionadas al afirmar que las fuerzas son lo que causa cualquier cambio en la velocidad de un objeto. La velocidad de la Luna cambia en dirección porque se mueve en una órbita casi circular en torno a la Tierra. Este cambio en velocidad lo causa la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre la Luna.

Cuando un resorte se jala, como en la figura 5.1a, el resorte se estira. Cuando se jala un carrito estacionario, como en la figura 5.1b, el carrito se mueve. Cuando se patea un balón, como en la figura 5.1c, se deforma y se pone en movimiento. Estas situaciones son ejemplos de una clase de fuerzas llamadas *fuerzas de contacto*. Esto es, implican contacto físico entre dos objetos. Otras fuerzas de contacto son la fuerza

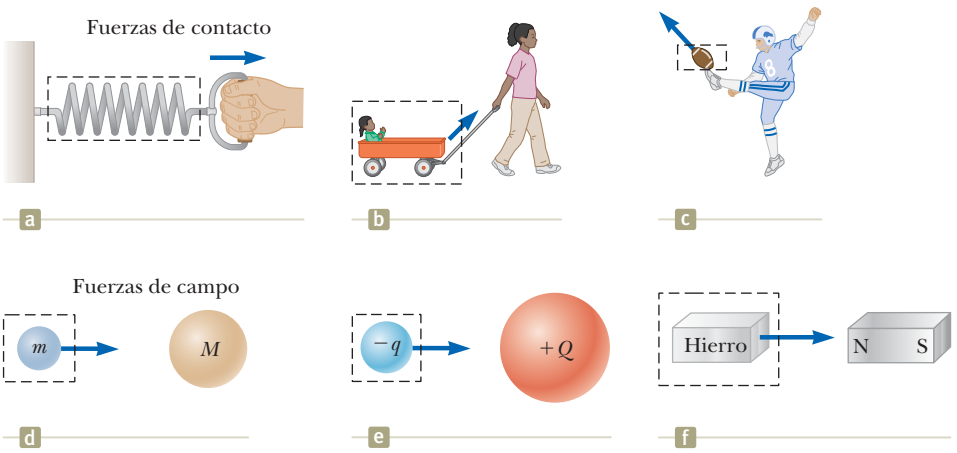


Figura 5.1 Algunos ejemplos de fuerzas aplicadas. En cada caso, sobre el objeto dentro del área limitada por líneas discontinuas se ejerce una fuerza. Algún agente en el ambiente exterior al área del recuadro ejerce una fuerza sobre el objeto.

que ejercen las moléculas de un gas sobre las paredes de un contenedor y la fuerza que ejerce su pie sobre el suelo.

Otra clase de fuerzas, conocidas como *fuerzas de campo*, no involucran contacto físico entre dos objetos. Estas fuerzas actúan a través del espacio vacío. La fuerza gravitacional de atracción entre dos objetos con masa, que se ilustra en la figura 5.1d, es un ejemplo de esta clase de fuerza. La fuerza gravitacional mantiene a los objetos ligados a la Tierra y a los planetas en órbita alrededor del Sol. Otra fuerza de campo común es la fuerza eléctrica que una carga eléctrica ejerce sobre otra (figura 5.1e), como la fuerza eléctrica atractiva entre un electrón y un protón formando un átomo de hidrógeno. Un tercer ejemplo de fuerza de campo es la fuerza que un imán de barra ejerce sobre un trozo de hierro (figura 5.1f).

La distinción entre fuerzas de contacto y fuerzas de campo no es tan clara como se podría pensar a partir de la discusión anterior. Cuando se examinan a nivel atómico, todas las fuerzas que se clasifican como fuerzas de contacto resultan ser causadas por fuerzas (de campo) eléctricas del tipo que se ilustra en la figura 5.1e. No obstante, al desarrollar modelos para fenómenos macroscópicos, es conveniente usar ambas clasificaciones de fuerzas. Las únicas fuerzas *fundamentales* conocidas en la naturaleza son todas fuerzas de campo: (1) *fuerzas gravitacionales* entre objetos, (2) *fuerzas electromagnéticas* entre cargas eléctricas, (3) *fuerzas fuertes* entre partículas subatómicas y (4) *fuerzas débiles* que surgen en ciertos procesos de decaimiento radiactivo. En la física clásica sólo interesan las fuerzas gravitacional y electromagnética. Las fuerzas fuerte y débil se discutirán en el capítulo 46.



Bridgeman-Giraudon/Art Resource, NY

Isaac Newton
Físico y matemático inglés (1642-1727)
Isaac Newton fue uno de los más brillantes científicos de la historia. Antes de cumplir 30 años, formuló los conceptos básicos y las leyes de la mecánica, descubrió la ley de gravitación universal e inventó los métodos matemáticos del cálculo. Como consecuencia de sus teorías, Newton fue capaz de explicar los movimientos de los planetas, la baja y el flujo de las mareas y muchas características especiales de los movimientos de la Luna y la Tierra. También interpretó muchas observaciones fundamentales concernientes a la naturaleza de la luz. Sus aportaciones a las teorías físicas dominaron el pensamiento científico durante dos siglos y siguen siendo importantes en la actualidad.

La naturaleza vectorial de la fuerza

Es posible usar la deformación de un resorte para medir fuerzas. Suponga que una fuerza vertical se aplica a una balanza de resorte que tiene un extremo superior fijo, como se muestra en la figura 5.2a. El resorte se estira cuando la fuerza se aplica, y un puntero en la escala lee la elongación del resorte. El resorte se puede calibrar al definir una fuerza de referencia $\vec{\mathbf{F}}_1$ como la fuerza que produce una lectura de 1.00 cm. Si ahora se aplica una fuerza hacia abajo diferente $\vec{\mathbf{F}}_2$ cuya magnitud es el doble de la fuerza de referencia $\vec{\mathbf{F}}_1$, como se ve en la figura 5.2b, el puntero se mueve 2.00 cm. La figura 5.2c muestra que el efecto combinado de las dos fuerzas colineales es la suma de los efectos de las fuerzas individuales.

Ahora suponga que la aplicación de las dos fuerzas es simultánea con $\vec{\mathbf{F}}_1$ descendente y $\vec{\mathbf{F}}_2$ horizontal, como se ilustra en la figura 5.2d. En este caso, el puntero lee 2.24 cm. La fuerza única $\vec{\mathbf{F}}$ que produciría esta misma lectura es la suma de los dos vectores $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$, como se describe en la figura 5.2d. Esto es, $|\vec{\mathbf{F}}_1| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} =$ 2.24 unidades, y su dirección es $= \tan^{-1}(-0.500) = -26.6°$. Puesto que se ha comprobado experimentalmente que las fuerzas se comportan como vectores, se *deben* aplicar las reglas de suma vectorial para obtener la fuerza neta sobre un objeto.

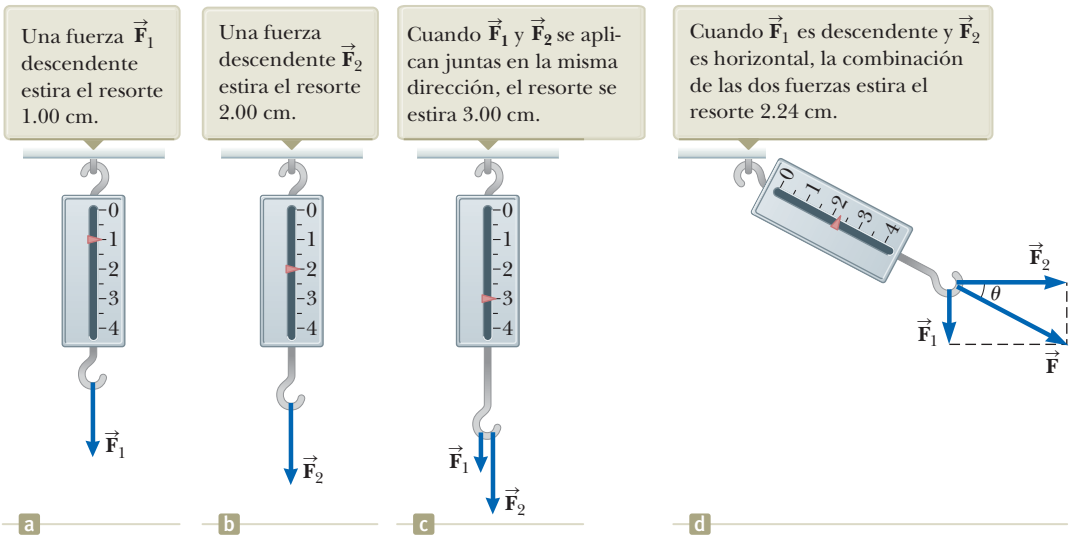


Figura 5.2 La naturaleza vectorial de una fuerza se prueba con una balanza de resorte.

5.2 Primera ley de Newton y marcos inerciales

El estudio de las fuerzas comienza al imaginar algunas situaciones físicas que involucran un disco sobre una mesa de hockey de aire perfectamente a nivel (figura 5.3). Se espera que el disco permanezca donde se coloca. Ahora piense que su mesa de hockey de aire se ubica en un tren que se mueve con velocidad constante a lo largo de una pista perfectamente uniforme. Si el disco se deposita en la mesa, de nuevo permanece donde se le coloca. Sin embargo, si el tren acelera, el disco comenzaría a moverse a lo largo de la mesa en dirección opuesta a la de la aceleración del tren, igual como un conjunto de papeles en el tablero de su automóvil cae en el asiento delantero cuando pisa el acelerador.

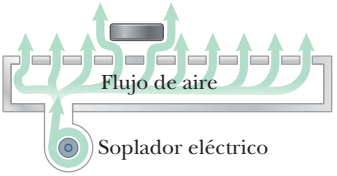


Figura 5.3 En una mesa de hockey de aire, el aire que sopla a través de los hoyos en la superficie permite que el disco se mueva casi sin fricción. Si la mesa no acelera, un disco colocado sobre la mesa permanecerá en reposo.

Como se vio en la sección 4.6, es posible observar un objeto en movimiento desde muchos marcos de referencia. La **primera ley del movimiento de Newton**, a veces llamada *ley de la inercia*, define un conjunto especial de marcos de referencia llamados *marcos inerciales*. Esta ley se puede establecer del modo siguiente:

◀ **Primera ley de Newton**

> Si un objeto no interactúa con otros objetos, es posible identificar un marco de referencia inercial en el que el objeto tiene aceleración cero.

◀ **Marco de referencia inercial**

Tal marco de referencia se llama **marco de referencia inercial**. Cuando el disco está en la mesa de hockey de aire ubicada en el suelo, usted lo observa desde un marco de referencia inercial; no hay interacciones horizontales del disco con cualquier otro objeto y observa que tiene aceleración cero en dicha dirección. Cuando usted está en el tren en movimiento con velocidad constante, también observa el disco desde un marco de referencia inercial. Cualquier marco de referencia que se mueve con velocidad constante en relación con un marco inercial es, en sí mismo, un marco inercial. Sin embargo, cuando usted y el tren aceleran, usted observa el disco desde un **marco de referencia no inercial** porque el tren acelera en relación con el marco de referencia inercial de la superficie de la Tierra. Mientras el disco parece acelerar de acuerdo con sus observaciones, se puede identificar un marco de referencia en el cual el disco tiene aceleración cero. Por ejemplo, un observador que está fuera del tren en el suelo ve el disco deslizándose respecto a la mesa pero siempre moviéndose con la misma velocidad que tiene el tren relativa al piso antes de comenzar a acelerar (porque casi no hay fricción para "amarrar" el disco y el tren). Debido a eso, todavía se satisface la primera ley de Newton, aun cuando sus observaciones como pasajero del tren muestren una aceleración aparente respecto a usted.

Un marco de referencia que se mueve con velocidad constante en relación con las estrellas distantes es la mejor aproximación de un marco inercial y, para propósitos

de estudio, se considera a la Tierra como tal marco. En realidad la Tierra no es un marco inercial debido a su movimiento orbital en torno al Sol y su movimiento rotacional alrededor de su propio eje, y ambos involucran aceleraciones centrípetas. Sin embargo, estas aceleraciones son pequeñas comparadas con g, y con frecuencia se pueden despreciar. Por esta razón, la Tierra es modelada como un marco inercial, junto con cualquier otro marco unido a ésta.

Suponga que observa un objeto desde un marco de referencia inercial. (En la sección 6.3 se regresará a observaciones hechas en marcos de referencia no inerciales.) Muy próximos a 1600, los científicos creían que el estado natural de la materia era el estado de reposo. Las observaciones mostraron que los objetos en movimiento finalmente dejaban de moverse. Galileo fue el primero en considerar un planteamiento diferente del movimiento y del estado natural de la materia. Diseñó experimentos mentales y concluyó que no es la naturaleza de un objeto detenerse una vez que se pone en movimiento: más bien, su naturaleza es *resistir el cambio en su movimiento*. En sus palabras: "cualquier velocidad una vez impartida a un cuerpo móvil se mantendrá firme siempre y cuando se retiren las causas externas del retardo". Por ejemplo, una nave espacial que navega a través del espacio vacío con su motor apagado seguirá moviéndose para siempre. *No* buscaría un "estado natural" de reposo.

Dada la discusión de las observaciones realizadas acerca de los marcos de referencia inerciales, se puede plantear un enunciado más práctico de la primera ley del movimiento de Newton:

Prevención de riesgos ocultos 5.1

Primera ley de Newton La primera ley de Newton *no* explica lo que sucede con un objeto con *fuerza neta cero*, esto es, múltiples fuerzas que se cancelan; expresa lo que ocurre *en ausencia de fuerzas externas*. Esta diferencia sutil pero importante permite definir la fuerza como la causa de un cambio en el movimiento. La descripción de un objeto bajo el efecto de fuerzas que se equilibran la da la segunda ley de Newton.

Otro enunciado de la primera ley de Newton

> En ausencia de fuerzas externas, y cuando se ve desde un marco de referencia inercial, un objeto en reposo se mantiene en reposo y un objeto en movimiento continúa en movimiento con una velocidad constante (esto es, con una rapidez constante en una línea recta).

Prevención de riesgos ocultos 5.2

La fuerza es la causa de cambios en el movimiento Un objeto puede tener movimiento en ausencia de fuerzas, como describe la primera ley de Newton. Por lo tanto, no interprete la fuerza como la causa del *movimiento*. La fuerza es la causa de los *cambios en el movimiento*.

En otras palabras, **cuando ninguna fuerza actúa sobre un objeto, la aceleración del objeto es cero**. Una conclusión a partir de la primera ley, es que cualquier *objeto aislado* (uno que no interactúa con su entorno) está en reposo o en movimiento con velocidad constante. La tendencia de un objeto a resistir cualquier intento por cambiar su velocidad se llama **inercia**. Dado el enunciado anterior de la primera ley, se puede concluir que un objeto que acelera debe experimentar una fuerza. A su vez, de la primera ley, se puede definir **fuerza** como **aquello que causa un cambio en el movimiento de un objeto.**

Definición de fuerza

Examen rápido 5.1 ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto? **(a)** Es posible que un objeto tenga movimiento en ausencia de fuerzas sobre el objeto. **(b)** Es posible tener fuerzas sobre un objeto en ausencia de movimiento del objeto. **(c)** Ni (a) ni (b) son correctos. **(d)** Tanto (a) como (b) son correctos.

5.3 Masa

Piense que quiere atrapar ya sea un balón de basquetbol o una bola de boliche. ¿Cuál es más probable que siga moviéndose cuando intenta capturarla? ¿Cuál requiere más esfuerzo para lanzarla? La bola de boliche requiere más esfuerzo. En el lenguaje de la física, se dice que la bola de boliche es más resistente al cambio en su velocidad que la de basquetbol. ¿Cómo se puede cuantificar este concepto?

Definición de masa

La **masa** es la propiedad de un objeto que especifica cuánta resistencia muestra un objeto para cambiar su velocidad y, como se aprendió en la sección 1.1, la unidad del SI de masa es el kilogramo. Los experimentos muestran que mientras más grande sea la masa de un objeto, menos acelera el objeto bajo la acción de una fuerza aplicada conocida.

Para describir la masa en unidades cuantitativas, se realizan experimentos en los que se comparan las aceleraciones que produce una fuerza conocida sobre diferentes objetos. Suponga que una fuerza que actúa sobre un objeto de masa m_1 produce un cambio en el movimiento de éste que puede cuantificarse mediante la acelera-

ción $\vec{\mathbf{a}}_1$ del objeto, y la *misma fuerza* sobre un cuerpo de masa m_2 produce una aceleración $\vec{\mathbf{a}}_2$. La razón de las dos masas se define como la razón inversa de las magnitudes de las aceleraciones producidas por la fuerza:

$$\frac{m_1}{m_2} \equiv \frac{a_2}{a_1} \tag{5.1}$$

Por ejemplo, si una fuerza conocida que actúa sobre un objeto de 3 kg produce una aceleración de 4 m/s^2, la misma fuerza aplicada a un objeto de 6 kg produce una aceleración de 2 m/s^2. De acuerdo con un cúmulo de observaciones similares, se concluye que la magnitud de la aceleración de un objeto es inversamente proporcional a su masa cuando sobre él actúa una fuerza conocida. Si un objeto tiene una masa conocida, la masa del otro objeto se obtiene a partir de mediciones de aceleración.

La masa es una propiedad inherente de un objeto y es independiente del entorno del objeto y del método que se aplica para medirla. Además, la masa es una cantidad escalar que obedece las reglas de la aritmética ordinaria. Por ejemplo, si combina una masa de 3 kg con una masa de 5 kg, la masa total es 8 kg. Este resultado se puede verificar experimentalmente al comparar la aceleración que una fuerza conocida proporciona a diferentes objetos por separado con la aceleración que la misma fuerza proporciona a los mismos objetos combinados como una unidad.

La masa no se debe confundir con el peso. La masa y el peso son dos cantidades diferentes. El peso de un objeto es igual a la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida sobre el objeto y varía con la posición (véase la sección 5.5). Por ejemplo, una persona que pesa 180 lb sobre la Tierra, pesa sólo aproximadamente 30 lb sobre la Luna. Por otra parte, la masa de un objeto por dondequiera es la misma: un objeto que tiene una masa de 2 kg sobre la Tierra también tiene una masa de 2 kg sobre la Luna.

◀ **Masa y peso son cantidades diferentes**

5.4 Segunda ley de Newton

La primera ley de Newton explica lo que sucede a un objeto cuando sobre él no actúan fuerzas: mantiene su movimiento original; permanece en reposo o se mueve en línea recta con rapidez constante. La segunda ley de Newton responde la pregunta de qué le ocurre a un objeto que tiene una o más fuerzas que actúan sobre él.

Imagine realizar un experimento en el que empuja un bloque de masa m a través de una superficie horizontal sin fricción. Cuando ejerce alguna fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el bloque, éste se mueve con cierta aceleración $\vec{\mathbf{F}}$. Si aplica una fuerza doble sobre el mismo bloque, los resultados experimentales muestran que la aceleración del bloque se duplica; si aumenta la fuerza aplicada a $3\vec{\mathbf{F}}$, la aceleración se triplica, etcétera. A partir de tales observaciones, se concluye que la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él: $\vec{\mathbf{F}} \propto \vec{\mathbf{a}}$. Esta idea se introdujo por primera ocasión en la sección 2.4, cuando se discutió la dirección de la aceleración de un objeto. La magnitud de la aceleración de un objeto es inversamente proporcional a su masa, como se afirmó en la sección anterior: $|\vec{\mathbf{a}}| \propto 1/m$.

Estas observaciones experimentales se resumen en la **segunda ley de Newton**:

> Cuando se ve desde un marco de referencia inercial, la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa:
>
> $$\vec{\mathbf{a}} \propto \frac{\sum \vec{\mathbf{F}}}{m}$$

Si se elige una constante de proporcionalidad 1, se relaciona masa, aceleración y fuerza a través del siguiente enunciado matemático de la segunda ley de Newton:[1]

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \tag{5.2}$$

◀ **Segunda ley de Newton**

Prevención de riesgos ocultos 5.3

***m*$\vec{\mathbf{a}}$ no es una fuerza** La ecuación 5.2 *no* indica que el producto $m\vec{\mathbf{a}}$ sea una fuerza. Todas las fuerzas sobre un objeto se suman como vectores para generar la fuerza neta en el lado izquierdo de la ecuación. En tal caso esta fuerza neta se iguala con el producto de la masa del objeto y la aceleración que resulta de la fuerza neta. *No* incluya una "fuerza $m\vec{\mathbf{a}}$ en su análisis de las fuerzas sobre un objeto.

[1] La ecuación 5.2 es válida sólo cuando la rapidez del objeto es mucho menor que la rapidez de la luz. La situación relativista se trata en el capítulo 39.

Tanto en el enunciado textual como en el matemático de la segunda ley de Newton se indicó que la aceleración se debe a la $\sum \vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre un objeto. La **fuerza neta** sobre un objeto es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto. (A veces a la fuerza neta se le referirá como fuerza total, fuerza resultante o fuerza desbalanceada.) Al resolver un problema con la segunda ley de Newton, es imperativo determinar la fuerza neta correcta sobre un objeto. Muchas fuerzas pueden actuar sobre un objeto, pero sólo hay una aceleración.

La ecuación 5.2 es una expresión vectorial y por tanto es equivalente a tres ecuaciones componentes:

Segunda ley de Newton: forma de componentes ▶

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \tag{5.3}$$

Examen rápido 5.2 Un objeto no experimenta aceleración. ¿Cuál de los siguientes enunciados no puede ser cierto para el objeto? **(a)** Una sola fuerza actúa sobre el objeto. **(b)** No actúan fuerzas sobre el objeto. **(c)** Sobre el objeto actúan fuerzas, pero éstas se cancelan.

Examen rápido 5.3 Usted empuja un objeto, al inicio en reposo, a través de un piso sin fricción con una fuerza constante durante un intervalo de tiempo Δt, lo que resulta en una rapidez final de v para el objeto. Luego repite el experimento, pero con una fuerza que es el doble de grande. ¿Qué intervalo de tiempo se requiere ahora para alcanzar la misma rapidez final? **(a)** $4\,\Delta t$ **(b)** $2\,\Delta t$ **(c)** Δt **(d)** $\Delta t/2$ **(e)** $\Delta t/4$

La unidad del SI de fuerza es el **newton** (N). Una fuerza de 1 N es la fuerza que, cuando actúa sobre un objeto de 1 kg de masa, produce una aceleración de 1 m/s^2. A partir de esta definición y de la segunda ley de Newton, es claro que el newton se puede expresar en términos de las siguientes unidades fundamentales de masa, longitud y tiempo:

Definición de newton ▶

$$1\ \text{N} \equiv 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \tag{5.4}$$

En el sistema inglés, la unidad de fuerza es la **libra** (lb). Una fuerza de 1 lb es la fuerza que, cuando actúa sobre una masa de 1 slug,[2] produce una aceleración de 1 ft/s^2:

$$1\ \text{lb} \equiv 1\ \text{slug} \cdot \text{ft/s}^2$$

Una aproximación conveniente es $1\ \text{N} \approx \frac{1}{4}\ \text{lb}$.

Ejemplo 5.1 Un disco de hockey que acelera AM

Un disco de hockey que tiene una masa de 0.30 kg se desliza sobre la superficie horizontal sin fricción de una pista de patinaje. Dos bastones de hockey golpean el disco simultáneamente, y ejercen las fuerzas sobre el disco que se muestran en la figura 5.4. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ tiene una magnitud de 5.0 N, y está dirigida a $\theta = 20°$ bajo el eje x. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2$ tiene una magnitud de 8.0 N y su dirección es $\phi = 60°$ sobre el eje x. Determine tanto la magnitud como la dirección de la aceleración del disco.

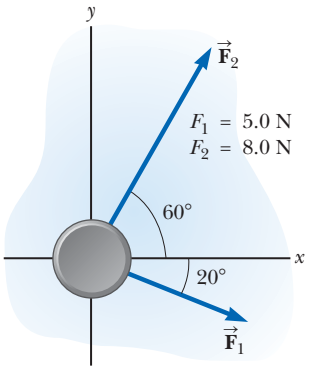


Figura 5.4 (Ejemplo 5.1) Un disco de hockey que se mueve sobre una superficie sin fricción está sujeto a dos fuerzas, $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 5.4. Use su experiencia en suma vectorial del capítulo 3 y prediga la dirección aproximada del vector de fuerza neta sobre el disco. La aceleración del disco estará en la misma dirección.

Categorizar Puesto que es posible determinar una fuerza neta y se quiere una aceleración, este problema se clasifica como uno que se puede resolver aplicando la segunda ley de Newton. En la sección 5.7 se introducirá formalmente el modelo para el análisis de una *partícula sujeta a una fuerza neta* para así estudiar una situación como esta.

Analizar Encuentre la componente de la fuerza neta que actúa sobre el disco en la dirección x:

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos\theta + F_2 \cos\phi$$

[2] El *slug* es la unidad de masa en el sistema usual estadounidense y es la contraparte de la unidad del SI de *kilogramo*. Puesto que la mayoría de los cálculos en el estudio de la mecánica clásica están en unidades del SI, el slug se usa rara vez en este texto.

5.1 continuación

Encuentre la componente de la fuerza neta que actúa sobre el disco en la dirección y:

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \operatorname{sen}\theta + F_2 \operatorname{sen}\phi$$

Aplique la segunda ley de Newton en forma de componentes (ecuación 5.3) para encontrar las componentes x y y de la aceleración del disco:

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{F_1 \cos\theta + F_2 \cos\phi}{m}$$

$$a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{F_1 \operatorname{sen}\theta + F_2 \operatorname{sen}\phi}{m}$$

Sustituya valores numéricos:

$$a_x = \frac{(5.0\ \text{N})\cos(-20°) + (8.0\ \text{N})\cos(60°)}{0.30\ \text{kg}} = 29\ \text{m/s}^2$$

$$a_y = \frac{(5.0\ \text{N})\operatorname{sen}(-20°) + (8.0\ \text{N})\operatorname{sen}(60°)}{0.30\ \text{kg}} = 17\ \text{m/s}^2$$

Encuentre la magnitud de la aceleración:

$$a = \sqrt{(29\ \text{m/s}^2)^2 + (17\ \text{m/s}^2)^2} = 34\ \text{m/s}^2$$

Calcule la dirección de la aceleración en relación con el eje positivo x:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{17}{29}\right) = 31°$$

Finalizar Los vectores de la figura 5.4 se pueden sumar gráficamente para verificar lo razonable de la respuesta. Puesto que el vector aceleración está a lo largo de la dirección de la fuerza resultante, un dibujo que muestre el vector fuerza resultante ayuda a comprobar la validez de la respuesta. (¡Inténtelo!)

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que tres bastones de hockey golpean el disco simultáneamente, y dos de ellos ejercen las fuerzas que se muestran en la figura 5.4. El resultado de las tres fuerzas es que el disco de hockey *no* muestra aceleración. ¿Cuáles deben ser las componentes de la tercera fuerza?

Respuesta Si hay aceleración cero, la fuerza neta que actúa sobre el disco debe ser cero. En consecuencia, las tres fuerzas se deben cancelar. Las componentes de la tercera fuerza deben ser de igual magnitud y signo contrario comparadas con las componentes de la fuerza neta aplicada por las primeras dos fuerzas de modo que todas las componentes sumen cero. Por lo tanto, $F_{3x} = -\sum F_x = -(0.30\ \text{kg})(29\ \text{m/s}^2) = -8.7\ \text{N}$ y $F_{3y} = -\sum F_y = -(0.30\ \text{kg})(17\ \text{m/s}^2) = -5.2\ \text{N}$.

5.5 Fuerza gravitacional y peso

Todos los objetos son atraídos hacia la Tierra. La fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre un objeto se llama **fuerza gravitacional** $\vec{\mathbf{F}}_g$. Esta fuerza se dirige hacia el centro de la Tierra[3] y su magnitud se llama **peso** del objeto.

En la sección 2.6 se vio que un objeto en caída libre experimenta una aceleración $\vec{\mathbf{g}}$ que actúa hacia el centro de la Tierra. Al aplicar la segunda ley de Newton $\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ a un objeto en caída libre de masa m, con $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$ y $\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_g$ se obtiene

$$\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}} \qquad (5.5)$$

Por lo tanto, el peso de un objeto, al definirse como la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}_g$, está dado por

$$F_g = mg \qquad (5.6)$$

Puesto que depende de g, el peso varía con la ubicación geográfica. Ya que g disminuye a medida que crece la distancia al centro de la Tierra, los objetos pesan menos a mayores altitudes que a nivel del mar. Por ejemplo, un bloque de ladrillos de 1 000 kg utilizado en la construcción del Empire State en Nueva York pesaba 9 800 N a nivel de la calle, pero pesaba alrededor de 1 N menos cuando se levantó del nivel de la acera hasta lo alto del edificio. Como otro ejemplo, suponga que un estudiante tiene una masa de 70.0 kg. El peso del estudiante en una ubicación donde

Prevención de riesgos ocultos 5.4

"Peso de un objeto" Es familiar la frase cotidiana "el peso de un objeto". Sin embargo, el peso no es una propiedad inherente de un objeto; más bien, es una medida de la fuerza gravitacional entre el objeto y la Tierra (u otro planeta). Por lo tanto, el peso es una propiedad de un *sistema*: el objeto y la Tierra.

Prevención de riesgos ocultos 5.5

El kilogramo no es una unidad de peso Es posible que haya visto la "conversión" 1 kg = 2.2 lb. A pesar de las afirmaciones populares de peso expresadas en kilogramos, el kilogramo no es una unidad de *peso*, es una unidad de *masa*. El enunciado de conversión no es una igualdad, es una *equivalencia* que es válida sólo en la superficie de la Tierra.

[3] Este enunciado ignora que la distribución de masa de la Tierra no es perfectamente esférica.



NASA/Eugene Cernan

La unidad de sustentación de vida que lleva en la espalda el astronauta Harrison Schmitt pesaba 300 lb en la Tierra y tenía una masa de 136 kg. Durante su entrenamiento usó una mochila de 50 lb con una masa de 23 kg. Aunque esta estrategia simuló efectivamente el peso reducido que la unidad tendría en la Luna, no imitó correctamente la masa invariable. Fue más difícil acelerar la unidad de 136 kg (tal vez al saltar o dar vuelta súbitamente) en la Luna que acelerar la unidad de 23 kg sobre la Tierra.

$g = 9.80\ \text{m/s}^2$ es 686 N (aproximadamente 150 lb). Sin embargo, en lo alto de una montaña, donde $g = 9.77\ \text{m/s}^2$, el peso del estudiante sólo es 684 N. En tal caso, si quiere perder peso sin someterse a dieta, ¡ascienda una montaña o pésese a 30 000 ft durante el vuelo de un avión!

La ecuación 5.6 cuantifica la fuerza gravitacional sobre el objeto, pero note que esta ecuación no requiere que el objeto se mueva. Incluso para un objeto fijo o para un objeto sobre el que actúan varias fuerzas, la ecuación 5.6 se puede aplicar para calcular la magnitud de la fuerza gravitacional. El resultado es un cambio sutil en la interpretación de m en la ecuación. La masa m en la ecuación 5.6 establece la intensidad de la atracción gravitacional entre el objeto y la Tierra. Este papel es por completo diferente del descrito antes para la masa: medir la resistencia al cambio en movimiento como respuesta a una fuerza externa. En ese papel, la masa también es llamada **masa inercial**. Por ende, la m en la ecuación 5.6 se llama **masa gravitacional**. Aun cuando esta cantidad sea diferente en comportamiento de la masa inercial, una de las conclusiones experimentales de la dinámica newtoniana es que la masa gravitacional y la masa inercial tienen el mismo valor.

Aunque esta discusión se enfocó en la fuerza gravitacional sobre un objeto debida a la Tierra, el concepto generalmente es válido en cualquier planeta. El valor de g variará de un planeta a otro, pero la magnitud de la fuerza gravitacional siempre será conocida por el valor de mg.

Examen rápido 5.4 Suponga que habla por un teléfono interplanetario a un amigo que vive en la Luna. Él le dice que acaba de ganar 1 newton de oro en un concurso. Con excitación, ¡usted le dice que entró a la versión terrícola del mismo concurso y que también ganó un newton de oro! ¿Quién es más rico? **(a)** Usted. **(b)** Su amigo. **(c)** Ambos son igualmente ricos.

Ejemplo conceptual 5.2 ¿Cuánto pesa en un elevador?

Es muy probable que usted haya estado en un elevador que acelera hacia arriba mientras se mueve a pisos superiores. En este caso, se siente más pesado. De hecho, si se para en una báscula en ese momento, la báscula mide una fuerza que tiene una magnitud mayor que su peso. Por lo tanto, tiene evidencia sensorial y medida que lo lleva a creer que es más pesado en esta situación. ¿Es *usted* más pesado?

SOLUCIÓN

No; su peso no cambia. Sus experiencias se deben al hecho de que está en un marco de referencia no inercial. Para proporcionar la aceleración ascendente, el suelo o la báscula deben ejercer sobre sus pies una fuerza hacia arriba que sea mayor en magnitud que su peso. Esta fuerza más grande que siente es la que interpreta como sentirse más pesado. La báscula lee esta fuerza ascendente, no su peso, y por eso su lectura aumenta.

5.6 Tercera ley de Newton

Si usted presiona contra una esquina de este libro con la yema de los dedos, el libro lo empuja de vuelta y forma una pequeña marca en su piel. Si empuja más fuerte, el libro hace lo mismo y la marca en su piel es un poco más profunda. Esta simple actividad ilustra que las fuerzas son *interacciones* entre dos objetos: cuando su dedo empuja sobre el libro, el libro empuja de vuelta sobre su dedo. Este importante principio se conoce como **tercera ley de Newton**:

Tercera ley de Newton

Si dos objetos interactúan, la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1:

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21} \qquad (5.7)$$

Cuando sea importante designar fuerzas como interacciones entre dos objetos, se usará esta notación de subíndices, donde $\vec{\mathbf{F}}_{ab}$ significa "la fuerza ejercida *por* a *sobre* b".

La tercera ley se ilustra en la figura 5.5. La fuerza que el objeto 1 ejerce sobre el objeto 2 se llama popularmente *fuerza de acción*, y la fuerza del objeto 2 sobre el objeto 1 se llama *fuerza de reacción*. Estos términos en cursivas no son términos científicos; además, cualquier fuerza se puede etiquetar como fuerza de acción o reacción. Estos términos se usarán por conveniencia. En todos los casos, las fuerzas de acción y reacción actúan sobre objetos *diferentes* y deben ser del mismo tipo (gravitacional, eléctrica, etc.). Por ejemplo, la fuerza que actúa sobre un proyectil en caída libre es la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre el proyectil $\vec{\mathbf{F}}_g = \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{Tp}}$ (T = Tierra, p = proyectil), y la magnitud de esta fuerza es mg. La reacción a esta fuerza es la fuerza gravitacional que ejerce el proyectil sobre la Tierra $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{Tp}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{Tp}}$. La fuerza de reacción $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{Tp}}$ debe acelerar a la Tierra hacia el proyectil tal como la fuerza de acción $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{Tp}}$ acelera al proyectil hacia la Tierra. No obstante, puesto que la Tierra tiene una masa tan grande, su aceleración debida a esta fuerza de reacción es despreciablemente pequeña.

Considere un monitor de computadora en reposo sobre una mesa, como en la figura 5.6a. La fuerza gravitacional sobre el monitor es $\vec{\mathbf{F}}_g = \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{Tm}}$. La reacción a esta fuerza es la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{mT}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{Tm}}$ ejercida por el monitor sobre la Tierra. El monitor no acelera porque lo sostiene la mesa (t). La mesa ejerce sobre el monitor una fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{tm}}$, llamada **fuerza normal**. (*Normal* en este contexto significa *perpendicular*.) En general, siempre que un objeto esté en contacto con una superficie, ésta ejerce una fuerza normal sobre el objeto. La fuerza normal sobre el monitor puede tener cualquier valor que haga falta, hasta el punto de romper la mesa. Puesto que el monitor tiene aceleración cero, la segunda ley de Newton aplicada al monitor produce $\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{n}} + m\vec{\mathbf{g}} = 0$, de modo que $n\,\hat{\mathbf{j}} - mg\,\hat{\mathbf{j}} = 0$, o $n = mg$. La fuerza normal equilibra la fuerza gravitacional sobre el monitor, de modo que la fuerza neta sobre el monitor es cero. La fuerza de reacción a $\vec{\mathbf{n}}$ es la fuerza que ejerce el monitor hacia abajo sobre la mesa, $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{mt}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{tm}} = -\vec{\mathbf{n}}$.

Observe que las fuerzas que actúan sobre el monitor son $\vec{\mathbf{F}}_g$ y $\vec{\mathbf{n}}$, como se muestra en la figura 5.6b. Las dos fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{mT}}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{mt}}$ se ejercen sobre objetos distintos al monitor.

La figura 5.6 ilustra un paso de suma importancia en la resolución de problemas que involucran fuerzas. La figura 5.6a muestra muchas de las fuerzas actuantes en la situación: las que actúan sobre el monitor, una que actúa sobre la mesa y otra que actúa sobre la Tierra. El esquema de la figura 5.6b, en contraste, muestra sólo las fuerzas que actúan sobre *un objeto*, el monitor, y es llamado **diagrama de fuerzas** o un *diagrama que exhibe las fuerzas sobre el objeto*. La importante representación pictórica de la figura 5.6c se llama **diagrama de cuerpo libre**. En un diagrama de cuerpo libre, se utiliza el modelo de partícula para representar el objeto como un punto y mostrar las fuerzas que actúan sobre el objeto como aplicadas en el punto. Cuando se analiza un objeto sujeto a fuerzas, se tiene interés en la fuerza neta que actúa sobre un objeto, el cual se modelará como una partícula. En consecuencia, un diagrama de cuerpo libre ayuda a aislar sólo aquellas fuerzas sobre el objeto y elimina las otras fuerzas del análisis.

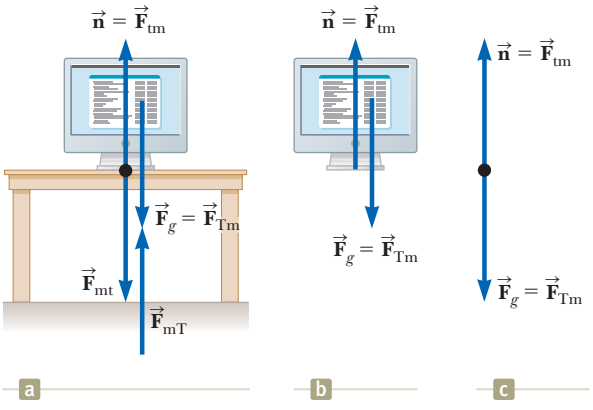


Figura 5.6 (a) Cuando un monitor de computadora está en reposo sobre una mesa, las fuerzas que actúan sobre el monitor son la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$. La reacción a $\vec{\mathbf{n}}$ es la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{mt}}$ que ejerce el monitor sobre la mesa. La reacción a $\vec{\mathbf{F}}_g$ es la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{mT}}$ que ejerce el monitor sobre la Tierra. (b) Un *diagrama de fuerzas* muestra las fuerzas sobre el monitor. (c) Un *diagrama de cuerpo libre* mostrando al monitor como un punto negro con las fuerzas actuando sobre él.

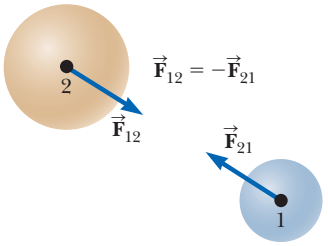


Figura 5.5 Tercera ley de Newton. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1.

Prevención de riesgos ocultos 5.6

n* no siempre es igual a *mg En la situación que se muestra en la figura 5.6 y en muchas otras, se encuentra que $n = mg$ (la fuerza normal tiene la misma magnitud que la fuerza gravitacional). Sin embargo, este resultado generalmente *no* es cierto. Si un objeto está en un plano inclinado, si hay fuerzas aplicadas con componentes verticales o si hay una aceleración vertical del sistema, entonces $n \neq mg$. *Siempre* aplique la segunda ley de Newton para encontrar la relación entre n y mg.

Prevención de riesgos ocultos 5.7

Tercera ley de Newton Recuerde que las fuerzas de acción y reacción de la tercera ley de Newton actúan sobre objetos *diferentes*. Por ejemplo, en la figura 5.6, $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{tm}} = -m\vec{\mathbf{g}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{Tm}}$. Las fuerzas $\vec{\mathbf{n}}$ y $m\vec{\mathbf{g}}$ son iguales en magnitud y opuestas en dirección, pero no representan un par acción-reacción porque ambas fuerzas actúan sobre el *mismo* objeto, el monitor.

Prevención de riesgos ocultos 5.8

Diagramas de cuerpo libre La etapa *más importante* en la solución de un problema que utiliza las leyes de Newton es dibujar un bosquejo adecuado, el diagrama de cuerpo libre. Asegúrese de dibujar *sólo* aquellas fuerzas que actúan sobre el objeto que aísla. Dibuje *todas* las fuerzas que actúan sobre el objeto, incluida cualesquiera fuerza de campo, como la fuerza gravitacional.

Examen rápido 5.5 **(i)** Si una mosca choca contra el parabrisas de un autobús moviéndose rápidamente, ¿cuál de los dos experimenta una fuerza de impacto con mayor magnitud? (a) La mosca. (b) El autobús. (c) Ambos experimentan la misma fuerza. **(ii)** ¿Cuál de los dos experimenta mayor aceleración? (a) La mosca. (b) El autobús. (c) Ambos experimentan la misma aceleración.

Ejemplo conceptual 5.3 Tú me empujas y yo te empujo

Un hombre grande y un niño pequeño están de pie, uno frente al otro, sobre hielo sin fricción. Juntan sus manos y se empujan mutuamente de modo que se separan.

(A) ¿Quién se aleja con mayor rapidez?

SOLUCIÓN

Esta situación es similar a la que se vio en el examen rápido 5.5. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce el hombre sobre el niño y la fuerza que ejerce el niño sobre el hombre son un par de fuerzas de la tercera ley, de modo que deben ser iguales en magnitud. (Una báscula colocada entre sus manos leería lo mismo, sin importar de cuál lado esté.) En consecuencia, el niño, que tiene la masa más pequeña, experimenta mayor aceleración. Ambos individuos aceleran durante la misma cantidad de tiempo, pero la mayor aceleración del niño en este intervalo de tiempo resulta en que su movimiento de alejamiento de la interacción es con mayor rapidez.

(B) ¿Quién se aleja más mientras sus manos están en contacto?

SOLUCIÓN

Puesto que el niño tiene mayor aceleración y en consecuencia mayor velocidad promedio, se aleja más que el hombre durante el intervalo de tiempo mientras sus manos están en contacto.

5.7 Análisis de modelos utilizando la segunda ley de Newton

En esta sección se discuten dos análisis de modelos para resolver problemas en que los objetos están en equilibrio ($\vec{\mathbf{a}} = 0$) o aceleran a lo largo de una línea recta bajo la acción de fuerzas externas constantes. Recuerde que cuando las leyes de Newton se aplican a un objeto, se tiene interés sólo en las fuerzas externas que actúan sobre el objeto. Si se representan los objetos como partículas, no necesita preocuparse por el movimiento rotacional. Por ahora, también se desprecian los efectos de la fricción en aquellos problemas que involucran movimiento, que es equivalente a afirmar que la superficie *no tiene fricción*. (La fuerza de fricción se discute en la sección 5.8.)

Por lo general, se ignora la masa de cualquier soga, cuerda o cable involucrado. En esta aproximación, la magnitud de la fuerza que ejerce cualquier elemento de la soga sobre el elemento adyacente es la misma para todos los elementos a lo largo de la soga. En los enunciados de problema, los términos sinónimos *ligero* y *de masa despreciable* se usan para indicar que una masa se ignorará cuando trabaje los problemas. Cuando una cuerda unida a un objeto está jalando al objeto, la cuerda ejerce una fuerza sobre el objeto en una dirección que se aleja del objeto, paralela a la cuerda. La magnitud T de dicha fuerza se llama **tensión** en la cuerda. Puesto que es la magnitud de una cantidad vectorial, la tensión es una cantidad escalar.

Análisis de modelo: partícula en equilibrio

Si la aceleración de un objeto representado como partícula es cero, el objeto se considera con el modelo de **partícula en equilibrio**. En este modelo, la fuerza neta sobre el objeto es cero:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0 \tag{5.8}$$

Considere una lámpara suspendida de una cadena ligera unida al techo, como en la figura 5.7a. El diagrama de fuerzas para la lámpara (figura 5.7b) muestra que las

fuerzas que actúan sobre la lámpara son la fuerza gravitacional hacia abajo $\vec{\mathbf{F}}_g$ y la fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{T}}$ ejercida por la cadena. Puesto que no hay fuerzas en la dirección x, $\Sigma F_x = 0$ no proporciona información útil. La condición $\Sigma F_y = 0$ produce

$$\sum F_y = T - F_g = 0 \text{ o } T = F_g$$

De nuevo, advierta que $\vec{\mathbf{T}}$ y $\vec{\mathbf{F}}_g$ *no* son un par de acción-reacción porque actúan sobre el mismo objeto, la lámpara. La fuerza de reacción a $\vec{\mathbf{T}}$ es una fuerza hacia abajo que ejerce la lámpara sobre la cadena.

El ejemplo 5.4 (página 122) muestra una aplicación del modelo de partícula en equilibrio.

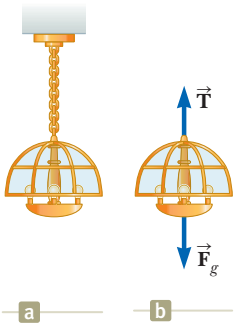


Figura 5.7 (a) Una lámpara suspendida del techo mediante una cadena de masa despreciable. (b) Las fuerzas que actúan sobre la lámpara son la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$ y la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cadena.

Análisis de modelo: partícula bajo una fuerza neta

Si un objeto experimenta una aceleración, su movimiento se puede analizar con el modelo de **partícula bajo una fuerza neta**. La ecuación apropiada para este modelo es la segunda ley de Newton, ecuación 5.2:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \tag{5.2}$$

Considere una caja que se jala hacia la derecha sobre una superficie horizontal sin fricción, como en la figura 5.8a. De hecho, el piso bajo los pies del niño debe tener fricción; de lo contrario, ¡sus pies resbalarían al intentar jalar la caja! Suponga que quiere encontrar la aceleración de la caja y la fuerza que el suelo ejerce sobre ella. Las fuerzas que actúan sobre la caja se ilustran en el diagrama de cuerpo libre de la figura 5.8b. Note que la fuerza horizontal $\vec{\mathbf{T}}$ que se aplica a la caja actúa a través de la cuerda. La magnitud de $\vec{\mathbf{T}}$ es igual a la tensión en la cuerda. Además de la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$, el diagrama de cuerpo libre para la caja incluye la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$ y la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ que ejerce el suelo sobre la caja.

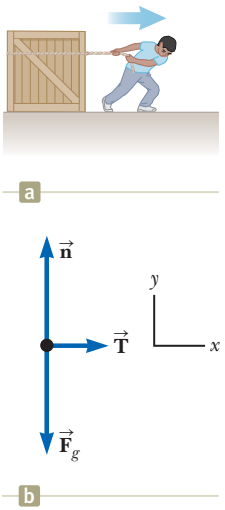


Figura 5.8 (a) Una caja que se jala hacia la derecha sobre una superficie sin fricción. (b) Diagrama de cuerpo libre que representa las fuerzas externas que actúan sobre la caja.

Ahora se puede aplicar la segunda ley de Newton en forma de componentes para la caja. La única fuerza que actúa en la dirección x es $\vec{\mathbf{T}}$. Al aplica $\Sigma F_x = ma_x$ al movimiento horizontal se obtiene

$$\sum F_x = T = ma_x \quad \text{o} \quad a_x = \frac{T}{m}$$

En la dirección y no se presenta aceleración porque la caja sólo se mueve horizontalmente. En consecuencia, se usa el modelo de partícula en equilibrio en la dirección y. Al aplicar la componente y de la ecuación 5.8 se obtiene

$$\sum F_y = n - F_g = 0 \quad \text{o} \quad n = F_g$$

Esto es, la fuerza normal tiene la misma magnitud que la fuerza gravitacional pero actúa en la dirección opuesta.

Si $\vec{\mathbf{T}}$ es una fuerza constante, la aceleración $a_x = T/m$ también es constante. Por tanto, la caja también se representa como una partícula bajo aceleración constante en la dirección x, y se pueden aplicar las ecuaciones de la cinemática del capítulo 2 para obtener la posición x y velocidad v_x de la caja como funciones del tiempo.

De esta discusión note dos conceptos que serán importantes al resolver problemas: (1) *En un problema dado, es posible tener diferentes análisis de modelos aplicados en direcciones distintas.* La caja en la figura 5.8 es una partícula en equilibrio en la dirección vertical y una partícula bajo una fuerza neta en la dirección horizontal. (2) *Es posible describir un objeto mediante múltiples análisis de modelos.* La caja es una partícula bajo una fuerza neta en la dirección horizontal y también es una partícula bajo una aceleración constante en la misma dirección.

En la situación recién descrita, la magnitud de la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ es igual a la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}_g$, pero éste no siempre es el caso, como se indica en la Prevención de riesgos ocultos 5.6. Por ejemplo, suponga que se encuentra un libro sobre una mesa y usted empuja hacia abajo sobre el libro con una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$, como en la figura 5.9. Ya que el libro está en reposo y debido a eso no acelera, $\Sigma F_y = 0$, lo que da $n - F_g - F = 0$, o $n = F_g + F = mg + F$. En esta situación la fuerza normal es mayor que la fuerza gravitacional. Más adelante se presentan otros ejemplos en los que $n \neq F_g$.

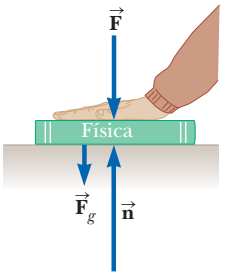


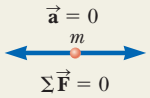
Figura 5.9 Cuando una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ empuja verticalmente hacia abajo sobre otro objeto, la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ sobre el objeto es mayor que la fuerza gravitacional: $n = F_g + F$.

Los siguientes ejemplos exhiben el uso del modelo de partícula bajo una fuerza neta.

Análisis de modelo — Partícula en equilibrio

Imagine un objeto que se puede modelar como una partícula. Si hay varias fuerzas actuando sobre él, tales que entre sí se cancelan, dando una fuerza neta nula, entonces el objeto tendrá aceleración cero. Esta condición adopta la forma matemática

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0 \qquad (5.8)$$



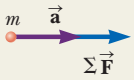
Ejemplos

- un candil colgando sobre la mesa del comedor
- un objeto moviéndose con rapidez terminal a través de un medio viscoso (capítulo 6)
- una viga de acero en la estructura de un edificio (capítulo 12)
- un bote flotando en un lago (capítulo 14)

Análisis de modelo — Partícula bajo una fuerza neta

Imagine un objeto que se puede modelar como una partícula. Si sobre él actúan una o varias fuerzas dando origen a una fuerza neta sobre el objeto, entonces éste se acelerará en la dirección de la fuerza neta. La conexión entre la fuerza neta y la aceleración es

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \qquad (5.2)$$



Ejemplos

- una caja empujada sobre el piso de una fábrica
- un objeto descendiendo bajo la acción de la fuerza gravitacional
- un pistón del motor de un automóvil impulsado por gases calientes (capítulo 22)
- una partícula cargada en un campo eléctrico (capítulo 23)

Ejemplo 5.4 — Un semáforo en reposo AM

Un semáforo que pesa 122 N cuelga de un cable unido a otros dos cables sostenidos de un soporte como en la figura 5.10a. Los cables superiores forman ángulos de $\theta_1 = 37.0°$ y $\theta_2 = 53.0°$ con la horizontal. Estos cables superiores no son tan fuertes como el cable vertical y se romperán si la tensión en ellos supera los 100 N. ¿El semáforo permanecerá colgado en esta situación, o alguno de los cables se romperá?

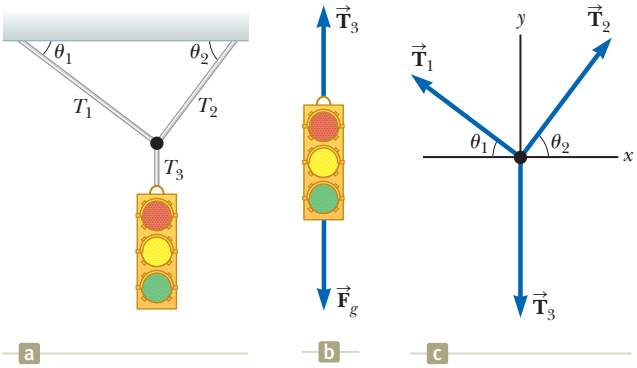


Figura 5.10 (Ejemplo 5.4) (a) Un semáforo suspendido por cables. (b) Las fuerzas actuando sobre el semáforo. (c) Diagrama de cuerpo libre del nudo donde se juntan los tres cables.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Examine el dibujo de la figura 5.10a. Suponga que los cables no se rompen y que nada se mueve.

Categorizar Si nada se mueve, ninguna parte del sistema acelera. Ahora puede representar el semáforo como una *partícula en equilibrio* sobre la que se ejerce una fuerza neta de cero. De igual modo, la fuerza neta sobre el nudo (figura 5.10c) es cero, así que el semáforo también puede ser modelado como una *partícula en equilibrio.*

Analizar Construya un diagrama de las fuerzas que actúan sobre el semáforo, como se indica en la figura 5.10b, y un diagrama de cuerpo libre para el nudo que mantiene juntos los tres cables unidos, como se muestra en la figura 5.10c. Este nudo es un objeto conveniente a elegir porque todas las fuerzas de interés actúan a lo largo de líneas que pasan a través del nudo.

Del modelo de partícula en equilibrio, aplique la ecuación 5.8 para el semáforo en la dirección y:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_3 - F_g = 0$$
$$T_3 = F_g$$

5.4 continuación

Elija los ejes coordenados como se muestra en la figura 5.10c y descomponga en sus componentes las fuerzas que actúan en el nudo:

Fuerza	Componente x	Componente y
$\vec{\mathbf{T}}_1$	$-T_1 \cos\theta_1$	$T_1 \operatorname{sen}\theta_1$
$\vec{\mathbf{T}}_2$	$T_2 \cos\theta_2$	$T_2 \operatorname{sen}\theta_2$
$\vec{\mathbf{T}}_3$	0	$-F_g$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al nudo:

$$(1)\quad \sum F_x = -T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 = 0$$

$$(2)\quad \sum F_y = T_1 \operatorname{sen}\theta_1 + T_2 \operatorname{sen}\theta_2 + (-F_g) = 0$$

La ecuación (1) muestra que las componentes horizontales de $\vec{\mathbf{T}}_1$ y $\vec{\mathbf{T}}_2$ deben ser iguales en magnitud, y la ecuación (2) indica que la suma de las componentes verticales de $\vec{\mathbf{T}}_1$ y $\vec{\mathbf{T}}_2$ deben equilibrar la fuerza hacia abajo $\vec{\mathbf{T}}_3$, que es igual en magnitud al peso del semáforo.

Resuelva la ecuación (1) para T_2 en términos de T_1:

$$(3)\quad T_2 = T_1\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right)$$

Sustituya este valor para T_2 en la ecuación (2):

$$T_1 \operatorname{sen}\theta_1 + T_1\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right)(\operatorname{sen}\theta_2) - F_g = 0$$

Obtenga T_1:

$$T_1 = \frac{F_g}{\operatorname{sen}\theta_1 + \cos\theta_1 \tan\theta_2}$$

Sustituya valores numéricos:

$$T_1 = \frac{122\ \text{N}}{\operatorname{sen} 37.0^\circ + \cos 37.0^\circ \tan 53.0^\circ} = 73.4\ \text{N}$$

Utilice la ecuación (3) para obtener T_2:

$$T_2 = (73.4\ \text{N})\left(\frac{\cos 37.0^\circ}{\cos 53.0^\circ}\right) = 97.4\ \text{N}$$

Ambos valores son menores que 100 N (apenas para T_2), de modo que los cables no se romperán.

Finalizar Finalice este problema al imaginar un cambio en el sistema, como el siguiente ¿Qué pasaría si?

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que los dos ángulos de la figura 5.10a son iguales. ¿Cuál sería la correspondencia entre T_1 y T_2?

Respuesta Se puede argumentar, a partir de la simetría del problema, que las dos tensiones T_1 y T_2 serían iguales entre sí. Matemáticamente, si los ángulos iguales se llaman θ, la ecuación (3) se convierte en:

$$T_2 = T_1\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right) = T_1$$

que también dice que las tensiones son iguales. Sin saber el valor específico de θ, no se pueden encontrar los valores de T_1 y T_2. Sin embargo, las tensiones serán iguales entre sí, sin importar el valor de θ.

Ejemplo conceptual 5.5 Fuerzas entre vagones en un tren

Los vagones de tren se conectan mediante *enganches*, que están bajo tensión conforme la locomotora jala el tren. Imagine que usted está en un tren que aumenta su rapidez con aceleración constante. A medida que se mueve a lo largo del tren desde la locomotora hacia el último vagón, midiendo la tensión en cada conjunto de enganches, ¿la tensión aumenta, disminuye o permanece igual? Cuando el ingeniero aplica los frenos, los enganches están bajo compresión. ¿Cómo varía esta fuerza de compresión desde la locomotora hasta el último vagón? (Suponga que sólo se aplican los frenos en las ruedas de la máquina.)

SOLUCIÓN

Conforme el tren aumenta su rapidez, la tensión disminuye desde el frente del tren hasta la parte trasera. El enganche entre la locomotora y el primer vagón debe aplicar suficiente fuerza para acelerar el resto de los vagones. A medida que se mueve a

continúa

5.5 continuación

lo largo del tren, cada enganche acelera menos masa detrás de él. El último enganche tiene que acelerar sólo al último vagón y por lo tanto está bajo menos tensión.

Cuando se aplican los frenos, la fuerza nuevamente disminuye desde el frente a la parte trasera. El enganche que conecta la locomotora con el primer vagón debe aplicar una gran fuerza para frenar el resto de los vagones, pero el enganche final debe aplicar una fuerza suficientemente grande para frenar sólo al último vagón.

Ejemplo 5.6 El auto que escapa AM

Un automóvil de masa m está sobre un camino cubierto con hielo inclinado en un ángulo θ, como en la figura 5.11a.

(A) Encuentre la aceleración del automóvil, si supone que la pista no tiene fricción.

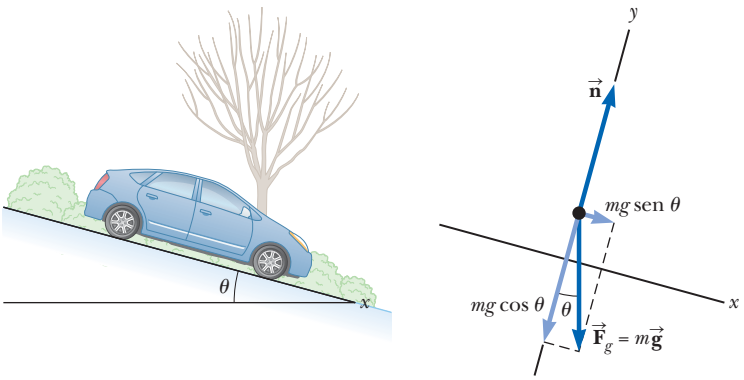


Figura 5.11 (Ejemplo 5.6) (a) Un automóvil sobre un plano inclinado sin fricción. (b) Diagrama de cuerpo libre para el automóvil. El punto negro representa la posición del centro de masa del automóvil. En el capítulo 9 se aprenderá sobre el centro de masa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Use la figura 5.11a para formar ideas de la situación. A partir de la experiencia cotidiana, se sabe que un automóvil sobre un plano inclinado cubierto con hielo acelerará hacia abajo por el plano. (Lo mismo le sucede a un automóvil sin frenos en una colina.)

Categorizar El automóvil, puesto que acelera, se clasifica como una *partícula bajo una fuerza neta*. Además, este problema pertenece a una categoría de problemas muy común en la que un objeto se mueve bajo la influencia de la gravedad sobre un plano inclinado.

Analizar La figura 5.11b muestra el diagrama de cuerpo libre del automóvil. Las únicas fuerzas que actúan sobre el automóvil son la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ que ejerce el plano inclinado, que actúa perpendicular al plano, y la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$, que actúa verticalmente hacia abajo. Para problemas que involucran planos inclinados, es conveniente elegir los ejes coordenados con x a lo largo del plano y y perpendicular a él, como en la figura 5.11b. Con estos ejes, represente la fuerza gravitacional mediante una componente de magnitud mg sen θ a lo largo del eje x positivo y otra de magnitud mg cos θ a lo largo del eje y negativo. La elección de ejes que resulta en el automóvil se representa como una partícula bajo una fuerza neta en la dirección x y una partícula en equilibrio en la dirección y.

Aplique esos modelos al automóvil:

$$(1)\quad \sum F_x = mg \operatorname{sen}\theta = ma_x$$

$$(2)\quad \sum F_y = n - mg\cos\theta = 0$$

Resuelva la ecuación (1) para a_x:

$$(3)\quad a_x = g \operatorname{sen}\theta$$

Finalizar Observe que, ¡la componente aceleración a_x es independiente de la masa del automóvil! Sólo depende del ángulo de inclinación y de g.

De la ecuación (2) se concluye que la componente de $\vec{\mathbf{F}}_g$ perpendicular al plano se equilibra mediante la fuerza normal; esto es, $n = mg\cos\theta$. Esta situación es otro caso en el que la fuerza normal *no* es igual en magnitud al peso del objeto (como se analizó en la Prevención de riesgos ocultos 5.6 de la página 119).

Es posible, aunque inconveniente, resolver el problema con ejes horizontal y vertical "normales". Tal vez quiera intentarlo, sólo para practicar.

(B) Suponga que el automóvil se libera desde el reposo en lo alto del plano y que la distancia desde la defensa frontal del automóvil hasta el fondo del plano inclinado es d. ¿Cuánto tarda la defensa frontal en llegar al fondo de la colina, y cuál es la rapidez del automóvil cuando llega ahí?

5.6 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el automóvil se desliza por la colina y que usa un cronómetro para medir todo el intervalo de tiempo hasta que llega al fondo.

Categorizar Esta parte del problema pertenece a cinemática más que a dinámica, y la ecuación (3) muestra que la aceleración a_x es constante. Por lo tanto, debe clasificar al automóvil en este inciso del problema como una partícula bajo aceleración constante.

Analizar Al definir la posición inicial de la defensa frontal como $x_i = 0$ y su posición final como $x_f = d$, y reconocer que $v_{xi} = 0$, aplique la ecuación 2.16 del modelo de partícula bajo aceleración constante: $x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$:

$$d = \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

Resuelva para t:

$$(4)\quad t = \sqrt{\frac{2d}{a_x}} = \sqrt{\frac{2d}{g \operatorname{sen}\theta}}$$

Aplique la ecuación 2.17, con $v_{xi} = 0$ para encontrar la velocidad final del automóvil:

$$v_{xf}^2 = 2a_x d$$

$$(5)\quad v_{xf} = \sqrt{2a_x d} = \sqrt{2gd \operatorname{sen}\theta}$$

Finalizar De las ecuaciones (4) y (5) se ve que el tiempo t al que el automóvil alcanza el fondo y su rapidez final v_{xf} son independientes de la masa del automóvil, como lo fue su aceleración. Note que, en este ejemplo, se combinaron técnicas del capítulo 2 con nuevas técnicas de este capítulo. A medida que aprenda más técnicas en capítulos posteriores, este proceso de combinar información proveniente de varias partes del libro ocurrirá con más frecuencia. En estos casos, use la estrategia general para resolver problemas para así auxiliarse a identificar qué análisis de modelos necesitará.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿En qué problema resuelto anteriormente se convierte esta situación si $\theta = 90°$?

Respuesta Imagine que θ va a 90° en la figura 5.11. El plano inclinado se vuelve vertical, ¡y el automóvil es un objeto en caída libre! La ecuación (3) se convierte en

$$a_x = g \operatorname{sen}\theta = g \operatorname{sen} 90° = g$$

que de hecho es la aceleración de caída libre. (Se encuentra $a_x = g$ en lugar de $a_x = -g$ porque la x positiva se eligió hacia abajo en la figura 5.11.) Note también que la condición $n = mg\cos\theta$ produce $n = mg\cos 90° = 0$. Esto es consistente con el automóvil que cae *junto al* plano vertical, en cuyo caso no hay fuerza de contacto entre el automóvil y el plano.

Ejemplo 5.7 Un bloque empuja a otro AM

Dos bloques de masas m_1 y m_2, con $m_1 > m_2$, se colocan en contacto mutuo sobre una superficie horizontal sin fricción, como en la figura 5.12a. Una fuerza horizontal constante $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica a m_1 como se muestra.

(A) Encuentre la magnitud de la aceleración del sistema.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Elabore ideas de la situación mediante la figura 5.12a y observe que ambos bloques deben experimentar la *misma* aceleración porque están en contacto mutuo y permanecen en contacto para todo el movimiento.

Categorizar Este problema se clasifica como una *partícula bajo una fuerza neta* porque se aplica una fuerza a un sistema de bloques y se busca la aceleración del sistema.

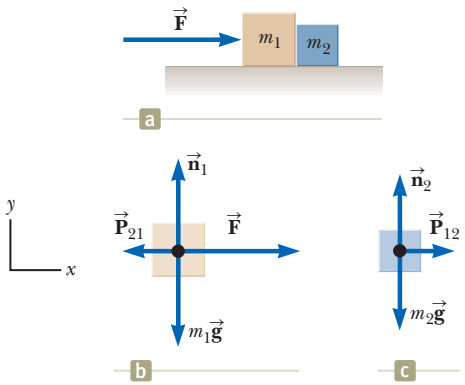


Figura 5.12 (Ejemplo 5.7) (a) Se aplica una fuerza a un bloque de masa m_1, que empuja a un segundo bloque de masa m_2. (b) Fuerzas actuando sobre m_1. (c) Fuerzas actuando sobre m_2.

continúa

5.7 continuación

Analizar Primero represente la combinación de los dos bloques como una sola partícula bajo una fuerza neta. Aplique la segunda ley de Newton a la combinación en la dirección x para encontrar la aceleración:

$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2)a_x$$

$$(1)\quad a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Finalizar La aceleración dada por la ecuación (1) es la misma que la de un solo objeto de masa $m_1 + m_2$ y sometida a la misma fuerza.

(B) Determine la magnitud de la fuerza de contacto entre los dos bloques.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La fuerza de contacto es interna al sistema de los dos bloques. Por lo tanto, no es posible hallar la fuerza al representar el sistema como un todo (los dos bloques) como una sola partícula.

Categorizar Considere ahora cada uno de los dos bloques de manera individual al clasificar cada uno como una *partícula bajo una fuerza neta.*

Analizar Construya primero un diagrama de fuerzas actuando sobre el objeto para cada bloque, como se muestra en las figuras 5.12b y 5.12c, donde la fuerza de contacto se denota por $\vec{\mathbf{P}}$. A partir de la figura 5.12c se ve que la única fuerza horizontal que actúa sobre m_2 es la fuerza de contacto $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ (la fuerza que ejerce m_1 sobre m_2), que se dirige hacia la derecha.

Aplique la segunda ley de Newton a m_2:

$$(2)\quad \sum F_x = P_{12} = m_2 a_x$$

Sustituya el valor de la aceleración a_x que proporciona la ecuación (1) en la ecuación (2):

$$(3)\quad P_{12} = m_2 a_x = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F$$

Finalizar Este resultado muestra que la fuerza de contacto P_{12} es *menor* que la fuerza aplicada F. La fuerza que se requiere para acelerar el bloque 2 debe ser menor que la fuerza requerida para producir la misma aceleración para el sistema de dos bloques.

Para finalizar, compruebe esta expresión para P_{12} al considerar las fuerzas que actúan sobre m_1, que se muestran en la figura 5.12b. Las fuerzas que actúan horizontales sobre m_1 son la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ hacia la derecha y la fuerza de contacto $\vec{\mathbf{P}}_{21}$ hacia la izquierda (la fuerza que ejerce m_2 sobre m_1). A partir de la tercera ley de Newton, $\vec{\mathbf{P}}_{21}$ es la fuerza de reacción a $\vec{\mathbf{P}}_{12}$, de modo que $P_{21} = P_{12}$.

Aplique la segunda ley de Newton a m_1:

$$(4)\quad \sum F_x = F - P_{21} = F - P_{12} = m_1 a_x$$

Resuelva para P_{12} y sustituya el valor de a_x de la ecuación (1):

$$P_{12} = F - m_1 a_x = F - m_1\left(\frac{F}{m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F$$

Este resultado concuerda con la ecuación (3), como debe ser.

¿QUÉ PASARÍA SÍ? Imagine que la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ en la figura 5.12 se aplica hacia la izquierda sobre el bloque derecho de masa m_2. ¿La magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ es la misma que cuando la fuerza se aplicó hacia la derecha sobre m_1?

Respuesta Cuando la fuerza se aplica hacia la izquierda sobre m_2, la fuerza de contacto debe acelerar m_1. En la situación original, la fuerza de contacto acelera m_2. Puesto que $m_1 > m_2$, se requiere más fuerza, de modo que la magnitud de $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ es mayor que en la situación original. Para ver esto matemáticamente, modifique la ecuación (4) apropiadamente y resuelva para $\vec{\mathbf{P}}_{12}$.

Ejemplo 5.8 Peso de un pez en un elevador AM

Una persona pesa un pescado de masa m en una balanza de resorte unida al techo de un elevador, como se ilustra en la figura 5.13.

(A) Demuestre que, si el elevador acelera ya sea hacia arriba o hacia abajo, la balanza de resorte da una lectura que es diferente del peso del pez.

5.8 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar La lectura en la balanza se relaciona con la extensión del resorte en la balanza, que depende de la fuerza en el extremo del resorte, como en la figura 5.2. Imagine que el pez cuelga de una cuerda unida al extremo del resorte. En este caso, la magnitud de la fuerza que se ejerce sobre el resorte es igual a la tensión T en la cuerda. Por lo tanto, se busca T. La fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ jala hacia abajo en la cuerda y hacia arriba sobre el pez.

Categorizar Este problema se clasifica al considerar al pez como una *partícula en equilibrio* si el elevador no acelera o como una *partícula bajo una fuerza neta* si el elevador acelera.

Analizar Inspeccione los diagramas de las fuerzas actuando sobre el pez en la figura 5.13 y note que las fuerzas externas que actúan sobre el pez son la fuerza gravitacional hacia abajo $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ y la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cuerda. Si el elevador está en reposo o moviéndose con velocidad constante, el pez es una partícula en equilibrio, de modo que $\Sigma F_y = T - F_g = 0$ o $T = F_g = mg$. (Recuerde que el escalar mg es el peso del pez.)

Ahora suponga que el elevador se mueve con una aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ en relación con un observador que está de pie afuera del elevador en un marco inercial. Ahora el pez es una partícula bajo una fuerza neta.

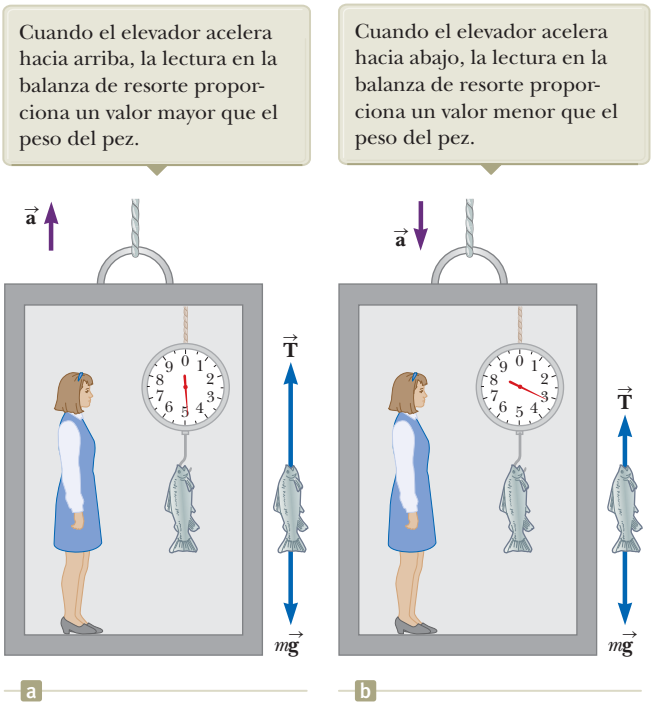


Figura 5.13 (Ejemplo 5.8) Un pez es pesado mediante una balanza de resorte en un elevador que acelera.

Aplique la segunda ley de Newton al pez:

$$\sum F_y = T - mg = ma_y$$

Resuelva para T:

$$(1)\quad T = ma_y + mg = mg\left(\frac{a_y}{g} + 1\right) = F_g\left(\frac{a_y}{g} + 1\right)$$

donde se eligió hacia arriba como la dirección y positiva. Se concluye de la ecuación (1) que la lectura en la balanza de T es mayor que el peso del pez mg si $\vec{\mathbf{a}}$ es hacia arriba, de modo que a_y es positiva (figura 5.13a), y que la lectura es menor que mg si $\vec{\mathbf{a}}$ es hacia abajo, de modo que a_y es negativa (figura 5.13b).

(B) Evalúe las lecturas en la balanza para un pez de 40.0 N si el elevador se traslada con una aceleración $a_y = \pm 2.00\ \text{m/s}^2$.

SOLUCIÓN

Evalúe la lectura en la balanza a partir de la ecuación (1) si $\vec{\mathbf{a}}$ es hacia arriba:

$$T = (40.0\ \text{N})\left(\frac{2.00\ \text{m/s}^2}{9.80\ \text{m/s}^2} + 1\right) = 48.2\ \text{N}$$

Evalúe la lectura en la balanza a partir de la ecuación (1) si $\vec{\mathbf{a}}$ es hacia abajo:

$$T = (40.0\ \text{N})\left(\frac{-2.00\ \text{m/s}^2}{9.80\ \text{m/s}^2} + 1\right) = 31.8\ \text{N}$$

Finalizar Considere este consejo: si compra un pez en un elevador, ¡asegúrese de que el pez se pesa mientras el elevador está en reposo o en aceleración hacia abajo! Además, note que, a partir de la información que se proporciona en este caso, uno no puede determinar la dirección de la velocidad del elevador.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que el cable del elevador se rompe y el elevador y su contenido están en caída libre. ¿Qué sucede con la lectura de la balanza?

Respuesta Si el elevador está en caída libre, la aceleración del pez es $a_y = -g$. De la ecuación (1) se ve que la lectura de T en la balanza en este caso es cero; esto es, el pez *parece* no tener peso.

Ejemplo 5.9 La máquina de Atwood AM

Cuando dos objetos de masas distintas cuelgan verticalmente sobre una polea sin fricción de masa despreciable, como en la figura 5.14, el dispositivo se llama *máquina de Atwood*. Se usa a veces en el laboratorio para calcular el valor de g. Determine la magnitud de la aceleración de los dos objetos y la tensión en la cuerda sin peso.

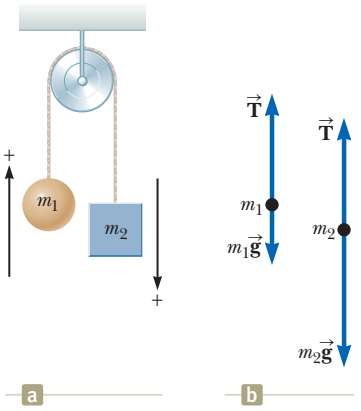


Figura 5.14 (Ejemplo 5.9) La máquina de Atwood. (a) Dos objetos conectados mediante una cuerda inextensible sin masa sobre una polea sin fricción. (b) Diagramas de cuerpo libre para los dos objetos.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine en acción la situación que se muestra en la figura 5.14a: conforme un objeto se mueve hacia arriba, el otro objeto se mueve hacia abajo. Puesto que los objetos están conectados mediante una cuerda inextensible, sus aceleraciones son de igual magnitud.

Categorizar Los objetos en la máquina de Atwood están sometidos a la fuerza gravitacional, así como a las fuerzas que se ejercen mediante las cuerdas conectadas a ellos. Por lo tanto, este problema se clasifica como uno que involucra dos *partículas bajo una fuerza neta*.

Analizar En la figura 5.14b se muestran los diagramas de cuerpo libre para los dos objetos. En cada objeto actúan dos fuerzas: la fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cuerda y la fuerza gravitacional hacia abajo. En problemas como éste, con una polea que se representa sin masa y sin fricción, la tensión en la cuerda sobre ambos lados de la polea es la misma. Si la polea tiene masa o es dependiente de la fricción, las tensiones en cualquier lado no son las mismas y la situación requiere técnicas que se aprenderán en el capítulo 10.

Debe tener mucho cuidado con los signos en problemas como este. En la figura 5.14a note que si el objeto 1 acelera hacia arriba, el objeto 2 acelera hacia abajo. Por lo tanto, por consistencia con los signos, si se define la dirección hacia arriba como positiva para el objeto 1, se debe definir la dirección hacia abajo como positiva para el objeto 2. Con esta convención de signos, ambos objetos aceleran en la misma dirección, que se define por la elección de signo. Además, de acuerdo con esta convención de signos, la componente y de la fuerza neta que se ejerce sobre el objeto 1 es $T - m_1g$, y la componente y de la fuerza neta que se ejerce sobre el objeto 2 es $m_2g - T$.

Del modelo de partícula bajo una fuerza neta, aplique la segunda ley de Newton al objeto 1:

$$(1)\quad \sum F_y = T - m_1g = m_1a_y$$

Aplique la segunda ley de Newton al objeto 2:

$$(2)\quad \sum F_y = m_2g - T = m_2a_y$$

Sume la ecuación (2) con la ecuación (1) y advierta que T se cancela:

$$-m_1g + m_2g = m_1a_y + m_2a_y$$

Resuelva para la aceleración:

$$(3)\quad a_y = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)g$$

Sustituya la ecuación (3) en la ecuación (1) para encontrar T:

$$(4)\quad T = m_1(g + a_y) = \left(\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)g$$

Finalizar La aceleración dada por la ecuación (3) se interpreta como la razón de la magnitud de la fuerza desequilibrada en el sistema $(m_2 - m_1)g$ a la masa total del sistema $(m_1 + m_2)$, como se espera de la segunda ley de Newton. Note que el signo de la aceleración depende de las masas relativas de los dos objetos.

¿QUÉ PASARÍA SI? Describa el movimiento del sistema si los objetos tienen masas iguales, es decir, $m_1 = m_2$.

Respuesta Si se tiene la misma masa en ambos lados, el sistema está en equilibrio y no debe acelerar. Matemáticamente, se ve que si $m_1 = m_2$, la ecuación (3) produce $a_y = 0$.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Si una de las masas es mucho más grande que la otra: $m_1 >> m_2$?

Respuesta En el caso en el que una masa es infinitamente mayor que la otra, se puede ignorar el efecto de la masa más pequeña. En tal caso, la masa mayor simplemente debe caer como si la masa más pequeña no estuviese ahí. Es claro que si $m_1 >> m_2$, la ecuación (3) produce $a_y = -g$.

Ejemplo 5.10 Aceleración de dos objetos conectados mediante una cuerda AM

Una bola de masa m_1 y un bloque de masa m_2 se unen mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción de masa despreciable, como en la figura 5.15a. El bloque se encuentra sobre un plano inclinado sin fricción de ángulo θ. Encuentre la magnitud de la aceleración de los dos objetos y la tensión en la cuerda.

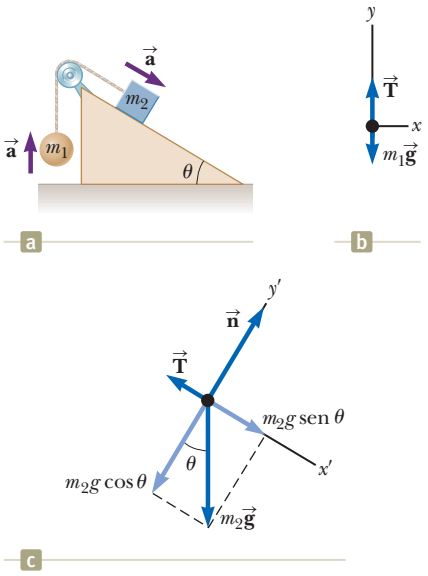


Figura 5.15 (Ejemplo 5.10) (a) Dos objetos conectados mediante una cuerda ligera sobre una polea sin fricción. (b) Diagrama de cuerpo libre para la bola. (c) Diagrama de cuerpo libre para el bloque. (El plano inclinado no tiene fricción.)

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que los objetos de la figura 5.15 están en movimiento. Si m_2 se mueve hacia abajo del plano, m_1 se mueve hacia arriba. Puesto que los objetos están conectados mediante una cuerda (la cual se supone que no se estira), sus aceleraciones tienen la misma magnitud. En la figura 5.15b observe los ejes coordenados normales para la bola, y en la figura 5.15c están los ejes "primados" para el bloque.

Categorizar Es posible identificar las fuerzas en cada uno de los dos objetos y se busca una aceleración, de modo que los objetos se clasifican como *partículas bajo una fuerza neta*. Para el bloque, este modelo sólo es válido para la dirección x'. En la dirección y', se aplica el modelo de *partícula en equilibrio* porque el bloque no acelera en esa dirección.

Analizar Considere los diagramas de cuerpo libre que se muestran en las figuras 5.15b y 5.15c.

En la dirección y, aplique la segunda ley de Newton a la bola, y elija la dirección hacia arriba como positiva:

$$(1)\quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a$$

Para que la bola acelere hacia arriba, es necesario que $T > m_1 g$. En la ecuación (1), sustituya a_y con a porque la aceleración sólo tiene un componente y.

Para el bloque es conveniente elegir el eje x' a lo largo del plano inclinado, como en la figura 5.15c. Por consistencia con la elección para la bola, se elige la dirección x' positiva hacia abajo en el plano.

En la dirección x' aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta al bloque, y en la dirección y' el modelo de partícula en equilibrio:

$$(2)\quad \sum F_{x'} = m_2 g \operatorname{sen}\theta - T = m_2 a_{x'} = m_2 a$$

$$(3)\quad \sum F_{y'} = n - m_2 g \cos\theta = 0$$

En la ecuación (2), sustituya $a_{x'}$ con a porque los dos objetos tienen aceleraciones de igual magnitud a.

Resuelva la ecuación (1) para T:

$$(4)\quad T = m_1(g + a)$$

Sustituya esta expresión para T en la ecuación (2):

$$m_2 g \operatorname{sen}\theta - m_1(g + a) = m_2 a$$

Resuelva para a:

$$(5)\quad a = \left(\frac{m_2 \operatorname{sen}\theta - m_1}{m_1 + m_2}\right) g$$

Sustituya esta expresión para a en la ecuación (4) para encontrar T:

$$(6)\quad T = \left(\frac{m_1 m_2(\operatorname{sen}\theta + 1)}{m_1 + m_2}\right) g$$

Finalizar El bloque acelera hacia abajo en el plano sólo si $m_2 \operatorname{sen}\theta > m_1$. Si $m_1 > m_2 \operatorname{sen}\theta$, la aceleración es hacia arriba del plano para el bloque y hacia abajo para la bola. Note también que el resultado para la aceleración, ecuación (5), se puede interpretar como la magnitud de la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema bola-bloque dividido entre la masa total del sistema; este resultado es consistente con la segunda ley de Newton.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Qué ocurre en esta situación si $\theta = 90°$?

continúa

5.10 continuación

Respuesta Si $\theta = 90°$, el plano inclinado se vuelve vertical y no hay interacción entre su superficie y m_2. En consecuencia, este problema se convierte en la máquina de Atwood del ejemplo 5.9. Si en las ecuaciones (5) y (6) se deja que $\theta \to 90°$, ¡ello hace que se reduzcan a las ecuaciones (3) y (4) del ejemplo 5.9!

¿QUÉ PASARÍA SI? Y si $m_1 = 0$?

Respuesta Si $m_1 = 0$, entonces m_2 simplemente se desliza hacia abajo por el plano sin interactuar con m_1 a través de la cuerda. En consecuencia, este problema se convierte en el problema del automóvil que se desliza en el ejemplo 5.6. Si en la ecuación (5) se hace que $m_1 \to 0$, ¡ello causa que se reduzca a la ecuación (3) del ejemplo 5.6!

5.8 Fuerzas de fricción

Cuando un objeto está en movimiento, ya sea sobre una superficie o en un medio viscoso como aire o agua, existe resistencia al movimiento porque el objeto interactúa con su entorno. A tal resistencia se le llama **fuerza de fricción**. Las fuerzas de fricción son muy importantes en la vida cotidiana. Permiten que uno camine o corra y son necesarias para el movimiento de los vehículos con ruedas.

Imagine que trabaja en su jardín y llena un bote de basura con desechos de hojas. Luego intenta arrastrar el bote a través de la superficie de concreto de su patio, como en la figura 5.16a. Esta superficie es *real*, no una superficie idealizada sin fricción. Si se aplica una fuerza horizontal externa $\vec{\mathbf{F}}$ al bote de basura, que actúa hacia la derecha, el bote de basura permanece fijo cuando $\vec{\mathbf{F}}$ es pequeña. La fuerza sobre el bote de basura que contraataca $\vec{\mathbf{F}}$ y evita que se mueva actúa hacia la izquierda y se llama **fuerza de fricción estática** $\vec{\mathbf{f}}_s$. En tanto el bote de basura no se mueva, $f_s = F$.

Fuerza de fricción estática ▶

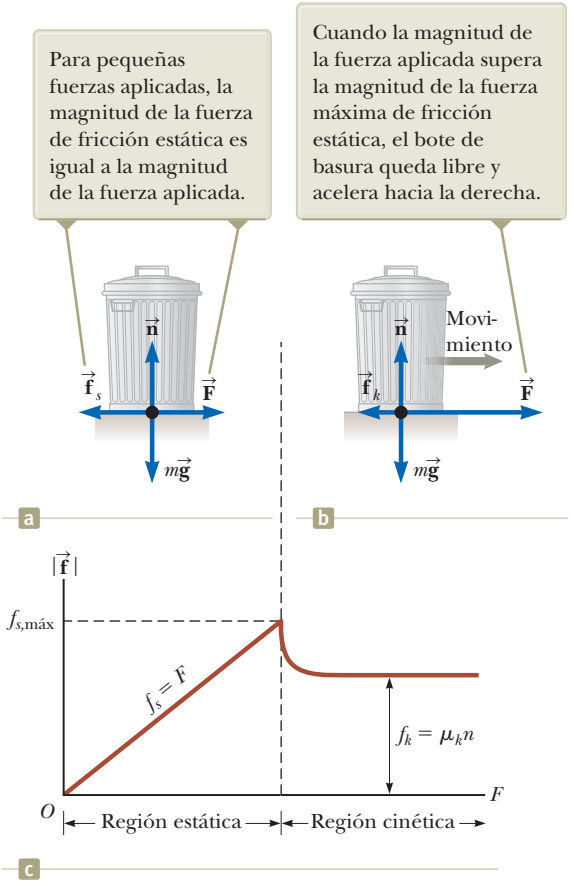


Figura 5.16 (a) y (b) Cuando jala un bote de basura, la dirección de la fuerza de fricción $\vec{\mathbf{f}}$ entre el bote y una superficie rugosa es opuesta a la dirección de la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$. (c) Gráfica de fuerza de fricción en función de la fuerza aplicada. Note que $f_{s,\text{máx}} > f_k$.

Por lo tanto, si $\vec{\mathbf{F}}$ aumenta, $\vec{\mathbf{f}}_s$ también aumenta. Del mismo modo, si $\vec{\mathbf{F}}$ disminuye, $\vec{\mathbf{f}}_s$ también disminuye.

Los experimentos muestran que la fuerza de fricción surge de la naturaleza de las dos superficies: debido a su rugosidad, el contacto se realiza sólo en unas cuantas posiciones donde se tocan los picos del material. En dichas posiciones, la fuerza de fricción surge en parte porque un pico físicamente bloquea el movimiento de un pico de la superficie opuesta y en parte por el enlace químico ("punto de soldadura") de picos opuestos conforme entran en contacto. Aunque los detalles de la fricción son muy complejos al nivel atómico, esta fuerza involucra, a final de cuentas, una interacción eléctrica entre átomos o moléculas.

Si se aumenta la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}$ como en la figura 5.16b, el bote de basura al final se desliza. Cuando el bote de basura está a punto de deslizarse, f_s tiene su valor máximo $f_{s,máx}$, como se muestra en la figura 5.16c. Cuando F supera $f_{s,máx,}$ el bote de basura se mueve y acelera hacia la derecha. A la fuerza de fricción para un objeto en movimiento se le llama **fuerza de fricción cinética** $\vec{\mathbf{f}}_k$. Cuando el bote de basura está en movimiento, la fuerza de fricción cinética en el bote es menor que $f_{s,máx}$ (figura 5.16c). La fuerza neta $F - f_k$ en la dirección x produce una aceleración hacia la derecha, de acuerdo con la segunda ley de Newton. Si $F = f_k$, la aceleración es cero y el bote de basura se mueve hacia la derecha con rapidez constante. Si la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ se elimina del bote en movimiento, la fuerza de fricción $\vec{\mathbf{f}}_k$ que actúa hacia la izquierda proporciona una aceleración del bote de basura en la dirección $-x$ y al final lo lleva al reposo, lo que, de nuevo, es consistente con la segunda ley de Newton.

◀ **Fuerza de fricción cinética**

En términos experimentales, se encuentra que, a una buena aproximación, tanto $f_{s,máx}$ como f_k son proporcionales a la magnitud de la fuerza normal que se ejerce sobre un objeto por la superficie. Las siguientes descripciones de la fuerza de fricción están en función de las observaciones experimentales y sirven como el modelo que se usará para fuerzas de fricción en resolución de problemas:

- La magnitud de la fuerza de fricción estática entre cualesquiera dos superficies en contacto puede tener los valores

$$f_s \leq \mu_s n \tag{5.9}$$

  donde la constante adimensional μ_s se llama **coeficiente de fricción estática** y n es la magnitud de la fuerza normal que ejerce una superficie sobre la otra. La igualdad en la ecuación 5.9 se cumple cuando las superficies están a punto de deslizarse, esto es, cuando $f_s = f_{s,máx} = \mu_s n$. Esta situación se llama *movimiento inminente*. La desigualdad se cumple cuando las superficies no están a punto de deslizarse.
- La magnitud de la fuerza de fricción cinética que actúa entre dos superficies es

$$f_k = \mu_k n \tag{5.10}$$

  donde μ_k se llama **coeficiente de fricción cinética**. Aunque el coeficiente de fricción cinética varía con la rapidez, por lo general en este texto se despreciará cualquiera de tales variaciones.
- Los valores de μ_k y μ_s dependen de la naturaleza de las superficies, pero μ_k por lo general es menor que μ_s. El intervalo de los valores típicos fluctúa de 0.03 a 1.0. La tabla 5.1 (página 132) indica algunos valores reportados.
- La dirección de la fuerza de fricción sobre un objeto es paralela a la superficie con la que el objeto está en contacto y opuesta al movimiento real (fricción cinética) o al movimiento inminente (fricción estática) del objeto en relación con la superficie.
- Los coeficientes de fricción son casi independientes del área de contacto entre las superficies. Es de esperar que al colocar un objeto en el lado que tiene más área aumente la fuerza de fricción. Aunque este método proporciona más puntos de contacto, el peso del objeto se dispersa sobre un área más grande y los puntos individuales no se oprimen tan estrechamente entre sí. Ya que estos efectos se compensan, aproximadamente, uno con otro, la fuerza de fricción es independiente del área.

Prevención de riesgos ocultos 5.9

El signo igual se usa en situaciones limitadas En la ecuación 5.9 el signo igual se usa *sólo* en caso de que las superficies estén a punto de liberarse y comiencen a deslizarse. No caiga en la trampa común de usar $f_s = \mu_s n$ en *cualquier* situación estática.

Prevención de riesgos ocultos 5.10

Ecuaciones de fricción Las ecuaciones 5.9 y 5.10 *no* son ecuaciones vectoriales. Son relaciones entre las *magnitudes* de los vectores que representan las fuerzas de fricción y normal. Puesto que las fuerzas de fricción y normal son mutuamente perpendiculares, los vectores no se pueden relacionar mediante una constante multiplicativa.

Prevención de riesgos ocultos 5.11

La dirección de la fuerza de fricción En ocasiones se hace un enunciado incorrecto acerca de la fuerza de fricción entre un objeto y una superficie, "la fuerza de fricción en un objeto es opuesta a su movimiento o al movimiento inminente", en lugar de la frase correcta, "la fuerza de fricción en un objeto es opuesta a su movimiento o al movimiento inminente *en relación con la superficie*".

Tabla 5.1 **Coeficientes de fricción**

	μ_s	μ_k
Hule sobre concreto	1.0	0.8
Acero sobre acero	0.74	0.57
Aluminio sobre acero	0.61	0.47
Vidrio sobre vidrio	0.94	0.4
Cobre sobre acero	0.53	0.36
Madera sobre madera	0.25–0.5	0.2
Madera encerada sobre nieve húmeda	0.14	0.1
Madera encerada sobre nieve seca	—	0.04
Metal sobre metal (lubricado)	0.15	0.06
Teflón sobre teflón	0.04	0.04
Hielo sobre hielo	0.1	0.03
Articulación sinovial en humanos	0.01	0.003

Nota: Todos los valores son aproximados. En algunos casos el coeficiente de fricción puede ser mayor que 1.0.



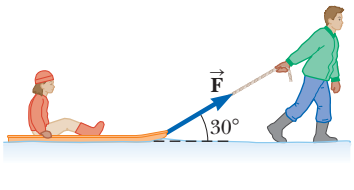


Figura 5.17 (Examen rápido 5.7) Un padre desliza a su hija sobre un trineo mediante (a) empujar sobre sus hombros o (b) jalarla con una cuerda.

Examen rápido 5.6 Usted presiona con su mano su libro de física plano contra una pared vertical. ¿Cuál es la dirección de la fuerza de fricción que ejerce la pared sobre el libro? **(a)** Hacia abajo, **(b)** hacia arriba, **(c)** afuera desde la pared, **(d)** hacia dentro de la pared.

Examen rápido 5.7 Usted juega con su hija en la nieve. Ella se sienta sobre un trineo y le pide que la deslice sobre un campo horizontal plano. Usted tiene la opción de **(a)** empujarla desde atrás al aplicar una fuerza hacia abajo sobre sus hombros a 30° bajo la horizontal (figura 5.17a) o **(b)** unir una cuerda al frente del trineo y jalar con una fuerza a 30° sobre la horizontal (figura 5.17b). ¿Cuál sería más fácil para usted y por qué?

Ejemplo 5.11 Determinación experimental de μ_s y μ_k AM

El siguiente es un método simple de medir coeficientes de fricción. Suponga que se coloca un bloque sobre una superficie rugosa inclinada en relación con la horizontal, como se muestra en la figura 5.18. El ángulo de inclinación aumenta hasta que el bloque comienza a moverse. Demuestre que puede obtener μ_s al medir el ángulo crítico θ_c al que comienza a ocurrir este deslizamiento.

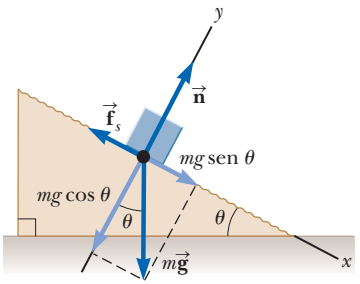


Figura 5.18 (Ejemplo 5.11) Las fuerzas externas que se ejercen sobre un bloque que se encuentra sobre un plano inclinado rugoso son la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$, la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$, y la fuerza de fricción $\vec{\mathbf{f}}_s$. Por conveniencia, la fuerza gravitacional se descompone en una componente mg sen θ a lo largo del plano y una componente mg cos θ perpendicular al plano.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere la figura 5.18 e imagine que el bloque tiende a deslizarse hacia abajo por el plano debido a la fuerza gravitacional. Para simular la situación, coloque una moneda sobre la cubierta de este libro e incline el libro hasta que la moneda comience a deslizarse. Note cómo este ejemplo difiere del ejemplo 5.6. Cuando no hay fricción sobre el plano, *cualquier* ángulo del plano hará que un objeto en reposo comience a moverse. Sin embargo, cuando existe fricción no hay movimiento del objeto para ángulos menores al ángulo crítico.

Categorizar El bloque está sometido a diferentes fuerzas. Puesto que el plano se eleva al ángulo en que el bloque está listo para comenzar a moverse pero no se mueve, el bloque se clasifica como una *partícula en equilibrio*.

Analizar El diagrama en la figura 5.18 muestra las fuerzas que actúan sobre el bloque: la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$ la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza de fricción estática $\vec{\mathbf{f}}_s$. Se elige x paralelo al plano y y perpendicular a éste.

Del modelo de partícula en equilibrio, aplique la ecuación 5.8 al bloque en ambas direcciones x y y:

$$(1)\quad \sum F_x = mg \operatorname{sen}\theta - f_s = 0$$

$$(2)\quad \sum F_y = n - mg\cos\theta = 0$$

5.11 continuación

Sustituya $mg = n/\cos\theta$ de la ecuación (2) en la ecuación (1):

$$(3)\quad f_s = mg\,\text{sen}\,\theta = \left(\frac{n}{\cos\theta}\right)\text{sen}\,\theta = n\tan\theta$$

Cuando el ángulo de inclinación aumenta hasta que el bloque está a punto de deslizarse, la fuerza de fricción estática alcanza su valor máximo $\mu_s n$. El ángulo θ en esta situación es el ángulo crítico θ_c. Haga estas sustituciones en la ecuación (3):

$$\mu_s n = n\tan\theta_c$$
$$\mu_s = \tan\theta_c$$

Así queda demostrado, como se pidió, que el coeficiente de fricción estática sólo se relaciona con el ángulo crítico. Por ejemplo, si el bloque apenas se desliza en $\theta_c = 20.0°$, se encuentra que $\mu_s = \tan 20.0° = 0.364$.

Finalizar Una vez que el bloque comienza a moverse en $\theta \geq \theta_c$, acelera hacia abajo por el plano y la fuerza de fricción es $f_k = \mu_k n$. Sin embargo, si θ se reduce a un valor menor que θ_c, puede encontrarse un ángulo θ_c' tal que el bloque se mueve hacia abajo por el plano con rapidez constante, de nuevo como una partícula en equilibrio ($a_x = 0$). En este caso, use las ecuaciones (1) y (2) con f_s en lugar de f_k para encontrar μ_k: $\mu_k = \tan\theta_c'$, donde $\theta_c' < \theta_c$.

Ejemplo 5.12 Disco de hockey deslizante AM

A un disco de hockey sobre un estanque congelado se le da una rapidez inicial de 20.0 m/s. Si el disco siempre permanece sobre el hielo y se desliza 115 m antes de llegar al reposo, determine el coeficiente de fricción cinética entre el disco y el hielo.

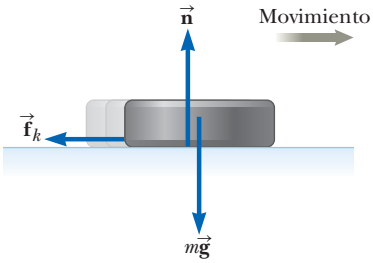


Figura 5.19 (Ejemplo 5.12) Después que al disco se le da una velocidad inicial hacia la derecha, las únicas fuerzas externas que actúan sobre él son la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$, la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza de fricción cinética $\vec{\mathbf{f}}_k$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el disco de la figura 5.19 se desliza hacia la derecha. La fuerza de fricción cinética actúa hacia la izquierda y alenta el disco que al final llega al reposo debido a esa fuerza.

Categorizar Las fuerzas que actúan sobre el disco se identifican en la figura 5.19, pero el texto del problema proporciona variables cinemáticas. Por lo tanto, el problema se clasifica en varias formas. Primero, es necesario modelar al disco como una *partícula bajo una fuerza neta* en la dirección horizontal: la fricción cinética ocasiona que el disco acelere. No existe aceleración del disco en la dirección vertical, así que se utiliza el modelo de *partícula en equilibrio* para esa dirección. Aún más, ya que la fuerza de fricción cinética se representa como independiente de la rapidez, la aceleración del disco es constante. Así que este problema también se clasifica como una *partícula bajo aceleración constante.*

Analizar Primero, encuentre la aceleración algebraicamente en términos del coeficiente de fricción cinética, con la segunda ley de Newton. Una vez que conozca la aceleración del disco y la distancia que recorre, puede usar las ecuaciones de cinemática para encontrar el valor numérico del coeficiente de fricción cinética. El diagrama en la figura 5.19 muestra las fuerzas sobre el disco.

Aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta en la dirección x al disco:

$$(1)\quad \sum F_x = -f_k = ma_x$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio en la dirección y al disco:

$$(2)\quad \sum F_y = n - mg = 0$$

Sustituya $n = mg$ de la ecuación (2) y $f_k = \mu_k n$ en la ecuación (1):

$$-\mu_k n = -\mu_k mg = ma_x$$
$$a_x = -\mu_k g$$

El signo negativo significa que la aceleración es hacia la izquierda en la figura 5.19. Ya que la velocidad del disco está dirigida a la derecha, el disco se frena. La aceleración es independiente de la masa del disco y es constante porque se supone que μ_k permanece constante.

continúa

5.12 continuación

Aplique al disco el modelo de partícula bajo aceleración constante, con la ecuación 2.17 del modelo, $v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$, con $x_i = 0$ y $v_{xf} = 0$:

$$0 = v_{xi}^2 + 2a_x x_f = v_{xi}^2 - 2\mu_k g x_f$$

Resuelva para el coeficiente de fricción cinética:

$$\mu_k = \frac{v_{xi}^2}{2gx_f}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\mu_k = \frac{(20.0\ \text{m/s})^2}{2(9.80\ \text{m/s}^2)(115\ \text{m})} = 0.177$$

Finalizar Observe que μ_k es adimensional, como debe ser, y que tiene un valor menor, consistente con un objeto que se desliza en hielo.

Ejemplo 5.13 Aceleración de dos objetos conectados cuando la fricción está presente AM

Un bloque de masa m_2 sobre una superficie horizontal rugosa se conecta a una bola de masa m_1 mediante una cuerda ligera sobre una polea ligera sin fricción, como se muestra en la figura 5.20a. Al bloque se aplica una fuerza de magnitud F en un ángulo θ con la horizontal, como se muestra, y el bloque se desliza hacia la derecha. El coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es μ_k. Determine la magnitud de la aceleración de los dos objetos.

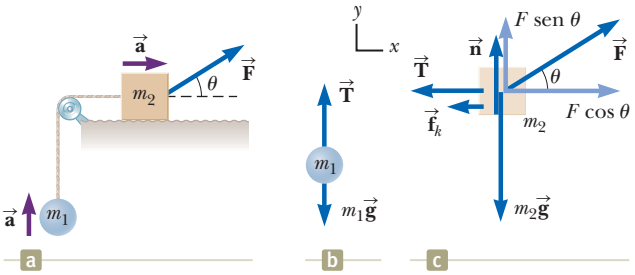


Figura 5.20 (Ejemplo 5.13) (a) La fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada como se muestra puede hacer que el bloque acelere hacia la derecha. (b) y (c) Diagramas mostrando las fuerzas sobre los dos objetos, se supone que el bloque acelera hacia la derecha y la bola acelera hacia arriba.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que ocurre conforme se aplica $\vec{\mathbf{F}}$ al bloque. Suponga que $\vec{\mathbf{F}}$ es suficientemente grande para romper la fricción estática del bloque, pero no lo suficiente para levantar el bloque, entonces éste se desliza hacia la derecha y la bola sube.

Categorizar Se pueden identificar las fuerzas y se quiere una aceleración, así que este problema se clasifica como dos *partículas bajo una fuerza neta*, la bola y el bloque. Se supone que el bloque no se eleva en el aire debido a la fuerza aplicada, el bloque se modela como una *partícula en equilibrio* en la dirección vertical.

Analizar Primero dibuje diagramas de fuerzas para los dos objetos, como se muestra en las figuras 5.20b y 5.20c. Note que la cuerda ejerce una fuerza de magnitud T sobre ambos objetos. La fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ tiene componentes x y y, $F\cos\theta$ y $F\,\text{sen}\,\theta$, respectivamente. Ya que los dos objetos están conectados, se pueden igualar las magnitudes de la componente x de la aceleración del bloque y la componente y de la aceleración de la bola y llamar a ambas a. Suponga que el movimiento del bloque es hacia la derecha.

Aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta al bloque en la dirección horizontal:

$$(1)\quad \sum F_x = F\cos\theta - f_k - T = m_2 a_x = m_2 a$$

Como el bloque sólo se mueve horizontalmente, aplique al bloque el modelo de partícula en equilibrio en la dirección vertical:

$$(2)\quad \sum F_y = n + F\,\text{sen}\,\theta - m_2 g = 0$$

Aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta a la bola en la dirección vertical:

$$(3)\quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a$$

Resuelva la ecuación (2) para n:

$$n = m_2 g - F\,\text{sen}\,\theta$$

Sustituya n en $f_k = \mu_k n$ de la ecuación 5.10:

$$(4)\quad f_k = \mu_k(m_2 g - F\,\text{sen}\,\theta)$$

5.13 continuación

Sustituya la ecuación (4) y el valor de T de la ecuación (3) en la ecuación (1):

$$F\cos\theta - \mu_k(m_2g - F\operatorname{sen}\theta) - m_1(a + g) = m_2a$$

Resuelva para a:

$$(5)\quad a = \frac{F(\cos\theta + \mu_k \operatorname{sen}\theta) - (m_1 + \mu_k m_2)g}{m_1 + m_2}$$

Finalizar La aceleración del bloque puede ser hacia la derecha o hacia la izquierda, depende del signo del numerador en la ecuación (5). Si el movimiento es hacia la izquierda, se debe invertir el signo de f_k en la ecuación (1) porque la fuerza de fricción cinética se debe oponer al movimiento del bloque en relación con la superficie. En este caso, el valor de a es el mismo que en la ecuación (5), con los dos signos más en el numerador cambiados a signos menos.

¿A qué se reduce la ecuación (5) si $\vec{\mathbf{F}}$ es eliminada y la superficie queda sin fricción? Llame a esta expresión la ecuación (6). ¿Esta expresión algebraica encaja con su intuición de la situación física? Ahora regrese al ejemplo 5.10 y deje que θ se anule en la ecuación (5) de ese ejemplo. Compare esa ecuación resultante con su ecuación (6) de este ejemplo 5.13. ¿Deberían las expresiones algebraicas compararse con base en las situaciones físicas?

Resumen

Definiciones

Un **marco de referencia inercial** es un marco en el que un objeto que no interactúa con otros objetos experimenta aceleración cero. Cualquier marco que se mueva con velocidad constante en relación con un marco inercial también es un marco inercial.

La **fuerza** se define como **aquello que causa un cambio en el movimiento de un objeto.**

Conceptos y principios

La **primera ley de Newton** establece que es posible encontrar un marco inercial en el que un objeto que no interactúa con otros objetos experimente aceleración cero o, de manera equivalente, en ausencia de una fuerza externa, cuando se observa desde un marco inercial, un objeto en reposo permanece en reposo y un objeto en movimiento rectilíneo uniforme conserva dicho movimiento.

La **segunda ley de Newton** afirma que la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa.

La **tercera ley de Newton** postula que, si dos objetos interactúan, la fuerza que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1.

La **fuerza gravitacional** que se ejerce sobre un objeto es igual al producto de su masa (una cantidad escalar) y la aceleración de caída libre:

$$\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}} \qquad (5.5)$$

El **peso** de un objeto es la magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto:

$$F_g = mg \qquad (5.6)$$

La **fuerza de fricción estática máxima** $\vec{\mathbf{f}}_{s,\text{máx}}$ entre un objeto y una superficie es proporcional a la fuerza normal que actúa sobre el objeto. En general, $f_s \leq \mu_s n$, donde μ_s es el **coeficiente de fricción estática** y n es la magnitud de la fuerza normal.

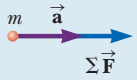
Cuando un objeto se desliza sobre una superficie, la magnitud de la **fuerza de fricción cinética** $\vec{\mathbf{f}}_k$ está dada por $f_k = \mu_k n$, donde μ_k es el **coeficiente de fricción cinética**.

continúa

Análisis de modelos para resolver problemas

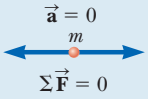
Partícula bajo una fuerza neta Si una partícula de masa m experimenta una fuerza neta distinta de cero, su aceleración se relaciona con la fuerza neta mediante la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \qquad (5.2)$$



Partícula en equilibrio Si una partícula mantiene una velocidad constante (de modo que $\vec{\mathbf{a}} = 0$), que podría incluir una velocidad de cero, las fuerzas sobre la partícula se equilibran y la segunda ley de Newton se reduce a:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0 \qquad (5.8)$$



Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. El conductor de un camión vacío que viaja con gran rapidez aplica los frenos y derrapa hasta detenerse a una distancia d. En otra ocasión, el camión lleva una carga que duplica su masa. ¿Cuál será la "distancia de derrape" del camión? (a) $4d$, (b) $2d$, (c) $\sqrt{2}d$ (d) d, (e) $d/2$.

2. En la figura PO5.2, una locomotora cae a través de la pared de una estación ferroviaria. Durante la colisión, ¿qué puede decir acerca de la fuerza que ejerce la locomotora sobre la pared? (a) La fuerza que ejerció la locomotora sobre la pared fue mayor que la fuerza que la pared podría ejercer sobre la locomotora. (b) La fuerza que ejerció la locomotora sobre la pared fue de igual magnitud que la fuerza que ejerció la pared sobre la locomotora. (c) La fuerza que ejerció la locomotora sobre la pared fue menor que la fuerza que ejerció la pared sobre la locomotora. (d) No se puede decir que la pared "ejerció" una fuerza; después de todo, se rompió.



© ND/Roger Viollet/The Image Works

Figura PO5.2

3. Los alumnos de tercer año están en un lado del patio de la escuela y los de cuarto año están en el otro. Los grupos se lanzan bolas de nieve unos a otros. Entre ellos, se mueven bolas de nieve de diversas masas con diferentes velocidades, como se muestra en la figura PO5.3. Clasifique las bolas de nieve de la (a) a la (e) de acuerdo con la magnitud de la fuerza total que se ejerce sobre cada una. Ignore la resistencia del aire. Si dos bolas de nieve se clasifican juntas, aclare el hecho.

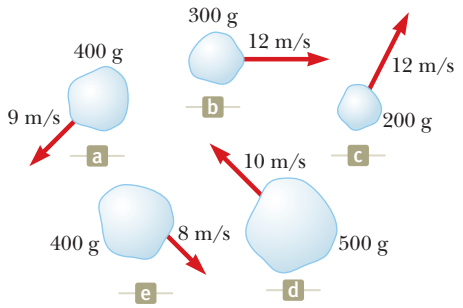


Figura PO5.3

4. El conductor de un camión que se desplaza a gran rapidez aplica los frenos y logra detenerse después de una distancia d. En otra ocasión, la rapidez inicial del camión es la mitad que en el primer suceso. ¿Ahora cuál será la distancia de derrape del camión? (a) $2d$, (b) $\sqrt{2}d$, (c) d, (d) $d/2$, (e) $d/4$

5. Se realiza un experimento sobre un disco en una mesa de hockey de aire, donde la fricción es despreciable. Se aplica una fuerza horizontal constante al disco y se mide su aceleración. Ahora el mismo disco se transporta hacia el espacio exterior, donde tanto la fricción como la gravedad son despreciables. Al disco se le aplica la misma fuerza constante (a través de una balanza de resorte que estira la misma cantidad) y se mide la aceleración del disco (en relación con las estrellas distantes). ¿Cuál es la aceleración del disco en el espacio exterior? (a) Un poco mayor que su aceleración en la Tierra. (b) La misma que su aceleración en la Tierra. (c) Menor que su aceleración en la Tierra. (d) Infinita, porque ni la fricción ni la gravedad la restringen. (e) Muy grande, porque la aceleración es inversamente proporcional al peso y el peso del disco es muy pequeño pero no cero.

6. El gerente de una tienda departamental empuja horizontalmente con una fuerza de 200 N de magnitud sobre una caja de camisas. La caja se desliza a través del suelo horizontal con una aceleración hacia adelante. Nada más toca la caja. ¿Qué debe ser verdadero acerca de la magnitud de la fuerza de fricción cinética que actúa sobre la caja? (elija una) (a) Es mayor que 200 N. (b) Es menor que 200 N. (c) Es igual a 200 N. (d) Ninguno de estos enunciados es verdadero necesariamente.

7. Dos objetos están conectados por una cuerda que pasa por una polea sin fricción, como en la figura 5.14a, donde $m_1 < m_2$ y a_1 y a_2 son las magnitudes de las respectivas aceleraciones. ¿Cuál enunciado matemático es cierto respecto de la magnitud de la aceleración a_2 de la masa m_2? (a) $a_2 < g$. (b) $a_2 > g$. (c) $a_2 = g$. (d) $a_2 < a_1$. (e) $a_2 > a_1$.
8. Un objeto de masa m se desliza con rapidez v_i en cierto instante a través de una mesa a nivel, con la que su coeficiente de fricción cinética es μ. Luego se mueve a lo largo de una distancia d y llega al reposo. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones para la rapidez v_i es razonable? (a) $v_i = \sqrt{-2\mu mgd}$ (b) $v_i = \sqrt{2\mu mgd}$ (c) $v_i = \sqrt{-2\mu gd}$ (d) $v_i = \sqrt{2\mu gd}$ (e) $v_i = \sqrt{2\mu d}$.
9. Un camión cargado con arena acelera a lo largo de una autopista. La fuerza impulsora sobre el camión permanece constante. ¿Qué ocurre con la aceleración del camión si su remolque tiene una fuga de arena con una rapidez constante a través de un orificio en su fondo? (a) Disminuye con una rapidez constante. (b) Se incrementa a razón constante. (c) Se incrementa y después disminuye. (d) Disminuye y entonces se incrementa. (e) Permanece constante.
10. Una gran caja de masa m se coloca sobre la plataforma de un camión pero no amarrada a ella. Conforme el camión acelera hacia adelante con aceleración a, la caja permanece en reposo relativo al camión. ¿Qué fuerza hace que la caja se acelere? (a) La fuerza normal. (b) La fuerza gravitacional. (c) La fuerza de fricción. (d) La fuerza ma ejercida por la caja. (e) No se requiere fuerza alguna.
11. Si un objeto está en equilibrio, cuál de los siguientes enunciados *no* es verdadero? (a) La rapidez del objeto permanece constante. (b) La aceleración del objeto es cero. (c) Es cero la fuerza neta que actúa sobre el objeto. (d) El objeto debe estar en reposo. (e) Al menos hay dos fuerzas que actúan sobre el objeto.
12. Una caja permanece fija después de ser colocada sobre una rampa inclinada a un ángulo con la horizontal. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto acerca de la magnitud de la fuerza de fricción que actúa sobre la caja? Elija todos los que sean verdaderos. (a) Es mayor que el peso de la caja. (b) Es igual a $\mu_s n$. (c) Es mayor que la componente de la fuerza gravitacional que actúa hacia abajo de la rampa. (d) Es igual a la componente de la fuerza gravitacional que actúa hacia abajo de la rampa. (e) Es menor que la componente de la fuerza gravitacional que actúa hacia abajo de la rampa.
13. Un objeto de masa m se mueve con aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ hacia abajo sobre un plano inclinado rugoso. ¿Cuál de las siguientes fuerzas deberían aparecer en un diagrama de cuerpo libre del objeto? Elija todas las respuestas correctas. (a) La fuerza gravitacional ejercida por el planeta. (b) $m\vec{\mathbf{a}}$ en la dirección del movimiento. (c) La fuerza normal ejercida por el plano inclinado. (d) La fuerza de fricción ejercida por el plano. (e) La fuerza ejercida por el objeto sobre el plano.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Si usted sostiene una barra metálica horizontal varios centímetros arriba del suelo y la mueve a través del pasto, cada hoja de pasto se dobla en el camino. Si aumenta la rapidez de la barra, cada hoja de pasto se doblará más rápidamente. En tal caso, ¿cómo corta el pasto una podadora rotatoria? ¿Cómo ejerce suficiente fuerza sobre una hoja de pasto para cortarla?
2. Sus manos están húmedas y el dispensador de toallas del baño está vacío. ¿Qué hace para quitar las gotas de agua de sus manos? ¿Cómo su acción ejemplifica una de las leyes de Newton? ¿Cuál de ellas?
3. En la película *It Happened One Night* (Columbia Pictures, 1934), Clark Gable está de pie adentro de un autobús estacionado enfrente de Claudette Colbert, quien está sentada. De pronto el autobús comienza a moverse hacia adelante y Clark cae en el regazo de Claudette. ¿Por qué ocurrió esto?
4. Si un automóvil viaja hacia el Oeste con una rapidez constante de 20 m/s, ¿cuál es la fuerza resultante que actúa sobre él?
5. Una pasajera sentada en la parte trasera de un autobús afirma que se lesionó cuando el conductor frenó bruscamente, lo que hizo que una maleta saliera volando hacia ella desde la parte delantera del autobús. Si usted fuese el juez en este caso, ¿qué sentencia haría? ¿Por qué?
6. Una niña lanza una bola hacia arriba. Ella dice que la bola se mueve alejándose de su mano porque la bola siente una "fuerza de lanzamiento" hacia arriba así como la fuerza gravitacional. (a) ¿La "fuerza de lanzamiento" supera la fuerza gravitacional? ¿Cómo se movería la bola si lo hiciera? (b) ¿La "fuerza de lanzamiento" es igual en magnitud a la fuerza gravitacional? Explique. (c) ¿Qué intensidad se puede atribuir con precisión a la "fuerza de lanzamiento"? Explique. (d) ¿Por qué la bola se aleja de la mano de la niña?
7. Una persona sostiene una bola en su mano. (a) Identifique todas las fuerzas externas que actúan sobre la bola y la fuerza de reacción a cada una vía la tercera ley de Newton. (b) Si la bola se suelta, ¿qué fuerza se ejerce sobre ella mientras cae? Identifique la fuerza de reacción en este caso. (Ignore la resistencia del aire.)
8. Un globo esférico de hule inflado con aire se mantiene fijo y su abertura, en el lado oeste, se aprieta firmemente. (a) Describa las fuerzas que ejerce el aire adentro y afuera del globo sobre secciones del hule. (b) Después que el globo se libera, despega hacia el Este y pronto gana mucha rapidez. Explique este movimiento en términos de las fuerzas que ahora actúan sobre el hule. (c) Explique el movimiento de un cohete que despega desde su plataforma de lanzamiento.
9. Una bola de hule se suelta en el suelo. ¿Qué fuerza hace que la bola rebote?
10. Veinte personas participan en un concurso de jalar la cuerda. Los dos equipos de diez personas están tan igualmente distribuidos que ningún equipo gana. Después del juego, los participantes notan que un automóvil está atorado en el lodo. Unen la cuerda del juego a la defensa del automóvil y todas las personas jalan la cuerda. El pesado

automóvil apenas se mueve un par de decímetros cuando la cuerda se rompe. ¿Por qué se rompe en esta situación, pero no cuando las mismas veinte personas jalaban sobre ella durante el juego?

11. ¿Un objeto puede ejercer una fuerza sobre sí mismo? Argumente su respuesta.

12. Cuando empuja sobre una caja con una fuerza de 200 N en lugar de una fuerza de 50 N, puede sentir que hace un mayor esfuerzo. Cuando una mesa ejerce una fuerza normal hacia arriba de 200 N en lugar de una de magnitud más pequeña, ¿la mesa realmente hace algo de modo diferente?

13. Un levantador de pesas está de pie sobre una báscula. Sube y baja una barra con pesas. ¿Qué ocurre con la lectura de la báscula mientras lo hace? **¿Qué pasaría si?** ¿Qué sucedería si en efecto él es lo suficientemente fuerte para lanzar la barra hacia arriba? ¿Ahora cómo variaría la lectura en la balanza?

14. Un atleta sujeta una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción unida al techo de un gimnasio. Al otro extremo de la cuerda se amarra un saco de arena precisamente igual en peso al atleta. Tanto el saco como el atleta al inicio están en reposo. El atleta escala la cuerda, a veces acelerando y frenando mientras lo hace. ¿Qué ocurre con el saco de arena? Explique.

15. Suponga que usted maneja un auto clásico. ¿Por qué debe evitar pisar fuertemente los frenos cuando quiera detenerse en la menor distancia posible? (Muchos automóviles modernos tienen frenos antibloqueo que evitan este problema.)

16. En la figura PC5.16, la cuerda B, inextensible, tensa y ligera, une el bloque 1 y el bloque 2 de mayor masa. La cuerda A ejerce una fuerza sobre el bloque 1 para hacerlo acelerar hacia adelante. (a) ¿Cómo se compara la magnitud de la fuerza que ejerce la cuerda A sobre el bloque 1, con la magnitud de la fuerza que ejerce la cuerda B sobre el bloque 2? ¿Es mayor, menor o igual? (b) ¿Cómo se compara la aceleración del bloque 1 con la aceleración (si la hay) del bloque 2? (c) ¿La cuerda B ejerce una fuerza sobre el bloque 1? Si es así, ¿es hacia adelante o hacia atrás? ¿Es mayor, menor o igual en magnitud a la fuerza que ejerce la cuerda B sobre el bloque 2?

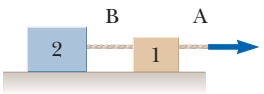


Figura PC5.16

17. Describa dos ejemplos en los cuales la fuerza de fricción ejercida sobre un objeto esté en la dirección de movimiento del objeto.

18. El alcalde de una ciudad decide reprender a algunos empleados porque no corrigen los obvios pandeos de los cables que sostienen los semáforos de la ciudad. ¿Qué explicación pueden dar los empleados? ¿Cómo piensa usted que el caso se resolverá?

19. Dé razones para las respuestas a cada una de las siguientes preguntas: (a) ¿Una fuerza normal puede ser horizontal? (b) ¿Una fuerza normal puede dirigirse verticalmente hacia abajo? (c) Considere una pelota de tenis en contacto con un suelo fijo y con nada más. ¿La fuerza normal puede ser diferente en magnitud de la fuerza gravitacional que se ejerce sobre la pelota? (d) ¿La fuerza que ejerce el suelo sobre la bola puede ser diferente en magnitud de la fuerza que la bola ejerce sobre el suelo?

20. Equilibrándose con cuidado, tres chicos avanzan en la rama horizontal de un árbol sobre un estanque, donde cada uno planea echarse un clavado. El tercer niño en la fila nota que la rama es apenas suficientemente fuerte como para sostenerlos. Decide saltar recto hacia arriba y aterrizar de nuevo sobre la rama para romperla, lo que hará que los tres caigan juntos en el estanque. Cuando comienza a realizar su plan, ¿en qué momento preciso se rompe la rama? Explique. *Sugerencia*: imagine que es el tercer niño e imite lo que hace en cámara lenta. Si todavía no está seguro, párese en una báscula de baño y repita la sugerencia.

21. Identifique los pares acción-reacción en las situaciones siguientes: (a) Un hombre da un paso. (b) Una bola de nieve golpea a una niña en la espalda. (c) Un jugador de béisbol atrapa una bola. (d) Una ráfaga de viento golpea una ventana.

22. Como se muestra en la figura PC5.22, el estudiante A, una niña de 55 kg, se sienta en una silla con patas metálicas, en reposo, en el suelo del salón de clase. El estudiante B, un niño de 80 kg, se sienta en una silla idéntica. Ambos estudiantes mantienen sus pies alejados del suelo. Una cuerda corre de las manos de la estudiante A alrededor de una polea ligera hacia las manos del profesor que está de pie en el suelo junto a ella. El eje de baja fricción de la polea se une a una segunda cuerda que sostiene el estudiante B. Todas las cuerdas corren paralelas a las patas de las sillas. (a) Si la estudiante A jala sobre su extremo de la cuerda, ¿su silla o la de B se deslizará sobre el suelo? (b) Si en vez de ello el profesor jala sobre su extremo de cuerda, ¿cuál silla se desliza? ¿Por qué ésta? (c) Si el estudiante B jala de su cuerda, ¿cuál silla se desliza? ¿Por qué? (d) Ahora el profesor ata su extremo de cuerda a la silla de la estudiante A. La estudiante A jala el extremo de cuerda en sus manos. ¿Cuál silla se desliza y por qué?

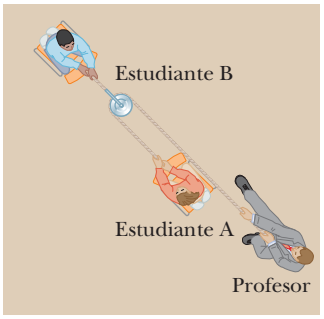


Figura PC5.22

23. Un automóvil se mueve hacia adelante lentamente y aumenta su rapidez. Un estudiante afirma que "el automóvil ejerce una fuerza sobre sí mismo" o "el motor del automóvil ejerce una fuerza sobre el automóvil". (a) Argumente que esta idea no puede ser exacta y que la fricción que ejerce el camino es la fuerza propulsora sobre el automóvil. Haga su evidencia y razonamiento tan persuasivo como sea posible. (b) ¿Es fricción estática o cinética? *Sugerencia*: considere un camino cubierto con grava ligera. Considere una impresión clara de la huella de la llanta sobre un camino de asfalto, obtenida al recubrir la huella con polvo.

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 5.1 Concepto de fuerza

Sección 5.2 Primera ley de Newton y marcos inerciales

Sección 5.3 Masa

Sección 5.4 Segunda ley de Newton

Sección 5.5 Fuerza gravitacional y peso

Sección 5.6 Tercera ley de Newton

1. Una mujer pesa 120 lb. Determine (a) su peso en newtons y (b) su masa en kilogramos.

2. Si un hombre pesa 900 N en la Tierra, ¿cuál sería su peso en Júpiter, en donde la aceleración en caída libre es de 25.9 m/s^2?

3. Un objeto de 3.00 kg se somete a una aceleración dada por $\vec{\mathbf{a}} = (2.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2. Encuentre (a) la fuerza resultante que actúa sobre el objeto y (b) la magnitud de la fuerza resultante.

4. Cierto ortodoncista utiliza frenos de alambre para alinear la dentadura de un paciente, como se muestra en la figura P5.4. La tensión en el alambre se ajusta para tener 18.0 N. Encuentre la magnitud de la fuerza neta ejercida por el alambre sobre la dentadura.

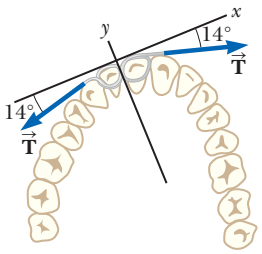


Figura P5.4

5. Para modelar una nave espacial, el motor de un cohete de juguete se sujeta firmemente a un gran disco que se puede deslizar con fricción despreciable sobre una superficie horizontal, que se toma como el plano *xy*. El disco de 4.00 kg tiene una velocidad de $3.00\hat{\mathbf{i}}$ m/s en un instante. Ocho segundos después, su velocidad es $(8.00\hat{\mathbf{i}} + 10.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Si supone que el motor del cohete ejerce una fuerza horizontal constante, encuentre (a) las componentes de la fuerza y (b) su magnitud.

6. La rapidez promedio de una molécula de nitrógeno en el aire es aproximadamente 6.70×10^2 m/s y su masa es 4.68×10^{-26} kg. (a) Si una molécula de nitrógeno tarda 3.00×10^{-13} s en golpear una pared y rebotar con la misma rapidez pero moviéndose en la dirección opuesta, ¿cuál es la aceleración promedio de la molécula durante este intervalo de tiempo? (b) ¿Qué fuerza promedio ejerce la molécula sobre la pared?

7. La distinción entre masa y peso se descubrió después que Jean Richer transportara relojes de péndulo de Francia a la Guayana Francesa en 1671. Encontró que sistemáticamente los relojes se movían más lentos ahí que en París. El efecto se invertía cuando los relojes regresaban a Francia. ¿Cuánto peso perdería usted al viajar desde París, donde $g = 9.809\ 5$ m/s^2, a la Guayana, donde $g = 9.7808$ m/s^2? (Considere cómo la aceleración para caída libre influye en el periodo de un péndulo, sección 15.5.)

8. (a) Un carro con una masa de 850 kg se mueve hacia la derecha con una rapidez constante de 1.44 m/s. ¿Cuál es la fuerza total sobre el carro? (b) ¿Cuál es la fuerza total sobre el carro si éste se mueve hacia la izquierda?

9. **Problema de repaso.** La fuerza gravitacional ejercida sobre una pelota de béisbol es de 2.21 N hacia abajo. Un pitcher lanza la bola horizontalmente con una velocidad de 18.0 m/s gracias a que la acelera uniformemente en línea recta horizontal durante un intervalo de tiempo de 170 ms. La pelota parte del reposo. (a) ¿Qué distancia recorre la bola antes de ser liberada? (b) ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza que el pitcher ejerce sobre la pelota?

10. **Problema de repaso.** La fuerza gravitacional ejercida sobre una bola de béisbol es $-F_g\hat{\mathbf{j}}$. Un pitcher lanza la pelota con velocidad $v\hat{\mathbf{i}}$ al acelerarla uniformemente en línea horizontal durante un intervalo de tiempo de $\Delta t = t - 0 = t$. (a) Partiendo del reposo, ¿qué distancia recorre la bola antes de ser liberada? (b) ¿Qué fuerza ejerce el pitcher sobre la pelota?

11. **Problema de repaso.** Un electrón de 9.11×10^{-31} kg de masa tiene una rapidez inicial de 3.00×10^5 m/s. Viaja en línea recta y su rapidez aumenta a 7.00×10^5 m/s en una distancia de 5.00 cm. Si supone que su aceleración es constante, (a) determine la fuerza que se ejerce sobre el electrón y (b) compare esta fuerza con el peso del electrón, que se ignoró.

12. Además de la fuerza gravitacional, un objeto de 2.80 kg está sometido a otra fuerza constante. El objeto parte del reposo y en 1.20 s experimenta un desplazamiento de $(4.20\hat{\mathbf{i}} - 3.30\hat{\mathbf{j}})$ m, donde la dirección de $\hat{\mathbf{j}}$ es la dirección vertical hacia arriba. Determine la otra fuerza.

13. Una o más fuerzas externas, suficientemente grandes para ser fácilmente medibles, se ejercen sobre cada objeto encerrado en un recuadro con líneas discontinuas, como se muestra en la figura 5.1. Identifique la reacción a cada una de dichas fuerzas.

14. Un ladrillo de masa *M* está sobre una almohadilla de hule de masa *m*. Juntos se deslizan hacia la derecha con velocidad constante sobre un estacionamiento cubierto de hielo. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del ladrillo e identifique cada fuerza que actúa sobre él. (b) Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la almohadilla e identifique cada fuerza que actúa sobre ella. (c) Identifique todos los pares de fuerzas acción-reacción en el sistema ladrillo-almohadilla-planeta.

15. Dos fuerzas, $\vec{\mathbf{F}}_1 = (-6.00\hat{\mathbf{i}} - 4.00\hat{\mathbf{j}})$ N y $\vec{\mathbf{F}}_2 = (-3.00\hat{\mathbf{i}} + 7.00\hat{\mathbf{j}})$ N, actúan sobre una partícula de masa 2.00 kg que inicialmente está en reposo en las coordenadas (−2.00 m, 4.00 m). (a) ¿Cuáles son las componentes de la velocidad de la partícula en $t = 10.0$ s? (b) ¿En qué dirección se mueve la partícula en el instante $t = 10.0$ s? (c) ¿Qué desplazamiento experimenta la partícula durante los primeros 10.0 s? (d) ¿Cuáles son las coordenadas de la partícula en $t = 10.0$ s?

16. La fuerza ejercida por el viento sobre las velas de un bote es de 390 N hacia el Norte. El agua ejerce una fuerza de 180 N hacia el Este. Si el bote (incluyendo su tripulación) tiene una masa de 270 kg, ¿cuáles son la magnitud y dirección de su aceleración?

17. Un objeto de masa m es liberado en $t = 0$ desde la azotea de un edificio de altura h. Mientras el objeto va descendiendo, un viento soplando paralelo a la cara del edificio ejerce una fuerza horizontal constante F sobre el objeto. (a) ¿En qué instante t el objeto golpea el suelo? Exprese t en términos de g y h. (b) Encuentre una expresión, en términos de m y F, para la aceleración a_x del objeto en la dirección horizontal (tomada como la dirección x positiva). (c) ¿Qué tanto se desplaza horizontalmente el objeto antes de golpear el piso? Responda en términos de m, g, F y h. (d) Encuentre la magnitud de la aceleración del objeto mientras cae, empleando las variables F, m y g.

18. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada a un objeto de masa m_1 produce una aceleración de 3.00 m/s^2. La misma fuerza aplicada a un segundo objeto de masa m_2 produce una aceleración de 1.00 m/s^2. (a) ¿Cuál es el valor de la razón m_1/m_2? (b) Si m_1 y m_2 se combinan en un objeto, ¿cuál es su aceleración bajo la acción de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$?

19. Dos fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ actúan sobre un objeto de 5.00 kg. Si toma $F_1 = 20.0$ N y $F_2 = 15.0$ N, encuentre las aceleraciones del objeto para las configuraciones de fuerzas mostradas en los incisos (a) y (b) de la figura P5.19.

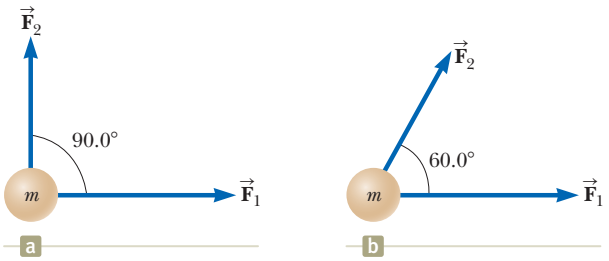


Figura P5.19

20. Usted está de pie en el asiento de una silla y luego salta. (a) Durante el intervalo de tiempo en el que está en vuelo hacia el suelo, la Tierra se mueve hacia usted con una aceleración, ¿de qué orden de magnitud? En su solución, explique su lógica. Represente a la Tierra como un objeto perfectamente sólido. (b) La Tierra se mueve hacia arriba a través de una distancia, ¿de qué orden de magnitud?

21. Un bloque de 15.0 lb descansa sobre el suelo. (a) ¿Qué fuerza ejerce el suelo sobre el bloque? (b) Una cuerda se ata al bloque y se mueve verticalmente sobre una polea. El otro extremo de la cuerda se une a un objeto de 10.0 lb que cuelga libre. ¿Cuál es la fuerza que ejerce el suelo sobre el bloque de 15.0 lb? (c) Si se sustituye el objeto de 10.0 lb del inciso (b) con un objeto de 20.0 lb, ¿cuál es la fuerza que ejerce el suelo sobre el bloque de 15.0 lb?

22. **Problema de repaso.** Tres fuerzas que actúan sobre un objeto están dadas por $\vec{\mathbf{F}}_1 = (-2.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}})$ N, y $\vec{\mathbf{F}}_2 = (5.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}})$ N, y $\vec{\mathbf{F}}_3 = (-45.0\hat{\mathbf{i}})$ N. El objeto experimenta una aceleración de 3.75 m/s^2 de magnitud. (a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración? (b) ¿Cuál es la masa del objeto? (c) Si el objeto inicialmente está en reposo, ¿cuál es su rapidez después de 10.0 s? (d) ¿Cuáles son las componentes de velocidad del objeto después de 10.0 s?

23. Un carro de 1 000 kg jala un remolque de 300 kg. Juntos, el carro y el remolque se mueven hacia adelante con una aceleración de 2.15 m/s^2. Ignore cualquier fuerza de arrastre del aire sobre el carro y todas las fuerzas de fricción sobre el remolque. Determine (a) la fuerza neta sobre el carro, (b) la fuerza neta sobre el remolque, (c) la fuerza ejercida por el remolque sobre el carro y (d) la fuerza resultante ejercida por el carro sobre el camino.

24. Si una fuerza individual constante actúa sobre un objeto que se mueve en línea recta, la velocidad del objeto es una función lineal del tiempo. La ecuación $v = v_i + at$ da su velocidad v como una función del tiempo, donde a es su aceleración constante. ¿Qué ocurre si en lugar de esto la velocidad es una función lineal de la posición? Suponga que cuando un objeto en particular se mueve a través de un medio resistivo, su rapidez disminuye de acuerdo con la ecuación $v = v_i - kx$, donde k es un coeficiente constante y x es la posición del objeto. Encuentre la ley que describe la fuerza total que actúa sobre este objeto.

Sección 5.7 Análisis de modelos utilizando la segunda ley de Newton

25. **Problema de repaso.** La figura P5.25 muestra un trabajador que empuja un bote, un modo de transporte muy eficiente, a través de un lago tranquilo. Él empuja paralelo a la longitud de la vara ligera y ejerce sobre el fondo del lago una fuerza de 240 N. Suponga que la vara se encuentra en el plano vertical que contiene la quilla del bote. En algún momento, la vara forma un ángulo de 35.0° con la vertical y el agua ejerce una fuerza de arrastre horizontal de 47.5 N sobre el bote, opuesta a su velocidad hacia adelante de 0.857 m/s de magnitud. La masa del bote, que incluye su carga y al trabajador, es de 370 kg. (a) El agua ejerce una fuerza de flotación vertical hacia arriba sobre el bote. Encuentre la magnitud de esta fuerza. (b) Modele las



AP Photo/Rebecca Blackwell

Figura P5.25

fuerzas como constantes en un intervalo corto de tiempo para encontrar la velocidad del bote 0.450 s después del momento descrito.

26. Un tornillo de hierro de 65.0 g de masa cuelga de una cuerda de 35.7 cm de largo. El extremo superior de la cuerda está fijo. Sin tocarlo, un imán atrae el tornillo de modo que permanece fijo, desplazado horizontalmente 28.0 cm a la derecha desde la línea vertical previa de la cuerda. El imán está ubicado a la derecha del tornillo y al mismo nivel vertical que el tornillo en la configuración final. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del tornillo. (b) Encuentre la tensión en la cuerda. (c) Encuentre la fuerza magnética sobre el tornillo.

27. La figura P5.27 muestra las fuerzas horizontales que actúan sobre un bote de vela que se mueve al Norte con velocidad constante, visto desde un punto justo arriba de su mástil. A esta rapidez particular, el agua ejerce una fuerza de arrastre de 220 N sobre el casco del bote y $\theta = 40°$. Para cada una de las situaciones (a) y (b) descritas abajo, escriba dos ecuaciones que representen la segunda ley de Newton en componentes. Resuelva las ecuaciones para P (la fuerza que ejerce el viento sobre la vela) y para n (la fuerza que ejerce el agua sobre la quilla). (a) Elija la dirección x como Este y la dirección y como Norte. (b) Seleccione la dirección x como $\theta = 40.0°$ al noreste y la dirección y como $\theta = 40.0°$ al noroeste. (c) Compare sus soluciones de los incisos (a) y (b). ¿Los resultados concuerdan? ¿Es un método significativamente sencillo?

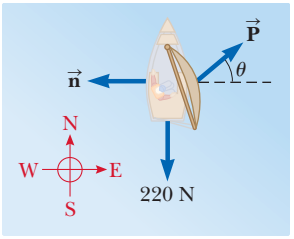


Figura P5.27

28. Los sistemas que se muestran en la figura P5.28 están en equilibrio. Si las balanzas de resorte se calibran en newtons, ¿qué lectura indican en cada caso? Ignore las masas de las poleas y cuerdas, y suponga que las poleas y el plano inclinado en la figura P5.28d no tienen fricción.

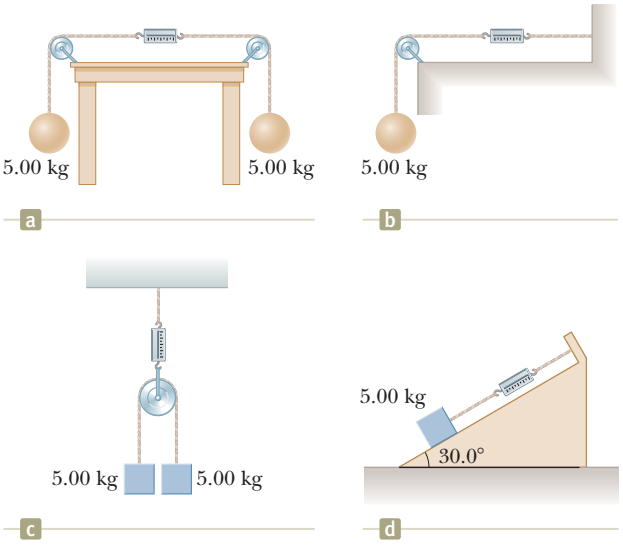


Figura P5.28

29. Suponga que los tres bloques indicados en la figura P5.29 se mueven sobre una superficie sin fricción y que una fuerza de 42 N actúa como se indica sobre el bloque de 3.0 kg. Determine (a) la aceleración del sistema, (b) la tensión en la cuerda que conecta a los bloques de 3.0 kg y 1.0 kg, y (c) la fuerza ejercida por el bloque de 1.0 kg sobre el bloque de 2.0 kg.

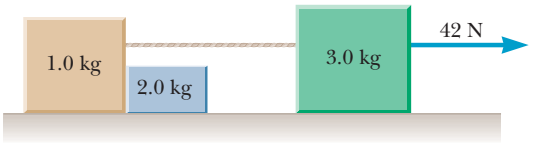


Figura P5.29

30. Un bloque se desliza hacia abajo por un plano sin fricción con una inclinación de $\theta = 15.0°$. El bloque parte del reposo en lo alto, y la longitud del plano es 2.00 m. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del bloque. Encuentre (b) la aceleración del bloque y (c) su rapidez cuando llega al fondo del plano inclinado.

31. La distancia entre dos postes de teléfono es de 50.0 m. Cuando un ave de 1.00 kg se posa sobre el alambre telefónico a la mitad entre los postes, el alambre se comba 0.200 m. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del ave. (b) ¿Cuánta tensión produce el ave en el alambre? Ignore el peso del alambre.

32. Un objeto de 3.00 kg se mueve en un plano, con sus coordenadas x y y dadas por $x = 5t^2 - 1$ y $y = 3t^3 + 2$, donde x y y están en metros y t en segundos. Encuentre la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre este objeto en $t = 2.0$ s.

33. Un saco de cemento de 325 N de peso cuelga en equilibrio de tres alambres, como se muestra en la figura P5.33. Dos de los alambres forman ángulos $\theta_1 = 60.0°$ y $\theta_2 = 40.0°$ con la horizontal. Si supone que el sistema está en equilibrio, encuentre las tensiones T_1, T_2 y T_3 en los alambres.

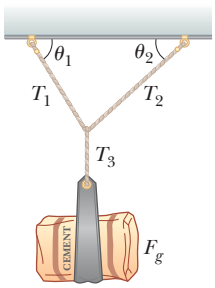


Figura P5.33
Problemas 33 y 34.

34. Un saco de cemento de peso F_g cuelga en equilibrio de tres alambres, como se muestra en la figura P5.33. Dos de los alambres forman ángulos θ_1 y θ_2 con la horizontal. Si supone que el sistema está en equilibrio, demuestre que la tensión en el alambre izquierdo es

$$T_1 = \frac{F_g \cos \theta_2}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)}$$

35. Dos personas jalan, tanto como pueden, cuerdas horizontales amarradas a un bote de masa 200 kg. Si ambas jalan en la misma dirección, el bote tiene una aceleración de 1.52 m/s^2 hacia la derecha. Si ellos jalan en direcciones opuestas, el bote tiene una aceleración de 0.518 m/s^2 hacia la izquierda. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que cada persona ejerce sobre el bote? Descarte cualquier otra fuerza horizontal sobre el bote.

36. La figura P5.36 muestra pesos colgando del techo de un elevador que se mueve a velocidad constante. Encuentre

la tensión en cada una de las tres cuerdas que sostienen a cada peso.

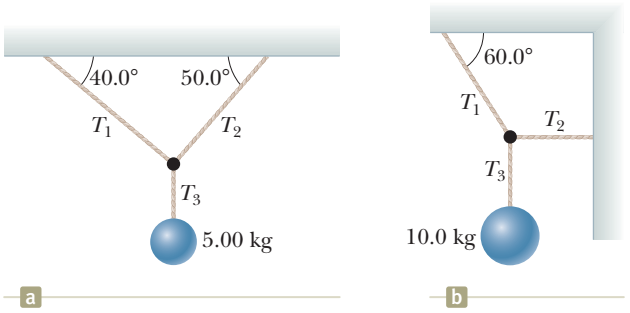


Figura P5.36

37. Se observa que un objeto de masa $m = 1.00$ kg tiene una aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ de 10.0 m/s² en una dirección a 60.0° al noreste, véase la figura P5.37. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2$ que se ejerce sobre el objeto tiene una magnitud de 5.00 N y se dirige al Norte. Determine la magnitud y dirección de la fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}_1$ que actúa sobre el objeto.

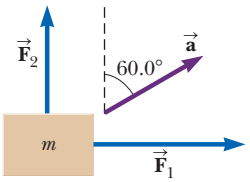


Figura P5.37

38. Una configuración similar a la que se muestra en la figura P5.38 se utiliza con frecuencia en los hospitales para soportar y aplicar tracción a una pierna lastimada. (a) Determine la fuerza de tensión en la cuerda que soporta a la pierna. (b) ¿Cuál es la fuerza de tracción ejercida hacia la derecha sobre la pierna?

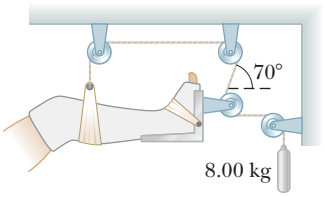


Figura P5.38

39. Un acelerómetro simple se construye dentro de un auto al colgar un objeto de masa m de una cuerda de longitud L fijada al techo del automóvil. Conforme el auto acelera el sistema cuerda-objeto hace un ángulo constante θ con la vertical. (a) Si supone que la masa de la cuerda es despreciable comparada con m, obtenga una expresión para la aceleración del auto en términos de θ y demuestre que es independiente de la masa m y la longitud L. (b) Determine la aceleración del automóvil cuando $\theta = 23.0°$.

40. Un objeto de masa $m_1 = 5.00$ kg colocado sobre una mesa horizontal sin fricción se conecta a una cuerda que pasa sobre una polea y después se une a un objeto colgante de masa $m_2 = 9.00$ kg, como se muestra en la figura P5.40. (a) Dibuje diagramas de cuerpo libre de ambos objetos. Encuentre (b) la magnitud de la aceleración de los objetos y (c) la tensión en la cuerda.

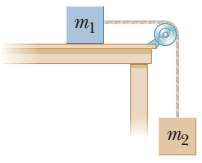


Figura 5.40
Problemas 40, 63 y 87.

41. La figura P5.41 muestra la rapidez del cuerpo de una persona mientras hace unas barras. Suponga que el movimiento es vertical y que la masa del cuerpo de la persona es 64.0 kg. Determine la fuerza ejercida por la barra sobre su cuerpo en (a) $t = 0$, (b) $t = 0.5$ s, (c) $t = 1.1$ s, y (d) $t = 1.6$ s.

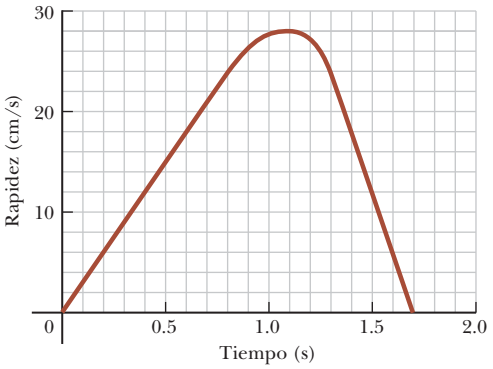


Figura P5.41

42. Dos objetos se conectan mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción, como se muestra en la figura P5.42. Suponga que el plano no tiene fricción y tome $m_1 = 2.00$ kg, $m_2 = 6.00$ kg y $\theta = 55.0°$. (a) Dibuje diagramas de cuerpo libre para ambos objetos. Encuentre (b) la magnitud de la aceleración de los objetos, (c) la tensión en la cuerda y (d) la rapidez de cada objeto 2.00 s después de su liberación desde el reposo.

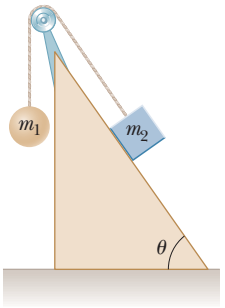


Figura P5.42

43. Dos bloques, cada uno de masa $m = 3.50$ kg, cuelgan del techo de un elevador, como lo indica la figura P5.43. (a) Si el elevador se mueve hacia arriba con aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ de magnitud 1.60 m/s², encuentre las tensiones T_1 y T_2 en las cuerdas superior e inferior. (b) Si las cuerdas pueden soportar una tensión máxima de 85.0 N, ¿qué aceleración máxima puede tener el elevador antes de que se rompa la cuerda?

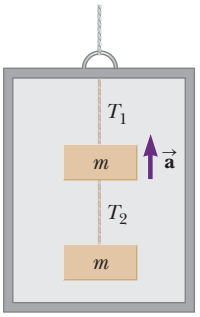


Figura P5.43
Problemas 43 y 44.

44. Dos bloques, cada uno de masa m, cuelgan del techo de un elevador, como lo indica la figura P5.43. El elevador tiene una aceleración hacia arriba a. Las cuerdas son de masa despreciable. (a) Encuentre las tensiones T_1 y T_2 en las cuerdas superior e inferior en términos de m, a y g. (b) Compare las dos tensiones y determine cuál cuerda se romperá primero si a es suficientemente grande. (c) ¿Cuáles son las tensiones si se rompe el cable que soporta al elevador?

45. En el sistema que se muestra en la figura P5.45, una fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}_x$ actúa sobre un objeto de masa $m_2 = 8.00$

kg. La superficie horizontal no tiene fricción. Considere la aceleración del objeto deslizante como una función de F_x. (a) ¿Para qué valores de F_x el objeto de masa $m_1 = 2.00$ kg acelera hacia arriba? (b) ¿Para qué valores de F_x la tensión en la cuerda es cero? (c) Grafique la aceleración del objeto m_2 vs. F_x. Incluya valores de F_x desde −100 N hasta +100 N.

46. Un objeto de masa m_1 cuelga de una cuerda que pasa por una ligera polea fija P_1, como se muestra en la figura P5.46. La cuerda se conecta a una segunda polea muy ligera P_2. Una segunda cuerda pasa por esta polea con un extremo fijo a una pared y el otro a un objeto de masa m_2 sobre una mesa horizontal sin fricción. (a) Si a_1 y a_2 son las aceleraciones de m_1 y m_2, respectivamente, ¿cuál es la relación entre dichas aceleraciones? Encuentre expresiones para (b) las tensiones en las cuerdas y (c) las aceleraciones a_1 y a_2 en términos de las masas m_1 y m_2, y de g.

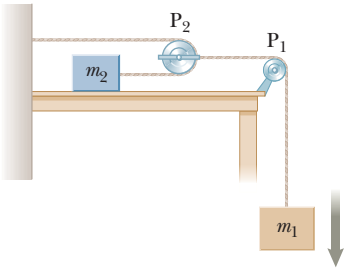


Figura P5.46

47. A un bloque se le da una velocidad inicial de 5.00 m/s hacia arriba de un plano inclinado sin fricción y a un ángulo $\theta = 20.0°$ (figura P5.47) ¿Hasta dónde se desliza el bloque hacia arriba del plano antes de llegar al reposo?

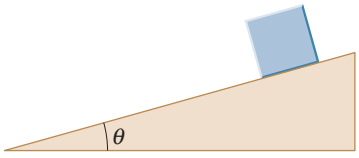


Figura P5.47

48. Un auto queda atorado en el lodo. Una grúa jala al automóvil, como se muestra en la figura P5.48. El cable de la grúa tiene una tensión de 2 500 N y jala hacia abajo y hacia la izquierda sobre el perno en su parte superior. El ligero perno se mantiene en equilibrio debido a las fuerzas ejercidas por las barras A y B. Cada barra es un *puntal*; es decir, las barras tienen un peso pequeño comparado con las fuerzas que ellas ejercen en los pernos de sus extremos. Cada puntal ejerce una fuerza paralela a su longitud. Determine la fuerza de tensión o de compresión en cada puntal. Proceda como sigue. Haga una conjetura de cómo actúan (empujando o jalando) las fuerzas en el perno superior. Dibuje un diagrama de cuerpo libre del perno. Utilice la condición de equilibrio del perno para trasladar el diagrama de cuerpo libre a ecuaciones. A partir de las ecuaciones calcule las fuerzas ejercidas por los puntales A y B. Si usted obtiene una respuesta positiva, entonces son correctas las direcciones inicialmente propuestas para las fuerzas. Una respuesta negativa significa que la dirección debe invertirse, pero es correcto el valor absoluto de la magnitud de la fuerza. Si un puntal jala sobre el perno, entonces es tensión. Si empuja, entonces el puntal está bajo compresión. Identifique si cada puntual está en tensión o en compresión.

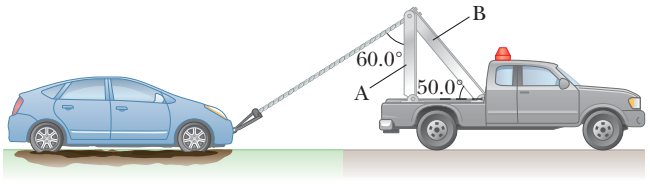


Figura P5.48

49. Dos bloques de masa 3.50 kg y 8.00 kg están conectados mediante una cuerda sin masa que pasa por una polea sin fricción (figura P5.49). Los planos inclinados carecen de fricción. Encuentre (a) la magnitud de la aceleración de cada bloque y (b) la tensión en la cuerda.

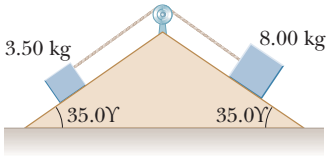


Figura P5.49 Problemas 49 y 71.

50. En la máquina de Atwood discutida en el ejemplo 5.9 y mostrada en la figura 5.14a, $m_1 = 2.00$ kg y $m_2 = 7.00$ kg. Las masas de la polea y la cuerda son despreciables si se les compara. La polea gira sin fricción y la cuerda no se estira. El objeto más ligero se libera con un rápido empujón que lo pone en movimiento a $v_i = 2.40$ m/s hacia abajo. (a) ¿Qué distancia descenderá m_1 abajo de su nivel inicial? (b) Encuentre la velocidad de m_1 después de 1.80 s.

51. En el ejemplo 5.8 se investigó el peso aparente de un pescado en un elevador. Ahora considere a un hombre de 72.0 kg de pie sobre una báscula de resorte en un elevador. A partir del reposo, el elevador asciende y logra su rapidez máxima de 1.20 m/s en 0.800 s. Viaja con esta rapidez constante durante los siguientes 5.00 s. En tal caso el elevador se somete a una aceleración uniforme en la dirección y negativa durante 1.50 s y llega al reposo. ¿Qué registra la báscula (a) antes de que el elevador comience a moverse, (b) durante los primeros 0.800 s, (c) mientras el elevador viaja con rapidez constante, y (d) durante el intervalo de tiempo que disminuye su velocidad?

Sección 5.8 Fuerzas de fricción

52. Considere un camión grande transportando una pesada carga, como vigas de acero. Un riesgo fuerte para el conductor es que la carga pueda deslizarse hacia adelante, y golpear la cabina, si el camión para repentinamente durante un accidente o al frenar. Suponga, por ejemplo, que una carga de 10 000 kg va colocada sobre un camión de 20 000 kg moviéndose a 12.0 m/s. Suponga que la carga no está amarrada al camión, y que tiene un coeficiente de fricción de 0.500 con la plataforma del camión. (a) Calcule la distancia mínima para detenerse si la carga no debe deslizarse hacia adelante respecto al camión. (b) ¿Existen algunos datos que no se necesitan para la solución?

53. Problema de repaso. Una bala de rifle, de masa 12.0 g, es disparada hacia la derecha a una velocidad de 260 m/s para golpear un saco de arena y penetrarlo 23.0 cm. Determine la magnitud y dirección de la fuerza de fricción (supuesta constante) que actúa sobre la bala.

54. Problema de repaso. Un automóvil viaja a 50.0 mi/h en una autopista horizontal. (a) Si el coeficiente de fricción estática entre camino y llantas en un día lluvioso es 0.100, ¿cuál es la distancia mínima en la que el automóvil se detendrá? (b) ¿Cuál es la distancia de frenado cuando la superficie está seca y $\mu_s = 0.600$?

55. Un bloque de 25.0 kg al inicio está en reposo sobre una superficie horizontal. Se requiere una fuerza horizontal de 75.0 N para poner al bloque en movimiento, después de la cual se necesita una fuerza horizontal de 60.0 N para mantener al bloque en movimiento con rapidez constante. Encuentre (a) el coeficiente de fricción estática y (b) el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie.

56. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Su libro de física de 3.80 kg está junto a usted sobre el asiento horizontal de su automóvil. El coeficiente de fricción estática entre el libro y el asiento es 0.650, y el coeficiente de fricción cinética es 0.550. Suponga que viaja a 72.0 km/h y frena para detenerse con aceleración constante en una distancia de 30.0 m. Su libro de física permanece sobre el asiento y no resbala hacia adelante para caer al piso.

57. Para determinar los coeficientes de fricción entre el hule y varias superficies, un estudiante utiliza un borrador de hule y un plano inclinado. En un experimento, el borrador comienza a deslizarse hacia abajo del plano cuando el ángulo de inclinación es 36.0° y entonces desciende por el plano con rapidez constante cuando el ángulo se reduce a 30.0°. A partir de estos datos, determine los coeficientes de fricción estática y cinética para este experimento.

58. Antes de 1960 se creía que el máximo coeficiente de fricción estática alcanzable para la llanta de un automóvil sobre un camino, era $\mu_s = 1$. Alrededor de 1962, tres compañías independientemente desarrollaron llantas de carreras con coeficientes de 1.6. Este problema muestra que las llantas han mejorado desde aquella ocasión. El más corto intervalo de tiempo para un automóvil con motor de pistones, inicialmente en reposo, para cubrir una distancia de un cuarto de milla es 4.43 s. (a) Suponga que las llantas traseras levantaron las delanteras del pavimento, como lo muestra la figura P5.58. ¿Qué valor mínimo de μ_s es necesario para lograr el tiempo récord? (b) Suponga que al conductor le fuera posible incrementar la potencia de su motor y mantener iguales otras cosas. ¿Cómo afectaría este cambio al intervalo de tiempo?



Jamie Squire/Allsport/Getty Images

Figura P5.58

59. El Servicio Postal de Estados Unidos requiere que el calzado de sus empleados tenga un coeficiente de fricción estática de 0.5 o más sobre una superficie específica. Un típico calzado de atletismo tiene un coeficiente de fricción estática de 0.800. En una emergencia, ¿cuál es el mínimo intervalo de tiempo en el cual una persona, partiendo del reposo, pueda moverse 3.00 m sobre dicha superficie específica si utiliza (a) el calzado del Servicio Postal con el mínimo coeficiente y (b) el típico zapato de atletismo?

60. Una mujer en un aeropuerto arrastra su maleta de 20.0 kg con rapidez constante al jalar de una correa en un ángulo θ sobre la horizontal (figura P5.60). Ella jala de la correa con una fuerza de 35.0 N, y la fuerza de fricción sobre la maleta es 20.0 N. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la maleta. (b) ¿Qué ángulo forma la correa con la horizontal? (c) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza normal que el suelo ejerce sobre la maleta?

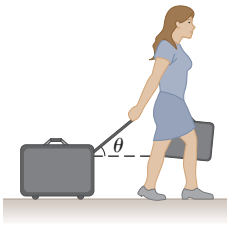


Figura P5.60

61. Problema de repaso. Un bloque de 3.00 kg parte del reposo en lo alto de un plano inclinado 30.0° y se desliza una distancia de 2.00 m hacia abajo por el plano en 1.50 s. Encuentre (a) la magnitud de la aceleración del bloque, (b) el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano, (c) la fuerza de fricción que actúa sobre el bloque y (d) la rapidez del bloque después de deslizar 2.00 m.

62. En la figura P5.62 la persona pesa 170 lb. Visto de frente, cada muleta forma un ángulo de 22.0° con la vertical. Las muletas soportan la mitad del peso del individuo. La otra mitad es soportada por las fuerzas verticales del suelo sobre los pies de la persona. Suponga que el hombre se mueve con velocidad constante y que la fuerza ejercida por el piso sobre las muletas actúa a lo largo de ellas, determine (a) el más pequeño coeficiente de fricción posible entre las muletas y el suelo, y (b) la magnitud de la fuerza de compresión en cada muleta.

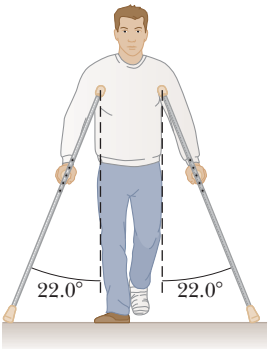


Figura P5.62

63. Un objeto suspendido de 9.00 kg se conecta, mediante una cuerda ligera inextensible sobre una polea ligera sin fricción, a un bloque de 5.00 kg que se desliza sobre una mesa plana (figura P5.40). Si toma el coeficiente de fricción cinética como 0.200, encuentre la tensión en la cuerda.

64. Tres objetos se conectan sobre una mesa, como se muestra en la figura P5.64. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque de masa m_2 y la mesa es 0.350. Los objetos tienen masas de $m_1 = 4.00$ kg, $m_2 = 1.00$ kg y $m_3 = 2.00$ kg, y las poleas no tienen fricción. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada objeto. (b) Determine la aceleración de cada objeto, incluyendo su dirección. (c) Determine las tensiones en las dos cuerdas. **¿Qué pasaría si?** (d) Si la mesa fuera lisa, ¿las tensiones aumentarían, disminuirían o quedarían intactas? Explique.

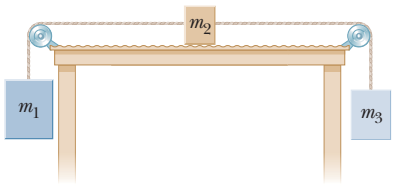


Figura P5.64

65. Dos bloques unidos mediante una cuerda de masa despreciable se arrastran mediante una fuerza horizontal (figura P6.65). Suponga que $F = 68.0$ kg, $m_1 = 12.0$ kg, $m_2 = 18.0$ kg y el coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie es 0.100. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque. Determine (b) la aceleración del sistema y (c) la tensión T en la cuerda.

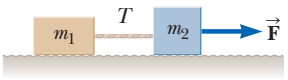


Figura P5.65

66. Un bloque de 3.00 kg de masa es empujado contra una pared mediante una fuerza $\vec{\mathbf{P}}$ que forma un ángulo $\theta = 50.0°$ con la horizontal, como se muestra en la figura P5.66. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la pared es 0.250. (a) Determine los valores posibles para la magnitud de $\vec{\mathbf{P}}$ que permiten al bloque permanecer fijo. (b) Describa qué sucede si $|\vec{\mathbf{P}}|$ tiene un valor mayor y qué ocurre si es más pequeño. (c) Repita los incisos (a) y (b) suponiendo que la fuerza forma un ángulo $\theta = 13.0°$ con la horizontal.

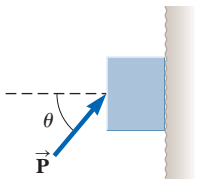


Figura P5.66

67. **Problema de repaso.** Un lado del techo de una casa se eleva a 37.0°. Un vecino lanza una piedra hacia el techo. Golpea con una rapidez de 15.0 m/s, no rebota y luego se desliza en línea recta hacia arriba del plano inclinado. El coeficiente de fricción cinética entre la piedra y el techo es 0.400. La roca se desliza 10.0 m hacia arriba del techo hasta su pico. Cruza la cresta y entra en caída libre siguiendo una trayectoria parabólica con resistencia de aire despreciable. Determine la altura máxima que la piedra alcanza arriba del punto donde golpeó al techo.

68. **Problema de repaso.** Un salmón real puede nadar a 3.58 m/s, y también puede saltar verticalmente, abandonando el agua con una rapidez de 6.26 m/s. Un salmón récord tiene 1.50 m de longitud y una masa de 61.0 kg. Considere un pez nadando en línea recta hacia arriba bajo la superficie de un lago. La fuerza gravitacional ejercida sobre el pez es casi cancelada por la fuerza de flotación ejercida por el agua, como se estudiará en el capítulo 14. El pez experimenta una fuerza P hacia arriba ejercida por el agua sobre las aletas de su cola y una fuerza hacia abajo debida a la fricción del fluido que se modela actuando sobre su extremo frontal. Suponga que la fuerza de fricción del fluido desaparece tan pronto como la cabeza del pez corta la superficie del agua, y asuma que la fuerza sobre su cola es constante. Modele la fuerza gravitacional que se elimina rápidamente cuando la mitad del pez está fuera del agua. Encuentre el valor de P.

69. **Problema de repaso.** Un mago jala un mantel de debajo de una taza de 200 g ubicada a 30.0 cm del borde de la mesa. El mantel ejerce una fuerza de fricción de 0.100 N sobre la taza y el mantel se jala con una aceleración constante de 3.00 m/s^2. ¿Cuánto se mueve la taza en relación con la mesa horizontal antes de que el mantel esté completamente afuera debajo de ella? Note que el mantel debe moverse más de 30 cm en relación con la mesa durante el proceso.

70. Un bloque de 5.00 kg se coloca encima de un bloque de 10.0 kg (figura P5.70). Una fuerza horizontal de 45.0 N es aplicada al bloque de 10.0 kg, y el bloque de 5.0 kg está amarrado a la pared. El coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies en movimiento es 0.200. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque e identifique las fuerzas de acción-reacción entre los bloques. (b) Determine la tensión en la cuerda y la magnitud de la aceleración del bloque de 10.0 kg.

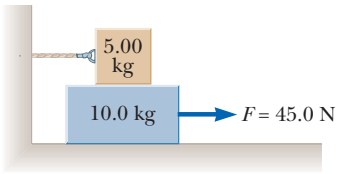


Figura P5.70

71. El sistema que se muestra en la figura P5.49 tiene una aceleración de magnitud 1.50 m/s^2. Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es el mismo para ambos planos inclinados. Encuentre (a) el coeficiente de fricción cinética y (b) la tensión en la cuerda.

Problemas adicionales

72. Un deslizador de aluminio negro flota sobre una película de aire en una pista de aire de aluminio a nivel. En esencia, el aluminio no siente fuerza en un campo magnético y la resistencia del aire es despreciable. Un imán intenso se une a lo alto del deslizador y forma una masa total de 240 g. Un trozo de chatarra de hierro unido a un tope en la pista atrae al imán con una fuerza de 0.823 N cuando el hierro y el imán están separados 2.50 cm. (a) Encuentre la aceleración del deslizador en este instante. (b) La chatarra de hierro ahora se une a otro deslizador verde y forma una masa total de 120 g. Encuentre la aceleración de cada deslizador cuando se liberan simultáneamente a 2.50 cm de separación.

73. Una joven compra un carro usado barato para carreras de autos, el cual puede lograr una rapidez de autopista con una aceleración de 8.40 mi/h × s. Haciendo cambios en su motor, ella puede incrementar la fuerza horizontal neta sobre el auto a un 24.0%. Con mucho menor gasto, ella puede quitar material del chasis del carro para disminuir su masa en 24.0%. (a) ¿Cuál de estos dos cambios resultará en un mayor incremento en la aceleración del auto? (b) Si ella realiza ambos cambios, ¿qué aceleración puede lograr?

74. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un libro se coloca sobre un plano inclinado en la superficie de la tierra. El ángulo del plano con la horizontal es 60.0°. El coeficiente de fricción cinética entre el libro y el plano es 0.300. Al tiempo $t = 0$, el libro se libera a partir del reposo. Enton-

ces el libro desliza una distancia de 1.00 m, medida a lo largo del plano, en un intervalo de tiempo de 0.483 s.

75. **Problema de repaso.** Un disco de hockey es golpeado con un bastón de hockey para darle una rapidez inicial v_i en la dirección positiva. El coeficiente de fricción cinética entre el hielo y el disco es μ_k. (a) Obtenga una expresión para la aceleración del disco cuando éste desliza en el hielo. (b) Utilice el resultado del inciso (a) para deducir una expresión para la distancia d que recorre el disco en su deslizamiento. La respuesta debe estar sólo en términos de las variables v_i, μ_k y g.

76. Un deslizador de 1.00 kg sobre un riel de aire horizontal es jalado por una cuerda a un ángulo θ. La cuerda tensa pasa por una polea y está ligada a un cuerpo colgando de masa 0.500 kg, como se muestra en la figura P5.76. (a) Muestre que la rapidez v_x del deslizador y la rapidez v_y del objeto que cuelga están relacionadas por $v_x = uv_y$, donde $u = z(z^2 - h_0^2)^{-1/2}$. (b) El deslizador se libera a partir del reposo. Demuestre que en ese instante la aceleración a_x del deslizador y la aceleración a_y del objeto colgando están relacionadas por $a_x = ua_y$. (c) Encuentre la tensión en la cuerda en el instante que se libera el deslizador, para $h_0 = 80.0$ cm y $\theta = 30.0°$.

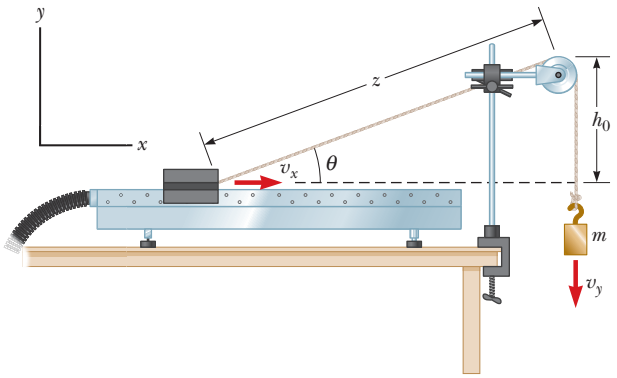


Figura P5.76

77. Un plano sin fricción tiene 10.0 m de longitud y está inclinado 35.0°. Un trineo arranca en el fondo con una rapidez inicial de 5.00 m/s hacia arriba del plano. Cuando el trineo llega al punto de reposo momentáneo, un segundo trineo se lanza desde lo alto del plano con rapidez inicial v_i. Ambos trineos llegan al mismo tiempo a la base del plano inclinado. (a) Determine la distancia que el primer trineo viajó hacia arriba sobre el plano. (b) Determine la rapidez inicial del segundo trineo.

78. Una cuerda con masa m_c está unida a un bloque de masa m_b, como en la figura P5.78. El bloque descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. La cuerda no se estira. El extremo libre de la cuerda se jala hacia la derecha con una fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}$. (a) Dibuje diagramas de fuerzas para la cuerda y el bloque, observando que la tensión en la cuerda no es uniforme. (b) Encuentre la aceleración del sistema en términos de m_c, m_b y F. (c) Encuentre la magnitud de la fuerza que la cuerda ejerce sobre el bloque. (d) ¿Qué pasa con la fuerza sobre el bloque conforme la masa de la cuerda se aproxima a cero? ¿Qué puede decirse acerca de la tensión en una cuerda *ligera* uniendo a un par de objetos en movimiento?

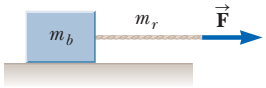


Figura P5.78

79. Dos bloques de masas m_1 y m_2 se colocan sobre una mesa en contacto mutuo, como se discutió en el ejemplo 5.7 y se mostró en la figura 5.12(a). El coeficiente de fricción cinética entre el bloque de masa m_1 y la mesa es μ_1, y entre el bloque de masa m_2 y la mesa es μ_2. Una fuerza horizontal de magnitud F es aplicada al bloque de masa m_1. Se desea encontrar P, la magnitud de la fuerza de contacto entre los bloques. (a) Dibuje diagramas que muestren las fuerzas para cada bloque. (b) ¿Cuál es la fuerza neta sobre el sistema de dos bloques? (c) ¿Cuál es la fuerza neta actuando sobre m_1? (d) ¿Cuál es la fuerza neta que actúan sobre m_2? (e) Escriba la segunda ley de Newton en la dirección x para cada bloque. (f) Resuelva las dos ecuaciones con dos incógnitas para la aceleración a de los bloques en términos de las masas, la fuerza aplicada F, los coeficientes de fricción y g. (g) Encuentre la magnitud P de la fuerza de contacto entre los bloques en términos de las mismas cantidades.

80. En un solo cable vertical ligero que no se estira, una grúa levanta un Ferrari de 1 207 kg y, bajo él, un BMW Z8 de 1 461 kg. El Ferrari se mueve hacia arriba con 3.50 m/s de rapidez y 1.25 m/s^2 de aceleración. (a) ¿Cómo se comparan la velocidad y la aceleración del BMW con las del Ferrari? (b) Encuentre la tensión en el cable entre el BMW y el Ferrari. (c) Encuentre la tensión en el cable sobre el Ferrari.

81. Un niño inventivo llamado Nick quiere alcanzar una manzana que pende de un árbol sin escalar. Sentado en una silla unida a una cuerda que pasa sobre una polea sin fricción (figura P5.81). Nick jala sobre el extremo suelto de la cuerda con tal fuerza que la balanza de resorte lee 250 N. El verdadero peso de Nick es 320 N y la silla pesa 160 N. Los pies de Nick no tocan el suelo. (a) Dibuje un par de diagramas que muestren las fuerzas para Nick y la silla considerados como sistemas separados y otro diagrama para Nick y la silla considerados como un sistema. (b) Muestre que la aceleración del sistema es *hacia arriba* y encuentre su magnitud. (c) Encuentre la fuerza que Nick ejerce sobre la silla.



Figura P5.81 Problemas 81 y 82.

82. En la situación descrita en el problema 81 y la figura P5.81, las masas de la cuerda, balanza y polea son despreciables. Los pies de Nick no tocan el suelo. (a) Suponga que Nick

está momentáneamente en reposo cuando deja de jalar la cuerda hacia abajo y pasa el extremo de la cuerda a otro niño, de 440 N de peso, que está de pie en el suelo junto a él. La cuerda no se rompe. Describa el movimiento resultante. (b) En vez de ello, suponga que Nick está momentáneamente en reposo cuando amarra el extremo de la cuerda a una saliente en forma de gancho resistente que se deriva del tronco del árbol. Explique por qué esta acción puede hacer que la cuerda se rompa.

83. En el ejemplo 5.7 se empujaron dos bloques sobre una mesa. Suponga que tres bloques están en contacto mutuo sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P5.83. A m_1 se le aplica una fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}$. Tome $m_1 = 2.00$ kg, $m_2 = 3.00$ kg, $m_3 = 4.00$ kg y $F = 18.0$ N. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque. (b) Determine la aceleración de los bloques. (c) Encuentre la fuerza *resultante* sobre cada bloque. (d) Encuentre las magnitudes de las fuerza de contacto entre los bloques. (e) Usted trabaja en un proyecto de construcción. Un colaborador clava cartón-yeso en un lado de un separador ligero y usted está en el lado opuesto, proporcionando "respaldo" al apoyarse contra la pared con su espalda, empujando sobre ella. Cada golpe de martillo hace que su espalda sufra un pinchazo. El supervisor lo ayuda al poner un pesado bloque de madera entre la pared y su espalda. Use la situación analizada en los incisos (a), (b) y (c) como modelo, y explique cómo este cambio funciona para hacer su trabajo más confortable.

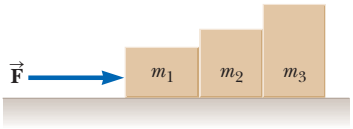


Figura P5.83

84. Un bloque de aluminio de masa $m_1 = 2.00$ kg y un bloque de cobre de masa $m_2 = 6.00$ kg se conectan mediante una cuerda ligera sobre una polea sin fricción. Se asientan sobre una superficie de acero, como se muestra en la figura P5.84, donde $\theta = 30.0°$. (a) Cuando se liberan del reposo, ¿comenzarán a moverse? Si es así, determine (b) su aceleración y (c) la tensión en la cuerda. Si no, determine la suma de las magnitudes de las fuerzas de fricción que actúan sobre los bloques.

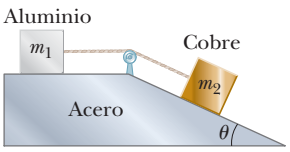


Figura P5.84

85. Un objeto de masa M se mantiene en su lugar mediante una fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ y un sistema de polea, como se indica en la figura P5.85. Las poleas no tienen masa ni fricción. (a) Dibuje diagramas mostrando las fuerzas sobre cada polea. Encuentre (b) la tensión en cada sección de cuerda, T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5, y (c) la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}$.

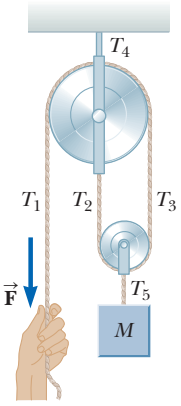


Figura P5.85

86. Una *máquina* es cualquier dispositivo que permite incrementar la fuerza que uno ejerce. Algunas máquinas, como la palanca o el plano inclinado, son muy simples. Otras máquinas ni siquiera parecen serlo. Por ejemplo, su auto se estanca en el lodo y usted no puede jalar lo suficientemente fuerte para sacarlo. Sin embargo, utiliza un largo cable que conecta entre su defensa frontal y el tronco de un árbol. Ahora usted jala sobre el cable en su punto medio, ejerciendo una fuerza f. Cada mitad del cable se desplaza un pequeño ángulo θ de la línea recta entre los extremos del cable. (a) Obtenga una expresión para la fuerza actuando sobre el auto. (b) Evalúe la tensión del cable para el caso donde $\theta = 7.00°$ y $f = 100$ N.

87. Objetos con masas $m_1 = 10.0$ kg y $m_2 = 5.00$ kg están conectados mediante una cuerda ligera que pasa por una polea sin fricción como en la figura P5.40. Si, cuando el sistema arranca del reposo, m_2 cae 1.00 m en 1.20 s, determine el coeficiente de fricción cinética entre m_1 y la mesa.

88. Considere los tres objetos conectados como lo indica la figura P5.88. Primero suponga que el plano inclinado es sin fricción y que el sistema está en equilibrio. En términos de m, g y θ, encuentre (a) la masa M y (b) las tensiones T_1 y T_2. Ahora suponga que el valor de M es el doble del valor encontrado en el inciso (a). Encuentre (c) la aceleración de cada objeto y (d) las tensiones T_1 y T_2. Después, suponga que el coeficiente de fricción estática entre m y $2m$ y el plano inclinado es μ_s, y que el sistema está en equilibrio. Encuentre (e) el máximo valor de M y (f) el mínimo valor de M. (g) Compare los valores de T_2 cuando M tiene sus valores mínimo y máximo.

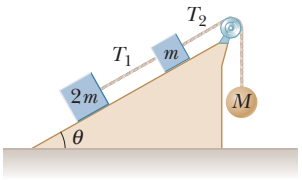


Figura P5.88

89. Una caja de peso F_g es empujada mediante una fuerza $\vec{\mathbf{P}}$ sobre un piso horizontal, como se muestra en la figura P5.89. El coeficiente de fricción estática es μ_s y $\vec{\mathbf{P}}$ se dirige a un ángulo θ bajo la horizontal. (a) Demuestre que el valor mínimo de P que moverá la caja está dado por

$$P = \frac{\mu_s F_g \sec\theta}{1 - \mu_s \tan\theta}$$

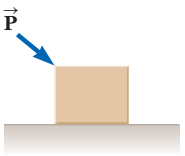


Figura P5.89

(b) Encuentre la condición sobre θ, en términos de μ_s, tal que sea imposible el movimiento de la caja para cualquier valor de P.

90. A un estudiante se le pide medir la aceleración de un deslizador sobre un plano inclinado sin fricción, empleando un riel de aire, un cronómetro y una regla graduada. La altura medida del plano es 1.774 cm más alta que la base del riel, y la longitud de éste es $d = 127.1$ cm. El deslizador se libera desde el reposo en lo alto del plano, tomado como $x = 0$, y su posición x a lo largo del plano se mide como función del tiempo. Para valores x de 10.0 cm, 20.0 cm, 35.0 cm, 50.0 cm, 75.0 cm y 100 cm, los tiempos a los

que se alcanzan estas posiciones (promediados sobre cinco corridas) son 1.02 s, 1.53 s, 2.01 s, 2.64 s, 3.30 s y 3.75 s, respectivamente. (a) Construya una gráfica de x contra t^2 y realice a los datos un ajuste lineal por mínimos cuadrados. (b) Determine la aceleración del deslizador a partir de la pendiente de esta gráfica. (c) Explique cómo su respuesta al inciso (b) se compara con el valor teórico que usted puede calcular empleando la expresión $a = g \operatorname{sen} \theta$ deducida en el ejemplo 5.6.

91. Un cojín neumático de masa m se libera desde el reposo en lo alto de un edificio que tiene una altura h. Un viento que sopla a lo largo del lado del edificio ejerce una fuerza horizontal constante de magnitud F sobre el cojín conforme cae, como se muestra en la figura P5.91. El aire no ejerce fuerza vertical. (a) Demuestre que la trayectoria del cojín es una línea recta. (b) ¿El cojín cae con velocidad constante? Explique. (c) Si $m = 1.20$ kg, $h = 8.00$ m y $F = 2.40$ N, ¿a qué distancia del edificio el cojín golpeará el nivel del suelo? **¿Qué pasaría si?** (d) Si el cojín se lanza hacia abajo con una rapidez distinta de cero, desde lo alto del edificio, ¿cuál será la forma de su trayectoria? Explique.

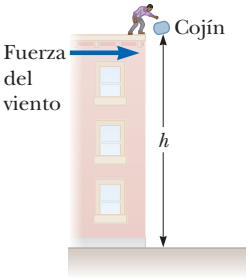


Figura P5.91

92. En la figura P5.92 la polea y la cuerda son ligeras, todas las superficies carecen de fricción y la cuerda no se estira. (a) ¿Qué comparación puede hacerse entre las aceleraciones de los bloques 1 y 2? Explique su razonamiento. (b) La masa del bloque 2 es 1.30 kg. Encuentre su aceleración que depende de la masa m_1 del bloque 1. (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué predice el resultado del inciso (b) si m_1 es mucho menor que 1.30 kg? (d) ¿Qué predice el resultado de la parte (b) si m_1 se aproxima a infinito? (e) En este último caso, ¿cuál es la tensión en la cuerda? (f) ¿Podría usted anticipar las respuestas de los incisos (c), (d) y (e) sin hacer primero el inciso (b)? Explique.

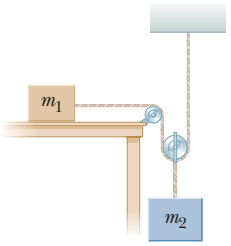


Figura P5.92

93. ¿Qué fuerza horizontal debe aplicarse a un gran bloque de masa M, que se muestra en la figura P5.93, para que los otros bloques permanezcan fijos respecto a M? Suponga que todas las superficies y la polea carecen de fricción. Note que la fuerza ejercida por la cuerda acelera a m_2.

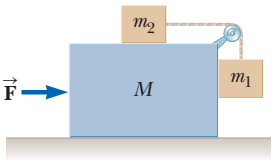


Figura P5.93
Problemas 93 y 98.

94. Un objeto de 8.40 kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado fijo sin fricción. Use una computadora para determinar y tabular (a) la fuerza normal que se ejerce sobre el objeto y (b) su aceleración para una serie de ángulos de inclinación (medidos desde la horizontal) que varían de 0° a 90° en incrementos de 5°. (c) Trace una gráfica de la fuerza normal y la aceleración como funciones del ángulo de inclinación. (d) En los casos límite de 0° y 90°, ¿sus resultados son consistentes con el comportamiento conocido?

95. Un auto acelera hacia abajo de la colina (figura P5.95), partiendo del reposo a 30.0 m/s en 6.00 s. Un juguete dentro del carro cuelga de una cuerda fijada al techo del auto. La bola en la figura representa al juguete, de masa 0.100 kg. La aceleración es tal que la cuerda permanece perpendicular al techo. Determine (a) el ángulo θ y (b) la tensión en la cuerda.

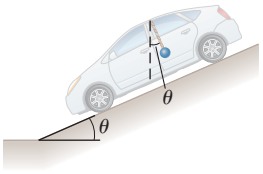
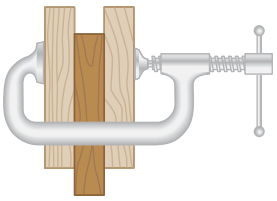


Figura P5.95

Problemas de desafío

96. Una fuerza dependiente del tiempo, $\vec{\mathbf{F}} = (8.00\hat{\mathbf{i}} - 4.00t\hat{\mathbf{j}})$, donde $\vec{\mathbf{F}}$ está en newtons y t está en segundos, se ejerce sobre un objeto de 2.00 kg inicialmente en reposo. (a) ¿En qué tiempo se moverá con una rapidez de 15.0 m/s? (b) ¿A qué distancia está el objeto de su posición inicial cuando su rapidez es 15.0 m/s? (c) ¿A través de qué desplazamiento total el objeto viajó en este momento?

97. La tabla prensada entre otras dos tablas en la figura P5.97 pesa 95.5 N. Si el coeficiente de fricción estática entre las tablas es 0.663, ¿cuál debe ser la magnitud de las fuerzas de compresión (supuestas horizontales) actuando sobre ambos lados de la tabla central para evitar que ésta resbale?


Figura P5.97

98. Inicialmente, el sistema de objetos mostrado en la figura P5.93 se mantiene sin movimiento. La polea, todas las superficies y las ruedas carecen de fricción. Acepte que la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ es cero y suponga que m_1 sólo se puede mover verticalmente. En el instante después de liberar al sistema de objetos, encuentre (a) la tensión T en la cuerda, (b) la aceleración de m_2, (c) la aceleración de M, y (d) la aceleración de m_1. (*Nota*: La polea acelera junto con el sistema.)

99. Un bloque de masa 2.20 kg se acelera sobre una superficie rugosa, mediante una cuerda ligera que pasa por una pequeña polea, como se indica en la figura P5.99. La tensión T en la cuerda se mantiene a 10 N, y la polea está a 0.100 m por arriba del bloque. El coeficiente de fricción cinética es 0.400. (a) Determine la aceleración del bloque cuando $x = 0.400$ m. (b) Describa el comportamiento general de la aceleración conforme el bloque se desliza desde una ubicación con x grande hasta $x = 0$. (c) Encuentre el valor máximo de la aceleración y la posición x en donde esto

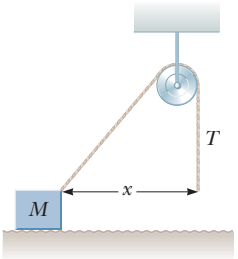


Figura P5.99

ocurre. (d) Encuentre el valor de x para el cual la aceleración es cero.

100. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Una tostadora de 1.30 kg no está conectada. El coeficiente de fricción estática entre la tostadora y un mostrador horizontal es 0.350. Para hacer que la tostadora comience a moverse, usted jala descuidadamente su cordón eléctrico. Desafortunadamente, el cordón se ha debilitado debido a acciones similares y se romperá si la tensión en él excede 4.00 N. Jalando el cordón en un ángulo particular, usted logra que se mueva la tostadora sin romper el cordón.

101. **Problema de repaso.** Un bloque de masa $m = 2.00$ kg se libera desde el reposo en $h = 0.500$ m sobre la superficie de una mesa, en lo alto de un plano inclinado con $\theta = 30.0°$, como se muestra en la figura P5.101. El plano sin fricción está fijo sobre una mesa de altura $H = 2.00$ m. (a) Determine la aceleración del bloque conforme resbala por el plano. (b) ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando abandona el plano? (c) ¿Qué tan lejos de la mesa el bloque golpea el suelo? (d) ¿Qué intervalo de tiempo transcurre desde que se libera el bloque hasta que éste golpea el suelo? (e) ¿La masa del bloque afecta a los resultados anteriores?

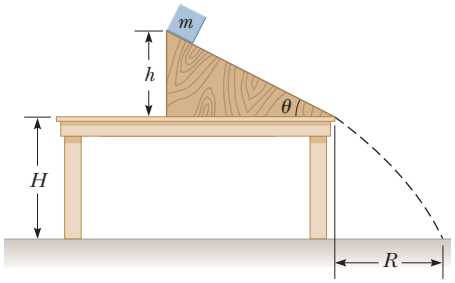


Figura P5.101 Problemas 101 y 102.

102. En la figura P5.101 el plano inclinado tiene masa M y está clavado a la mesa horizontal. El bloque de masa m se coloca cerca del fondo del plano y es liberado con un empujón para deslizarlo hacia arriba. El bloque para cerca de lo alto del plano, como se muestra en la figura, y después se desliza hacia abajo, siempre sin fricción. Encuentre la fuerza que la mesa ejerce sobre el plano durante este movimiento en términos de m, M, g y θ.

103. Un bloque de masa $m = 2.00$ kg descansa sobre el extremo izquierdo de un bloque de masa $M = 8.00$ kg. El coeficiente de fricción cinética entre ambos bloques es 0.300, y la superficie sobre la que descansa el bloque de 8.00 kg carece de fricción. Se aplica una fuerza constante horizontal de magnitud $F = 10.0$ N al bloque de 2.00 kg, poniéndolo en movimiento, como se muestra en la figura P5.103a. Si la distancia L que viaja el extremo del bloque más pequeño sobre el más grande es 3.00 m, (a) ¿en qué intervalo de tiempo el bloque pequeño estará en el extremo derecho del bloque de 8.00 kg, como se indica en la figura P5.103b? (*Nota*: Ambos bloques se ponen en movimiento cuando se aplica $\vec{\mathbf{F}}$.) (b) ¿Durante el proceso cuánto se mueve el bloque de 8.00 kg?

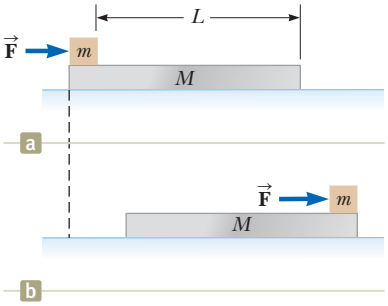


Figura P5.103

104. Una escultura con partes móviles se forma al soportar cuatro mariposas metálicas de igual masa m de una cuerda de longitud L. Los puntos de soporte están igualmente espaciados una distancia ℓ, como se ilustra en la figura P5.104. La cuerda forma un ángulo θ_1 con el techo en cada punto final. La sección central de la cuerda es horizontal. (a) Encuentre la tensión en cada sección de cuerda en términos de θ_1, m y g. (b) Encuentre el ángulo θ_2, en términos de θ_1, que las secciones de cuerda entre las mariposas exteriores y las mariposas interiores forman con la horizontal. (c) Demuestre que la distancia D entre los puntos extremos de la cuerda es

$$D = \frac{L}{5}\left\{2\cos\theta_1 + 2\cos[\tan^{-1}(\tfrac{1}{2}\tan\theta_1)] + 1\right\}$$

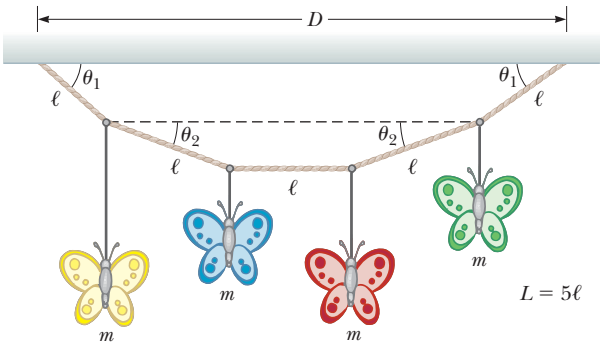


Figura P5.104

CAPÍTULO

6

Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton

6.1 Extensión de la partícula en el modelo del movimiento circular uniforme

6.2 Movimiento circular no uniforme

6.3 Movimiento en marcos acelerados

6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas



Kyle Busch, conductor del #18 de Snickers Toyota, conduce a Jeff Gordon, conductor del #24 Dupont Chevrolet, durante la NASCAR Sprint Cup Series Kobalt Tools 500 en el Atlanta Motor Speedway el 9 de marzo del 2008, en Hampton, Georgia. Los autos viajan en una carretera peraltada para ayudarles a experimentar movimientos circulares en las vueltas. *(Chris Graythen/Getty Images para NASCAR)*

En el capítulo anterior se presentaron e incorporaron las leyes de movimiento de Newton a dos análisis de modelos que suponen movimiento lineal. Ahora se analiza un movimiento que es un poco más complejo. Por ejemplo, se aplicarán las leyes de Newton a objetos que viajan en trayectorias circulares. También se discutirá el movimiento que se observa desde un marco de referencia acelerado y el movimiento de un objeto a través de un medio viscoso. En mayor medida, este capítulo consiste en una serie de ejemplos seleccionados para ilustrar la aplicación de las leyes de Newton a diferentes circunstancias.

6.1 Extensión de la partícula en el modelo del movimiento circular uniforme

En la sección 4.4 se discutió el modelo de una partícula en movimiento circular uniforme, en el que una partícula se mueve con una rapidez constante v en una trayectoria circular de radio r. La partícula experimenta una aceleración que tiene una magnitud

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

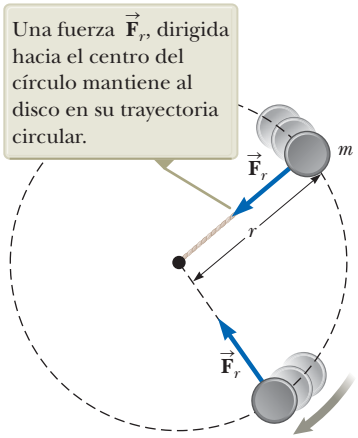


Figura 6.1 Vista superior de un disco móvil en una trayectoria circular en un plano horizontal.

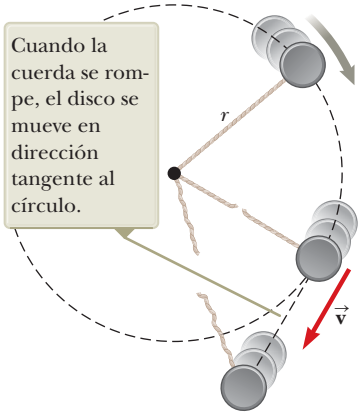


Figura 6.2 Se rompe la cuerda que sostiene al disco en su trayectoria circular.

La aceleración se llama *aceleración centrípeta* porque $\vec{\mathbf{a}}_c$ se dirige hacia el centro del círculo. Además, $\vec{\mathbf{a}}_c$ *siempre* es perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}$. (Si hubiera una componente de la aceleración paralela a $\vec{\mathbf{v}}$, la rapidez de la partícula cambiaría.)

Ahora se incorpora el concepto de fuerza en la partícula en el modelo de movimiento circular uniforme de la sección 4.4. Considere un disco de masa m que se amarra a una cuerda de longitud r para hacerlo girar con rapidez constante en una trayectoria circular horizontal, como se ilustra en la figura 6.1. Su peso se sostiene mediante una mesa sin fricción, y la cuerda está anclada a una estaca en el centro de la trayectoria circular del disco. ¿Por qué el disco se mueve en un círculo? De acuerdo con la primera ley de Newton, el disco se movería en una línea recta si no hubiese fuerza sobre ella; sin embargo, la cuerda evita el movimiento a lo largo de una línea recta al ejercer en el disco una fuerza radial $\vec{\mathbf{F}}_r$ que lo hace seguir la trayectoria circular. Esta fuerza se dirige a lo largo de la cuerda hacia el centro del círculo, como se muestra en la figura 6.1.

Si se aplica la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección radial, la fuerza neta que causa la aceleración centrípeta se relaciona con la aceleración del modo siguiente:

$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r} \tag{6.1}$$

◀ **Fuerza que causa aceleración centrípeta**

Una fuerza que causa una aceleración centrípeta actúa hacia el centro de la trayectoria circular y genera un cambio en la dirección del vector velocidad. Si dicha fuerza desapareciera, el objeto ya no se movería en su trayectoria circular; en vez de ello, se movería a lo largo de una trayectoria en línea recta tangente al círculo. Esta idea se ilustra en la figura 6.2 para el disco que gira al final de una cuerda en un plano horizontal. Si la cuerda se rompe en algún instante, el disco se mueve a lo largo de la trayectoria en línea recta que es tangente al círculo en la posición del disco en ese instante.

Examen rápido 6.1 Usted viaja en una rueda de la fortuna que gira con rapidez constante. La cabina en la que viaja siempre mantiene su orientación correcta hacia arriba; no se invierte. **(i)** ¿Cuál es la dirección de la fuerza normal sobre usted desde el asiento cuando está en lo alto de la rueda? (a) hacia arriba, (b) hacia abajo, (c) imposible de determinar. **(ii)** De las mismas opciones, ¿cuál es la dirección de la fuerza neta sobre usted cuando está en lo alto de la rueda?

Prevención de riesgos ocultos 6.1

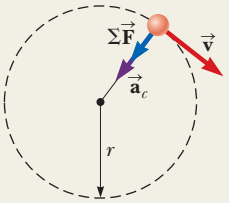
Dirección de viaje cuando la cuerda se corta Estudie la figura 6.2 con atención. Muchos estudiantes (de manera errónea) piensan que el disco se moverá radialmente, alejándose del centro del círculo, cuando la cuerda se corte. La velocidad del disco es tangente al círculo. Por la primera ley de Newton, el disco continúa moviéndose en la misma dirección en la que se movía justo cuando desaparece la fuerza de la cuerda.

Análisis de modelo Partícula en movimiento circular uniforme (extensión)

Imagine un objeto en movimiento que se puede modelar como una partícula. Si se mueve en una trayectoria circular de radio r a una velocidad constante v, experimenta una aceleración centrípeta. Ya que la partícula se está acelerando, debe haber una fuerza neta que actúe sobre la partícula. Esa fuerza se dirige hacia el centro de la trayectoria circular y está dada por

$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r} \qquad (6.1)$$

Ejemplos



- la tensión en una cuerda de longitud constante actuando sobre una piedra que gira en círculo
- la fuerza gravitacional que actúa sobre un planeta que viaja alrededor del Sol en una órbita perfectamente circular (capítulo 13)
- la fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada moviéndose en un campo magnético uniforme (capítulo 29)
- la fuerza eléctrica que actúa sobre un electrón en órbita alrededor de un núcleo en el modelo de Bohr del átomo del hidrógeno (capítulo 42)

Ejemplo 6.1 El péndulo cónico AM

Una pequeña bola de masa m se suspende de una cuerda de longitud L. La bola da vueltas con rapidez constante v en un círculo horizontal de radio r, como se muestra en la figura 6.3. (La cuerda hace un recorrido de la superficie en forma de cono, de ahí el nombre del sistema.) Encuentre una expresión para v en términos de la figura 6.3.

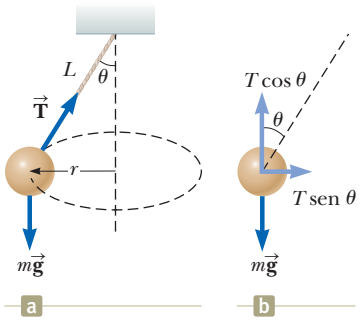


Figura 6.3 (Ejemplo 6.1) (a) Péndulo cónico. La trayectoria del objeto es un círculo horizontal. (b) Fuerzas que actúan sobre la bola.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Examine el movimiento de la bola en la figura 6.3a y observe que la cuerda hace un recorrido en cono y que la bola se mueve en círculo horizontal.

Categorizar La bola en la figura 6.3 no tiene aceleración vertical. Debido a eso, se le modela como una *partícula en equilibrio* respecto de la dirección vertical. Experimenta una aceleración centrípeta en la dirección horizontal, de modo que se le modela como una partícula en *movimiento circular uniforme* en esta dirección.

Analizar Sea θ el ángulo entre la cuerda y la vertical. En el diagrama de fuerzas sobre la bola, como se muestra en la figura 6.3b, la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cuerda se resuelve en una componente vertical $T\cos\theta$ y una componente horizontal $T\,\text{sen}\,\theta$ que actúa hacia el centro de la trayectoria circular.

Aplique el modelo de partícula en equilibrio en la dirección vertical:

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$

$$(1)\quad T\cos\theta = mg$$

Use la ecuación 6.1 del modelo de partícula en movimiento circular uniforme en la dirección horizontal:

$$(2)\quad \sum F_x = T\,\text{sen}\,\theta = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

Divida la ecuación (2) entre la ecuación (1) y use $\text{sen}\,\theta/\cos\theta = \tan\theta$:

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

Resuelva para v:

$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

Sustituya $r = L\,\text{sen}\,\theta$ a partir de la geometría a la figura 6.3a

$$v = \sqrt{Lg\,\text{sen}\,\theta\tan\theta}$$

Finalizar Observe que la rapidez es independiente de la masa de la bola. Considere lo que ocurre cuando θ va a 90°, de modo que la cuerda es horizontal. Puesto que la tangente de 90° es infinita, la rapidez v es infinita, lo que nos dice que la cuerda posiblemente no es horizontal. Si lo fuese, no habría componente vertical de la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ para equilibrar la fuerza gravitacional en la bola. Por esta razón, en la figura 6.1 se mencionó que el peso del disco se sostiene mediante una mesa sin fricción.

Ejemplo 6.2 ¿Qué tan rápido puede girar? AM

Un disco de 0.500 kg de masa se une al extremo de una cuerda de 1.50 m de largo. El disco da vueltas en un círculo horizontal como se muestra en la figura 6.1. Si la cuerda resiste una tensión máxima de 50.0 N, ¿cuál es la máxima rapidez a la que gira el disco antes de que se rompa la cuerda? Suponga que la cuerda permanece horizontal durante el movimiento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Tiene sentido que, mientras más fuerte sea la cuerda, más rápido gira el disco antes de que la cuerda se rompa. Además, se espera que un disco con mayor masa rompa la cuerda a una rapidez más baja. (¡Imagine girar una bola de boliche en la cuerda!)

Categorizar Puesto que el disco se mueve en una trayectoria circular, se le modela como una *partícula en movimiento circular uniforme*.

Analizar Incorpore la tensión y la aceleración centrípeta en la segunda ley de Newton, como se describe en la ecuación 6.1:

$$T = m\frac{v^2}{r}$$

Resuelva para v:

$$(1)\quad v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

Encuentre la rapidez máxima que puede tener el disco, que corresponde a la tensión máxima que la cuerda resiste:

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{T_{máx}r}{m}} = \sqrt{\frac{(50.0\ \text{N})(1.50\ \text{m})}{0.500\ \text{kg}}} = 12.2\ \text{m/s}$$

Finalizar La ecuación (1) muestra que v aumenta con T y disminuye con m más grande, como se espera de la conceptualización del problema.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que el disco gira en un círculo de mayor radio a la misma rapidez v. ¿Es más o menos probable que la cuerda se rompa?

Respuesta El radio más grande significa que el cambio en la dirección del vector velocidad será más pequeño en un intervalo de tiempo dado. Por ende, la aceleración es más pequeña y la tensión requerida en la cuerda es más pequeña. Como resultado, es menos probable que la cuerda se rompa cuando el disco viaja en un círculo de radio más grande.

Ejemplo 6.3 ¿Cuál es la máxima rapidez del automóvil? AM

Un automóvil de 1 500 kg se traslada sobre una curva plana horizontal, como se muestra en la figura 6.4a. Si el radio de la curva es 35.0 m y el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento seco es 0.523, encuentre la rapidez máxima que puede tener el automóvil para dar la vuelta exitosamente.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que la autopista curva es parte de un gran círculo, de modo que el automóvil se traslada en una trayectoria circular.

Categorizar Respecto a la etapa Conceptualizar del problema, se modela al automóvil como una *partícula en movimiento circular uniforme* en la dirección horizontal. El automóvil no acelera verticalmente, de modo que se modela como una partícula en equilibrio en la dirección vertical.

Analizar La figura 6.4b muestra las fuerzas sobre el automóvil. La fuerza que le permite al automóvil permanecer en su trayectoria circular es la fuerza de fricción estática. (Es así porque no ocurre deslizamiento en el punto de contacto entre camino y llantas. Si esta fuerza de fricción estática fuese cero; por ejemplo, si el automóvil estuviese sobre un camino congelado, el automóvil continuaría en una línea recta y se deslizaría hasta salir del camino.) La rapidez máxima $v_{máx}$ que puede tener el automóvil alrededor de la curva es la rapidez a la que está a punto de derrapar hacia fuera. En este punto, la fuerza de fricción tiene su valor máximo $f_{s,máx} = \mu_s n$.

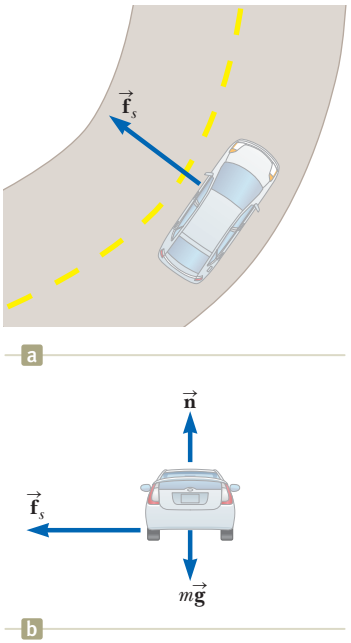


Figura 6.4 (Ejemplo 6.3) (a) La fuerza de fricción estática dirigida hacia el centro de la curva mantiene al automóvil en movimiento en una trayectoria circular. (b) Fuerzas que actúan sobre el automóvil.

continúa

6.3 Continuación

Aplique la ecuación 6.1 del modelo de una partícula en movimiento circular uniforme en la dirección radial para la condición de rapidez máxima:

$$(1)\quad f_{s,\text{máx}} = \mu_s n = m\frac{v_{\text{máx}}^2}{r}$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al automóvil en la dirección vertical:

$$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; n - mg = 0 \;\rightarrow\; n = mg$$

Resuelva la ecuación (1) para la rapidez máxima y sustituya para n:

$$(2)\quad v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{\mu_s nr}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_s mgr}{m}} = \sqrt{\mu_s gr}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{(0.523)(9.80\ \text{m/s}^2)(35.0\ \text{m})} = 13.4\ \text{m/s}$$

Finalizar Esta rapidez es equivalente a 30.0 mi/h. Por lo tanto, este camino podría beneficiarse enormemente de cierto peralte, ¡como en el ejemplo siguiente! Note que la rapidez máxima no depende de la masa del automóvil, razón por la cual las autopistas curvas no requieren múltiples límites de rapidez para cubrir las varias masas de los vehículos que usan el camino.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que un automóvil viaja por esta curva en un día húmedo y comienza a derrapar en la curva cuando su rapidez llega sólo a 8.00 m/s. ¿Qué se puede decir acerca del coeficiente de fricción estática en este caso?

Respuesta El coeficiente de fricción estática entre las llantas y el camino húmedo debe ser menor que el existente entre las llantas y un camino seco. Esta expectativa concuerda con la experiencia de conducir, porque un derrape es más probable en un camino húmedo que en un camino seco.

Para comprobar la sospecha, se puede resolver la ecuación (2) para el coeficiente de fricción estática:

$$\mu_s = \frac{v_{\text{máx}}^2}{gr}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\mu_s = \frac{v_{\text{máx}}^2}{gr} = \frac{(8.00\ \text{m/s})^2}{(9.80\ \text{m/s}^2)(35.0\ \text{m})} = 0.187$$

que de hecho es más pequeño que el coeficiente de 0.523 para el camino seco.

Ejemplo 6.4 La autopista peraltada AM

Un ingeniero civil quiere rediseñar la curva de la autopista del ejemplo 6.3 en tal forma que un automóvil no tenga que depender de la fricción para circular la curva sin derrapar. En otras palabras, un automóvil que se traslada a la rapidez diseñada puede superar la curva, incluso cuando el camino esté cubierto con hielo. Dicha rampa normalmente está *peraltada*, lo que significa que la carretera está inclinada hacia el interior de la curva. Suponga que la rapidez diseñada para la rampa es 13.4 m/s (30.0 mi/h) y el radio de la curva es 35.0 m. ¿Cuál es el ángulo de peralte?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La diferencia entre este ejemplo y el ejemplo 6.3 es que el automóvil ya no se mueve en una carretera plana. La figura 6.5 muestra la carretera peraltada, con el centro de la trayectoria circular del automóvil lejos hacia la izquierda de la figura. Observe que la componente horizontal de la fuerza normal participa en la generación de la aceleración centrípeta del automóvil.

Categorizar Como en el ejemplo 6.3, el automóvil se modela como una *partícula en equilibrio* en la dirección vertical y una *partícula en movimiento circular uniforme* en la dirección horizontal.

Analizar En un camino a nivel (sin peralte), la fuerza que causa la aceleración centrípeta es la fuerza de fricción estática entre las llantas del automóvil y el camino, como se vio en el ejemplo precedente. Sin embargo, si el camino está peraltado en un ángulo θ, como en la figura 6.5, la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ tiene una componente horizontal hacia el centro de la curva.

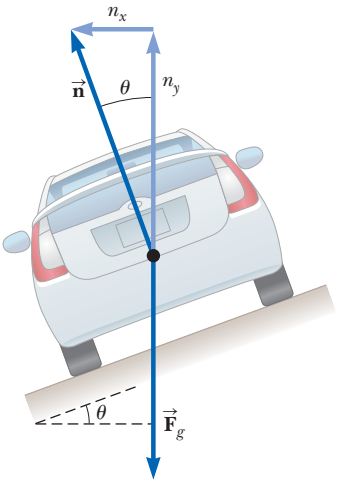


Figura 6.5 (Ejemplo 6.4) Un automóvil que recorre una curva sobre un camino peraltado a un ángulo θ con la horizontal. Cuando la fricción es despreciable, la fuerza que causa la aceleración centrípeta y mantiene al automóvil en movimiento en su trayectoria circular es la componente horizontal de la fuerza normal.

6.4 Continuación

Puesto que la rampa se diseña de modo que la fuerza de fricción estática sea cero, sólo la componente $n_x = n \operatorname{sen} \theta$ causa la aceleración centrípeta.

Escriba la segunda ley de Newton para el automóvil en la dirección radial, que es la dirección x:

$$(1)\quad \sum F_r = n \operatorname{sen} \theta = \frac{mv^2}{r}$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al automóvil en la dirección vertical:

$$\sum F_y = n \cos \theta - mg = 0$$

$$(2)\quad n \cos \theta = mg$$

Divida la ecuación (1) entre la ecuación (2):

$$(3)\quad \tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

Resuelva para el ángulo θ:

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{(13.4 \text{ m/s})^2}{(35.0 \text{ m})(9.80 \text{ m/s}^2)}\right] = 27.6°$$

Finalizar La ecuación (3) muestra que el ángulo de peralte es independiente de la masa del vehículo que entra a la curva. Si un automóvil recorre la curva con una rapidez menor que 13.4 m/s, la fuerza centrípeta disminuye. Por lo tanto, la fuerza normal que no ha cambiado es suficiente para ocasionar *dos* aceleraciones: la aceleración centrípeta que es menor y la aceleración hacia abajo debida a la inclinación de la carretera. En consecuencia, se necesita una fuerza de fricción adicional para evitar que se deslice por el peralte (hacia la izquierda en la figura 6.5). Un conductor que intente superar la curva a una rapidez mayor que 13.4 m/s tiene que depender de la fricción para evitar que derrape afuera del peralte (hacia la derecha en la figura 6.5).

¿QUÉ PASARÍA SI? Imagine que en el futuro esta misma carretera se construye en Marte para conectar diferentes centros coloniales. ¿Es posible recorrerla con la misma rapidez?

Respuesta La reducida fuerza gravitacional de Marte significaría que el automóvil no presiona tan fuertemente con la carretera. La reducida fuerza normal da como resultado una componente más pequeña de la fuerza normal hacia el centro del círculo. Esta componente más pequeña no sería suficiente para proporcionar la aceleración centrípeta asociada con la rapidez original. La aceleración centrípeta se debe reducir, lo que se logra al reducir la rapidez v.

En términos matemáticos, advierta que la ecuación (3) muestra que la rapidez v es proporcional a la raíz cuadrada de g para una carretera de radio fijo r peraltada en un ángulo fijo θ. Por lo tanto, si g es más pequeña, como lo es en Marte, la rapidez v con que la autopista se puede recorrer con seguridad también es más pequeña.

Ejemplo 6.5 Pasear en la rueda de la fortuna

Un niño de masa m se sube en una rueda de la fortuna como se muestra en la figura 6.6a. El niño se mueve en un círculo vertical de radio 10.0 m a rapidez constante de 3.00 m/s.

(A) Determine la fuerza ejercida por el asiento del niño en la parte inferior de la rueda. Exprese su respuesta en términos del peso del niño, mg.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe con atención la figura 6.6a. En función de sus experiencias con ruedas de la fortuna o conduciendo sobre pequeñas colinas en un camino, usted esperaría sentirse más ligero en la parte superior de la trayectoria. Del mismo modo, esperaría sentir más pesado en la parte inferior de la trayectoria. Tanto en la parte inferior de la trayectoria como en la parte superior, las fuerzas gravitacionales y normales en el niño actúan en direcciones *opuestas*. La suma vectorial de estas dos fuerzas da una fuerza de magnitud constante que mantiene al niño moviéndose en una trayectoria circular a una rapidez constante. Para producir una fuerza neta vectorial con la misma magnitud, la fuerza normal en la parte inferior debe ser mayor que en la parte superior.

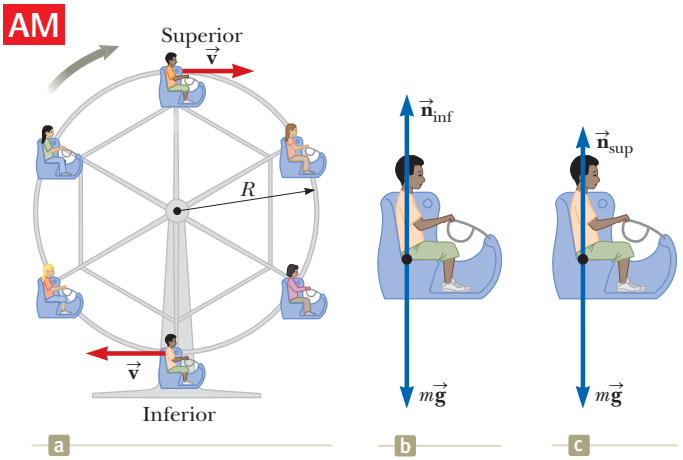


Figura 6.6 (Ejemplo 6.5) (a) Un niño pasea en una rueda de la fortuna. (b) Fuerzas que actúan sobre el niño en la parte inferior de la trayectoria. (c) Fuerzas que actúan sobre el niño en la parte superior de la trayectoria.

continúa

6.5 Continuación

Categorizar Debido a que la rapidez del niño es constante, podemos clasificar este problema como uno que implica una *partícula* (el niño) *en movimiento circular uniforme*, complicado por la fuerza gravitacional que actúa en todo momento sobre el niño.

Analizar Dibujamos un diagrama de fuerzas que actúan sobre el niño en la parte inferior de la rueda, como se muestra en la figura 6.6b. Las únicas fuerzas que actúan sobre él son la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ hacia abajo y la fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{n}}_{\text{inf}}$ ejercida por el asiento. La fuerza neta hacia arriba sobre el niño que proporciona su aceleración centrípeta tiene una magnitud $n_{\text{inf}} - mg$.

Usando el modelo de partícula en movimiento circular uniforme, aplique la segunda ley de Newton al niño en la dirección radial cuando está en la parte inferior de la rueda:

$$\sum F = n_{\text{inf}} - mg = m\frac{v^2}{r}$$

Resuelva para la fuerza ejercida por el asiento sobre el niño:

$$n_{\text{inf}} = mg + m\frac{v^2}{r} = mg\left(1 + \frac{v^2}{rg}\right)$$

Sustituya los valores numéricos dados para la rapidez y el radio:

$$n_{\text{inf}} = mg\left[1 + \frac{(3.00\ \text{m/s})^2}{(10.0\ \text{m})(9.80\ \text{m/s}^2)}\right]$$

$$= 1.09\,mg$$

Por tanto, la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{n}}_{\text{inf}}$ que ejerce el asiento sobre el niño es *mayor* que el peso del niño por un factor de 1.09. De este modo, el niño experimenta un peso aparente que es mayor que su peso verdadero en un factor de 1.09.

(B) Determine la fuerza que ejerce el asiento sobre el niño en la parte superior de la rueda.

SOLUCIÓN

Analizar En la figura 6.6c se muestra el diagrama de fuerzas que actúan sobre el niño en la parte superior de la rueda. La fuerza neta hacia abajo que proporciona la aceleración centrípeta tiene una magnitud de $mg - n_{\text{sup}}$.

Aplique la segunda ley de Newton al niño en esta posición:

$$\sum F = mg - n_{\text{sup}} = m\frac{v^2}{r}$$

Se resuelve para la fuerza ejercida por el asiento sobre el niño:

$$n_{\text{sup}} = mg - m\frac{v^2}{r} = mg\left(1 - \frac{v^2}{rg}\right)$$

Sustituya los valores numéricos:

$$n_{\text{sup}} = mg\left[1 - \frac{(3.00\ \text{m/s})^2}{(10.0\ \text{m})(9.80\ \text{m/s}^2)}\right]$$

$$= 0.908\,mg$$

En este caso, la magnitud de la fuerza que ejerce el asiento sobre el niño es *menor* que su verdadero peso en un factor de 0.908, y el niño se siente más ligero.

Finalizar Las variaciones en la fuerza normal son coherentes con la predicción en la etapa Conceptualizar del problema.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que a causa de un defecto en el mecanismo de la rueda de la fortuna la rapidez del niño aumenta a 10.0 m/s. En este caso, ¿qué experimenta el niño en la parte superior de la rueda?

Respuesta Si el cálculo anterior se realiza con $v = 10.0$ m/s, la magnitud de la fuerza normal en la parte superior de la rueda es negativa, lo cual es imposible. Interpretamos que la aceleración centrípeta que requiere el niño es más grande debida a la gravedad. Como resultado, el niño perderá contacto con el asiento y sólo se quedará en su trayectoria circular si hay una barra de seguridad o un cinturón de seguridad que proporcione una fuerza hacia abajo sobre él para mantenerlo en su asiento. En la parte inferior de la rueda, la fuerza normal es de 2.02 mg, que sería incómoda.

6.2 Movimiento circular no uniforme

En el capítulo 4 se encontró que si una partícula se mueve con rapidez variable en una trayectoria circular, existe, además de la componente radial de aceleración, una componente tangencial que tiene magnitud $|dv/dt|$. En consecuencia, la fuerza que actúa sobre la partícula también debe tener una componente tangencial y una radial. Ya que la aceleración total es $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t$, la fuerza total que se ejerce sobre la partícula es $\sum \vec{\mathbf{F}} = \sum \vec{\mathbf{F}}_r + \sum \vec{\mathbf{F}}_t$, como se muestra en la figura 6.7. (Las

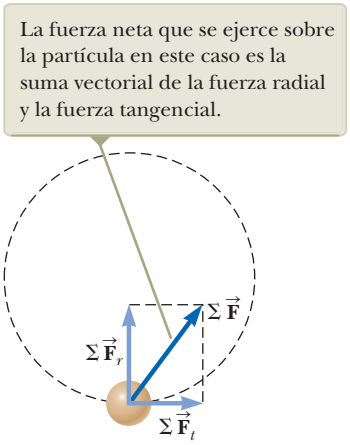


Figura 6.7 Cuando la fuerza neta que actúa sobre una partícula móvil en una trayectoria circular tiene una componente tangencial ΣF_t, la rapidez de la partícula cambia.

fuerzas radial y tangencial se expresan como fuerzas netas con la notación de suma, porque cada fuerza podría consistir en múltiples fuerzas que se combinan.) El vector $\sum \vec{\mathbf{F}}_r$ está dirigido hacia el centro del círculo y es responsable de la aceleración centrípeta. El vector $\sum \vec{\mathbf{F}}_r$ tangente al círculo es responsable de la aceleración tangencial, que representa un cambio en la rapidez de la partícula con el tiempo.

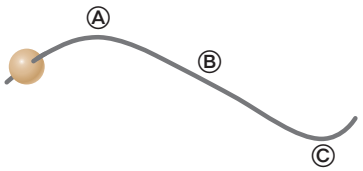


Figura 6.8 (Examen rápido 6.2) Una cuenta se desliza a lo largo de un alambre curvo.

Examen rápido 6.2 Una cuenta se desliza libremente, con rapidez constante, a lo largo de un alambre curvo que se encuentra sobre una superficie horizontal, como se muestra en la figura 6.8. **(a)** Dibuje los vectores que representan la fuerza que ejerce el alambre sobre la cuenta en los puntos Ⓐ, Ⓑ y Ⓒ. **(b)** Suponga que la cuenta de la figura 6.8 aumenta de velocidad con aceleración tangencial constante mientras se mueve hacia la derecha. Dibuje los vectores que representan la fuerza sobre la cuenta en los puntos Ⓐ, Ⓑ y Ⓒ.

Ejemplo 6.6 Mantenga los ojos en la bola AM

Una pequeña esfera de masa m se une al extremo de una cuerda de longitud R y se pone en movimiento en un círculo *vertical* en torno a un punto fijo O, como se ilustra en la figura 6.9. Determine la aceleración tangencial de la esfera y la tensión en la cuerda en cualquier instante cuando la rapidez de la esfera sea v y la cuerda forme un ángulo θ con la vertical.

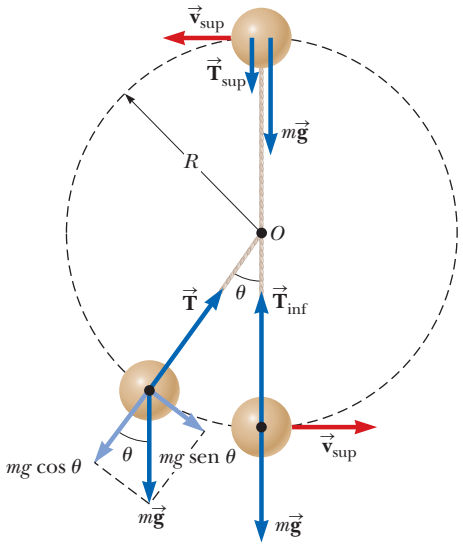


Figura 6.9 (Ejemplo 6.6) Las fuerzas que actúan sobre una esfera de masa m conectada a una cuerda de longitud R y que gira en un círculo vertical centrado en O. Se muestran las fuerzas que actúan sobre la esfera en la parte superior e inferior del círculo y en una posición arbitraria.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Compare el movimiento de la esfera en la figura 6.9 con el del niño en la figura 6.6a asociado con el ejemplo 6.5. Ambos objetos viajan en una trayectoria circular. Sin embargo, la rapidez de la esfera *no* es uniforme en este ejemplo porque, en la mayoría de los puntos a lo largo de la trayectoria, surge una componente tangencial de aceleración debida a la fuerza gravitacional que se ejerce sobre la esfera.

Categorizar La esfera se modela como una *partícula bajo una fuerza neta* y moviéndose en una trayectoria circular, pero *no* es una partícula en movimiento circular *uniforme*. Es necesario usar las técnicas contenidas en esta sección acerca del movimiento circular no uniforme.

Analizar A partir del diagrama de cuerpo libre en la figura 6.9, se ve que las únicas fuerzas que actúan sobre la esfera son la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ ejercida por la tierra y la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ ejercida por la cuerda. Descomponemos $\vec{\mathbf{F}}_g$ en una componente tangencial $mg \operatorname{sen} \theta$ y una componente radial $mg \cos \theta$.

Del modelo de partícula bajo una fuerza neta, aplique la segunda ley de Newton a la esfera en la dirección tangencial:

$$\sum F_t = mg \operatorname{sen} \theta = ma_t$$

$$a_t = g \operatorname{sen} \theta$$

6.6 Continuación

Aplique la segunda ley de Newton a la esfera en la dirección tangencial, en la dirección radial, observando que tanto $\vec{\mathbf{T}}$ como $\vec{\mathbf{a}}_r$ están dirigidos hacia *O*. Como se señaló en la sección 4.5, podemos usar la ecuación 4.14 para la aceleración centrípeta de una partícula, incluso cuando se mueve en una trayectoria circular en movimiento no uniforme:

$$\sum F_r = T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$T = mg\left(\frac{v^2}{Rg} + \cos\theta\right)$$

Finalizar Evalúe este resultado en las partes superior e inferior de la trayectoria circular (figura 6.9):

$$T_{\text{sup}} = mg\left(\frac{v_{\text{sup}}^2}{Rg} - 1\right) \qquad T_{\text{inf}} = mg\left(\frac{v_{\text{inf}}^2}{Rg} + 1\right)$$

Estos resultados tienen la misma forma matemática que las fuerzas normales n_{sup} y n_{inf} sobre el niño en el ejemplo 6.5, que es consistente con la fuerza normal sobre el niño, que juega el mismo papel físico en el ejemplo 6.5 que la tensión en la cuerda juega en este ejemplo. No obstante, considere que la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ sobre el niño en el ejemplo 6.5 está siempre dirigida hacia arriba mientras que la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ en este ejemplo cambia de dirección porque siempre debe apuntar hacia dentro a lo largo de la cuerda. También observe que en las expresiones anteriores v varía para diferentes posiciones de la esfera, como se indica mediante los subíndices, mientras que v en el ejemplo 6.5 es constante.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la bola se pone en movimiento con una rapidez menor?

(A) ¿Qué rapidez tendría la bola mientras pasa sobre la parte superior del círculo si la tensión en la cuerda tiende a cero instantáneamente en este punto?

Respuesta Sea la tensión igual a cero en la expresión para T_{sup}:

$$0 = mg\left(\frac{v_{\text{sup}}^2}{Rg} - 1\right) \rightarrow v_{\text{sup}} = \sqrt{gR}$$

(B) ¿Qué sucedería si la bola se pone en movimiento de tal modo que la rapidez en la parte superior sea menor que este valor? ¿Qué ocurre?

Respuesta En este caso, la bola nunca llega a la parte superior del círculo. En algún punto en el camino hacia arriba, la tensión en la cuerda va a cero y la bola se convierte en un proyectil. Sigue un segmento de una trayectoria parabólica sobre la parte superior de su movimiento, y se vuelve a incorporar a la trayectoria circular en el otro lado cuando la tensión se vuelve distinta de cero nuevamente.

6.3 Movimiento en marcos acelerados

Las leyes de movimiento de Newton, que se presentaron en el capítulo 5, describen observaciones que se realizan en un marco de referencia inercial. En esta sección se analiza cómo son aplicadas las leyes de Newton por un observador en un marco de referencia no inercial, es decir, en uno que acelera. Por ejemplo, recuerde la discusión de la mesa de hockey de aire en un tren en la sección 5.2. El tren moviéndose con velocidad constante representa un marco inercial. Un observador en el tren ve que el disco en reposo permanece en reposo, y parece obedecer la primera ley de Newton. El tren acelerado no es un marco inercial. De acuerdo con usted, como el observador en este tren, parece no haber fuerza sobre el disco y, sin embargo, acelera desde el reposo hacia la parte trasera del tren, lo que parece violar la primera ley de Newton. Ésta es una propiedad general de las observaciones realizadas en marcos no inerciales: parece haber aceleraciones no explicadas de los objetos que no están "amarrados" al marco. Desde luego, la primera ley de Newton no se viola. Sólo parece violarse debido a las observaciones hechas en un marco no inercial. En general, la dirección de la aceleración inexplicable es opuesta a la dirección de la aceleración del marco no inercial.

En el tren que acelera, mientras observa al disco acelerar hacia la parte trasera del tren, puede concluir, respecto a su creencia en la segunda ley de Newton, que una fuerza actuó sobre el disco para hacerlo acelerar. A una fuerza aparente como ésta se le llama **fuerza ficticia**, porque se debe a un marco de referencia acelerado. Una fuerza ficticia parece actuar sobre un objeto de la misma manera que una fuerza

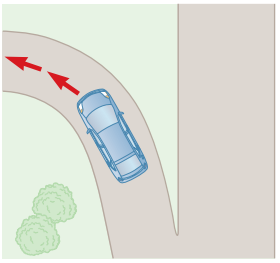
real. Sin embargo, las fuerzas reales siempre interactúan entre dos objetos, y usted no puede identificar un segundo objeto para una fuerza ficticia. (¿Cuál segundo objeto interactúa con el disco para hacerlo acelerar?) En general, las fuerzas ficticias simples parecen actuar en la dirección *opuesta* a la de la aceleración del marco no inercial. Por ejemplo, el tren acelera hacia adelante y parece que hay una fuerza ficticia, haciendo que el disco se deslice hacia la parte trasera del tren.

El ejemplo del tren describe una fuerza ficticia debido a un cambio en la rapidez del tren. Otra fuerza ficticia se debe al cambio en la *dirección* del vector velocidad. Para comprender el movimiento de un sistema que no es inercial debido a un cambio en dirección, examine un automóvil que viaja a lo largo de una autopista con gran rapidez y se aproxima a una rampa de salida curva, como se muestra en la figura 6.10a. A medida que el automóvil toma la cerrada curva izquierda en la rampa, una persona que se sienta en el lado del copiloto se desliza hacia la derecha y golpea la puerta. En dicho punto la fuerza que ejerce la puerta sobre la copiloto evita que salga expulsada del automóvil. ¿Qué la impulsa hacia la puerta? Una explicación popular, pero incorrecta, es que una fuerza que actúa hacia la derecha en la figura 6.10b la empuja hacia afuera desde el centro de la trayectoria circular. Aunque con frecuencia se le llama "fuerza centrífuga", es una fuerza ficticia. El automóvil representa un marco de referencia no inercial que tiene una aceleración centrípeta hacia el centro de su trayectoria circular. Como resultado, la pasajera siente una fuerza aparente que está dirigida hacia afuera desde el centro de la trayectoria circular, o hacia la derecha en la figura 6.10b, en la dirección opuesta a la de la aceleración.

Examinemos este fenómeno en términos de las leyes de Newton. Antes que el automóvil entre a la rampa, la pasajera se está moviendo en una trayectoria en línea recta. A medida que el automóvil entra a la rampa y recorre una trayectoria curva, la pasajera tiende a moverse a lo largo de la trayectoria recta original, lo que está en concordancia con la primera ley de Newton: la tendencia natural de un objeto es continuar moviéndose en una línea recta. No obstante, si una fuerza suficientemente grande (hacia el centro de curvatura) actúa sobre ella, como en la figura 6.10c, ella se mueve en una trayectoria curva junto con el automóvil. Ésta es la fuerza de fricción entre ella y el asiento del automóvil. Si esta fuerza de fricción no es suficientemente grande, el asiento sigue una trayectoria curva mientras la pasajera continúa en la trayectoria en línea recta del automóvil antes de que el automóvil comience a girar. Por lo tanto, desde el punto de vista de un observador en el automóvil, la pasajera se desliza hacia la derecha en relación con el asiento. Al final, ella encuentra la puerta, que proporciona una fuerza suficientemente grande para permitirle seguir la misma trayectoria curva que el automóvil. Ella se desliza hacia la puerta no a causa de una fuerza exterior, sino porque la fuerza de fricción no es suficientemente grande para permitirle viajar a lo largo de la trayectoria circular seguida por el automóvil.

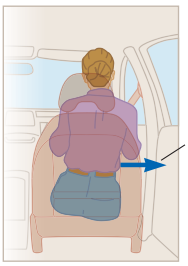
Otra interesante fuerza ficticia es la "fuerza de Coriolis". Es una fuerza aparente causada al cambiar la posición radial de un objeto en un sistema coordenado en rotación.

Por ejemplo, suponga que usted y un amigo están en lados opuestos de una plataforma circular giratoria y decide lanzar una bola de béisbol a su amigo. La figura 6.11a en la página 160 representa lo que un observador vería si contempla la bola mientras flota en el aire en reposo sobre la plataforma giratoria. De acuerdo con este observador, quien está en un marco inercial, la bola sigue una línea recta de acuerdo con la primera ley de Newton. En $t = 0$ usted lanza la bola hacia su amigo, pero en el tiempo t_f, cuando la bola cruza la plataforma, su amigo se movió a una posición nueva. Sin embargo, ahora considere la situación desde el punto de vista de su amigo. Su amigo está en un marco de referencia no inercial porque experimenta una aceleración centrípeta en relación con el marco inercial de la superficie de la Tierra. Comienza a ver la bola que se aproxima hacia él, pero conforme cruza la plataforma vira a un lado, como se muestra en la figura 6.11b. Por lo tanto, su amigo en la plataforma giratoria afirma que la bola no obedece la primera ley de Newton y dice que una fuerza es la causante de que la bola siga una trayectoria curva. Esta fuerza ficticia se llama fuerza de Coriolis.



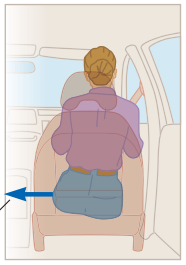
a

Desde el marco de referencia de la pasajera, una fuerza parece empujarla hacia la puerta derecha, pero es una fuerza ficticia.



b

Relativo al marco de referencia de la Tierra, el asiento aplica una fuerza real (fricción) hacia la izquierda sobre la pasajera, provocando que cambie de dirección junto con el resto del automóvil.



c

Figura 6.10 (a) Un automóvil se aproxima a una rampa de salida curva. ¿Qué hace que una pasajera en el asiento de adelante se mueva hacia la puerta derecha? (b) Desde el marco de referencia de la pasajera. (c) En relación con el marco de referencia de la Tierra.

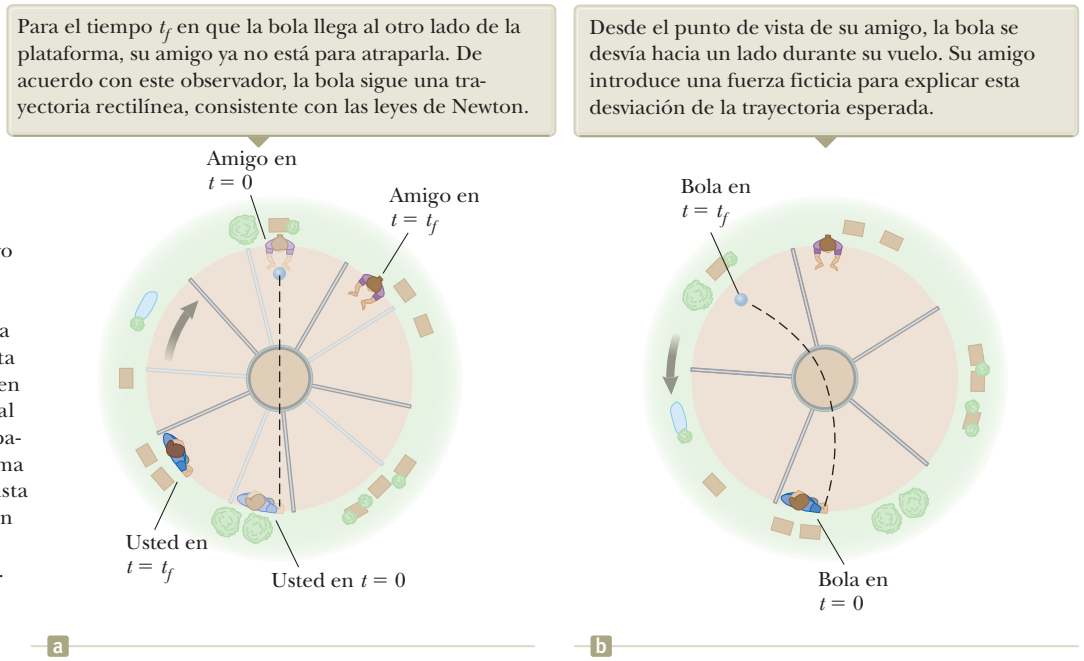


Figura 6.11 Usted y su amigo se sientan en el borde de una plataforma giratoria. En el tiempo $t = 0$ lanza la bola en la dirección de su amigo. (a) Vista superior que observa alguien en un marco de referencia inercial unido a la Tierra. La Tierra aparece estacionaria y la plataforma gira en sentido horario. (b) Vista superior observada por alguien en un marco de referencia inercial unido a la plataforma. La plataforma aparece inmóvil y la Tierra gira en sentido antihorario.

Prevención de riesgos ocultos 6.2

Fuerza centrífuga "Fuerza centrífuga" es un concepto comúnmente escuchado que se describe como una fuerza que jala hacia afuera sobre un objeto móvil en una trayectoria circular. Si usted siente una "fuerza centrífuga" cuando está en un carrusel, ¿cuál es el otro objeto con el que interactúa? No es capaz de identificar otro objeto porque es una fuerza ficticia que ocurre debido a que usted está en un marco de referencia no inercial.

Las fuerzas ficticias pueden no ser fuerzas reales, pero tienen efectos reales. Un objeto en el tablero de su automóvil realmente se desliza si usted pisa el acelerador de su vehículo. Mientras viaja en un carrusel siente que lo empujan hacia fuera, como si se debiese a la ficticia "fuerza centrífuga". Es probable que usted caiga y se lesione debido a la fuerza de Coriolis si camina a lo largo de una línea radial mientras un carrusel gira. (Uno de los autores lo hizo y sufrió separación de ligamentos en las costillas cuando cayó.) La fuerza de Coriolis debida a la rotación de la Tierra es responsable de los giros de los huracanes y de las corrientes oceánicas a gran escala.

Examen rápido 6.3 Considere que la pasajera en el automóvil da vuelta a la izquierda en la figura 6.10. ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta en relación con las fuerzas en la dirección horizontal si ella hace contacto con la puerta derecha? **(a)** La pasajera está en equilibrio entre fuerzas reales que actúan hacia la derecha y fuerzas reales que actúan hacia la izquierda. **(b)** La pasajera está expuesta sólo a fuerzas reales que actúan hacia la derecha. **(c)** La pasajera está sujeta sólo a fuerzas reales que actúan hacia la izquierda. **(d)** Ninguno de estos enunciados es verdadero.

Ejemplo 6.7 Fuerzas ficticias en movimiento lineal AM

Una pequeña esfera de masa m cuelga mediante una cuerda del techo de un vagón que acelera hacia la derecha, como se muestra en la figura 6.12. Tanto el observador inercial en el suelo en la figura 6.12a como el observador no inercial en el tren en la figura 6.12b concuerdan que la cuerda hace un ángulo θ con respecto a la vertical. El observador no inercial en la figura 6.12b afirma que una fuerza, que se sabe es ficticia, provoca la desviación de la cuerda de la vertical que observa. ¿Cómo se relaciona la magnitud de esta fuerza con la aceleración del vagón medida por la observadora inercial en la figura 6.12a?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Identifíquese en el lugar de cada uno de los dos observadores de la figura 6.12. Como observador inercial en el suelo, usted ve que el vagón acelera y sabe que la desviación de la cuerda se debe a esta aceleración. Como observador no inercial en el vagón, imagine que ignora cualquier efecto del movimiento del carro de modo que no está al tanto de su aceleración. Puesto que no está al tanto de esta aceleración, usted afirma que una fuerza empuja hacia los lados la esfera para causar la desviación de la cuerda de la vertical. Para tener ideas más reales, intente correr desde el reposo mientras sostiene un objeto que cuelga de una cuerda y percibe que la cuerda está en un ángulo con la vertical mientras usted acelera, como si una fuerza empujara el objeto hacia atrás.

Categorizar Para la observadora inercial, modelamos la esfera como una *partícula bajo una fuerza neta* en la dirección horizontal y una *partícula en equilibrio* en la dirección vertical. Para el observador no inercial, la esfera se modela como una *partícula en equilibrio* en ambas direcciones.

6.7 Continuación

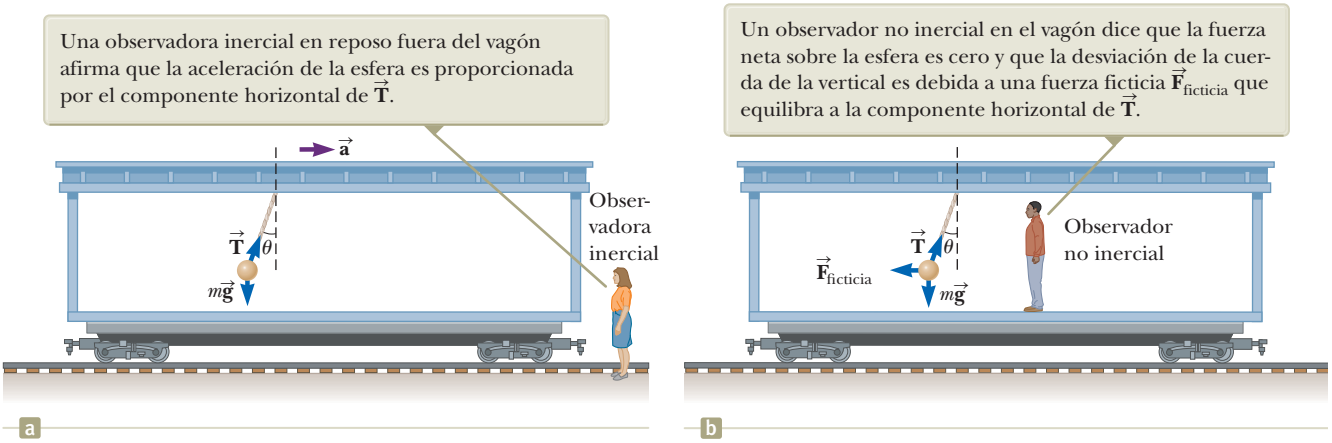


Figura 6.12 (Ejemplo 6.7) Una pequeña esfera suspendida del techo de un vagón que acelera hacia la derecha se desvía como se muestra.

Analizar De acuerdo con la observadora inercial en reposo (figura 6.12a), las fuerzas sobre la esfera son la fuerza $\vec{T}$ que ejerce la cuerda y la fuerza gravitacional. La observadora inercial concluye que la aceleración de la esfera es la misma que la del vagón y que dicha aceleración la produce la componente horizontal de $\vec{T}$.

Para este observador, aplique los modelos de partícula bajo una fuerza neta y partícula en equilibrio:

Observador inercial
$$\begin{cases} (1) \quad \sum F_x = T \operatorname{sen} \theta = ma \\ (2) \quad \sum F_y = T \cos \theta - mg = 0 \end{cases}$$

De acuerdo con el observador no inercial que viaja en el vagón (figura 6.12b), la cuerda también forma un ángulo θ con la vertical; sin embargo, para dicho observador, la esfera está en reposo y de este modo su aceleración es cero. Por lo tanto, el observador no inercial introduce una fuerza ficticia en la dirección horizontal para equilibrar la componente horizontal de $\vec{T}$ y afirma que la fuerza neta sobre la esfera es cero.

Aplique el modelo de partícula en equilibrio para este observador en ambas direcciones

Observador no inercial
$$\begin{cases} \sum F'_x = T \operatorname{sen} \theta - F_{\text{ficticia}} = 0 \\ \sum F'_y = T \cos \theta - mg = 0 \end{cases}$$

Estas expresiones son equivalentes a las ecuaciones (1) y (2) si $F_{\text{ficticia}} = ma$, donde a es la aceleración de acuerdo con el observador inercial.

Finalizar Si se tuviese que hacer esta sustitución en la ecuación para la $\Sigma F'_x$ anterior, el observador no inercial obtiene los mismos resultados matemáticos que la observadora inercial. No obstante, la interpretación física de la desviación de la cuerda difiere en los dos marcos de referencia.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que la observadora inercial quiere medir la aceleración del tren mediante el péndulo (la esfera que cuelga de la cuerda). ¿Cómo podría hacerlo?

Respuesta La intuición dice que el ángulo θ que la cuerda forma con la vertical debe aumentar conforme aumenta la aceleración. Al resolver las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente para a, se encuentra que $a = g \tan \theta$. Por lo tanto, la observadora inercial puede determinar la magnitud de la aceleración del vagón al medir el ángulo θ y usar esta relación. Puesto que la desviación de la cuerda de la vertical sirve como una medida de aceleración, *se puede usar un péndulo simple como acelerómetro.*

6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas

En el capítulo 5 se describió la fuerza de fricción cinética que se ejerce sobre un objeto que se mueve sobre alguna superficie. Se ignoró por completo cualquier interacción entre el objeto y el medio a través del que se mueve. Ahora considere el efecto de dicho medio, que puede ser o un líquido o un gas. El medio ejerce una **fuerza resistiva** $\vec{R}$ sobre el objeto moviéndose a través de éste. Algunos ejemplos son la resistencia del aire asociada con los vehículos móviles (a veces llamada *arrastre de aire)* y las fuerzas viscosas que actúan sobre los objetos móviles a través de un

líquido. La magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ depende de factores tales como la rapidez del objeto, y la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ siempre es opuesta a la dirección de movimiento del objeto en relación con el medio. Esta dirección puede o no estar en la dirección opuesta a la velocidad del objeto de acuerdo con el observador. Por ejemplo, si una canica cae en una botella de champú, la canica se mueve hacia abajo y la fuerza resistente es ascendente, resistiendo la caída de la canica. En cambio, imagine el momento en que no hay viento y está mirando una bandera colgada sin fuerza en un mástil. Cuando una brisa comienza a volar hacia la derecha, la bandera se mueve hacia la derecha. En este caso, la fuerza de arrastre en la bandera es el movimiento de aire que es hacia la derecha y el movimiento de la bandera en respuesta también es hacia la derecha, la misma *dirección* que la fuerza de arrastre. Como el aire se mueve hacia la derecha con respecto a la bandera, la bandera se mueve hacia la izquierda en relación con el aire. Por lo tanto, ¡la dirección de la fuerza de arrastre es opuesta a la dirección del movimiento de la bandera con respecto al aire!

La magnitud de la fuerza resistiva depende de la rapidez en una forma compleja y aquí sólo se consideran dos modelos simplificados. En el primer modelo se supone que la fuerza resistiva es proporcional a la rapidez del objeto móvil; este modelo es válido para objetos que caen lentamente a través de un líquido y para objetos muy pequeños, como las partículas de polvo, que se mueven a través del aire. En el segundo modelo se supone una fuerza resistiva que es proporcional al cuadrado de la rapidez del objeto móvil; los objetos grandes, como un paracaidista móvil en caída libre a través del aire, experimentan tal fuerza.

Modelo 1: Fuerza resistiva proporcional a la velocidad del objeto

Si modelamos la fuerza resistiva que actúa sobre un objeto móvil a través de un líquido o gas como proporcional a la velocidad del objeto, la fuerza resistiva se puede expresar como

$$\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}} \tag{6.2}$$

donde b es una constante cuyo valor depende de las propiedades del medio y de la forma y dimensiones del objeto, y $\vec{\mathbf{v}}$ es la velocidad del objeto en relación con el medio. El signo negativo indica que $\vec{\mathbf{R}}$ está en la dirección opuesta a $\vec{\mathbf{v}}$.

Considere una pequeña esfera de masa m que se libera desde el reposo en un líquido, como en la figura 6.13a. Si supone que las únicas fuerzas que actúan sobre la esfera son la fuerza resistiva $\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$ y la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$, describa su movimiento.[1] Modelamos a la esfera como una partícula bajo una fuerza neta. Al

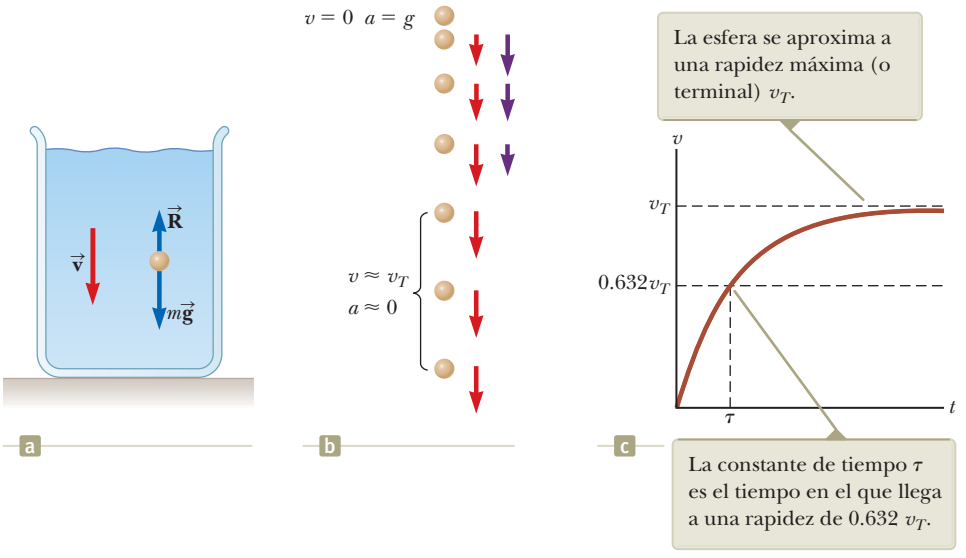


Figura 6.13 (a) Una pequeña esfera que cae a través de un líquido. (b) Diagrama de movimiento de la esfera mientras cae. Se muestran los vectores velocidad (rojo) y aceleración (violeta) para cada imagen después de la primera. (c) Gráfica rapidez-tiempo para la esfera.

[1] Sobre un objeto sumergido también actúa una *fuerza de flotación*. Esta fuerza es constante y su magnitud es igual al peso del líquido desplazado. Esta fuerza se puede modelar por el cambio del peso aparente de la esfera por un factor constante, de modo que aquí se ignorará dicha fuerza. Las fuerzas de flotación se discuten en el capítulo 14.

aplicar la segunda ley de Newton al movimiento vertical y elegir la dirección hacia abajo como positiva, se obtiene

$$\sum F_y = ma \rightarrow mg - bv = ma \tag{6.3}$$

donde la aceleración de la esfera es hacia abajo. Al resolver esta expresión para la aceleración dv/dt se obtiene

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v \tag{6.4}$$

Esta ecuación se llama *ecuación diferencial* y los métodos para resolverla pueden aún no serle familiares. No obstante, note que, inicialmente, cuando $v = 0$ la magnitud de la fuerza resistiva también es cero y la aceleración de la esfera es simplemente g. Conforme t aumenta, la magnitud de la fuerza resistiva aumenta y la aceleración disminuye. La aceleración tiende a cero cuando la magnitud de la fuerza resistiva se aproxima al peso de la esfera, por lo que la fuerza neta sobre la esfera es cero. En esta situación la rapidez de la esfera tiende a su **rapidez terminal** v_T.

◀ Rapidez terminal

La rapidez terminal se obtiene de la ecuación 6.4 al hacer $dv/dt = 0$. Esto produce

$$mg - bv_T = 0 \quad \text{o} \quad v_T = \frac{mg}{b} \tag{6.5}$$

Debido a que aún puede no estar familiarizado con las ecuaciones diferenciales, no mostramos los detalles del proceso que da la expresión de v para todos los tiempos t. Si $v = 0$ en $t = 0$, esta expresión es

$$v = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}) = v_T(1 - e^{-t/\tau}) \tag{6.6}$$

Esta función se grafica en la figura 6.13c. El símbolo e representa la base del logaritmo natural y también se llama *número de Euler*: $e = 2.718\ 28$. La **constante de tiempo** $\tau = m/b$ (letra griega tau) es el tiempo en el que la esfera liberada del reposo en $t = 0$ alcanza 63.2% de su rapidez terminal: cuando $t = \tau$, la ecuación 6.6 produce $v = 0.632v_T$. (El número 0.632 es $1 - e^{-1}$.)

Se puede comprobar que la ecuación 6.6 es una solución de la ecuación 6.4 mediante derivación directa:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m})\right] = \frac{mg}{b}\left(0 + \frac{b}{m}e^{-bt/m}\right) = ge^{-bt/m}$$

(Véase la tabla del Apéndice B.4 para la derivada de e elevada a alguna potencia.) Al sustituir en la ecuación 6.4 estas dos expresiones para dv/dt y la expresión para v dada por la ecuación 6.6 se demuestra que la solución satisface la ecuación diferencial.

Ejemplo 6.8 Esfera que cae en aceite AM

Una pequeña esfera de 2.00 g de masa se libera desde el reposo en un gran contenedor lleno con aceite, donde experimenta una fuerza resistiva proporcional a su rapidez. La esfera alcanza una rapidez terminal de 5.00 cm/s. Determine la constante de tiempo τ y el tiempo en el que la esfera alcanza 90.0% de su rapidez terminal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con la ayuda de la figura 6.13, imagine soltar la esfera en aceite y observarla hundirse hasta el fondo del contenedor. Si tiene algo de champú denso, suelte una canica en él y observe el movimiento de la canica.

Categorizar La esfera se modela como una *partícula bajo una fuerza neta*, con una de las fuerzas como fuerza resistiva que depende de la rapidez de la esfera. Este modelo conduce al resultado en la ecuación 6.5.

Analizar Con la ecuación 6.5, evalúe el coeficiente b: $b = \dfrac{mg}{v_T}$

continúa

6.8 Continuación

Evalúe la constante de tiempo τ:

$$\tau = \frac{m}{b} = m\left(\frac{v_\tau}{mg}\right) = \frac{v_\tau}{g}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\tau = \frac{5.00\ \text{cm/s}}{980\ \text{cm/s}^2} = 5.10 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

Encuentre el tiempo t en el que la esfera alcanza una rapidez de $0.900v_T$ al hacer $v = 0.900v_T$ en la ecuación 6.6 y resuelva para t:

$$0.900v_T = v_T(1 - e^{-t/\tau})$$

$$1 - e^{-t/\tau} = 0.900$$

$$e^{-t/\tau} = 0.100$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(0.100) = -2.30$$

$$t = 2.30\tau = 2.30(5.10 \times 10^{-3}\ \text{s}) = 11.7 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

$$= \boxed{11.7\ \text{ms}}$$

Finalizar La esfera alcanza 90.0% de su rapidez terminal en un intervalo de tiempo muy breve. Además tiene que ver este comportamiento si realiza la actividad con la canica y el champú. Debido al corto intervalo de tiempo requerido para alcanzar la velocidad terminal, puede no haber notado el intervalo de tiempo en absoluto. La canica puede haber aparecido moviéndose inmediatamente a través del champú a una velocidad constante.

Modelo 2: Fuerza resistiva proporcional al cuadrado de la rapidez del objeto

Para objetos móviles con magnitudes de velocidad grandes a través del aire, como aviones, paracaidistas, automóviles y pelotas de béisbol, razonablemente la fuerza resistiva se representa con propiedad como proporcional al cuadrado de la rapidez. En estas situaciones, la magnitud de la fuerza resistiva se expresa como

$$R = \tfrac{1}{2}D\rho A v^2 \qquad \textbf{(6.7)}$$

donde D es una cantidad empírica adimensional llamada *coeficiente de arrastre*, ρ es la densidad del aire y A es el área de la sección transversal del objeto móvil observado en un plano perpendicular a su velocidad. El coeficiente de arrastre tiene un valor casi de 0.5 para objetos esféricos, pero puede tener un valor tan grande como 2 para objetos con forma irregular.

Analice el movimiento de un objeto en caída libre expuesto a una fuerza resistiva del aire hacia arriba de magnitud $R = \frac{1}{2}D\rho A v^2$. Suponga que un objeto de masa m se libera desde el reposo. Como muestra la figura 6.14, el objeto experimenta dos fuerzas externas:[2] la fuerza gravitacional hacia abajo $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ y la fuerza resistiva hacia arriba $\vec{\mathbf{R}}$. Por lo tanto, la magnitud de la fuerza neta es

$$\sum F = mg - \tfrac{1}{2}D\rho A v^2 \qquad \textbf{(6.8)}$$

donde hemos tomado hacia abajo a la dirección vertical positiva. Modelando al objeto como una partícula bajo una fuerza neta, con la fuerza neta dada por la ecuación 6.8, encontramos que el objeto tiene una aceleración hacia abajo de magnitud

$$a = g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right)v^2 \qquad \textbf{(6.9)}$$

Podemos calcular la rapidez terminal v_T notando que cuando la fuerza gravitacional es equilibrada por la fuerza resistente, la fuerza neta sobre el objeto es cero y, por lo tanto, su aceleración es cero. Haciendo $a = 0$ en la ecuación 6.9 da

$$g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right)v_T^{\,2} = 0$$

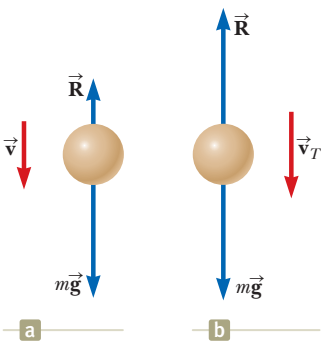


Figura 6.14 (a) Un objeto que cae a través del aire experimenta una fuerza resistiva $\vec{\mathbf{R}}$ y una fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$. (b) El objeto alcanza una rapidez terminal cuando la fuerza neta que actúa sobre éste es igual a cero; esto es, cuando $\vec{\mathbf{R}} = -\vec{\mathbf{F}}_g$ o $R = mg$.

[2] Como con el modelo 1, también hay una fuerza de flotación hacia arriba que se ignora.

Tabla 6.1 Rapidez terminal para varios objetos que caen a través del aire

Objeto	Masa (kg)	Área de sección transversal (m^2)	v_T (m/s)
Paracaidista	75	0.70	60
Pelota de béisbol (3.7 cm de radio)	0.145	4.2×10^{-3}	43
Pelota de golf (2.1 cm de radio)	0.046	1.4×10^{-3}	44
Granizo (0.50 cm de radio)	4.8×10^{-4}	7.9×10^{-5}	14
Gota de lluvia (0.20 cm de radio)	3.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	9.0

así

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}} \tag{6.10}$$

La tabla 6.1 menciona las magnitudes de rapidez terminal de diferentes objetos que caen a través del aire.

Examen rápido 6.4 Una pelota de béisbol y una de basquetbol, que tienen la misma masa, se dejan caer a través del aire desde el reposo, de modo tal que sus partes inferiores están inicialmente a la misma altura sobre el suelo, en el orden de 1 m o más. ¿Cuál golpea el suelo primero? **(a)** La pelota de béisbol golpea el suelo primero. **(b)** El balón de basquetbol golpea el suelo primero. **(c)** Ambas golpean el suelo al mismo tiempo.

Ejemplo conceptual 6.9 El skysurfer

Considere un skysurfer (figura 6.15) que salta desde un avión con los pies firmemente atados a su tabla de surf, hace algunos trucos y luego abre su paracaídas. Describa las fuerzas que actúan sobre él durante dichas maniobras.



Oliver Furrer/Jupiter Images

Figura 6.15 (Ejemplo conceptual 6.9) Un skysurfer.

SOLUCIÓN

Cuando el surfista sale del avión, no tiene velocidad vertical. La fuerza gravitacional hacia abajo hace que él acelere hacia el suelo. A medida que aumenta su rapidez hacia abajo, así lo hace la fuerza resistiva hacia arriba que ejerce el aire sobre su cuerpo y la tabla. Esta fuerza hacia arriba reduce su aceleración y por tanto su rapidez aumenta más lentamente. Al final, van tan rápido que la fuerza resistiva hacia arriba se iguala con la fuerza gravitacional hacia abajo. Ahora la fuerza neta es cero y ya no acelera, y en vez de ello llega a su rapidez terminal. En algún punto después de llegar a su rapidez terminal, abre su paracaídas, lo que resulta en un drástico aumento en la fuerza resistiva hacia arriba. La fuerza neta (y por tanto la aceleración) ahora es hacia arriba, en la dirección opuesta a la dirección de la velocidad. En consecuencia, la velocidad hacia abajo disminuye rápidamente, y la fuerza resistiva sobre el paracaídas también disminuye. Al final, la fuerza resistiva hacia arriba y la fuerza gravitacional hacia abajo se equilibran mutuamente y se alcanza una rapidez terminal mucho más pequeña, lo que permite un aterrizaje seguro.

(Contrario a la creencia popular, el vector velocidad de un paracaidista nunca apunta hacia arriba. Usted debe haber visto una cinta de video en la que un paracaidista parece un "cohete" hacia arriba una vez que el paracaídas se abre. De hecho, lo que ocurre es que el paracaidista frena, pero la persona que sostiene la cámara continúa cayendo a gran rapidez.)

Ejemplo 6.10 Caída de filtros de café AM

La dependencia de la fuerza resistiva con el cuadrado de la rapidez es un modelo simplificado. Pruebe el modelo para una situación específica. Imagine un experimento en el que se deja caer una serie de filtros de café apilados y se mide su rapidez terminal. La tabla 6.2 presenta datos de rapidez terminal característicos de un experimento real que usa dichos filtros de café conforme caen a través del aire. La constante de tiempo τ es pequeña, así que un filtro que se deja caer pronto alcanza la ra-

continúa

6.10 Continuación

pidez terminal. Cada filtro tiene una masa de 1.64 g. Cuando los filtros se apilan juntos el área de la superficie que ve al frente no aumenta. Determine la relación entre la fuerza resistiva que ejerce el aire y la rapidez de los filtros que caen.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine soltar los filtros de café a través del aire. (Si tiene algunos filtros de café, intente soltarlos.) Debido a la masa relativamente pequeña del filtro de café, probablemente no notará el intervalo de tiempo durante el que hay una aceleración. Los filtros parecerán caer con velocidad constante de inmediato, al dejar su mano.

Categorizar Puesto que un filtro se mueve a velocidad constante, se le modela como *partícula en equilibrio.*

Analizar A rapidez terminal, la fuerza resistiva hacia arriba sobre el filtro equilibra la fuerza gravitacional hacia abajo, de modo que $R = mg$.

Evalúe la magnitud de la fuerza resistiva:

$$R = mg = (1.64\ \text{g})\left(\frac{1\ \text{kg}}{1\ 000\ \text{g}}\right)(9.80\ \text{m/s}^2) = 0.016\ 1\ \text{N}$$

Del mismo modo, dos filtros apilados juntos experimentan 0.032 2 N de fuerza resistiva, etc. Dichos valores de fuerza resistiva se muestran en la columna de la extrema derecha en la tabla 6.2. En la figura 6.16a se muestra una gráfica de la fuerza resistiva sobre los filtros como función de la rapidez terminal. Una línea recta no es un buen ajuste, lo que indica que la fuerza resistiva *no* es proporcional a la rapidez. El comportamiento se ve más claramente en la figura 6.16b, ahí la fuerza resistiva se grafica como una función del cuadrado de la rapidez terminal. Esta gráfica indica que la fuerza resistiva es proporcional al *cuadrado* de la rapidez, como sugiere la ecuación 6.7.

Finalizar He aquí una buena oportunidad para que en casa tome algunos datos reales de filtros de café reales y vea si es capaz de reproducir los resultados que se muestran en la figura 6.16. Si tiene champú y una canica, como se mencionó en el ejemplo 6.8, también tome datos en dicho sistema y vea si la fuerza resistiva se modela adecuadamente como proporcional a la rapidez.

Tabla 6.2 **Rapidez terminal y fuerza resistiva para filtros de café apilados**

Número de filtros	v_T (m/s)[a]	R (N)
1	1.01	0.016 1
2	1.40	0.032 2
3	1.63	0.048 3
4	2.00	0.064 4
5	2.25	0.080 5
6	2.40	0.096 6
7	2.57	0.112 7
8	2.80	0.128 8
9	3.05	0.144 9
10	3.22	0.161 0

[a]Todos los valores de v_T son aproximados.

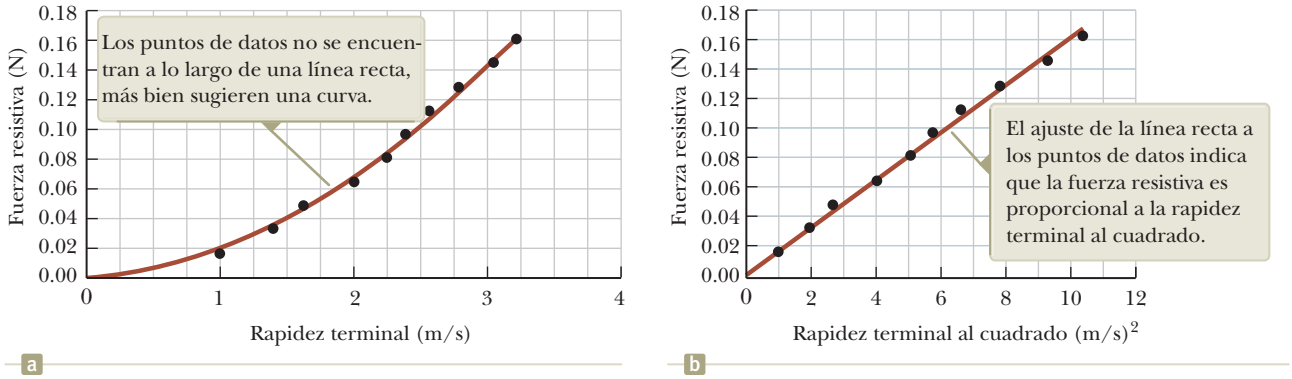


Figura 6.16 (Ejemplo 6.10) (a) Correspondencia entre la fuerza resistiva que actúa sobre filtros de café que caen y su rapidez terminal. (b) Gráfica que relaciona la fuerza resistiva con el cuadrado de la rapidez terminal.

Ejemplo 6.11 Fuerza resistiva ejercida sobre una pelota de béisbol AM

Un lanzador arroja una pelota de béisbol de 0.145 kg a un lado del bateador a 40.2 m/s (90 mi/h). Encuentre la fuerza resistiva que actúa sobre la pelota con esta rapidez.

6.11 Continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este ejemplo es diferente del anterior en que ahora el objeto se mueve horizontalmente a través del aire, en lugar de moverse de manera vertical bajo la influencia de la gravedad y la fuerza resistiva. La fuerza resistiva hace que la pelota disminuya su velocidad mientras la gravedad hace que su trayectoria se curve hacia abajo. La situación se simplifica al suponer que el vector velocidad es exactamente horizontal en el instante en que viaja a 40.2 m/s.

Categorizar En general, la *pelota es una partícula bajo una fuerza neta*. Sin embargo, ya que se considera sólo un instante de tiempo, no hay que preocuparse por la aceleración, de modo que el problema sólo implica encontrar el valor de una de las fuerzas.

Analizar Para determinar el coeficiente de arrastre D, imagine que suelta la pelota y la deja llegar a su rapidez terminal. Resuelva la ecuación 6.10 para D

$$D = \frac{2mg}{v_T^2 \rho A}$$

Use esta expresión para D en la ecuación 6.7 para encontrar una expresión para la magnitud de la fuerza resistiva:

$$R = \tfrac{1}{2} D \rho A v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2mg}{v_\tau^2 \rho A}\right)\rho A v^2 = mg\left(\frac{v}{v_\tau}\right)^2$$

Sustituya los valores apropiados usando la rapidez terminal de la tabla 6.1:

$$R = (0.145\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)\left(\frac{40.2\ \text{m/s}}{43\ \text{m/s}}\right)^2 = 1.2\ \text{N}$$

Finalizar La magnitud de la fuerza resistiva es similar en magnitud al peso de la pelota de béisbol, que es casi 1.4 N. Por lo tanto, la resistencia del aire desempeña un papel importante en el movimiento de la pelota, como se manifiesta por la variedad de curvas, "de columpio" (hacia abajo), "dormilona" y demás que lanzan los pitchers.

Resumen

Conceptos y principios

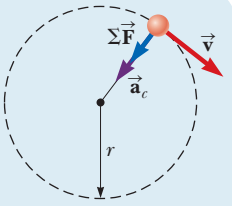
Una partícula que se mueve en un movimiento circular uniforme tiene una aceleración centrípeta; esta aceleración la proporciona una fuerza neta dirigida hacia el centro de la trayectoria circular.

Un observador en un marco de referencia no inercial (acelerado) introduce **fuerzas ficticias** cuando aplica la segunda ley de Newton en dicho marco.

Un objeto que se mueve a través de un líquido o gas experimenta una **fuerza resistiva** dependiente de la rapidez. Esta fuerza resistiva está en dirección opuesta a la velocidad del objeto en relación con el medio y por lo general aumenta con la rapidez. La magnitud de la fuerza resistiva depende del tamaño y forma del objeto y de las propiedades del medio a través del que se mueve el objeto. En el caso límite para un objeto que cae, cuando la magnitud de la fuerza resistiva es igual al peso del objeto, éste alcanza su **rapidez terminal**.

Análisis de modelos para resolver problemas

Partícula en movimiento circular uniforme (extensión) Con el nuevo conocimiento de las fuerzas se pueden hacer agregados al modelo de una partícula en movimiento circular uniforme, que se introdujo en el capítulo 4. La segunda ley de Newton aplicada a una partícula en movimiento circular uniforme establece que la fuerza neta que permite a la partícula someterse a una aceleración centrípeta (ecuación 4.14) se relaciona con la aceleración de acuerdo con



$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r} \qquad (6.1)$$

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Un niño practica para una carrera de bicicletas a campo traviesa. Su rapidez permanece constante conforme avanza alrededor de una pista a nivel contra las manecillas del reloj, con dos secciones rectas y dos secciones casi semicirculares, como se muestra en la vista de helicóptero en la figura PO6.1. (a) Clasifique las magnitudes de su aceleración en los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*, de mayor a menor. Si su aceleración es del mismo tamaño en dos puntos, muestre tal hecho en su clasificación. Si su aceleración es cero, resalte este hecho. (b) ¿Cuáles son las direcciones de su velocidad en los puntos *A*, *B* y *C*? Para cada punto elija uno: ¿Norte, Sur, Este, Oeste o no existe? (c) ¿Cuáles son las direcciones de su aceleración en los puntos *A*, *B* y *C*?

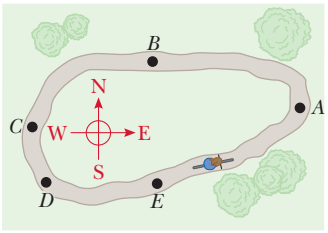


Figura PO6.1

2. Considere un paracaidista que salta de un helicóptero y cae a través del aire. Antes de alcanzar su rapidez terminal y mucho antes de abrir su paracaídas. ¿Su rapidez (a) aumenta, (b) disminuye o (c) permanece constante?

3. Una puerta en un hospital tiene un cierre neumático que empuja la puerta para cerrar de tal modo que la perilla se mueve con rapidez constante en la mayor parte de su trayectoria. En esta parte de su movimiento, (a) ¿la perilla experimenta una aceleración centrípeta?, (b) ¿experimenta una aceleración tangencial?

4. Un péndulo consiste de un objeto pequeño llamado plomada que cuelga de una cuerda ligera de longitud fija, con el extremo superior de la cuerda fijo, como se representa en la figura PO6.4. La plomada se mueve sin fricción, y se balancea con alturas iguales en ambos lados. Se mueve desde su punto de retorno A a través del punto B y llega a su rapidez máxima en el punto C. (a) De estos puntos, ¿existe uno donde la plomada tenga aceleración radial distinta de cero y aceleración tangencial cero? Si es así, ¿cuál punto? ¿Cuál es la dirección de su aceleración total en este punto? (b) De estos puntos, ¿existe un punto donde la plomada tenga aceleración tangencial distinta de cero y aceleración radial cero? Si es así, ¿cuál punto? ¿Cuál es la dirección de su aceleración total en este punto? (c) ¿Existe un punto donde la plomada no tenga aceleración? Si es así, ¿cuál punto? (d) ¿Existe un punto donde la plomada tenga aceleraciones tangencial y radial distintas de cero? Si es así, ¿cuál punto? ¿Cuál es la dirección de su aceleración total en este punto?

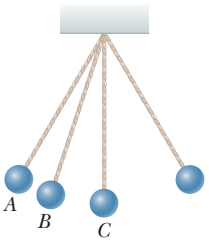


Figura PO6.4

5. Conforme una gota de agua cae a través de la atmósfera, su rapidez inicial cambia cuando cae hacia la Tierra. Antes de que la gota de lluvia alcance su rapidez terminal, ¿la magnitud de su aceleración (a) aumenta, (b) disminuye, (c) permanece constante en cero, (d) permanece constante en 9.80 m/s², o (e) permanece constante en algún otro valor?

6. A la puerta de una oficina se le da un fuerte empujón y se abre con un dispositivo neumático que ralentiza la puerta y luego invierte su movimiento. En el momento en que la puerta está abierta a todo lo que da, (a) ¿la perilla de la puerta tiene una aceleración centrípeta? (b) ¿Tiene una aceleración tangencial?

7. Antes del despegue de un avión, un estudiante curioso en el avión cuelga un iPod de su cable de audífonos. Cuelga hacia abajo mientras el avión está en reposo esperando para despegar. Luego el avión gana rapidez rápidamente mientras se mueve en la pista. **(i)** En relación con la mano del estudiante, ¿el iPod (a) se corre hacia la parte delantera del avión, (b) continúa colgando hacia abajo, o (c) se corre hacia la parte trasera del avión? **(ii)** La rapidez del avión aumenta a razón constante en un intervalo de tiempo de varios segundos. Durante este intervalo, ¿el ángulo que el cable de los audífonos hace con la vertical (a) aumenta, (b) permanece constante o (c) disminuye?

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. ¿Qué fuerzas hacen que se mueva (a) un automóvil, (b) un avión impulsado por hélice y (c) un bote de remos?

2. Un paracaidista que cae llega a su rapidez terminal con su paracaídas cerrado. Después que el paracaídas se abre, ¿qué parámetros cambian para disminuir su rapidez terminal?

3. Un objeto ejecuta movimiento circular con rapidez constante siempre que una fuerza neta de magnitud constante actúe perpendicular a la velocidad. ¿Qué le ocurre a la rapidez si la fuerza no es perpendicular a la velocidad?

4. Describa la trayectoria de un cuerpo en movimiento en el evento en que su aceleración sea constante en magnitud en todo momento y (a) perpendicular a la velocidad; (b) paralela a la velocidad.

5. El observador dentro del elevador en aceleración del ejemplo 5.8 diría que el "peso" del pescado es *T*, la lectura de la balanza, pero esta respuesta es obviamente errónea. ¿Por qué esta observación difiere de la de una persona fuera del elevador en reposo respecto de la Tierra?

6. Si alguien le dijera que los astronautas no tienen peso en órbita porque están más allá de la atracción de la gravedad, ¿aceptaría la afirmación? Explique.

7. Se ha sugerido que cilindros giratorios de casi 20 km de largo y 8 km de diámetro se coloquen en el espacio y

se usen como colonias. El propósito de la rotación es simular gravedad para los habitantes. Explique este concepto para producir una imitación efectiva de la gravedad.

8. Considere que una pequeña gota de lluvia y una gran gota de lluvia caen a través de la atmósfera. (a) Compare sus magnitudes de rapidez terminales. (b) ¿Cuáles son sus aceleraciones cuando llegan a su rapidez terminal?

9. ¿Por qué un piloto tiende a desmayarse cuando sale de una pronunciada caída en picada?

10. Una cubeta de agua se puede girar en una trayectoria vertical tal que no se derrame agua. ¿Por qué el agua permanece en la cubeta, aun cuando la cubeta esté sobre su cabeza?

11. "Si la posición y velocidad actuales de toda partícula en el Universo fuesen conocidas, junto con las leyes que describen las fuerzas que las partículas ejercen unas sobre otras, entonces se podría calcular todo el futuro del Universo. El futuro es definido y predeterminado. El albedrío es una ilusión." ¿Está de acuerdo con esta tesis? Argumente a favor o en contra.

Problemas

1. sencillo; 2. intermedio; 3. desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 6.1 Extensión de la partícula en el modelo del movimiento circular uniforme

1. Una cuerda ligera sostiene una carga fija colgante de 25.0 kg antes de romperse. Un objeto de masa $m = 3.00$ kg unido a la cuerda está girando sobre una mesa horizontal sin fricción en un círculo de radio $r = 0.800$ m, y el otro extremo de la cuerda se mantiene fijo como en figura P6.1. ¿Qué intervalo de rapidez puede tener el objeto antes de que la cuerda se rompa?

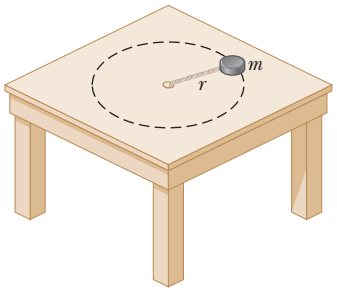


Figura P6.1

2. Mientras dos astronautas del *Apolo* estaban en la superficie de la Luna, un tercer astronauta orbitaba la Luna. Suponga que la órbita es circular y 100 km arriba de la superficie de la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es 1.52 m/s^2. El radio de la Luna es 1.70×10^6 m. Determine (a) la rapidez orbital del astronauta y (b) el periodo de la órbita.

3. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, la rapidez del electrón es aproximadamente 2.20×10^6 m/s. Encuentre (a) la fuerza que actúa sobre el electrón mientras da vueltas en una órbita circular de 0.529×10^{-10} m de radio y (b) la aceleración centrípeta del electrón.

4. Una curva en un camino forma parte de un círculo horizontal. Cuando la rapidez de un automóvil que circula por ella es de 14 m/s constante, la fuerza total horizontal sobre el conductor tiene 130 N de magnitud. ¿Cuál es la fuerza horizontal total sobre el conductor si la rapidez es 18.0 m/s?

5. En un ciclotrón (un tipo de acelerador de partículas), un deuterón (de 2.00 u de masa) alcanza una rapidez final de 10.0% la rapidez de la luz mientras se mueve en una trayectoria circular de 0.480 m de radio. ¿Qué magnitud de fuerza magnética se requiere para matener el deuterón en una trayectoria circular?

6. Un automóvil viaja inicialmente hacia el Este y da vuelta al Norte al viajar en una trayectoria circular con rapidez uniforme, como se muestra en la figura P6.6. La longitud del arco ABC es 235 m y el automóvil completa la vuelta en 36.0 s. (a) ¿Cuál es la aceleración cuando el automóvil está en B, ubicado a un ángulo de 35.0°? Exprese su respuesta en términos de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$. Determine (b) la rapidez promedio del automóvil y (c) su aceleración promedio durante el intervalo de 36.0 s.

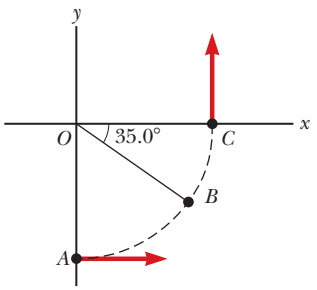


Figura P6.6

7. Una estación espacial, en forma de rueda de 120 m de diámetro, rota para proporcionar una "gravedad artificial" de 3.00 m/s^2 para las personas que caminan alrededor de la pared interior del borde externo. Encuentre la razón de rotación de la rueda (en revoluciones por minuto) que producirá este efecto.

8. Considere un péndulo cónico (figura P6.8) con una plomada de masa $m = 80.0$ kg en una cuerda de longitud $L = 10.0$ m que forma un ángulo $\theta = 5.00°$ con la vertical. Determine (a) las compo-

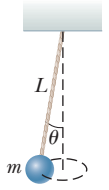


Figura P6.8

nentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce la cuerda sobre el péndulo y (b) la aceleración radial de la plomada.

9. Una moneda colocada a 30.0 cm del centro de una tornamesa horizontal giratoria se desliza cuando su rapidez es 50.0 cm/s. (a) ¿Qué fuerza causa la aceleración centrípeta cuando la moneda está fija en relación con la tornamesa? (b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre la moneda y la tornamesa?

10. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* El objeto de masa m = 4.00 kg en la figura P6.10 se une a una barra vertical mediante dos cuerdas de longitud ℓ = 2.00 m. Las cuerdas están unidas a la varilla en puntos separados por una distancia d = 3.00 m. El objeto gira en un círculo horizontal con rapidez constante v = 3.00 m/s, y las cuerdas permanecen tensas. La varilla gira junto con el objeto de tal forma que las cuerdas no se enrollan en la varilla. **¿Qué pasaría si?** ¿Esta situación sería posible en otro planeta?

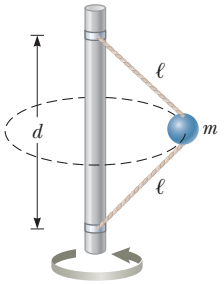


Figura P6.10

11. Una caja de huevos se ubica en la mitad de la plataforma de una camioneta *pickup* mientras la camioneta entra en una curva sin peralte en el camino. La curva se puede considerar como un arco de círculo de 35.0 m de radio. Si el coeficiente de fricción estática entre la caja y la camioneta es 0.600, ¿qué tan rápido se puede mover la camioneta sin que la caja se deslice?

Sección 6.2 Movimiento circular no uniforme

12. Una cubeta de agua se gira en un círculo vertical de radio 1.00 m. (a) ¿Cuáles dos fuerzas externas actúan sobre el agua en la cubeta? (b) ¿Cuál de las dos fuerzas es más importante para ocasionar que el agua se mueva en un círculo? (c) ¿Cuál es la rapidez mínima de la cubeta en la parte superior del círculo para que no se derrame el agua? (d) Suponga que la cubeta con la rapidez que encontró en el inciso (c) súbitamente desaparece en la parte superior del círculo. Describa el movimiento posterior del agua. ¿Se diferenciaría del movimiento de un proyectil?

13. Un halcón vuela en un arco horizontal de 12.0 m de radio con una rapidez constante de 4.00 m/s. (a) Encuentre su aceleración centrípeta. (b) El halcón continúa volando a lo largo del mismo arco horizontal pero aumenta su rapidez a una razón de 1.20 m/s^2. Encuentre la aceleración (magnitud y dirección) en esta situación en el momento que la rapidez del halcón es 4 m/s.

14. Un niño de 40.0 kg se mece en un columpio sostenido por dos cadenas, cada una de 3.00 m de largo. La tensión en cada cadena en el punto más bajo es 350 N. Encuentre (a) la rapidez del niño en el punto más bajo y (b) la fuerza que ejerce el asiento sobre el niño en el punto más bajo. (Ignore la masa del asiento.)

15. Un niño de masa m se mece en un columpio sostenido por dos cadenas, cada una de longitud R. Si la tensión en cada cadena en el punto más bajo es T. Encuentre (a) la rapidez del niño en el punto más bajo y (b) la fuerza que ejerce el asiento sobre el niño en el punto más bajo. (Ignore la masa del asiento.)

16. Un carro de montaña rusa (figura P6.16) tiene una masa de 500 kg cuando está completamente cargado con pasajeros. La trayectoria de la montaña desde su punto inicial que se muestra en la figura al punto Ⓑ implica movimiento sólo de sube y baja (visto por los usuarios), con ningún movimiento hacia la izquierda o la derecha. (a) Si el vehículo tiene una rapidez de 20.0 m/s en el punto Ⓐ, ¿cuál es la fuerza que ejerce la pista sobre el carro en este punto? (b) ¿Cuál es la rapidez máxima que puede tener el vehículo en el punto Ⓑ para todavía permanecer sobre la pista? Suponga que en la montaña rusa las pistas en los puntos Ⓐ y Ⓑ son partes de círculos verticales de radio r_1 = 10.0 m y r_2 = 15.0 m, respectivamente.

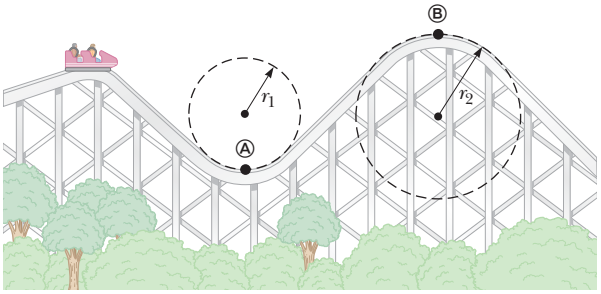


Figura P6.16 Problemas 16 y 38.

17. Una montaña rusa en el parque de diversiones Six Flags Great America en Gurnee, Illinois, incorpora cierta tecnología de diseño ingeniosa y algo de física básica. Cada bucle vertical, en lugar de ser circular tiene forma de lágrima (figura P6.17). Los carros viajan en el interior del bucle en la parte superior, y las magnitudes de velocidad son lo suficientemente grandes para asegurar que los carros permanezcan en la pista. El bucle más grande tiene 40.0 m de alto. Suponga que la rapidez en la parte superior es 13.0 m/s y la aceleración centrípeta correspondiente es $2g$. (a) ¿Cuál es el radio del arco de la lágrima en la parte superior? (b) Si la masa total de un carro más los pasajeros es M, ¿qué fuerza ejerce el riel sobre el carro en la parte superior? (c) Suponga que la montaña rusa tiene un bucle circular de 20.0 m de radio. Si los carros tienen la misma rapidez, 13.0 m/s en la parte superior, ¿cuál es la aceleración centrípeta en la parte superior? (d) Comente acerca de la fuerza normal en la parte superior en la situación descrita en el inciso (c) y de las ventajas de tener bucles con forma de lágrima.


Frank Cezus/Getty Images
Figura P6.17

18. Un extremo de una cuerda está fijo y un objeto pequeño de 0.500 kg se une al otro extremo, donde se balancea en una sección de un círculo vertical de 2.00 m de radio, como se muestra en la figura 6.18. Cuando θ = 20.0°, la rapidez del objeto es 8.00 m/s. En este instante, encuentre (a) la tensión en la cuerda, (b) las componentes tangencial y radial

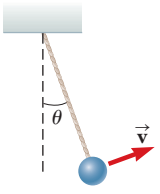


Figura P6.18

de la aceleración y (c) la aceleración total. (d) ¿Su respuesta cambia si el objeto se balancea hacia abajo en lugar de hacia arriba? Explique su respuesta del inciso (d).

19. Un arqueólogo aventurero (m = 85.0 kg) intenta cruzar un río colgado de una liana. Ésta tiene 10.0 m de largo y su rapidez en la parte inferior de la oscilación es 8.00 m/s. El arqueólogo no sabe que la liana tiene una resistencia al rompimiento de 1 000 N. ¿Cruzará el río sin caer?

Sección 6.3 Movimiento en marcos acelerados

20. Un objeto de masa m = 5.00 kg, unido a una balanza de resorte, descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P6.20. La balanza de resorte, unida al extremo frontal de un vagón, tiene una lectura de cero cuando el vagón está en reposo. (a) Determine la aceleración del vagón si la balanza de resorte tiene una lectura constante de 18.0 N cuando el carro está en movimiento. (b) ¿Qué lectura constante mostrará la balanza si el vagón se mueve con velocidad constante? (c) Describa las fuerzas sobre el objeto como lo observa alguien en el vagón y alguien en reposo fuera del vagón.

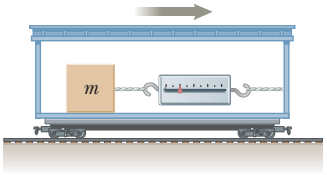


Figura P6.20

21. Un objeto de masa m = 0.500 kg está suspendido del techo de una camioneta que acelera, como se muestra en la figura P6.21. Tome a = 3.00 m/s² y encuentre (a) el ángulo θ que forma la cuerda con la vertical y (b) la tensión T en la cuerda.

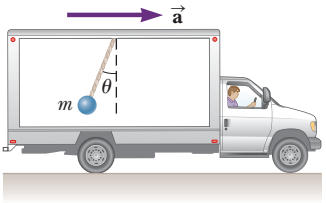


Figura P6.21

22. Una niña acostada sobre su espalda experimenta una tensión de 55.00 N en los músculos en ambos lados de su cuello cuando eleva su cabeza para mirar por encima de los dedos de sus pies. Después, baja por un tobogán de agua, los pies primero, a una rapidez terminal de 5.70 m/s, viajando desde lo alto de la pared exterior de una curva horizontal de 2.40 m de radio, mientras eleva la cabeza para ver hacia adelante sobre los dedos de sus pies. Encuentre la tensión en los músculos en ambos lados de su cuello.

23. Una persona está de pie sobre una báscula en un elevador. Cuando el elevador parte, la báscula tiene una lectura constante de 591 N. Más tarde, cuando el elevador se detiene, la lectura de la báscula es 391 N. Suponga que la magnitud de la aceleración es la misma durante la partida y el frenado. Determine: (a) el peso de la persona, (b) la masa de la persona y (c) la aceleración del elevador.

24. **Problema de repaso.** Una estudiante está de pie con su mochila en el piso cerca de ella, en un elevador que acelera continuamente hacia arriba con aceleración a. El ancho del elevador es L. La estudiante da a su mochila una patada rápida en t = 0 y le imparte una rapidez v que la hace deslizar a través del piso del elevador. En el tiempo t, la mochila golpea la pared opuesta. Encuentre el coeficiente de fricción cinética μ_k entre la mochila y el piso del elevador.

25. Un pequeño contenedor de agua se coloca sobre el plato dentro de un horno de microondas en un radio de 12.0 cm desde el centro. El plato gira de manera uniforme y da una revolución cada 7.25 s. ¿Qué ángulo forma la superficie del agua con la horizontal?

Sección 6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas

26. **Problema de repaso.** (a) Estime la rapidez terminal de una esfera de madera (densidad 0.830 g/cm³) que cae a través del aire, considere su radio como 8.00 cm y su coeficiente de arrastre como 0.500. (b) ¿Desde qué altura un objeto en caída libre alcanzaría esta rapidez en ausencia de resistencia del aire?

27. La masa de un automóvil deportivo es 1 200 kg. La forma del cuerpo es tal que el coeficiente de arrastre aerodinámico es 0.250 y el área frontal es 2.20 m². Si ignora todas las otras fuentes de fricción, calcule la aceleración inicial que tiene el automóvil si ha viajado a 100 km/h y ahora cambia a neutral y lo deja deslizarse.

28. Una paracaidista de 80.0 kg de masa salta desde un avión de lento movimiento y alcanza una rapidez terminal de 50.0 m/s. (a) ¿Cuál es la aceleración del paracaidista cuando su rapidez es 30.0 m/s? (b) ¿Cuál es la fuerza de arrastre sobre el paracaidista cuando su rapidez es 50.0 m/s? (c) ¿Cuándo es 30.0 m/s?

29. Calcule la fuerza que se requiere para jalar una bola de cobre de 2.00 cm de radio hacia arriba a través de un fluido con rapidez constante de 9.00 cm/s. Considere la fuerza de arrastre proporcional a la rapidez, con constante de proporcionalidad 0.950 kg/s. Ignore la fuerza de flotación.

30. Un pequeño trozo de espuma de estireno, material de empaque, se suelta desde una altura de 2.00 m sobre el suelo. Hasta que llega a rapidez terminal, la magnitud de su aceleración se conoce mediante $a = g - Bv$. Después de caer 0.500 m, la espuma de estireno en efecto alcanza su rapidez terminal y después tarda 5.00 s más en llegar al suelo. (a) ¿Cuál es el valor de la constante b? (b) ¿Cuál es la aceleración en t = 0? (c) ¿Cuál es la aceleración cuando la rapidez es 0.150 m/s?

31. Una esfera pequeña de 3.00 g de masa se libera desde el reposo en t = 0 desde un punto bajo la superficie de un fluido viscoso. Se observa que la rapidez terminal es v_T = 2.00 cm/s. Encuentre: (a) el valor de la constante b en la ecuación 6.2, (b) el tiempo t en el que la esfera alcanza $0.632v_T$, y (c) el valor de la fuerza resistiva cuando la esfera alcanza su rapidez terminal.

32. En los juegos de béisbol de las grandes ligas es un lugar común mostrar en una pantalla la rapidez de cada lanzamiento. Esta rapidez se determina con una pistola radar dirigida por un operador colocado detrás de la almohadilla del bateador. La pistola usa el corrimiento Doppler de microondas reflejadas desde la bola de béisbol, como se estudiará en el capítulo 39. La pistola determina la rapidez en algún punto particular sobre la trayectoria de la bola, dependiendo de cuándo el operador jala el disparador. Puesto que la bola está sometida a una fuerza de arrastre debida al aire, proporcional al cuadrado de su rapidez dada por $R = kmv^2$, frena conforme viaja 18.3 m hacia la

almohadilla de acuerdo con la fórmula $v = v_i e^{-kx}$. Suponga que la bola sale de la mano del lanzador a 90.0 mi/h (40.2 m/s). Ignore su movimiento vertical. Utilice el cálculo de R para las pelotas de béisbol del ejemplo 6.11 para determinar la rapidez del lanzamiento cuando la pelota cruza la almohadilla.

33. Suponga que la fuerza resistiva que actúa sobre un patinador rápido es $f = -kmv^2$, donde k es una constante y m es la masa del patinador. El patinador cruza la línea de meta de una competencia en línea recta con rapidez v_i y después disminuye su velocidad deslizándose sobre sus patines. Demuestre que la rapidez del patinador en cualquier tiempo t después de cruzar la línea final es $v(t) = v_i/(1 + ktv_i)$.

34. **Problema de repaso.** Una persona que lava ventanas jala un rodillo de goma por una ventana vertical muy alta. El rodillo tiene 160 g de masa y está montado en el extremo de una barra ligera. El coeficiente de fricción cinética entre el rodillo y el vidrio seco es 0.900. La persona lo presiona contra la ventana con una fuerza que tiene una componente horizontal de 4.00 N. (a) Si ella jala el rodillo por la ventana a velocidad constante, ¿qué componente de fuerza vertical debe ejercer? (b) La persona aumenta la componente de fuerza hacia abajo en 25.0%, pero todas las otras fuerzas permanecen iguales. Encuentre la aceleración del rodillo en esta situación. (c) Luego el rodillo se mueve en una porción húmeda de la ventana, donde su movimiento ahora lo resiste una fuerza de arrastre de fluido proporcional a su velocidad de acuerdo con $R = -20.0v$. Encuentre la velocidad terminal a la que se aproxima el rodillo, si supone que la persona ejerce la misma fuerza descrita en el inciso (b).

35. El conductor de una lancha de motor apaga su motor cuando su rapidez es 10.0 m/s y se desliza hasta el reposo. La ecuación que describe el movimiento de la lancha durante este periodo es $v = v_i e^{-ct}$, donde v es la rapidez en el tiempo t, v_i es la rapidez inicial y c es una constante. En $t = 20.0$ s, la rapidez es 5.00 m/s. (a) Encuentre la constante c. (b) ¿Cuál es la rapidez en $t = 40.0$ s? (c) Derive la expresión para $v(t)$ y demuestre con esto que la aceleración de la lancha es proporcional a la rapidez en cualquier tiempo.

36. Usted puede sentir una fuerza de arrastre del aire sobre su mano si estira el brazo por afuera de una ventana abierta en un automóvil que se mueve rápidamente. *Nota*: no se ponga en peligro. ¿Cuál es el orden de magnitud de esta fuerza? En su solución, establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.

Problemas adicionales

37. Un auto viaja en sentido horario con rapidez constante alrededor de una sección circular de una carretera horizontal, como se muestra en la vista aérea de la figura P6.37. Encuentre la dirección de su velocidad y aceleración en (a) la posición Ⓐ y (b) en la posición Ⓑ.

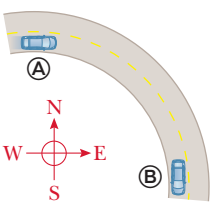


Figura P6.37

38. La masa de un carro de montaña rusa, incluyendo a sus pasajeros, es 500 kg. Su rapidez en la parte inferior de la vía en la figura P6.16 es 19 m/s. El radio de esta sección de la pista es $r_1 = 25$ m. Encuentre la fuerza que ejerce un asiento en el carro de montaña rusa sobre un pasajero de 50 kg en el punto más bajo.

39. Se utiliza una cuerda bajo una tensión de 50.0 N para hacer girar una piedra en un círculo horizontal de radio 2.50 m a una rapidez de 20.4 m/s en una superficie sin fricción, como se muestra en la figura P6.39. Conforme se tira de la cuerda, aumenta la rapidez de la roca. Cuando la cuerda sobre la mesa es de 1.00 m de largo y la rapidez de la piedra es 51.0 m/s, la cuerda se rompe. ¿Cuál es la resistencia al rompimiento de la cuerda en newtons?

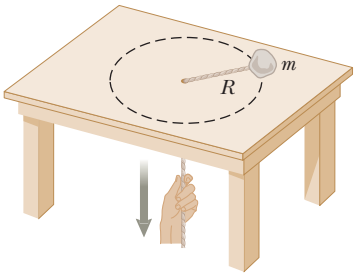


Figura P6.39

40. Perturbado por el exceso de velocidad de los automóviles fuera de su lugar de trabajo, el premio Nobel Arthur Holly Compton diseñó un tope (llamado el "tope Holly") y lo instaló. Suponga que un auto de 1 800 kg pasa por un tope en un camino que sigue un arco de un círculo de radio 20.4 m, como se muestra en la figura P6.40. (a) Si el auto viaja a 30.0 km/h, ¿qué fuerza ejerce la carretera sobre el auto cuando el automóvil pasa por el punto más alto del tope? (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la velocidad máxima que el automóvil puede tener sin perder contacto con la carretera a medida que pasa este punto más alto?

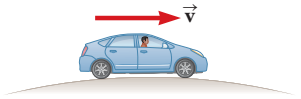


Figura P6.40
Problemas 40 y 41.

41. Un automóvil de masa m pasa sobre un tope en un camino que sigue el arco de un círculo de radio R, como se muestra en la figura P6.40. (a) ¿Qué fuerza ejerce el camino sobre el automóvil mientras éste pasa el punto más alto del tope si viaja a una rapidez v? (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la máxima rapidez que puede tener el automóvil mientras pasa el punto más alto sin perder contacto con el camino?

42. El juguete de un niño consiste en una pequeña cuña que tiene un ángulo agudo θ (figura P6.42). El lado inclinado de la cuña no tiene fricción, y un objeto de masa m se mantiene a una altura constante si la cuña se hace girar a cierta rapidez constante. La cuña está girando al rotar su eje, una varilla vertical que está firmemente sujeta a la cuña en el extremo inferior. Demuestre que cuando el objeto se encuentra en reposo en un punto a una distancia L arriba a lo largo de la cuña, la rapidez del objeto debe ser $v = (gL \operatorname{sen} \theta)^{1/2}$.

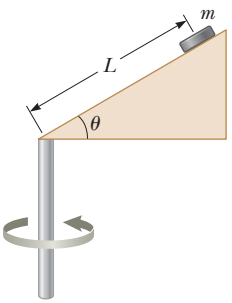


Figura P6.42

43. Un hidroavión de masa total m acuatiza en un lago con rapidez inicial $v_i\hat{\mathbf{i}}$. La única fuerza horizontal sobre éste es una fuerza resistiva sobre sus pontones del agua. La fuerza resistiva es proporcional a la velocidad del hidroavión:

$\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$. La segunda ley de Newton aplicada al hidroavión es $-bv\hat{\mathbf{i}} = m(dv/dt)\hat{\mathbf{i}}$. A partir del teorema fundamental del cálculo, esta ecuación diferencial implica que la rapidez cambia de acuerdo con

$$\int_{v_i}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt$$

(a) Realice las integraciones para determinar la rapidez del hidroavión como función del tiempo. (b) Bosqueje una gráfica de la rapidez como función del tiempo. (c) ¿El hidroavión se detiene por completo después de un intervalo de tiempo finito? (d) ¿El hidroavión viaja una distancia finita para detenerse?

44. Un objeto de masa $m_1 = 4.00$ kg está atado a un objeto de masa $m_2 = 3.00$ kg con la cuerda 1 de longitud $\ell = 0.500$ m. La combinación se hace pivotar en una trayectoria circular vertical sobre una segunda cuerda, la cuerda 2, de longitud $\ell = 0.500$ m. Durante el movimiento, las dos cuerdas son colineales en todo momento, como se muestra en la figura P6.44. En la parte superior de su movimiento, m_2 viaja a $v = 4.00$ m/s. (a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda 1 en este instante? (b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda 2 en este instante? (c) ¿Cuál cuerda se romperá primero si la combinación se gira más rápido y cada vez más rápido?

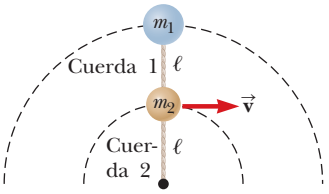


Figura P6.44

45. Una bola de masa $m = 0.275$ kg se columpia en una trayectoria circular vertical en una cuerda de longitud $L = 0.850$ m, como en la figura P6.45. (a) ¿Cuáles son las fuerzas que actúan sobre la bola en cualquier punto de la trayectoria? (b) Dibuje diagramas de fuerza para la bola cuando se encuentra en la parte inferior del círculo y cuando está en la cima. (c) Si su rapidez es de 5.20 m/s en la parte superior del círculo, ¿cuál es la tensión en la cuerda ahí? (d) si la cuerda se rompe cuando su tensión excede 22.5 N, ¿cuál es la rapidez máxima que puede tener la pelota en el fondo antes de que ocurra?

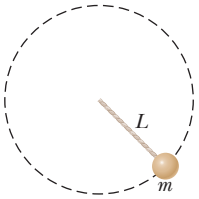


Figura P6.45

46. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un niño travieso va a un parque de diversiones con su familia. En un juego, después de una severa reprimenda de su madre, él se desliza fuera de su asiento y trepa a la parte superior de la estructura del juego, que tiene forma de cono con su eje vertical y sus lados inclinados, haciendo un ángulo de $\theta = 20.0°$ con la horizontal, como se muestra en la figura P6.46. Esta parte de la estructura gira alrededor del eje central vertical cuando opera el juego. El niño se sienta en la superficie inclinada en un punto $d = 5.32$ m debajo del centro del cono por el lado oblicuo del cono y está enfadado. El coeficiente de fricción estática entre el niño y el cono es 0.700. El operador del juego no se da cuenta que el niño está lejos de su asiento y así continúa operando el paseo. Como resultado el niño sentado, haciendo pucheros, gira en una trayectoria circular a una rapidez de 3.75 m/s.

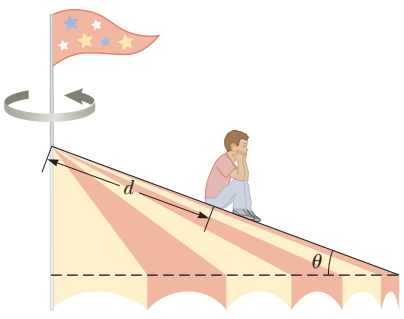


Figura P6.46

47. (a) Un carrusel de equipaje en un aeropuerto tiene la forma de una sección de un gran cono y gira de manera estable en torno a su eje vertical. Su superficie metálica se inclina hacia abajo y al exterior y forma un ángulo de 20.0° con la horizontal. Una pieza de equipaje que tiene una masa de 30.0 kg se coloca sobre el carrusel, a 7.46 m del eje de rotación. La maleta viajera gira una vez en 38.0 s. Calcule la fuerza de fricción estática que ejerce el carrusel sobre la maleta. (b) El motor conductor se cambia para girar el carrusel a una mayor rapidez de rotación constante, y la pieza de equipaje salta a otra posición, a 7.94 m del eje de rotación. Ahora, al dar una vuelta cada 34.0 s, la maleta está a punto de deslizarse. Calcule el coeficiente de fricción estática entre la maleta y el carrusel.

48. En una secadora de ropa doméstica, una tina cilíndrica que contiene ropa húmeda gira de manera estable en torno a un eje horizontal, como se muestra en la figura P6.48. Se hacen rodar de tal modo que las prendas se sequen uniformemente. La rapidez de rotación de la tina con paredes uniformes se elige de modo que una pequeña pieza de ropa perderá contacto con la tina cuando la ropa esté a un ángulo de $\theta = 68.0°$ sobre la horizontal. Si el radio de la tina es $r = 0.330$ m, ¿qué razón de revoluciones se necesita?

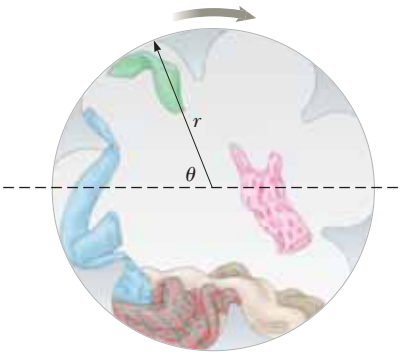


Figura P6.48

49. Interprete la gráfica de la figura 6.16(b), que describe los resultados de la caída de filtros de café discutida en el ejemplo 6.10. Proceda del modo siguiente. (a) Encuentre la pendiente de la línea recta, incluidas sus unidades. (b) De la ecuación 6.6, $R = \frac{1}{2}D\rho Av^2$, identifique la pendiente teórica de una gráfica de fuerza resistiva en función del cuadrado de la rapidez. (c) Iguale las pendientes experimental y teórica y proceda a calcular el coeficiente de arrastre de los filtros. Modele el área transversal de los fil-

tros como la de un círculo de radio 10.5 cm y tome la densidad del aire de 1.20 kg/m^3. (d) Elija arbitrariamente los ocho puntos de información sobre la gráfica y encuentre su separación vertical de la línea de mejor ajuste. Exprese esta dispersión como un porcentaje. (e) En un párrafo breve, establezca lo que demuestra la gráfica y compare con la predicción teórica. Necesitará hacer referencia a las cantidades graficadas en los ejes, a la forma de la línea de la gráfica, a los puntos de información y a los resultados de los incisos (c) y (d).

50. Una vasija que rodea un drenaje tiene la forma de un cono circular que se abre hacia arriba, y en todas partes tiene un ángulo de 35.0° con la horizontal. Un cubo de hielo de 25.0 g se hace deslizar alrededor del cono sin fricción en un círculo horizontal de radio R. (a) Encuentre la rapidez que debe tener el cubo de hielo como función de R. (b) ¿Es innecesaria alguna parte de la información para la solución? Suponga que R se hace dos veces más grande. (c) ¿La rapidez requerida aumenta, disminuye o permanece constante? Si cambia, ¿en qué factor? (d) ¿El tiempo requerido para cada revolución aumenta, disminuye o permanece constante? Si cambia, ¿en qué factor? (e) ¿Las respuestas a los incisos (c) y (d) parecen contradictorias? Explique.

51. Un camión se mueve con aceleración constante a hasta una colina que hace un ángulo ϕ con la horizontal, como en la figura P6.51. Una pequeña esfera de masa m está suspendida desde el techo de la camioneta por un cable de luz. Si el péndulo hace un ángulo constante θ con la perpendicular al techo, ¿a qué es igual a?

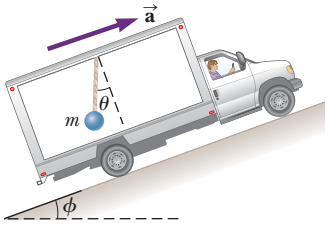


Figura P6.51

52. El piloto de un avión ejecuta una maniobra de rizo con rapidez constante en un círculo vertical. La rapidez del avión es 300 mi/h en la parte superior del rizo y 450 mi/h en la parte inferior y el radio del círculo es 1 200 pies. (a) ¿Cuál es el peso aparente del piloto en el punto más bajo si su peso verdadero es 160 lb? (b) ¿Cuál es su peso aparente en el punto más alto? (c) **¿Qué pasaría si?** Describa cómo experimentaría el piloto la sensación de ausencia de peso si puede variar el radio y la rapidez. *Nota*: su peso aparente es igual a la magnitud de la fuerza que ejerce el asiento sobre su cuerpo.

53. **Problema de repaso.** Mientras aprende a conducir, usted está en un automóvil de 1 200 kg que se mueve a 20.0 m/s a través de un gran estacionamiento vacío y a nivel. Súbitamente se da cuenta que se dirige justo hacia una pared de ladrillos de un gran supermercado y está en peligro de chocar con ella. El pavimento puede ejercer una fuerza horizontal máxima de 7 000 N sobre el automóvil. (a) Explique por qué debe esperar que la fuerza tenga un valor máximo bien definido. (b) Suponga que pisa los frenos y no gira el volante. Encuentre la distancia mínima a la que debe estar de la pared para evitar un choque. (c) Si no frena y en vez de ello mantiene rapidez constante y gira el volante, ¿cuál es la distancia mínima a la que debe estar de la pared para evitar un choque? (d) ¿Cuál método, (b) o (c), es mejor para evitar una colisión? O, ¿debe usar tanto frenos como volante, o ninguno? Explique. (e) ¿La conclusión del inciso (d) depende de los valores numéricos que se proporcionan en este problema, o es verdad en general? Explique.

54. Un disco de masa m_1 se une a una cuerda y se le hace girar en un círculo de radio R sobre una mesa horizontal sin fricción. El otro extremo de la cuerda pasa a través de un pequeño orificio en el centro de la mesa, y una carga de masa m_2 se une a la cuerda (figura P6.54). La carga suspendida permanece en equilibrio mientras que el disco en la mesa da vueltas. Encuentre expresiones simbólicas para (a) la tensión en la cuerda, (b) la fuerza radial que actúa sobre el disco y (c) la rapidez del disco. (d) Describa cualitativamente qué ocurrirá en el movimiento del disco si el valor de m_2 aumenta un poco al colocar una carga adicional sobre éste. (e) Describa cualitativamente qué ocurrirá en el movimiento del disco si el valor de m_2 disminuye al remover una parte de la carga suspendida.

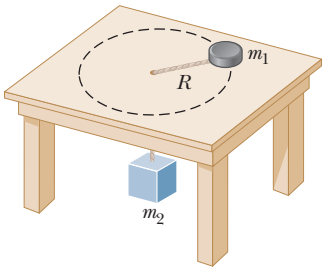


Figura P6.54

55. Ya que la Tierra gira en torno a su eje, un punto sobre el Ecuador experimenta una aceleración centrípeta de 0.033 7 m/s^2, mientras que un punto en los polos no experimenta aceleración centrípeta. Si una persona en el Ecuador tiene una masa de 75.0 kg, calcule (a) la fuerza gravitacional (peso real) sobre la persona y (b) la fuerza normal (peso aparente) de la persona. (c) ¿Cuál es mayor? Suponga que la Tierra es una esfera uniforme y considere $g = 9.800$ m/s^2.

56. Galileo pensó acerca de si la aceleración debía definirse como la relación de cambio de la velocidad en el tiempo o como la relación de cambio en velocidad en la distancia. Él eligió la anterior, así que use el nombre "vroomosidad" para la razón de cambio de la velocidad en el espacio. Para el movimiento de una partícula en una línea recta con aceleración constante, la ecuación $v = v_i + at$ da su velocidad v como función del tiempo. De igual modo, para el movimiento lineal de una partícula con vroomosidad constante k, la ecuación $v = v_i + kx$ da la velocidad como función de la posición x si la rapidez de la partícula es v_i en $x = 0$. (a) Encuentre la ley que describe la fuerza total que actúa sobre este objeto, de masa m. (b) Describa un ejemplo de tal movimiento o explique por qué tal movimiento es irreal. Considere (c) la posibilidad de k positiva y también (d) la posibilidad de k negativa.

57. La figura P6.57 muestra la foto de un juego en un parque de diversiones. La estructura consiste en


Stuart Gregory/Getty Images
Figura P6.57

una plataforma circular giratoria de diámetro D, de donde asientos de masa m están suspendidos en el extremo de cadenas sin masa de longitud d. Cuando el sistema gira con rapidez constante, las cadenas forman un ángulo θ con la vertical. Considere que este juego tiene los siguientes parámetros: $D = 8.00$ m, $d = 2.50$ m, $m = 10.0$ kg y $\theta = 28.0°$. (a) ¿Cuál es la rapidez de cada asiento? (b) Dibuje un diagrama de cuerpo libre de un niño de 40.0 kg que viaja en un asiento y (c) encuentre la tensión en la cadena.

58. **Problema de repaso.** Una porción de masilla inicialmente se ubica en el punto A en el borde de una rueda de molino que gira en torno a un eje horizontal. La masilla se desplaza del punto A cuando el diámetro a través de A es horizontal. Luego se eleva verticalmente y regresa a A en el instante en que la rueda completa una revolución. Usando esta información, se quiere encontrar la rapidez v de la masilla cuando sale de la rueda y la fuerza que la sostenía a la rueda. (a) ¿Qué análisis de modelo es apropiado para el movimiento de la masilla conforme se levanta y cae? (b) Use este modelo para encontrar una expresión simbólica para el intervalo de tiempo entre que la masilla deja el punto A y cuando llega a A, en términos de v y g. (c) ¿Cuál es el análisis de modelo adecuado para describir un punto sobre la rueda? (d) Encuentre el periodo del movimiento del punto A en términos de la rapidez tangencial v y el radio R de la rueda. (e) Haga el intervalo de tiempo del inciso (b) igual al periodo del inciso (d) y resuelva para la rapidez v de la masilla conforme sale la rueda. (f) Si la masa de la masilla es m, ¿cuál es la magnitud de la fuerza que la sostuvo a la rueda antes de que se lanzara?

59. Un juego en un parque de diversiones consiste en un gran cilindro vertical que gira en torno a su eje lo suficientemente rápido para que cualquier persona en su interior se mantenga contra la pared cuando el suelo se aleja (figura P6.59). El coeficiente de fricción estática entre la persona y la pared es μ_s y el radio del cilindro es R. (a) Demuestre que el periodo de revolución máximo necesario para evitar que la persona caiga es $T = (4\pi^2 R\mu_s/g)^{1/2}$. (b) Si la rapidez de revoluciones del cilindro se hace un poco mayor, ¿qué ocurre con la magnitud de cada una de las fuerzas que actúan sobre la persona? ¿Qué ocurre en el movimiento de la persona? (c) Si en vez de ello la rapidez de revoluciones del cilindro se hace un poco más pequeña, ¿qué ocurre con la magnitud de cada una de las fuerzas que actúan sobre la persona? ¿Cómo cambia el movimiento de la persona?

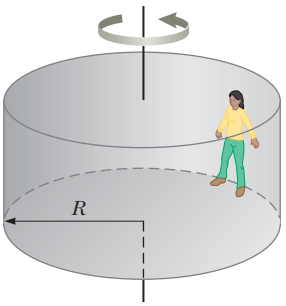


Figura P6.59

60. A los integrantes de un club de paracaidismo se les dieron los siguientes datos para usar en la planeación de sus saltos. En la tabla, d es la distancia que cae desde el reposo un paracaidista en una "posición extendida estable en caída libre" en función del tiempo de caída t. (a) Convierta las distancias en pies a metros. (b) Grafique d (en metros) en función de t. (c) Determine el valor de la rapidez terminal v_T al encontrar la pendiente de la porción recta de la curva. Aplique un ajuste de mínimos cuadrados para determinar esta pendiente.

t (s)	d (ft)	t (s)	d (ft)	t (s)	d (ft)
0	0	7	652	14	1 831
1	16	8	808	15	2 005
2	62	9	971	16	2 179
3	138	10	1 138	17	2 353
4	242	11	1 309	18	2 527
5	366	12	1 483	19	2 701
6	504	13	1 657	20	2 875

61. Un automóvil recorre una curva peraltada como se discutió en el ejemplo 6.4 y se muestra en la figura 6.5. El radio de curvatura del camino es R, el ángulo de peralte es θ y el coeficiente de fricción estática es μ_s. (a) Determine el intervalo de rapidez que puede tener el automóvil sin deslizarse arriba o abajo del peralte. (b) Encuentre el valor mínimo para μ_s tal que la rapidez mínima sea cero.

62. En el ejemplo 6.5 investigamos las fuerzas que un niño experimenta en una rueda de la fortuna. Suponga que los datos en ese ejemplo se aplican a este problema. ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce el asiento sobre un niño de 40.0 kg cuando éste está a medio camino entre la parte superior e inferior?

63. Un modelo de avión de masa 0.750 kg vuela con una rapidez de 35.0 m/s en un círculo horizontal en el extremo de un cable de control de 60.0 m de largo, como se muestra en la figura P6.63a. En la figura P6.63b se muestran las fuerzas ejercidas sobre el avión: la tensión en el cable de control, la fuerza gravitacional y la elevación aerodinámica que actúa en $\theta = 20.0°$ hacia adentro de la vertical. Calcule la tensión en el cable, suponiendo que hace un ángulo constante de $\theta = 20.0°$ con la horizontal.

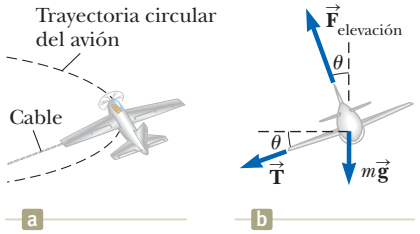


Figura P6.63

64. Una estudiante construye y calibra un acelerómetro y lo utiliza para determinar la rapidez de su auto en cierta curva de carretera no peraltada. El acelerómetro es una plomada con un transportador que une al techo de su automóvil. Un amigo que se sube en el automóvil con la estudiante observa que la plomada se cuelga en un ángulo de 15.0° de la vertical cuando el automóvil tiene una rapidez de 23.0 m/s. (a) ¿Cuál es la aceleración centrípeta del auto al rodear la curva? (b) ¿Cuál es el radio de la curva? (c) ¿Cuál es la rapidez del auto si la plomada se desvía 9.00° mientras rodea la misma curva?

Problemas de desafío

65. Un objeto de 9.00 kg que parte del reposo cae a través de un medio viscoso y experimenta una fuerza resistiva dada por la ecuación 6.2. El objeto alcanza la mitad de su rapi-

dez terminal en 5.54 s. (a) Determine la rapidez terminal. (b) ¿En qué tiempo la rapidez del objeto es tres cuartos de la rapidez terminal? (c) ¿Qué distancia recorrió el objeto en los primeros 5.54 s de movimiento?

66. Para $t < 0$, un objeto de masa m no experimenta fuerza y se mueve en la dirección x positiva con una rapidez constante v_i. Comenzando en $t = 0$, cuando el objeto pasa de la posición $x = 0$, experimenta una fuerza neta resistiva proporcional al cuadrado de su rapidez: $\vec{\mathbf{F}}_{\text{net}} = -mkv^2\hat{\mathbf{i}}$, donde k es una constante. La rapidez del objeto después de $t = 0$ viene dada por $v = v_i/(1 + kv_it)$. (a) Encuentre la posición x del objeto como una función del tiempo. (b) Encuentre la velocidad del objeto como una función de la posición.

67. Un golfista saca desde una posición precisamente a $\phi_i = 35.0°$ latitud norte. Golpea la bola hacia el Sur, con un alcance de 285 m. La velocidad inicial de la bola está a 48.0° sobre la horizontal. Suponga que la resistencia del aire es despreciable para la pelota de golf. (a) ¿Cuánto tiempo está la bola en vuelo? El hoyo está hacia el Sur de la posición del golfista, y haría un hoyo en uno si la Tierra no girara. La rotación de la Tierra hace que el punto de partida se mueva en un círculo de radio $R_T \cos \phi_i = (6.37 \times 10^6 \text{ m}) \cos 35.0°$, como se muestra en la figura P6.67. El punto de partida completa una revolución cada día. (b) Encuentre la rapidez hacia el Este del punto de partida en relación con las estrellas. El hoyo también se mueve al Este, pero está 285 m más al Sur y por tanto a una latitud ligeramente menor ϕ_f. Dado que el hoyo se mueve en un círculo ligeramente más grande, su rapidez debe ser mayor que la del punto de partida. (c) ¿Por cuánto la rapidez del hoyo supera la del punto de partida? Durante el intervalo de tiempo en que la bola está en vuelo, se mueve arriba y abajo así como al Sur con el movimiento de proyectil que estudió en el capítulo 4, pero también se mueve al Este con la rapidez que encontró en el inciso (b). Sin embargo, el hoyo se mueve al Este a una rapidez mayor, y jala la bola con la rapidez relativa que encontró en el inciso (c). (d) ¿A qué distancia hacia el Oeste del hoyo aterriza la bola?

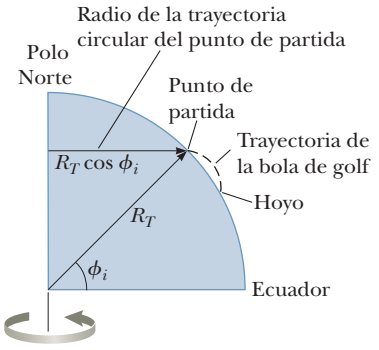


Figura P6.67

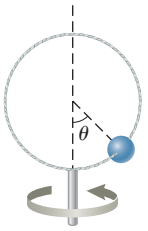


Figura P6.68

68. Una sola cuenta puede deslizarse con fricción despreciable sobre un alambre rígido que se dobló en una espira circular de 15.0 cm de radio, como se muestra en la figura P6.68. El círculo siempre está en un plano vertical y gira de manera estable en torno a su diámetro vertical con (a) un periodo de 0.450 s. La posición de la cuenta se describe mediante el ángulo θ que la línea radial, desde el centro de la espira a la cuenta, forma con la vertical. (a) ¿A qué ángulo arriba del fondo del círculo puede permanecer la cuenta sin movimiento en relación con el círculo que gira? (b) **¿Qué pasaría si?** Repita el problema y considere que el periodo de rotación del círculo es 0.850 s. (c) Describa cómo la solución al inciso (b) es fundamentalmente diferente de la solución al inciso (a). (d) Para cualquier periodo o tamaño de espira, ¿siempre hay un ángulo al que la cuenta puede permanecer quieta en relación con la espira? (e) ¿Alguna vez hay más de dos ángulos? Arnold Arons sugirió la idea para este problema.

69. La expresión $F = arv + br^2v^2$ da la magnitud de la fuerza resistiva (en newtons) que se ejerce sobre una esfera de radio r (en metros) por una corriente de aire que se mueve con rapidez v (en metros por segundo), donde a y b son constantes con unidades del SI apropiadas. Sus valores numéricos son $a = 3.10 \times 10^{-4}$ y $b = 0.870$. Encuentre con esta expresión la rapidez terminal para gotas de agua que caen bajo su propio peso en aire y considere los siguientes valores para los radios de gotas: (a) 10.0 μm, (b) 100 μm, (c) 1.00 mm. Para (a) y (c) puede obtener respuestas precisas sin resolver una ecuación cuadrática al considerar cuál de las dos contribuciones a la resistencia del aire es dominante e ignorar la contribución menor.

70. Debido a la rotación de la Tierra, una plomada no cuelga exactamente a lo largo de una línea recta dirigida hacia el centro de la Tierra. ¿Cuánto se desvía la plomada de una línea radial a 35.0° latitud norte? Suponga que la Tierra es esférica.

CAPÍTULO

7

Energía de un sistema



7.1 Sistemas y entornos

7.2 Trabajo realizado por una fuerza constante

7.3 Producto escalar de dos vectores

7.4 Trabajo realizado por una fuerza variable

7.5 Energía cinética y el teorema trabajo-energía cinética

7.6 Energía potencial de un sistema

7.7 Fuerzas conservativas y no conservativas

7.8 Relación entre fuerzas conservativas y energía potencial

7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

En una granja de viento en la desembocadura del río Mersey en Liverpool, Inglaterra, el aire en movimiento realiza trabajo sobre las aspas de los molinos, lo que hace girar las aspas y el rotor de un generador eléctrico. La energía se transfiere afuera del sistema del molino de viento mediante electricidad. (*Christopher Furlong/ Getty Images*)

Las definiciones de cantidades tales como posición, velocidad, aceleración y fuerza, junto con principios como los de la segunda ley de Newton, han permitido resolver una variedad de problemas. Sin embargo, algunos problemas que podrían resolverse teóricamente con las leyes de Newton, son muy difíciles en la práctica, pero es posible simplificarlos con un planteamiento diferente. Aquí y en los capítulos siguientes se investigará este nuevo planteamiento, que incluirá definiciones de cantidades que tal vez no le sean familiares. Otras cantidades pueden sonar familiares, pero adquieren significados más específicos en física que en la vida cotidiana. El análisis comienza al explorar la noción de *energía*.

El concepto de energía es uno de los temas más importantes en ciencia e ingeniería. En la vida cotidiana se piensa en la energía en términos de combustible para transporte y calentamiento, electricidad para luz y electrodomésticos, y alimentos para el consumo. No obstante, estas ideas no definen la energía. Sólo dejan ver que los combustibles son necesarios para realizar un trabajo y que dichos combustibles proporcionan algo que se llama energía.

La energía está presente en el Universo en diferentes formas. *Todo* proceso físico que ocurra en el Universo involucra energía y transferencias o transformaciones de energía. Por desgracia, a pesar de su extrema importancia, la energía no es fácil de definir. Las variables en los capítulos previos fueron relativamente concretas; se tiene experiencia cotidiana con velocidades y fuerzas, por ejemplo. Sin embargo, aunque se tengan experiencias con la energía, como cuando se acaba la gasolina o con la pérdida del servicio eléctrico después de una tormenta violenta, el concepto de energía es más abstracto.

El concepto de energía se puede aplicar a sistemas mecánicos sin recurrir a las leyes de Newton. Además, en capítulos posteriores del libro el método de energía permite comprender fenómenos térmicos y eléctricos en términos de los mismos modelos que aquí se desarrollarán al estudiar mecánica.

Los análisis de modelos presentados en capítulos anteriores se apoyaron en el movimiento de una partícula o de un objeto que podía representarse como una partícula. El nuevo enfoque comienza al dirigir la atención sobre un nuevo modelo de simplificación, un *sistema* y sobre análisis de modelos sustentados en el modelo de un sistema. Estos análisis de modelos se introducirán formalmente en el capítulo 8. En este capítulo se introducen sistemas y tres maneras de almacenar energía en un sistema.

7.1 Sistemas y entornos

Prevención de riesgos ocultos 7.1

Identifique el sistema La *primera* etapa más importante a considerar en la solución de un problema aplicando el planteamiento de energía es identificar el sistema de interés adecuado.

En el modelo de sistema la atención se dirige a una porción pequeña del Universo, el **sistema**, y se ignoran detalles del resto del Universo fuera del sistema. Una habilidad vital para aplicar el modelo de sistema a problemas es la *identificación del sistema*.

Un sistema válido

- puede ser un objeto simple o partícula
- puede ser un conjunto de objetos o partículas
- puede ser una región de espacio (como el interior del cilindro de combustión de un motor de automóvil)
- puede variar en tamaño y forma (como una bola de goma, que se deforma al golpear una pared)

Identificar la necesidad de un método de sistema para resolver un problema (en oposición al método de partícula) es parte del paso Categorizar en la "Estrategia general para resolución de problemas", como se indicó en el capítulo 2. Identificar el sistema particular es una segunda parte de esta etapa.

No importa cuál sea el sistema particular en un problema dado, una **frontera del sistema** se identifica como una superficie imaginaria (que no necesariamente coincide con una superficie física) que divide al Universo en el sistema y en el **entorno** que rodea al sistema.

Como ejemplo, imagine una fuerza aplicada a un objeto en el espacio vacío. Se puede definir el objeto como el sistema y su superficie como la frontera del sistema. La fuerza aplicada a él es una influencia sobre el sistema desde el entorno que actúa a través de la frontera del sistema. En una sección posterior de este capítulo se verá cómo analizar esta situación desde un método de sistema.

Otro ejemplo se vio en el ejemplo 5.10, donde el sistema se define como la combinación de la bola, el bloque y la cuerda. La influencia del entorno incluye las fuerzas gravitacionales sobre la bola y el bloque, las fuerzas normal y de fricción sobre el bloque, y la fuerza ejercida por la polea sobre la cuerda. Las fuerzas que ejerce la cuerda sobre la bola y el bloque son internas al sistema, y debido a esto no se incluyen como una influencia del entorno.

Existen mecanismos mediante los cuales un sistema recibe influencia de su entorno. El primero que se investigará es el *trabajo*.

7.2 Trabajo realizado por una fuerza constante

Casi todos los términos utilizados hasta el momento: velocidad, aceleración, fuerza, etc., tienen un significado similar en física como en la vida diaria. Sin embargo, ahora se encuentra un término cuyo significado en física es particularmente diferente de su significado cotidiano: trabajo.

Para comprender lo que trabajo, como una influencia sobre un sistema, significa para un físico, considere la situación ilustrada en la figura 7.1. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica a un borrador, que se identifica como el sistema, y el borrador se desliza a lo largo

© Cengage Learning/Charles D. Winters



Figura 7.1 Un borrador se empuja a lo largo del riel de un pizarrón mediante una fuerza que actúa a diferentes ángulos respecto de la dirección horizontal.

del riel. Si quiere saber qué tan efectiva es la fuerza para mover el borrador debe considerar no sólo la magnitud de la fuerza, sino también su dirección. Si supone que la magnitud de la fuerza aplicada es la misma en las tres fotografías, el empujón que se aplica en la figura 7.1b hace más para mover el borrador que el empujón de la figura 7.1a. Por otra parte, la figura 7.1c muestra una situación en que la fuerza aplicada no mueve el borrador en absoluto, sin importar cuán fuerte se empuje (a menos, desde luego, ¡que se aplique una fuerza tan grande que rompa el riel!). Estos resultados sugieren que cuando se analizan fuerzas para determinar la influencia que tienen sobre el sistema, se debe considerar la naturaleza vectorial de las fuerzas. También se debe conocer la magnitud de la fuerza. Aplicar una fuerza de magnitud $|\vec{\mathbf{F}}| = 2$ N a través de un desplazamiento representa mayor influencia sobre el sistema que la aplicación de una fuerza de magnitud 1 N a lo largo del mismo desplazamiento. También es importante la magnitud del desplazamiento. Mover el borrador 3 m a lo largo del riel representa una mayor influencia que moverlo 2 cm si en ambos casos se aplica la misma fuerza.

Examine la situación de la figura 7.2, donde el objeto (el sistema) experimenta un desplazamiento a lo largo de una línea recta mientras sobre él actúa una fuerza constante de magnitud F que forma un ángulo θ con la dirección del desplazamiento.

El **trabajo** W realizado sobre un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante sobre el sistema es el producto de la magnitud F de la fuerza, la magnitud Δr del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento:

$$W \equiv F\,\Delta r \cos\theta \qquad (7.1)$$

Observe en la ecuación 7.1 que el trabajo es un escalar, aun cuando se defina en términos de dos vectores, una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ y un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. En la sección 7.3 se explora cómo combinar dos vectores para generar una cantidad escalar.

También observe que el desplazamiento en la ecuación 7.1 se refiere *al punto de aplicación de la fuerza*. Si la fuerza se aplica a una partícula o a un objeto rígido que puede modelarse como una partícula, este desplazamiento es el mismo que el de una partícula. Sin embargo, para un sistema deformable estos desplazamientos no son iguales. Por ejemplo, imagine presionar, simétricamente, una pelota con ambas manos. El centro de la pelota tiene desplazamiento cero. Sin embargo, los puntos de aplicación de las fuerzas de sus manos experimentan un desplazamiento conforme se comprime la pelota, y éste es el desplazamiento utilizado en la ecuación 7.1. Se verán otros ejemplos de sistemas deformables, como resortes y muestras de gas en un recipiente.

Como ejemplo de la distinción entre la definición de trabajo y la comprensión cotidiana de la palabra, considere sostener una pesada silla con los brazos extendidos durante 3 minutos. Al final de este intervalo de tiempo, sus cansados brazos pue-

Prevención de riesgos ocultos 7.2

Trabajo realizado por. . . sobre. . . No sólo debe identificar el sistema, también debe saber qué agente en el entorno realiza trabajo sobre el sistema. Cuando se analice el trabajo, siempre use la frase "el trabajo realizado por. . . sobre . . .". Después de "por" inserte la parte del entorno que interactúa directamente con el sistema. Después de "sobre", inserte el sistema. Por ejemplo, "el trabajo realizado por el martillo sobre el clavo" identifica al clavo como el sistema y la fuerza del martillo representa la influencia del entorno.

◀ **Trabajo realizado por una fuerza constante**

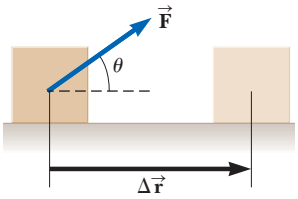


Figura 7.2 Un objeto experimenta un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ bajo la acción de una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$.

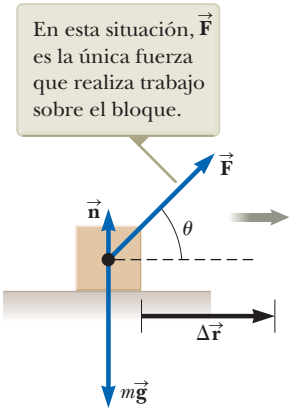


Figura 7.3 Un objeto se desplaza sobre una superficie horizontal sin fricción. La fuerza normal $\vec{n}$ y la fuerza gravitacional $m\vec{g}$ no trabajan sobre el objeto.

Prevención de riesgos ocultos 7.3

Causa del desplazamiento Es posible calcular el trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto, pero dicha fuerza *no* necesariamente es la causa del desplazamiento del objeto. Por ejemplo, si levanta un objeto, la fuerza gravitacional realiza trabajo (negativo) sobre el objeto, ¡aunque la gravedad no es la causa de que el objeto se mueva hacia arriba!

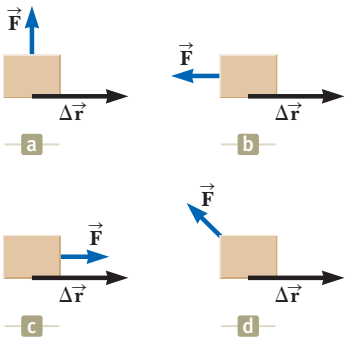


Figura 7.4 (Examen rápido 7.2) Se jala un bloque en cuatro direcciones diferentes. En cada caso, el desplazamiento del bloque es hacia la derecha y de la misma magnitud.

den hacerle creer que realizó una cantidad considerable de trabajo sobre la silla. Sin embargo, de acuerdo con la definición, sobre ella no ha realizado ningún trabajo. Usted ejerce una fuerza para sostener la silla, pero no la mueve. Una fuerza no realiza trabajo sobre un objeto si la fuerza no lo mueve a través de un desplazamiento. Si $\Delta r = 0$, la ecuación 7.1 da $W = 0$, que es la situación que se muestra en la figura 7.1c.

En la ecuación 7.1 observe también que el trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto en movimiento es cero cuando la fuerza aplicada es perpendicular al desplazamiento de su punto de aplicación. Esto es, si $\theta = 90°$, por lo tanto $W = 0$, porque $\cos 90° = 0$. Por ejemplo, en la figura 7.3, el trabajo realizado por la fuerza normal sobre el objeto y el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre el objeto son ambos cero, porque ambas fuerzas son perpendiculares al desplazamiento y tienen componentes cero a lo largo de un eje en la dirección de $\Delta\vec{r}$.

El signo del trabajo también depende de la dirección de $\vec{F}$ en relación con $\Delta\vec{r}$. El trabajo realizado por la fuerza aplicada sobre un sistema es positivo cuando la proyección de $\vec{F}$ sobre $\Delta\vec{r}$ está en la misma dirección que el desplazamiento. Por ejemplo, cuando un objeto se levanta, el trabajo realizado por la fuerza aplicada sobre el objeto es positivo porque la dirección de dicha fuerza es hacia arriba, en la misma dirección que el desplazamiento de su punto de aplicación. Cuando la proyección de $\vec{F}$ sobre $\Delta\vec{r}$ está en la dirección opuesta al desplazamiento, W es negativo. Por ejemplo, conforme se levanta un objeto, el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre el objeto es negativo. El factor $\cos\theta$ en la definición de W (ecuación 7.1) automáticamente toma en cuenta el signo.

Si una fuerza aplicada $\vec{F}$ está en la misma dirección que el desplazamiento $\Delta\vec{r}$, entonces $\theta = 0$ y $\cos 0 = 1$. En este caso, la ecuación 7.1 produce

$$W = F\Delta r$$

Las unidades de trabajo son las de fuerza multiplicada por longitud. En consecuencia, la unidad del SI de trabajo es el **newton × metro** ($N \cdot m = kg \cdot m^2/s^2$). Esta combinación de unidades se usa con tanta frecuencia que se le ha dado un nombre propio, **joule** (J).

Una consideración importante para un método de sistema en los problemas es que **el trabajo es una transferencia de energía.** Si W es el trabajo realizado sobre un sistema y W es positivo, la energía se transfiere *al* sistema; si W es negativo, la energía se transfiere *desde* el sistema. Por lo tanto, si un sistema interactúa con su entorno, esta interacción se describe como una transferencia de energía a través de la frontera del sistema. El resultado es un cambio en la energía almacenada en el sistema. En la sección 7.5 se aprenderá acerca del primer tipo de almacenamiento de energía, después de investigar más aspectos del trabajo.

Examen rápido 7.1 La fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre la Tierra mantiene a ésta en una órbita alrededor de aquél. Suponga que la órbita es perfectamente circular. El trabajo realizado por esta fuerza gravitacional durante un intervalo de tiempo breve, en el que la Tierra se mueve a través de un desplazamiento en su trayectoria orbital, es **(a)** cero, **(b)** positivo, **(c)** negativo, **(d)** imposible de determinar.

Examen rápido 7.2 La figura 7.4 muestra cuatro situaciones en las que una fuerza se aplica a un objeto. En los cuatro casos, la fuerza tiene la misma magnitud y el desplazamiento del objeto es hacia la derecha y de la misma magnitud. Clasifique las situaciones en orden del trabajo realizado por la fuerza sobre el objeto, del más positivo al más negativo.

Ejemplo 7.1 Sr. Limpio

Un hombre que limpia un piso jala una aspiradora con una fuerza de magnitud $F = 50.0$ N en un ángulo de 30.0° con la horizontal (figura 7.5). Calcule el trabajo realizado por la fuerza sobre la aspiradora a medida que ésta se desplaza 3.00 m hacia la derecha.

continúa

7.1 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 7.5 ayuda a conceptualizar el problema. Piense en una experiencia en su vida en la que haya jalado un objeto por el suelo con una cuerda o una soga.

Categorizar Se pide el trabajo hecho por una fuerza sobre un objeto, el desplazamiento de éste y el ángulo entre los dos vectores, así que este ejemplo se califica como un problema de sustitución. La aspiradora se identifica como el sistema.

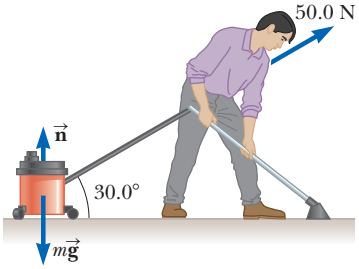


Figura 7.5 (Ejemplo 7.1) Una aspiradora se jala en un ángulo de 30.0° desde la horizontal.

Use la definición de trabajo (ecuación 7.1):

$$W = F\,\Delta r \cos\theta = (50.0\ \text{N})(3.00\ \text{m})(\cos 30.0^\circ)$$
$$= 130\ \text{J}$$

Observe en esta situación que la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ no realizan trabajo sobre la aspiradora porque estas fuerzas son perpendiculares a los desplazamientos de sus puntos de aplicación. Además, no se menciona si existe fricción entre la aspiradora y el suelo. La presencia o ausencia de fricción no importa al calcular el trabajo efectuado por la fuerza aplicada. Además, este trabajo no depende de si la aspiradora se movió a velocidad constante o si estuvo acelerada.

7.3 Producto escalar de dos vectores

Debido a la manera en que los vectores fuerza y desplazamiento se combinan en la ecuación 7.1, es útil aplicar una herramienta matemática conveniente denominada **producto escalar** de dos vectores. Este producto escalar de los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se escribe como $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$. (Debido al símbolo punto, con frecuencia al producto escalar se le llama **producto punto**.)

El producto escalar de dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se define como una cantidad escalar igual al producto de las magnitudes de los dos vectores y el coseno del ángulo θ entre ellos:

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \equiv AB\cos\theta \tag{7.2}$$

Producto escalar de dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$

Como es el caso con cualquier multiplicación, $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ no necesitan tener las mismas unidades.

Al comparar esta definición con la ecuación 7.1, esta ecuación se expresa como un producto escalar:

$$W = F\,\Delta r\cos\theta = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} \tag{7.3}$$

En otras palabras, $\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$ es una notación abreviada de $F\,\Delta r\cos\theta$.

Antes de continuar con el análisis del trabajo, se investigan algunas propiedades del producto punto. La figura 7.6 muestra dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ y el ángulo θ entre ellos, que se utiliza en la definición del producto punto. En la figura 7.6, $B\cos\theta$ es la proyección de $\vec{\mathbf{B}}$ sobre $\vec{\mathbf{A}}$. Debido a eso, la ecuación 7.2 significa que $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ es el producto de la magnitud de $\vec{\mathbf{A}}$ y la proyección de $\vec{\mathbf{B}}$ sobre $\vec{\mathbf{A}}$.[1]

Del lado derecho de la ecuación 7.2, también se ve que el producto escalar es **conmutativo**.[2] Esto es,

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}$$

Prevención de riesgos ocultos 7.4

El trabajo es un escalar Aunque la ecuación 7.3 define el trabajo en términos de dos vectores, *el trabajo es un escalar*, no hay dirección asociada con él. *Todas* las clases de energía y de transferencia de energía son escalares. Este hecho es una gran ventaja del método de energía, ¡porque no se necesitan cálculos vectoriales!

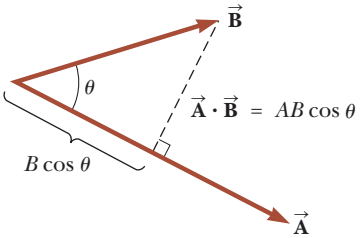


Figura 7.6 El producto escalar $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ es igual a la magnitud de $\vec{\mathbf{A}}$ multiplicada por $B\cos\theta$, que es la proyección de $\vec{\mathbf{B}}$ sobre $\vec{\mathbf{A}}$.

[1] Este enunciado es equivalente a afirmar que $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ es igual al producto de la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ y de la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ sobre $\vec{\mathbf{B}}$.

[2] En el capítulo 11 se verá otra forma de combinar vectores que resulta ser útil en física y no es conmutativa.

Por último, el producto escalar obedece la **ley distributiva de la multiplicación**, de este modo

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$$

El producto escalar es simple de evaluar a partir de la ecuación 7.2, cuando $\vec{\mathbf{A}}$ es ya sea perpendicular o paralelo a $\vec{\mathbf{B}}$. Si $\vec{\mathbf{A}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$ ($\theta = 90°$), entonces $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$. (La igualdad $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$ también se cumple en el caso más trivial en el que $\vec{\mathbf{A}}$ o $\vec{\mathbf{B}}$ es cero.) Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ es paralelo al vector $\vec{\mathbf{B}}$ y los dos apuntan en la misma dirección ($\theta = 0$), entonces $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB$. Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ es paralelo al vector $\vec{\mathbf{B}}$ pero los dos apuntan en direcciones opuestas ($\theta = 180°$), entonces $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = -AB$. El producto escalar es negativo cuando $90° < \theta \leq 180°$.

Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$, que se definieron en el capítulo 3, se encuentran en las direcciones x, y y z positivas, respectivamente, de un sistema coordenado de mano derecha. Por lo tanto, se sigue de la definición de $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ que los productos escalares de estos vectores unitarios son

Producto escalar de vectores unitarios

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \quad (7.4)$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (7.5)$$

Las ecuaciones 3.18 y 3.19 establecen que dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se expresan en forma de vector unitario como

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}}$$

Utilizando estas expresiones para los vectores y la información dada en las ecuaciones 7.4 y 7.5 se demuestra que el producto escalar de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se reduce a

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (7.6)$$

(Los detalles de la deducción se le dejan al lector en el problema 7 al final del capítulo). En el caso especial en el que $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$, se ve que

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$$

Examen rápido 7.3 ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero respecto de la relación entre el producto punto de dos vectores y el producto de las magnitudes de los vectores? **(a)** $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ es mayor que AB. **(b)** $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ es menor que AB. **(c)** $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ podría ser mayor o menor que AB, dependiendo del ángulo entre los vectores. **(d)** $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ podría ser igual a AB.

Ejemplo 7.2 El producto escalar

Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ están dados por $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$.

(A) Determine el producto escalar $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar No hay sistema físico a imaginar aquí. Sólo es un ejercicio matemático que involucra dos vectores.

Categorizar Puesto que se tiene una definición para el producto escalar, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Sustituya las expresiones vectoriales específicas para $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} &= (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \cdot (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \\ &= -2\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{i}} \cdot 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} \cdot 2\hat{\mathbf{j}} \\ &= -2(1) + 4(0) - 3(0) + 6(1) = -2 + 6 = 4\end{aligned}$$

Se obtiene el mismo resultado cuando se aplica directamente la ecuación 7.6, donde $A_x = 2$, $A_y = 3$, $B_x = -1$ y $B_y = 2$.

continúa

7.2 continuación

(B) Encuentre el ángulo θ entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$

SOLUCIÓN

Evalúe las magnitudes de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ con el teorema de Pitágoras:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

Aplique la ecuación 7.2 y el resultado del inciso (A) para encontrar el ángulo:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{65}} = 60.3°$$

Ejemplo 7.3 Trabajo realizado por una fuerza constante

Una partícula móvil en el plano xy experimenta a un desplazamiento dado por $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})$ m cuando la fuerza constante $\vec{\mathbf{F}} = (5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ N actúa sobre la partícula. Calcule el trabajo realizado por $\vec{\mathbf{F}}$ sobre la partícula.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Aunque este ejemplo es un poco más físico que el anterior, en cuanto que identifica una fuerza y un desplazamiento, es similar en términos de su estructura matemática.

Categorizar Ya que se proporcionan la fuerza y los vectores de desplazamiento y se pide encontrar el trabajo realizado por esta fuerza sobre la partícula, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Sustituya las expresiones para $\vec{\mathbf{F}}$ y $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ en la ecuación 7.3 y aplique las ecuaciones 7.4 y 7.5:

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = [(5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\ \text{N}] \cdot [(2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}]$$

$$= (5.0\hat{\mathbf{i}} \cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 5.0\hat{\mathbf{i}} \cdot 3.0\hat{\mathbf{j}} + 2.0\hat{\mathbf{j}} \cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}} \cdot 3.0\hat{\mathbf{j}})\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$= [10 + 0 + 0 + 6]\ \text{N} \cdot \text{m} = 16\ \text{J}$$

7.4 Trabajo realizado por una fuerza variable

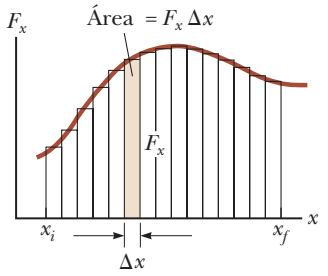
Considere una partícula que se desplaza a lo largo del eje x bajo la acción de una fuerza que varía con la posición. En tal situación, no puede emplearse la ecuación 7.1 para calcular el trabajo realizado por la fuerza porque esta relación se aplica sólo cuando $\vec{\mathbf{F}}$ es constante en magnitud y dirección. La figura 7.7a (página 184) muestra una fuerza variable aplicada sobre una partícula que se mueve desde la posición inicial x_i a la posición final x_f. Imagine una partícula que experimenta un muy pequeño desplazamiento Δx, mostrado en la figura. La componente F_x de la fuerza es aproximadamente constante en este intervalo pequeño; para este pequeño desplazamiento, se puede aproximar el trabajo realizado sobre la partícula por la fuerza utilizando la ecuación 7.1 como

$$W \approx F_x \Delta x$$

que es el área del rectángulo sombreado en la figura 7.7a. Si la curva F_x contra x se divide en un gran número de tales intervalos, el trabajo total realizado para el desplazamiento de x_i a x_f es aproximadamente igual a la suma de un gran número de tales términos

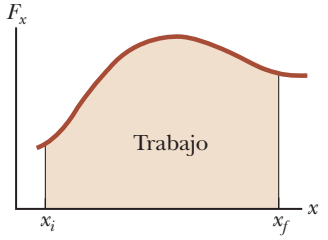
$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x\, \Delta x$$

El trabajo total realizado por el desplazamiento de x_i a x_f es aproximadamente igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos.



a

El trabajo efectuado por la componente F_x de la fuerza variable conforme la partícula se mueve de x_i a x_f es exactamente igual al área bajo la curva.



b

Figura 7.7 (a) El trabajo realizado sobre una partícula por la componente de fuerza F_x para el pequeño desplazamiento Δx es $F_x \Delta x$, que es igual al área de rectángulo sombreado. (b) El ancho Δx de cada rectángulo se aproxima a cero.

Si se hace que el tamaño de los desplazamientos pequeños se aproxime a cero, el número de términos en la suma aumenta sin límite, pero el valor de la suma se aproxima a un valor definido que es igual al área limitada por la curva F_x y el eje x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \, \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$$

En consecuencia, el trabajo realizado por F_x sobre el sistema de la partícula conforme ésta se mueve de x_i a x_f se puede expresar como

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \tag{7.7}$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación 7.1 cuando la componente $F_x = F \cos \theta$ es constante.

Si más de una fuerza actúa sobre un sistema *y el sistema se puede modelar como una partícula*, el trabajo total realizado sobre el sistema es justo el trabajo efectuado por la fuerza neta. Si la fuerza neta en la dirección x se expresa como ΣF_x, el trabajo total, o *trabajo neto*, realizado conforme la partícula se mueve de x_i a x_f es

$$\sum W = W_{\text{ext}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F_x \right) dx \quad \text{(partícula)}$$

Para el caso general de una fuerza neta $\Sigma \vec{\mathbf{F}}$, cuya magnitud y dirección pueden variar, se aplica el producto escalar:

$$\sum W = W_{\text{ext}} = \int \left(\sum \vec{\mathbf{F}} \right) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \quad \text{(partícula)} \tag{7.8}$$

donde la integral se calcula sobre la trayectoria que toma la partícula a través del espacio. El subíndice "ext" en el trabajo es para recordar que el trabajo neto es realizado por un agente *externo* sobre el sistema. En este capítulo se utilizará esta notación como un recordatorio y para diferenciar este trabajo del trabajo *interno* que en breve se explicará.

Si no es posible modelar el sistema como una partícula (por ejemplo, si el sistema es deformable), no se puede usar la ecuación 7.8 porque fuerzas diferentes sobre el sistema pueden moverse a través de distintos desplazamientos. En este caso, se debe evaluar el trabajo realizado por cada fuerza por separado y después sumar algebraicamente los trabajos para encontrar el trabajo neto efectuado sobre el sistema:

$$\sum W = W_{\text{ext}} = \sum_{\text{fuerzas}} \left(\int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \right) \quad \text{(sistema deformable)}$$

Ejemplo 7.4 Cálculo del trabajo total a partir de una gráfica

Una fuerza que actúa sobre una partícula varía con x, como se muestra en la figura 7.8. Calcule el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula conforme se traslada de $x = 0$ a $x = 6.0$ m.

El trabajo neto efectuado por esta fuerza es el área bajo la curva.

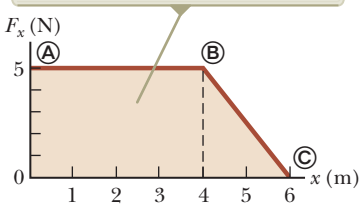


Figura 7.8 (Ejemplo 7.4) La fuerza que actúa sobre una partícula es constante para los primeros 4.0 m de movimiento y después disminuye linealmente con x de $x_{Ⓑ} = 4.0$ m a $x_{Ⓒ} = 6.0$ m.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una partícula sometida a la fuerza de la figura 7.8. Observe que la fuerza permanece constante a medida que la partícula se mueve a través de los primeros 4.0 m y después disminuye linealmente a cero en 6.0 m. En términos del anterior análisis del movimiento, la partícula podría ser modelada como una partícula bajo aceleración constante para los primeros 4.0 m porque la fuerza es constante. Sin embargo, entre 4.0 m y 6.0 m el movimiento no encaja en uno de los anteriores análisis de modelos porque la aceleración de la partícula está variando. Si la partícula arranca desde el reposo, su rapidez se incrementa durante el movimiento y la partícula siempre se mueve en la dirección x positiva. Sin embargo, estos detalles sobre su rapidez y dirección no son necesarios para el cálculo del trabajo efectuado.

Categorizar Ya que la fuerza varía durante el movimiento de la partícula, se deben aplicar las técnicas para el trabajo realizado por fuerzas variables. En este caso, puede emplearse la representación gráfica de la figura 7.8 para evaluar el trabajo efectuado.

7.4 continuación

Analizar El trabajo realizado por la fuerza es igual al área bajo la curva de $x_{Ⓐ} = 0$ a $x_{Ⓒ} = 6.0$ m. Esta área es igual al área de la sección rectangular de Ⓐ a Ⓑ más el área de la sección triangular de Ⓑ a Ⓒ.

Evalúe el área del rectángulo: $W_{Ⓐ\,a\,Ⓑ} = (5.0\text{ N})(4.0\text{ m}) = 20\text{ J}$

Obtenga el área del triángulo: $W_{Ⓑ\,a\,Ⓒ} = \frac{1}{2}(5.0\text{ N})(2.0\text{ m}) = 5.0\text{ J}$

Encuentre el trabajo total realizado por la fuerza sobre la partícula: $W_{Ⓐ\,a\,Ⓒ} = W_{Ⓐ\,a\,Ⓑ} + W_{Ⓑ\,a\,Ⓒ} = 20\text{ J} + 5.0\text{ J} = 25\text{ J}$

Finalizar Ya que la gráfica de la fuerza consiste de líneas rectas, se pueden emplear reglas para encontrar las áreas de modelos geométricos simples para evaluar el trabajo total realizado en este ejemplo. Si una fuerza no varía linealmente como en la figura 7.7, tales reglas no se pueden aplicar y la función fuerza se debe integrar como en las ecuaciones 7.7 o 7.8.

Trabajo realizado por un resorte

En la figura 7.9 se muestra un modelo de sistema físico común en el que la fuerza varía con la posición. El sistema es un bloque sobre una superficie horizontal sin fricción y conectado a un resorte. Para muchos resortes, si el resorte está estirado o comprimido una distancia pequeña desde su configuración sin estirar (en equilibrio), ejerce sobre el bloque una fuerza que se puede modelar matemáticamente como

$$F_s = -kx \qquad (7.9)$$

◀ Fuerza del resorte

donde x es la posición del bloque respecto a su posición de equilibrio ($x = 0$) y k es una constante positiva llamada la **constante de fuerza** o la **constante de resorte** del resorte. En otras palabras, la fuerza que se requiere para estirar o comprimir un resorte es proporcional a la cantidad de estiramiento o compresión x. Esta ley de fuerza para resortes se conoce como **ley de Hooke**. El valor de k es una medida de la *rigidez* del resorte. Los resortes rígidos tienen grandes valores k, y los resortes suaves tienen pequeños valores k. Como se puede ver de la ecuación 7.9, las unidades de k son N/m.

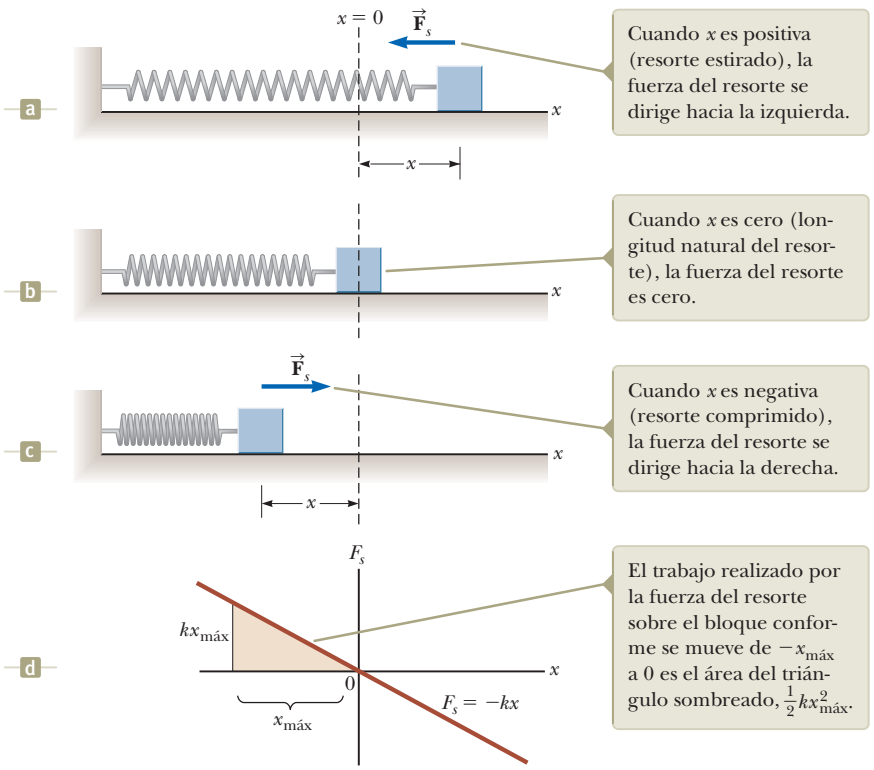


Figura 7.9 La fuerza que ejerce un resorte sobre un bloque varía con la posición x del bloque respecto a la posición de equilibrio $x = 0$. (a) x es positiva. (b) x es cero. (c) x es negativa. (d) Gráfica de F_s contra x para el sistema bloque-resorte.

La forma vectorial de la ecuación 7.9 es

$$\vec{\mathbf{F}}_s = F_s\hat{\mathbf{i}} = -kx\hat{\mathbf{i}} \tag{7.10}$$

donde el eje x se eligió en la dirección de extensión o compresión del resorte.

El signo negativo en las ecuaciones 7.9 y 7.10 significa que la fuerza ejercida por el resorte siempre tiene una dirección *opuesta* al desplazamiento respecto al equilibrio. Cuando $x > 0$, como en la figura 7.9a, de modo que el bloque está a la derecha de la posición de equilibrio, la fuerza del resorte se dirige hacia la izquierda, en la dirección x negativa. Cuando $x < 0$, como en la figura 7.9c, el bloque está a la izquierda del equilibrio y la fuerza del resorte se dirige hacia la derecha, en la dirección x positiva. Cuando $x = 0$, como en la figura 7.9b, el resorte no está estirado y $F_s = 0$. Puesto que la fuerza del resorte siempre actúa hacia la posición de equilibrio ($x = 0$), a veces se le llama *fuerza de restitución*.

Si el resorte se comprime hasta que el bloque está en el punto $-x_{\text{máx}}$ y después se libera, el bloque se traslada de $-x_{\text{máx}}$ a través de cero hasta $+x_{\text{máx}}$. Después invierte la dirección, regresa a $-x_{\text{máx}}$ y continúa oscilando de ida y vuelta. En el capítulo 15 se estudiarán en detalle esas oscilaciones. Por ahora, se investigará el trabajo realizado por el resorte sobre el bloque durante pequeñas porciones de una oscilación.

Suponga que el bloque se empuja hacia la izquierda a una posición $-x_{\text{máx}}$ y después se libera. Identifique el bloque como el sistema y calcule el trabajo W_s efectuado por la fuerza del resorte sobre el bloque conforme éste se traslada de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = 0$. Al aplicar la ecuación 7.8 y suponer que el bloque se puede modelar como una partícula, se obtiene

$$W_s = \int \vec{\mathbf{F}}_s \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\hat{\mathbf{i}}) \cdot (dx\hat{\mathbf{i}}) = \int_{-x_{\text{máx}}}^{0} (-kx)\, dx = \tfrac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2 \tag{7.11}$$

donde se utilizó la integral $\int x^n\, dx = x^{n+1}/(n+1)$ con $n = 1$. El trabajo realizado por la fuerza del resorte es positivo porque la fuerza está en la misma dirección que su desplazamiento (ambos hacia la derecha). Puesto que el bloque llega a $x = 0$ con cierta rapidez, continuará moviéndose hasta que alcance una posición $+x_{\text{máx}}$. El trabajo efectuado por la fuerza del resorte sobre el bloque al moverse de $x_i = 0$ a $x_f = x_{\text{máx}}$ es $W_s = -\frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2$. El trabajo es negativo porque para esta parte del movimiento la fuerza del resorte es hacia la izquierda y su desplazamiento es hacia la derecha. Por lo tanto, el trabajo *neto* realizado por la fuerza del resorte sobre el bloque conforme se traslada de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = x_{\text{máx}}$ es *cero*.

La figura 7.9d es una gráfica de F_x contra x. El trabajo calculado en la ecuación 7.11 es el área del triángulo sombreado, que corresponde al desplazamiento desde $-x_{\text{máx}}$ hasta 0. Ya que el triángulo tiene base $x_{\text{máx}}$ y altura $kx_{\text{máx}}$, su área es de $\frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2$, de acuerdo con el trabajo efectuado por el resorte dado por la ecuación 7.11.

Si el bloque experimenta un desplazamiento arbitrario desde $x = x_i$ a $x = x_f$, el trabajo realizado por la fuerza del resorte sobre el bloque es

Trabajo realizado por un resorte ▶

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\, dx = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 \tag{7.12}$$

De la ecuación 7.12 se ve que el trabajo realizado por la fuerza del resorte es cero para cualquier movimiento que termine donde empezó ($x_i = x_f$). En el capítulo 8 se usará este importante resultado cuando se describa con mayor detalle el movimiento de este sistema.

Las ecuaciones 7.11 y 7.12 describen el trabajo efectuado por el resorte sobre el bloque. Ahora considere el trabajo realizado sobre el bloque por un *agente externo* conforme el agente aplica una fuerza sobre el bloque y éste se mueve muy *lentamente* de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = 0$, como en la figura 7.10. Se puede calcular este trabajo al notar que, en cualquier valor de la posición, la *fuerza aplicada* $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}}$ es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza del resorte $\vec{\mathbf{F}}_s$, de modo que $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}} = F_{\text{ap}}\,\hat{\mathbf{i}} = -\vec{\mathbf{F}}_s = -(-kx\hat{\mathbf{i}}) = kx\hat{\mathbf{i}}$. Debido a eso, el trabajo realizado por esta fuerza aplicada (el agente externo) sobre el sistema del bloque es

$$W_{\text{ext}} = \int \vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{x_i}^{x_f} (kx\hat{\mathbf{i}}) \cdot (dx\hat{\mathbf{i}}) = \int_{-x_{\text{máx}}}^{0} kx\, dx = -\tfrac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2$$

Este trabajo es igual al negativo del trabajo efectuado por la fuerza del resorte para este desplazamiento (ecuación 7.11). El trabajo es negativo porque el agente externo debe empujar contra el resorte para impedir que se expanda, y esta dirección es opuesta a la dirección del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza conforme el bloque se mueve de $-x_{\text{máx}}$ a 0.

Para un desplazamiento arbitrario del bloque, el trabajo realizado sobre el sistema por el agente externo es

$$W_{\text{ext}} = \int_{x_i}^{x_f} kx\, dx = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2 \qquad (7.13)$$

Observe que esta ecuación es el negativo de la ecuación 7.12.

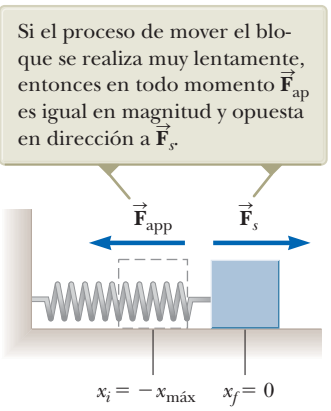


Figura 7.10 Un bloque se mueve de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = 0$ sobre una superficie sin fricción conforme una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}}$ es aplicada al bloque.

Examen rápido 7.4 Un dardo se inserta en una pistola de resorte, comprimiendo a éste por una distancia x. Para la siguiente carga, el resorte se comprime $2x$. ¿Cuánto trabajo se necesitó para cargar el segundo dardo comparado con el efectuado durante la primera carga? **(a)** Cuatro veces más, **(b)** dos veces más, **(c)** lo mismo, **(d)** la mitad, **(e)** la cuarta parte.

Ejemplo 7.5 Medición de *k* para un resorte AM

En la figura 7.11 se muestra una técnica común utilizada para medir la constante de fuerza de un resorte. El resorte cuelga verticalmente (figura 7.11a), y un objeto de masa m se coloca en su extremo inferior. Bajo la acción de la "carga" mg, el resorte se estira una distancia d respecto a su posición de equilibrio (figura 7.11b).

(A) Si un resorte es estirado 2.0 cm por un objeto suspendido de masa 0.55 kg, ¿cuál es la constante de fuerza del resorte?

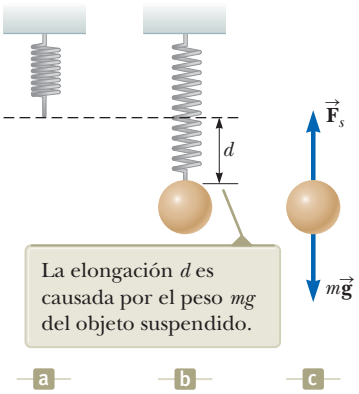


Figura 7.11 (Ejemplo 7.5) Determinación de la constante de fuerza k de un resorte.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 7.11b muestra qué le ocurre al resorte cuando el objeto se suspende de él. Simule esta situación colgando un objeto de una banda elástica.

Categorizar En la figura 7.11b el objeto está en reposo sin aceleración, así puede modelarse como una *partícula en equilibrio*.

Analizar Como el objeto está en equilibrio, la fuerza neta sobre él es cero y la fuerza del resorte hacia arriba iguala a la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$ hacia abajo (figura 7.11c).

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al objeto: $\vec{\mathbf{F}}_s + m\vec{\mathbf{g}} = 0 \quad \rightarrow \quad F_s - mg = 0 \quad \rightarrow \quad F_s = mg$

Aplique la ley de Hooke para dar $F_s = kd$ y resuelva para k:

$$k = \frac{mg}{d} = \frac{(0.55\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)}{2.0 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 2.7 \times 10^2\ \text{N/m}$$

(B) ¿Cuánto trabajo realiza el resorte sobre el objeto conforme se estira a través de esta distancia?

SOLUCIÓN

Utilice la ecuación 7.12 para encontrar el trabajo realizado por el resorte sobre el objeto:

$$W_s = 0 - \tfrac{1}{2}kd^2 = -\tfrac{1}{2}(2.7 \times 10^2\ \text{N/m})(2.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2$$
$$= -5.4 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

Finalizar Este trabajo es negativo porque la fuerza del resorte actúa hacia arriba sobre el objeto, pero su punto de aplicación (donde el resorte se une al objeto) se mueve hacia abajo. Conforme el objeto se mueve 2.0 cm, la fuerza gravitacional también hace trabajo sobre él. Este trabajo es positivo porque la fuerza gravitacional es hacia abajo y así lo es el desplazamiento del punto de aplicación de esta fuerza. ¿Esperaría que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional, como la fuerza aplicada en dirección opuesta a la fuerza del resorte, sea el negativo de la respuesta anterior? Descúbralo.

continúa

7.5 continuación

Evalúe el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional sobre el objeto:

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = (mg)(d)\cos 0 = mgd$$
$$= (0.55\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(2.0 \times 10^{-2}\ \text{m}) = 1.1 \times 10^{-1}\ \text{J}$$

Si usted esperaba que el trabajo realizado por la gravedad simplemente fuera el efectuado por el resorte con un signo positivo, ¡es posible que le sorprenda este resultado! Para comprender por qué éste no es el caso, es necesario explorar más, como se hace en la siguiente sección.

7.5 Energía cinética y el teorema trabajo-energía cinética

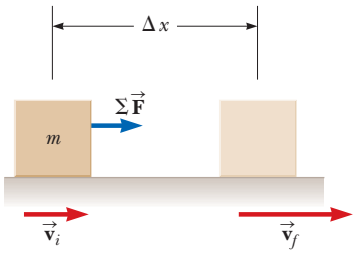


Figura 7.12 Un objeto experimenta un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \Delta x\hat{\mathbf{i}}$ y un cambio en velocidad bajo la acción de una fuerza neta constante $\sum \vec{\mathbf{F}}$.

Ya se investigó el trabajo y se le identificó como un mecanismo de transferencia de energía en un sistema. Se ha establecido que el trabajo es una influencia sobre un sistema proveniente del entorno, pero no se ha discutido el *resultado* de esta influencia sobre el sistema. Un resultado posible de hacer trabajo sobre un sistema es que el sistema cambia su rapidez. En esta sección se investiga esta situación y se introduce el primer tipo de energía que un sistema puede tener, llamada *energía cinética*.

Considere un sistema que consiste de un solo objeto. La figura 7.12 muestra un bloque de masa m que se mueve a través de un desplazamiento dirigido hacia la derecha bajo la acción de una fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$, también dirigida hacia la derecha. Se sabe de la segunda ley de Newton que el bloque se mueve con una aceleración $\vec{\mathbf{a}}$. Si el bloque (y por tanto la fuerza) se mueven a través de un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \Delta x\hat{\mathbf{i}} = (x_f - x_i)\hat{\mathbf{i}}$, el trabajo neto realizado sobre el bloque por la fuerza neta externa $\sum \vec{\mathbf{F}}$ es

$$W_{\text{ext}} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F\, dx \tag{7.14}$$

Al aplicar la segunda ley de Newton, se sustituye para la magnitud de la fuerza neta $\sum F = ma$ y después se realizan las siguientes manipulaciones de la regla de la cadena en el integrando:

$$W_{\text{ext}} = \int_{x_i}^{x_f} ma\, dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}\, dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}\, dx = \int_{v_i}^{v_f} mv\, dv$$

$$W_{\text{ext}} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \tag{7.15}$$

donde v_i es la rapidez del bloque cuando está en $x = x_i$ y v_f es su rapidez en x_f.

La ecuación 7.15 se generó por la situación específica de movimiento unidimensional, pero es un resultado general. Dice que el trabajo realizado por la fuerza neta sobre una partícula de masa m es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de una cantidad $\frac{1}{2}mv^2$. Esta cantidad es tan importante que se le ha dado un nombre especial, **energía cinética**:

Energía cinética ▶

$$K \equiv \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{7.16}$$

La energía cinética representa la energía asociada con el movimiento de la partícula. La energía cinética es una cantidad escalar y tiene las mismas unidades que el trabajo. Por ejemplo, un objeto de 2.0 kg que se mueve con una rapidez de 4.0 m/s tiene una energía cinética de 16 J. La tabla 7.1 exhibe las energías cinéticas de diferentes objetos.

La ecuación 7.15 establece que el trabajo realizado sobre una partícula por una fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre él es igual al cambio en energía cinética de la partícula. Con frecuencia es conveniente escribir la ecuación 7.15 en la forma

$$W_{\text{ext}} = K_f - K_i = \Delta K \tag{7.17}$$

Otra forma de escribirla es $K_f = K_i + W_{\text{ext}}$, que dice que la energía cinética final de un objeto es igual a su energía cinética inicial más el cambio en energía debido al trabajo neto realizado sobre él.

Tabla 7.1 **Energías cinéticas de diferentes objetos**

Objeto	Masa (kg)	Rapidez (m/s)	Energía cinética (J)
Tierra orbitando el Sol	5.97×10^{24}	2.98×10^{4}	2.65×10^{33}
Luna orbitando la Tierra	7.35×10^{22}	1.02×10^{3}	3.82×10^{28}
Cohete que se mueve con rapidez de escape[a]	500	1.12×10^{4}	3.14×10^{10}
Automóvil a 65 mi/h	2 000	29	8.4×10^{5}
Atleta corriendo	70	10	3 500
Piedra que se deja caer desde 10 m	1.0	14	98
Pelota de golf con rapidez terminal	0.046	44	45
Gota de lluvia con rapidez terminal	3.5×10^{-5}	9.0	1.4×10^{-3}
Molécula de oxígeno en aire	5.3×10^{-26}	500	6.6×10^{-21}

[a] Rapidez de escape, es la rapidez mínima que un objeto debe lograr cerca de la superficie de la Tierra para alejarse infinitamente de ésta.

La ecuación 7.17 se generó al suponer que se realiza trabajo sobre una partícula. También se podría hacer trabajo sobre un sistema deformable en el que las partes del sistema se muevan entre sí. En este caso, también se encuentra que la ecuación 7.17 es válida en tanto el trabajo neto se encuentre al sumar los trabajos efectuados por cada fuerza, como se discutió anteriormente en relación con la ecuación 7.8.

La ecuación 7.17 es un resultado importante conocido como **teorema trabajo-energía cinética**:

◀ **Teorema trabajo-energía cinética**

Cuando se realiza trabajo sobre un sistema y el único cambio en éste es en su rapidez, el trabajo neto efectuado sobre el sistema es igual al cambio en energía cinética del sistema, como se expresa con la ecuación 7.17: $W = \Delta K$.

El teorema trabajo-energía cinética indica que la rapidez de un sistema *aumenta* si el trabajo neto realizado sobre él es *positivo* porque la energía cinética final es mayor que la energía cinética inicial. La rapidez *disminuye* si el trabajo neto es *negativo*, porque la energía cinética final es menor que la energía cinética inicial.

Puesto que hasta el momento sólo se ha investigado movimiento traslacional a través del espacio, se llegó al teorema trabajo-energía cinética al analizar situaciones que involucran este movimiento. Otro tipo de movimiento es el *movimiento rotacional*, en el que un objeto gira en torno a un eje. Este tipo de movimiento se estudiará en el capítulo 10. El teorema trabajo-energía cinética también es válido para sistemas que experimentan un cambio en la rapidez rotacional debido al trabajo realizado sobre el sistema. El molino de viento en la fotografía al principio de este capítulo es un ejemplo de trabajo que causa movimiento rotacional.

El teorema trabajo-energía cinética pondrá en claro un resultado visto anteriormente en este capítulo que puede parecer extraño. En la sección 7.4 se llegó a un resultado de trabajo neto realizado cero cuando un resorte empujó un bloque de $x_i = -x_{máx}$ a $x_f = x_{máx}$. Observe que como la rapidez del bloque cambia continuamente, puede parecer complicado analizar este proceso. Sin embargo, la cantidad ΔK en el teorema trabajo-energía cinética sólo se refiere a los puntos inicial y final para las magnitudes de velocidad, no depende de los detalles de la trayectoria seguida entre dichos puntos. Por lo tanto, dado que la rapidez es cero, tanto en el punto inicial como en el final del movimiento, el trabajo neto realizado sobre el bloque es cero. Con frecuencia, este concepto de independencia con la trayectoria se verá en planteamientos similares de problemas.

Ahora, regresando al final del ejemplo 7.5 para el misterio en la etapa Finalizar, ¿por qué el trabajo efectuado por la gravedad no fue sólo el trabajo realizado por el resorte con un signo positivo? Note que el trabajo ejecutado por la gravedad es mayor que la magnitud del trabajo realizado por el resorte. Por lo tanto, el trabajo total efectuado por todas las fuerzas en el objeto es positivo. Ahora piense cómo crear la situación en que las *únicas* fuerzas sobre el objeto son la fuerza del resorte y la fuerza gravitacional. Debe soportar el objeto en el punto más alto y después quitar

Prevención de riesgos ocultos 7.5

Condiciones para el teorema trabajo-energía cinética El teorema trabajo-energía cinética es importante pero limitado en su aplicación; no es un principio general. En muchas situaciones ocurren otros cambios en el sistema además de su rapidez, y existen otras interacciones con el entorno además del trabajo. Un principio más general que involucra energía es la *conservación de energía* en la sección 8.1.

Prevención de riesgos ocultos 7.6

El teorema trabajo-energía cinética: rapidez, no velocidad El teorema trabajo-energía cinética relaciona el trabajo con un cambio en la *rapidez* de un sistema, no con un cambio en su velocidad. Por ejemplo, si un objeto está en movimiento circular uniforme, su rapidez es constante. Aun cuando su velocidad cambie, no se realiza trabajo sobre el objeto por la fuerza que causa el movimiento circular.

su mano y dejar que el objeto caiga. Si lo hace, sabe que cuando el objeto alcanza una posición 2.0 cm debajo de su mano, se estará *moviendo*, lo que es consistente con la ecuación 7.17. Sobre el objeto se realiza trabajo neto positivo y el resultado es que tiene una energía cinética conforme pasa a través del punto 2.0 cm.

La única manera de evitar que el objeto tenga una energía cinética después de moverse 2.0 cm es bajarlo lentamente con su mano. Sin embargo, existe una tercera fuerza efectuando trabajo sobre el objeto, la fuerza normal de su mano. Si este trabajo se calcula y suma al realizado por la fuerza del resorte y la fuerza gravitacional, el trabajo neto efectuado sobre el objeto es cero, que es consistente porque no se está moviendo en el punto 2.0 cm.

Antes se indicó que el trabajo se considera un mecanismo para la transferencia de energía en un sistema. La ecuación 7.17 es un enunciado matemático de este concepto. Cuando se efectúa trabajo W_{ext} sobre un sistema, el resultado es una transferencia de energía a través de la frontera del sistema. El efecto sobre el sistema, en el caso de la ecuación 7.17, es un cambio ΔK de energía cinética. En la siguiente sección se investiga otro tipo de energía que se puede almacenar en un sistema como resultado de realizar trabajo sobre el sistema.

Examen rápido 7.5 Un dardo se carga en una pistola de resorte al comprimir a éste por una distancia x. En la segunda carga, al resorte se le comprime una distancia $2x$. ¿Qué tan rápido, comparado con el primero, el segundo dardo abandona la pistola? **(a)** Cuatro veces más, **(b)** dos veces más, **(c)** igual, **(d)** la mitad, **(e)** la cuarta parte.

Ejemplo 7.6 Un bloque que se jala sobre una superficie sin fricción AM

Un bloque de 6.0 kg inicialmente en reposo se jala hacia la derecha, a lo largo de una superficie horizontal sin fricción, mediante una fuerza horizontal constante de 12 N. Encuentre la rapidez del bloque después que se ha movido una distancia horizontal de 3.0 m.

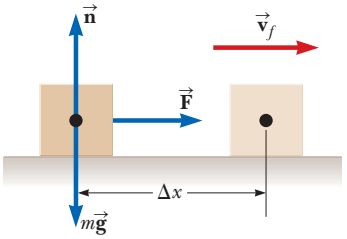


Figura 7.13 (Ejemplo 7.6) Un bloque se jala hacia la derecha sobre una superficie sin fricción mediante una fuerza horizontal constante.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 7.13 ilustra esta situación. Suponga que jala un carro de juguete sobre una mesa con una banda elástica horizontal unida al frente del carro. La fuerza se mantiene constante al asegurar que la banda elástica estirada siempre tenga la misma longitud.

Categorizar Se podrían aplicar las ecuaciones de cinemática para determinar la respuesta, pero practique el método de energía. El bloque es el sistema, y sobre él actúan tres fuerzas externas. La fuerza normal equilibra la fuerza gravitacional sobre el bloque y ninguna de estas fuerzas que actúan verticalmente realiza trabajo sobre el bloque, porque sus puntos de aplicación se desplazan horizontalmente.

Analizar La fuerza externa neta que actúa sobre el bloque es la fuerza horizontal de 12 N.

Utilice el teorema trabajo-energía cinética para el bloque y note que su energía cinética inicial es cero:

$$W_{\text{ext}} = \Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0 = \tfrac{1}{2}mv_f^2$$

Resuelva para v_f y use la ecuación 7.1 para el trabajo realizado sobre el bloque por $\vec{\mathbf{F}}$:

$$v_f = \sqrt{\frac{2W_{\text{ext}}}{m}} = \sqrt{\frac{2F\,\Delta x}{m}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_f = \sqrt{\frac{2(12\text{ N})(3.0\text{ m})}{6.0\text{ kg}}} = 3.5\text{ m/s}$$

Finalizar Le sería útil resolver este problema de nuevo, modelando el bloque como una *partícula bajo una fuerza neta* para encontrar su aceleración y luego como una *partícula bajo aceleración constante* para obtener su velocidad final. En el capítulo 8 se verá que el procedimiento de energía aquí presentado es un ejemplo del análisis del *sistema no-aislado*.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que la magnitud de la fuerza en este ejemplo se duplica a $F' = 2F$. El bloque de 6.0 kg acelera a 3.5 m/s debido a esta fuerza aplicada mientras se mueve a través de un desplazamiento $\Delta x'$. ¿Cómo se compara el desplazamiento $\Delta x'$ con el desplazamiento original Δx?

continúa

7.6 continuación

Respuesta Si se jala más fuerte, el bloque debería acelerar a una cierta rapidez en una distancia más corta, así se espera que $\Delta x' < \Delta x$. En ambos casos, el bloque experimenta el mismo cambio en energía cinética ΔK. Matemáticamente, a partir del teorema trabajo-energía cinética se encuentra que

$$W_{\text{ext}} = F'\Delta x' = \Delta K = F\,\Delta x$$

$$\Delta x' = \frac{F}{F'}\Delta x = \frac{F}{2F}\Delta x = \tfrac{1}{2}\Delta x$$

y la distancia es más corta, como sugiere el argumento conceptual.

Ejemplo conceptual 7.7 ¿La rampa reduce el trabajo requerido?

Un hombre quiere cargar un refrigerador en una camioneta con el uso de una rampa a un ángulo θ, como se muestra en la figura 7.14. Él afirma que se debe requerir menos trabajo para cargar la camioneta si la longitud L de la rampa aumenta. ¿Esta afirmación es válida?

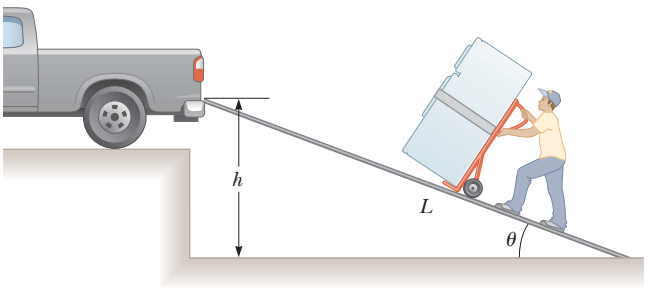


Figura 7.14 (Ejemplo conceptual 7.7) Un refrigerador transportado en una carretilla con ruedas sin fricción se mueve por una rampa con rapidez constante.

SOLUCIÓN

No. Suponga que el refrigerador se sube por la rampa en una carretilla con rapidez constante. En este caso, para el sistema del refrigerador y la carretilla, $\Delta K = 0$. La fuerza normal que ejerce la rampa sobre el sistema se dirige 90° al desplazamiento de su punto de aplicación y, por lo tanto, no realiza trabajo sobre el sistema. Puesto que $\Delta K = 0$, el teorema trabajo-energía cinética produce

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{hombre}} + W_{\text{gravedad}} = 0$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitacional es igual al producto del peso mg del sistema, la distancia L a través de la que se desplaza el refrigerador y cos $(\theta + 90°)$. En consecuencia,

$$W_{\text{hombre}} = -W_{\text{gravedad}} = -(mg)(L)[\cos(\theta + 90°)]$$

$$= mgL \operatorname{sen}\theta = mgh$$

donde $h = L$ sen θ es la altura de la rampa. Por lo tanto, el hombre debe efectuar la misma cantidad de trabajo mgh sobre el sistema *sin importar* la longitud de la rampa. El trabajo sólo depende de la altura de la rampa. Aunque se requiere menos fuerza con una rampa más larga, el punto de aplicación de dicha fuerza se mueve a través de un mayor desplazamiento.

7.6 Energía potencial de un sistema

Hasta el momento en este capítulo se ha definido un sistema en general, pero la atención se ha enfocado principalmente sobre partículas u objetos solos bajo la influencia de fuerzas externas. Considere ahora sistemas de dos o más partículas u objetos que interactúan a través de una fuerza que es *interna* al sistema. La energía cinética de tal sistema es la suma algebraica de las energías cinéticas de todos los integrantes del sistema. Sin embargo, puede haber sistemas en los que un objeto sea tan masivo que se pueda modelar como fijo y su energía cinética sea despreciable. Por ejemplo, si se considera un sistema bola-Tierra, mientras la bola cae a la Tierra, la energía cinética del sistema se puede considerar sólo como la energía cinética de la bola. La Tierra se mueve tan lentamente en este proceso que se puede ignorar su energía cinética. Por otra parte, la energía cinética de un sistema de dos electrones debe incluir las energías cinéticas de ambas partículas.

Piense en un sistema que consiste de un libro y la Tierra, que interactúa vía la fuerza gravitacional. Se hace algo de trabajo sobre el sistema al levantar el libro lentamente desde el reposo a través de un desplazamiento vertical $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}$,

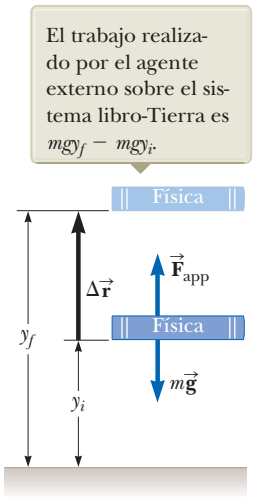


Figura 7.15 Un agente externo levanta lentamente un libro desde la altura y_i a una altura y_f.

Prevención de riesgos ocultos 7.7

Energía potencial La frase *energía potencial* no se refiere a algo que tenga el potencial de convertirse en energía. La energía potencial *es* energía.

Prevención de riesgos ocultos 7.8

La energía potencial pertenece a un sistema La energía potencial siempre se asocia con un *sistema* de dos o más objetos interactuando. Cuando un objeto pequeño se mueve cerca de la superficie de la Tierra bajo la influencia de la gravedad, a veces se puede hacer referencia a la energía potencial "asociada con el objeto" en lugar de "asociada con el sistema", que es lo más apropiado, porque la Tierra no se mueve significativamente. Sin embargo, en el texto no se hará alusión a la energía potencial "del objeto", porque esta frase ignora el papel de la Tierra.

Energía potencial gravitacional ▶

como en la figura 7.15. De acuerdo con la discusión del trabajo como una transferencia de energía, este trabajo realizado sobre el sistema debe aparecer como un aumento en la energía del sistema. El libro está en reposo antes y después de efectuar el trabajo. Por lo tanto, no hay cambio en la energía cinética del sistema.

Puesto que el cambio de energía del sistema no es en la forma de energía cinética, el teorema trabajo-energía cinética no es aplicable aquí, por lo que el cambio en energía debe aparecer como alguna otra forma de almacenamiento de energía. Después de levantar el libro, se le podría liberar y dejar que caiga de vuelta a la posición y_i. Note que el libro (y, por lo tanto, el sistema) ahora tiene energía cinética y su fuente está en el trabajo que se hizo al levantar el libro. Mientras el libro estaba en el punto más alto, el sistema tenía la *posibilidad* de adquirir energía cinética, pero no lo hizo hasta que al libro se le permitió caer. En consecuencia, al mecanismo de almacenamiento de energía antes de que el libro se libere se le llama **energía potencial**. Se encontrará que la energía potencial de un sistema sólo se asocia con tipos específicos de fuerzas que actúan entre integrantes de un sistema. La cantidad de energía potencial en el sistema se determina mediante la *configuración* del mismo. Mover a los integrantes del sistema a diferentes posiciones o girarlos cambia su configuración y, por ende, su energía potencial.

Ahora deduzca una expresión para la energía potencial asociada con un objeto en cierta ubicación sobre la superficie de la Tierra. Considere un agente externo que levanta un objeto de masa m desde una altura inicial y_i sobre el suelo a una altura final y_f, como en la figura 7.15. Se supone que el levantamiento se hace lentamente, sin aceleración, de modo que la fuerza aplicada del agente se representa como igual en magnitud a la fuerza gravitacional sobre el objeto: éste se modela como una partícula en equilibrio que se mueve con velocidad constante. El trabajo realizado por el agente externo sobre el sistema (objeto y la Tierra), conforme el objeto experimenta este desplazamiento hacia arriba, está dado por el producto de la fuerza aplicada hacia arriba $\vec{\mathbf{F}}_{ap}$ y el desplazamiento hacia arriba de esta fuerza, $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \Delta y\hat{\mathbf{j}}$:

$$W_{ext} = (\vec{\mathbf{F}}_{ap}) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = (mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_f - mgy_i \qquad (7.18)$$

donde este resultado es el trabajo neto efectuado sobre el sistema, porque la fuerza aplicada es la única fuerza sobre el sistema desde el entorno. (Recuerde que la fuerza gravitacional es *interna* al sistema.) Observe la similitud entre la ecuación 7.18 y la ecuación 7.15. En cada ecuación, el trabajo realizado sobre un sistema es igual a una diferencia entre los valores final e inicial de una cantidad. En la ecuación 7.15 el trabajo representa una transferencia de energía hacia el sistema, y el incremento en energía del sistema es cinética en forma. En la ecuación 7.18 el trabajo representa una transferencia de energía al sistema, y la energía del sistema aparece en una forma diferente, a la que se llamó energía potencial.

En consecuencia, la cantidad mgy se puede identificar como la **energía potencial gravitacional** U_g del sistema de un objeto de masa m y la Tierra:

$$U_g \equiv mgy \qquad (7.19)$$

Las unidades de la energía potencial gravitacional son joules, las mismas unidades que el trabajo y la energía cinética. La energía potencial, al igual que el trabajo y la energía cinética, es una cantidad escalar. Observe que la ecuación 7.19 sólo es válida para objetos cerca de la superficie de la Tierra, donde g es aproximadamente constante.[3]

Al usar la definición de energía potencial gravitacional, la ecuación 7.18 ahora se puede reescribir como

$$W_{ext} = \Delta U_g \qquad (7.20)$$

que matemáticamente describe que el trabajo externo neto efectuado sobre el sistema en esta situación aparece como un cambio en la energía potencial gravitacional del sistema.

[3] La suposición de que g es constante es válida en tanto el desplazamiento vertical del objeto sea pequeño en comparación con el radio de la Tierra.

La ecuación 7.20 es similar en forma al teorema trabajo-energía cinética, ecuación 7.17. En ésta, el trabajo se realiza sobre un sistema y la energía aparece en el sistema como energía cinética, representando *movimiento* de los integrantes del sistema. En la ecuación 7.20 el trabajo se efectúa sobre el sistema y la energía aparece en el sistema como energía potencial, representando un cambio en la *configuración* de los miembros del sistema.

La energía potencial gravitacional sólo depende de la altura vertical del objeto sobre la superficie de la Tierra. La misma cantidad de trabajo se debe realizar sobre un sistema objeto-Tierra, ya sea que el objeto se levante verticalmente desde la Tierra o se empuje desde el mismo punto hacia arriba de un plano inclinado sin fricción para terminar en la misma altura. Este enunciado se verifica para una situación específica, como empujar un refrigerador sobre una rampa en el ejemplo conceptual 7.7. Se puede demostrar que este enunciado es verdadero en general al calcular el trabajo efectuado sobre un objeto por un agente que mueve el objeto a lo largo de un desplazamiento que tiene componentes tanto vertical como horizontal:

$$W_{\text{ext}} = (\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}}) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = (mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(x_f - x_i)\hat{\mathbf{i}} + (y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_f - mgy_i$$

donde no hay término que involucre a x en el resultado final, porque $\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$.

Al resolver problemas debe elegir una configuración de referencia para la cual la energía potencial gravitacional del sistema se haga igual a algún valor de referencia, que normalmente es cero. La elección de la configuración de referencia es completamente arbitraria, porque la cantidad importante es la *diferencia* en energía potencial, y esta diferencia es independiente de la elección de la configuración de referencia.

Con frecuencia es conveniente elegir, como la configuración de referencia para la energía potencial gravitacional, la configuración en la que un objeto está en la superficie de la Tierra, pero esta elección no es esencial. Con frecuencia el enunciado del problema sugiere aplicar una configuración conveniente.

Examen rápido 7.6 Elija la respuesta correcta. La energía potencial gravitacional de un sistema **(a)** siempre es positiva, **(b)** siempre es negativa, **(c)** puede ser negativa o positiva.

Ejemplo 7.8 El orgulloso atleta y el dedo lastimado

Un atleta muestra un trofeo cuando, por un descuido, se desliza de sus manos y cae sobre un dedo de su pie. Si elige el nivel del suelo como el punto $y = 0$ de su sistema coordenado, estime el cambio en energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra mientras el trofeo cae. Repita el cálculo usando la coronilla de la cabeza del atleta como el origen de coordenadas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El trofeo cambia su posición vertical en relación con la superficie de la Tierra. Asociado con este cambio de posición, hay un cambio en la energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra.

Categorizar Se evalúa un cambio de energía potencial gravitacional definido en esta sección, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución. También es un problema de estimación, porque en el enunciado del problema no se proporcionan números.

El enunciado del problema dice que la configuración de referencia del sistema trofeo-Tierra, que corresponde a energía potencial cero, es cuando el punto más bajo del trofeo está en el suelo. Para encontrar el cambio de energía del sistema es necesario estimar unos cuantos valores. Un trofeo tiene una masa de aproximadamente 2 kg, y la parte superior del dedo del pie de una persona está aproximadamente a 0.05 m sobre el suelo. Además, se debe suponer que el trofeo cae desde una altura de 1.4 m.

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra justo antes que el trofeo se libere:

$$U_i = mgy_i = (2\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(1.4\text{ m}) = 27.4\text{ J}$$

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra cuando el trofeo llega al dedo del atleta:

$$U_f = mgy_f = (2\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(0.05\text{ m}) = 0.98\text{ J}$$

Evalúe el cambio en energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra:

$$\Delta U_g = 0.98\text{ J} - 27.4\text{ J} = -26.4\text{ J}$$

continúa

7.8 continuación

Probablemente sólo deben mantenerse dos dígitos debido a lo burdo de las estimaciones; en consecuencia, se considera que el cambio en energía potencial gravitacional es $-26\ \text{J}$. El sistema tiene 27 J de energía potencial gravitacional antes que el trofeo inicie su caída y aproximadamente 1 J de energía potencial cuando el trofeo llega a la parte superior del dedo.

El segundo caso indica que la configuración de referencia del sistema para energía potencial cero se elige cuando el trofeo está en la cabeza del bolichista (aun cuando el trofeo nunca está en tal posición en su movimiento). Se estima que esta posición es 2.0 m sobre el suelo.

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra justo antes que el trofeo se libere desde su posición 0.6 m abajo de la cabeza del atleta:

$$U_i = mgy_i = (2\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(-0.6\ \text{m}) = -11.8\ \text{J}$$

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra cuando el trofeo llega al dedo del bolichista, localizado 1.95 m abajo de su posición inicial:

$$U_f = mgy_f = (2\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(-1.95\ \text{m}) = -38.2\ \text{J}$$

Evalúe el cambio en energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra:

$$\Delta U_g = -38.2\ \text{J} - (-11.8\ \text{J}) = -26.4\ \text{J} \approx -26\ \text{J}$$

Este valor es el mismo que antes, como debe ser. El cambio en energía potencial es independiente de la elección de la configuración del sistema que representa el cero de energía potencial. Si se quiere mantener sólo un dígito en las estimaciones, entonces el resultado final podría escribirse como 3×10^1 J.

Energía potencial elástica

Debido a que los integrantes de un sistema pueden interactuar entre sí mediante diferentes tipos de fuerzas, es posible que en un sistema existan distintos tipos de energía potencial. Ya está familiarizado con la energía potencial gravitacional de un sistema en donde sus integrantes interactúan vía la fuerza gravitacional. Explore un segundo tipo de energía potencial que puede tener un sistema.

Considere un sistema que consta de un bloque y un resorte, como se muestra en la figura 7.16. En la sección 7.4 se consideró que *sólo* el bloque era el sistema. Ahora se incluye tanto el bloque como el resorte formando el sistema, aceptando que la fuerza del resorte es la interacción entre los dos miembros del sistema. La fuerza que el resorte ejerce sobre el bloque está dada por $F_s = -kx$ (ecuación 7.9). El trabajo externo realizado por una fuerza aplicada F_{ap} sobre el sistema bloque-resorte se proporciona por la ecuación 7.13:

$$W_{\text{ext}} = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2 \qquad \textbf{(7.21)}$$

En esta situación, las coordenadas inicial y final x del bloque se miden desde su posición de equilibrio, $x = 0$. De nuevo (como en el caso gravitacional, ecuación 7.18) el trabajo efectuado sobre el sistema es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de una expresión relacionada con la configuración del sistema. La función **energía potencial elástica** asociada con el sistema bloque-resorte se define como

Energía potencial elástica ▶

$$U_s \equiv \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \textbf{(7.22)}$$

La ecuación 7.21 puede expresarse en la forma

$$W_{\text{ext}} = \Delta U_s \qquad \textbf{(7.23)}$$

Compare esta ecuación con las ecuaciones 7.17 y 7.20. En las tres situaciones el trabajo externo se realiza sobre el sistema y, como un resultado, cambia una forma de energía almacenada en el sistema.

La energía potencial elástica del sistema se puede percibir como la energía almacenada en el resorte deformado (uno que está comprimido o estirado desde su posición de equilibrio). La energía potencial elástica almacenada en un resorte es cero siempre que el resorte no esté deformado ($x = 0$). La energía se almacena en el resorte sólo cuando el resorte está estirado o comprimido. Puesto que la energía potencial elástica es proporcional a x^2, se ve que U_s siempre es positiva en un resorte

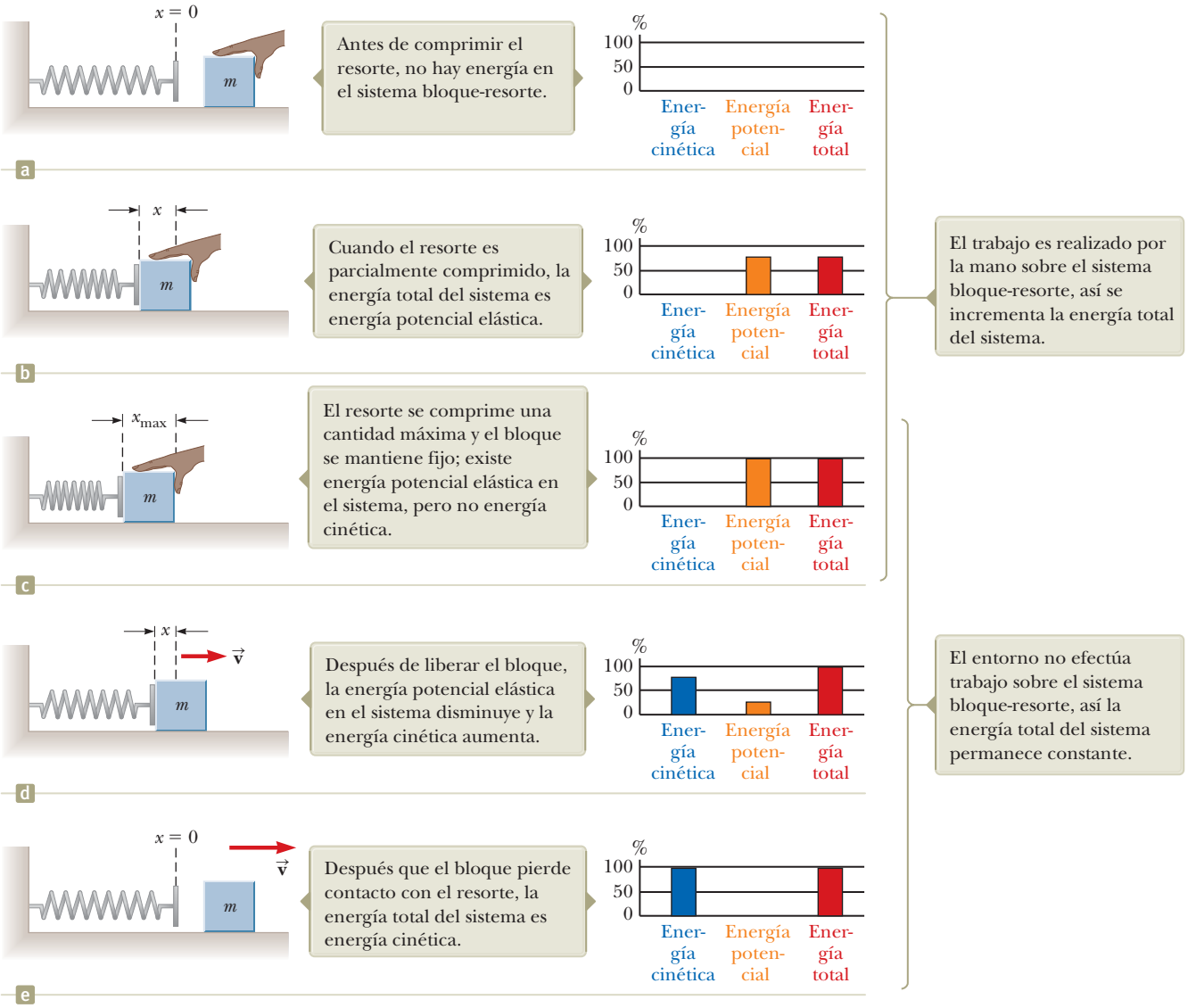


Figura 7.16 Un resorte sobre una superficie horizontal sin fricción se comprime una distancia $x_{máx}$ cuando un bloque de masa m se empuja contra él. Entonces se libera el bloque y el resorte lo empuja hacia la derecha, y el bloque eventualmente pierde contacto con el resorte. Los incisos (a) hasta (e) muestran diversos instantes en el proceso. Las gráficas de barras de energía, a la derecha de cada inciso, ayudan a monitorear la energía en el sistema.

deformado. Ejemplos cotidianos del almacenamiento de energía potencial elástica pueden encontrarse en relojes antiguos o en relojes que operan mediante un resorte enrollado, y en pequeños juguetes de cuerda para los niños.

Una vez más, considere la figura 7.16, la cual muestra un resorte sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando un agente externo empuja un bloque contra el resorte, la energía potencial elástica y la energía total del sistema se incrementan, como lo indica la figura 7.16b. Cuando el resorte se comprime una distancia $x_{máx}$ (figura 7.16c), la energía potencial elástica almacenada en el resorte es $\frac{1}{2}kx^2_{máx}$. Cuando el bloque se libera a partir del reposo, el resorte ejerce una fuerza sobre el bloque y empuja a éste hacia la derecha. La energía potencial elástica del sistema disminuye, mientras que la energía cinética aumenta y la energía total permanece fija (figura 7.16d). Cuando el resorte retorna a su longitud original, la energía potencial elástica almacenada es completamente transformada en energía cinética del bloque (figura 7.16e).



Figura 7.17 (Examen rápido 7.7) Una bola conectada a un resorte sin masa suspendido verticalmente. ¿Qué formas de energía potencial se asocian con el sistema cuando la bola se desplaza hacia abajo?

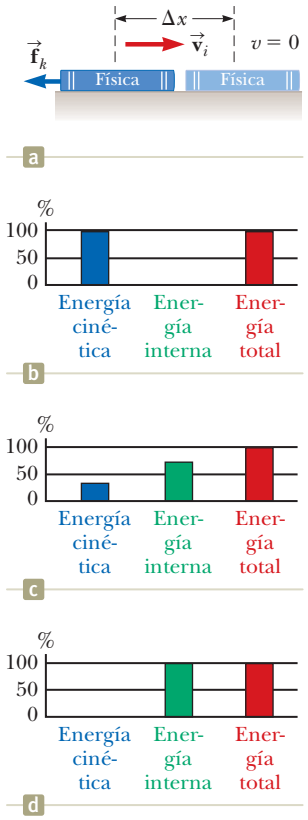


Figura 7.18 (a) Un libro que se desliza hacia la derecha sobre una superficie horizontal frena en presencia de una fuerza de fricción cinética que actúa hacia la izquierda. (b) Gráfica de barras de energía que muestra la energía en el sistema del libro y la superficie en el instante de tiempo inicial. (c) Mientras el libro se desliza disminuye la energía cinética del sistema conforme es transformada en energía interna. (d) Después que el libro se detiene, la energía del sistema es toda energía interna.

Examen rápido 7.7 Una bola se conecta a un resorte ligero suspendido verticalmente, como se muestra en la figura 7.17. Cuando se jala hacia abajo desde su posición de equilibrio y se libera, la bola oscila arriba y abajo. **(i)** En el sistema de *la bola, el resorte y la Tierra*, ¿qué formas de energías existen durante el movimiento? (a) Cinética y potencial elástica, (b) cinética y potencial gravitacional, (c) cinética, potencial elástica y potencial gravitacional, (d) potencial elástica y potencial gravitacional. **(ii)** En el sistema de *la bola y el resorte*, ¿qué formas de energía existen durante el movimiento? Elija de las mismas posibilidades de la (a) a la (d).

Gráficas de barras de energía

La figura 7.16 muestra una representación gráfica importante de información relacionada con la energía de sistemas llamada **gráfica de barras de energía**. El eje vertical representa la cantidad de energía de una clase determinada en el sistema. El eje horizontal muestra las clases de energía en el sistema. La gráfica de barras de la figura 7.16a muestra que el sistema contiene energía cero porque el resorte está relajado y el bloque no se mueve. Entre la figura 7.16a y la figura 7.16c la mano realiza trabajo sobre el sistema, comprime el resorte y almacena energía potencial elástica en el sistema. En la figura 7.16d el bloque ha sido liberado y se mueve hacia la derecha mientras continúa en contacto con el resorte. La altura de la barra para la energía potencial elástica del sistema disminuye, se incrementa la barra de la energía cinética y la barra de la energía total permanece fija. En la figura 7.16e el resorte ha retornado a su longitud relajada y ahora el sistema sólo contiene energía cinética asociada al bloque en movimiento.

Las gráficas de barras de energía pueden ser muy útiles representaciones para monitorear los diversos tipos de energía en un sistema. Para practicar, intente elaborar gráficas de barras de energía para el sistema libro-Tierra de la figura 7.15 cuando el libro es soltado desde una posición elevada. La figura 7.17, asociada con el examen rápido 7.7, muestra otro sistema para el cual sería un buen ejercicio dibujar su gráfica de barras de energía. En este capítulo en algunas figuras se mostrarán gráficas de barras de energía.

7.7 Fuerzas conservativas y no conservativas

Ahora se introduce un tercer tipo de energía que tiene un sistema. Imagine que usted acelera con su mano el libro en la figura 7.18a y lo desliza hacia la derecha sobre la superficie de una mesa pesada y frena debido a la fuerza de fricción. Suponga que la *superficie* es el sistema. Debido a eso la fuerza de fricción al deslizarse el libro realiza trabajo sobre la superficie. La fuerza sobre ésta es hacia la derecha y el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es hacia la derecha porque el libro se ha movido en esa dirección. El trabajo efectuado sobre la superficie es positivo, pero ésta no se mueve después que el libro se detiene. Sobre la superficie se realizó trabajo positivo, aunque no hay aumento en la energía cinética de la superficie o la energía potencial de sistema alguno. ¿Dónde está la energía?

A partir de su experiencia cotidiana con el deslizamiento sobre superficies con fricción, probablemente puede adivinar que la superficie se *calentará* después que el libro se deslice sobre ella. El trabajo que se hizo sobre la superficie se fue en calentar a ésta en lugar de aumentar su rapidez o cambiar la configuración de un sistema. A la energía asociada con la temperatura de un sistema se le llama **energía interna**, que se simboliza E_{int}. (En el capítulo 20 se definirá de manera más general la energía interna.) En este caso, el trabajo realizado sobre la superficie de hecho representa la energía transferida hacia dentro del sistema, pero aparece en el sistema como energía interna en lugar de energía cinética o potencial.

Ahora considere el libro y la superficie en la figura 7.18a juntos, como un sistema. Inicialmente, el sistema tiene energía cinética porque el libro se está moviendo. Mientras el libro se desliza, aumenta la energía interna del sistema: el libro y la superficie están más calientes que antes. Cuando el libro se detiene, la energía ciné-

tica se ha transformado completamente en energía interna. Se puede considerar a la fuerza no conservativa dentro del sistema (esto es, entre el libro y la superficie) como un *mecanismo de transformación* para energía. Esta fuerza no conservativa transforma la energía cinética del sistema en energía interna. ¡Junte sus manos y frótelas vigorosamente para experimentar este efecto!

Las figuras 7.18b a 7.18d muestran gráficas de barras de energía para la situación en la figura 7.18a. En la figura 7.18b la gráfica de barras muestra que el sistema contiene energía cinética en el instante que su mano libera el libro. En ese instante se define como cero la cantidad de energía interna de referencia. La figura 7.18c muestra a la energía cinética transformándose en energía interna conforme el libro se frena debido a la fuerza de fricción. En la figura 7.18d, después que el libro deja de deslizarse, la energía cinética es cero, y ahora el sistema sólo contiene energía interna E_{int}. Note que la barra de energía total en rojo no ha cambiado durante el proceso. La cantidad de energía interna en el sistema, después que el libro llega al reposo, es igual a la cantidad de energía cinética en el sistema en el instante inicial. Esta igualdad se describe mediante un importante principio llamado *conservación de energía*. Este principio se explorará en el capítulo 8.

Ahora considere con más detalle un objeto que se mueve hacia abajo, cerca de la superficie de la Tierra. El trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre el objeto no depende de si cae vertical o se desliza hacia abajo sobre un plano inclinado con fricción. Todo lo que importa es el cambio de elevación del objeto. Sin embargo, la transformación de energía en energía interna debida a la fricción en dicho plano depende de la distancia que el objeto se desliza. Entre más largo es el plano inclinado, más energía potencial se transforma a energía interna. En otras palabras, la trayectoria no hace diferencia cuando se considera el trabajo realizado por la fuerza gravitacional, pero sí hace una diferencia cuando se considera la transformación de energía debida a fuerzas de fricción. Se puede usar esta dependencia variable con la trayectoria para clasificar fuerzas como *conservativas* o *no conservativas*. De las dos fuerzas mencionadas, la fuerza gravitacional es conservativa y la fuerza de fricción es no conservativa.

Fuerzas conservativas

Las **fuerzas conservativas** tienen estas dos propiedades equivalentes:

1. El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula moviéndose entre dos puntos cualesquiera es independiente de la trayectoria tomada por la partícula.
2. El trabajo efectuado por una fuerza conservativa sobre una partícula moviéndose a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero. (Una trayectoria cerrada es aquella en la que el punto de partida y el punto final son idénticos.)

◀ **Propiedades de fuerzas conservativas**

La fuerza gravitacional es un ejemplo de fuerza conservativa; la fuerza que un resorte ideal ejerce en cualquier objeto unido al resorte es otra. El trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre un objeto moviéndose entre dos puntos cualesquiera cerca de la superficie de la Tierra es $W_g = -mg\hat{\mathbf{j}} \cdot [(y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_i - mgy_f$. A partir de esta ecuación, observe que W_g sólo depende de las coordenadas y inicial y final del objeto, y por tanto es independiente de la trayectoria. Además, W_g es cero cuando el objeto se traslada en cualquier trayectoria cerrada (donde $y_i = y_f$).

Para el caso del sistema objeto-resorte, el trabajo W_g realizado por la fuerza del resorte está dado por $W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$ (ecuación 7.12). Se ve que la fuerza del resorte es conservativa porque W_g sólo depende de las coordenadas x inicial y final del objeto, y es cero para cualquier trayectoria cerrada.

Es posible asociar una energía potencial para un sistema con una fuerza que actúa entre integrantes del sistema, pero sólo puede hacerse para fuerzas conservativas. En general, el trabajo W_{int} realizado por una fuerza conservativa sobre un objeto que es miembro de un sistema, conforme el sistema cambia de una configuración a otra, es igual al valor inicial de la energía potencial del sistema menos el valor final:

$$W_{\text{int}} = U_i - U_f = -\Delta U \qquad \textbf{(7.24)}$$

Prevención de riesgos ocultos 7.9

Advertencia sobre ecuaciones similares Compare la ecuación 7.24 con la ecuación 7.20. Estas ecuaciones son similares, excepto por el signo negativo, que es una fuente común de confusión. La ecuación 7.20 dice que el trabajo positivo realizado *por un agente externo* sobre un sistema causa un incremento en la energía potencial del sistema (sin cambio alguno en la energía cinética o en la energía interna). La ecuación 7.24 establece que el trabajo positivo efectuado sobre una componente de un sistema por una fuerza conservativa, *interna al sistema*, causa una disminución de la energía potencial del sistema.

El subíndice "int" en la ecuación 7.24 recuerda que el trabajo bajo análisis es efectuado por un integrante del sistema sobre otro miembro de éste, y por lo tanto es *interno* al sistema. Es diferente del trabajo W_{ext} realizado *sobre* el sistema como un todo por un agente externo. Como ejemplo, compare la ecuación 7.24 con la ecuación para el trabajo realizado por un agente externo sobre el sistema bloque-resorte (ecuación 7.23) conforme cambia la extensión del resorte.

Fuerzas no conservativas

Una fuerza es **no conservativa** si no satisface las propiedades 1 y 2 mencionadas. El trabajo efectuado por una fuerza no conservativa depende de la trayectoria. La suma de las energías cinética y potencial de un sistema se define como la **energía mecánica** del sistema:

$$E_{mec} \equiv K + U \tag{7.25}$$

donde K incluye la energía cinética de todos los integrantes móviles del sistema y U incluye todos los tipos de energía potencial en el sistema. Para un libro que cae bajo la acción de la fuerza gravitacional, la energía mecánica del sistema libro-Tierra permanece fija; la energía potencial gravitacional se transforma en energía cinética, y la energía total del sistema permanece constante. Sin embargo, las fuerzas no conservativas que actúan dentro de un sistema causan un *cambio* en la energía mecánica del sistema. Por ejemplo, para un libro que se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción (figura 7.18a), la energía mecánica del sistema libro-superficie se transforma en energía interna, como se discutió anteriormente. Sólo parte de la energía cinética del libro se transforma en energía interna en el libro. El resto aparece como energía interna en la superficie. (Cuando tropieza y se desliza por el suelo de un gimnasio, no sólo la piel en sus rodillas se calienta, ¡también lo hace el piso!) Como la fuerza de fricción cinética transforma la energía mecánica de un sistema en energía interna, ésta es una fuerza no conservativa.

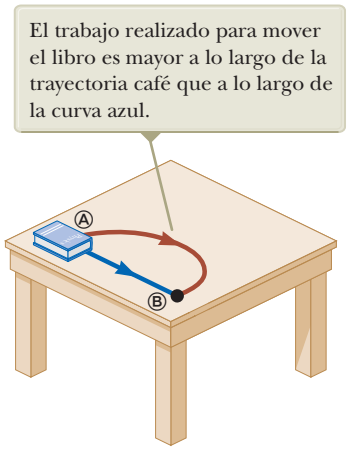


Figura 7.19 El trabajo efectuado contra la fuerza de fricción cinética depende de la trayectoria tomada mientras el libro se traslada de Ⓐ a Ⓑ.

Como ejemplo de la dependencia del trabajo con la trayectoria para una fuerza no conservativa, considere la figura 7.19. Suponga que desplaza un libro entre dos puntos sobre una mesa. Si el libro se desplaza en una línea recta a lo largo de la trayectoria azul entre los puntos Ⓐ y Ⓑ de la figura 7.19, realiza cierta cantidad de trabajo contra la fuerza de fricción cinética para mantener al libro moviéndose con una rapidez constante. Ahora, piense que empuja el libro a lo largo de la trayectoria semicircular café en la figura 7.19. Realiza más trabajo contra la fricción a lo largo de esta trayectoria curva que a lo largo de la trayectoria recta porque el camino curvo es más largo. El trabajo realizado sobre el libro depende de la trayectoria, así que la fuerza de fricción *no puede ser* conservativa.

7.8 Relación entre fuerzas conservativas y energía potencial

En la sección anterior se encontró que el trabajo realizado sobre un integrante de un sistema por una fuerza conservativa entre los miembros del sistema no depende de la trayectoria seguida por el integrante en movimiento. El trabajo sólo depende de las coordenadas inicial y final. Para tal sistema, se puede definir una **función de energía potencial** U tal que el trabajo efectuado dentro del sistema por la fuerza conservativa iguale al negativo del cambio en la energía potencial del sistema, de acuerdo con la ecuación 7.24. Imagine un sistema de partículas en el cual una fuerza conservativa $\vec{\mathbf{F}}$ actúa entre las partículas. También imagine que la configuración del sistema cambia debido al movimiento de una partícula a lo largo del eje x. Entonces se puede evaluar el trabajo interno realizado por esta fuerza conforme la partícula se mueve sobre el eje x[4] utilizando las ecuaciones 7.7 y 7.24:

$$W_{int} = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx = -\Delta U \tag{7.26}$$

[4]Para un desplazamiento general, el trabajo efectuado en dos o tres dimensiones también es igual a $-\Delta U$, donde $U = U(x, y, z)$. Esta ecuación se escribe formalmente como $W_{int} = \int_i^f \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = U_i - U_f$.

donde F_x es la componente de $\vec{\mathbf{F}}$ en la dirección del desplazamiento. La ecuación 7.26 también se puede expresar como

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \tag{7.27}$$

Por lo tanto, ΔU es negativa cuando F_x y dx están en la misma dirección, como cuando se baja un objeto en un campo gravitacional o cuando un resorte empuja un objeto hacia el equilibrio.

Con frecuencia es conveniente establecer alguna ubicación particular x_i de un integrante de un sistema como representativo de una configuración de referencia y medir todas las diferencias de energía potencial en relación con él. Entonces se puede definir la función de energía potencial como

$$U_f(x) = -\int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx + U_i \tag{7.28}$$

Frecuentemente el valor de U_i se considera cero para la configuración de referencia. No importa qué valor se asigne a U_i, porque cualquier valor distinto de cero simplemente desplaza a $U_f(x)$ en una cantidad constante y sólo el cambio en *energía* potencial es físicamente significativo.

Si el punto de aplicación de la fuerza experimenta un desplazamiento infinitesimal dx, el cambio infinitesimal en la energía potencial del sistema dU se expresa como

$$dU = -F_x \, dx$$

Por lo tanto, la fuerza conservativa se relaciona con la función de energía potencial mediante la relación[5]

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \tag{7.29}$$

◀ **Relación de fuerza entre integrantes de un sistema y la energía potencial del sistema**

Es decir, la componente x de una fuerza conservativa que actúa sobre un objeto dentro de un sistema es igual a la derivada negativa de la energía potencial del sistema en relación con x.

Es fácil comprobar la ecuación 7.29 para los dos ejemplos ya analizados. En el caso del resorte deformado, $U_s = \frac{1}{2}kx^2$; por lo tanto

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

que corresponde a la fuerza restauradora en el resorte (ley de Hooke). Ya que la función de energía potencial gravitacional es $U_g = mgy$, se sigue de la ecuación 7.29 que $F_g = -mg$ cuando se deriva U_g respecto de y en lugar de x.

Ahora se ve que U es una función importante, porque de ella se deduce una fuerza conservativa. Además, la ecuación 7.29 pone en claro que sumar una constante a la energía potencial no es relevante, porque la derivada de una constante es cero.

Examen rápido 7.8 ¿Qué representa la pendiente de una gráfica de $U(x)$ contra x? **(a)** La magnitud de la fuerza sobre el objeto, **(b)** el negativo de la magnitud de la fuerza sobre el objeto, **(c)** la componente x de la fuerza sobre el objeto, **(d)** el negativo de la componente x de la fuerza sobre el objeto.

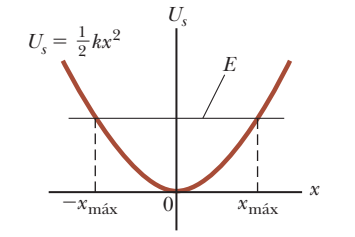
7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

Con frecuencia el movimiento de un sistema se puede entender cualitativamente mediante una gráfica de su energía potencial contra la posición de un integrante del

[5] En tres dimensiones, la expresión es

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

donde $(\partial U/\partial x)$, y así sucesivamente, son derivadas parciales. En el lenguaje del cálculo vectorial, $\vec{\mathbf{F}}$ es igual al negativo del *gradiente* de la cantidad escalar $U(x, y, z)$.



La fuerza restauradora que ejerce el resorte siempre actúa hacia $x = 0$, la posición de equilibrio estable.

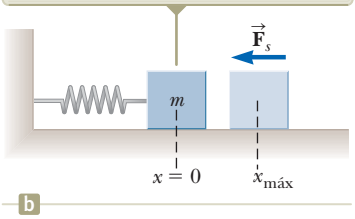


Figura 7.20 (a) Energía potencial como función de x para el sistema bloque-resorte sin fricción que se muestra en (b). Para una energía dada E del sistema, el bloque oscila entre los puntos de retorno, los cuales tienen las coordenadas $x = \pm x_{máx}$.

Prevención de riesgos ocultos 7.10

Diagramas de energía Un error común es pensar que la energía potencial en la gráfica de un diagrama de energía representa la altura de algún objeto. Por ejemplo, no es el caso en la figura 7.20, donde el bloque sólo se mueve horizontalmente.

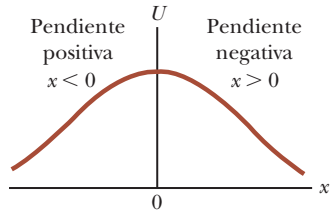


Figura 7.21 Gráfica de U contra x para una partícula que tiene una posición de equilibrio inestable ubicado en $x = 0$. Para cualquier desplazamiento finito de la partícula, la fuerza sobre la partícula se dirige alejándose de $x = 0$.

sistema. Considere la función de energía potencial para un sistema bloque-resorte, dada por $U_s = \frac{1}{2}kx^2$. En la figura 7.20a se grafica esta función contra x, donde x es la posición del bloque. La fuerza F_s que ejerce el resorte sobre el bloque se relaciona con U_s a través de la ecuación 7.29:

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -kx$$

Como se vio en el examen rápido 7.8, la componente x de la fuerza es igual al negativo de la pendiente de la curva U contra x. Cuando el bloque se coloca en reposo en la posición de equilibrio del resorte ($x = 0$), donde $F_s = 0$, permanecerá ahí a menos que alguna fuerza externa F_{ext} actúe sobre él. Si esta fuerza externa estira el resorte desde el equilibrio, x es positivo y la pendiente dU/dx es positiva; por lo tanto, la fuerza F_s que ejerce el resorte es negativa y el bloque acelera de regreso hacia $x = 0$ cuando se libera. Si la fuerza externa comprime el resorte, x es negativa y la pendiente es negativa; entonces F_s es positiva y una vez más la masa acelera hacia $x = 0$ al momento de liberarse.

A partir de este análisis, se concluye que la posición $x = 0$ para un sistema bloque-resorte es aquella de **equilibrio estable**. Es decir, cualquier movimiento que se aleje de esta posición, da como resultado una fuerza que se dirige de regreso hacia $x = 0$. En general, las configuraciones de un sistema en equilibrio estable corresponden a aquellas para las cuales $U(x)$ del sistema es un mínimo.

Si el bloque en la figura 7.20 se mueve a una posición inicial $x_{máx}$ y luego se libera del reposo, su energía total inicialmente es la energía potencial $\frac{1}{2}kx_{max}^2$ almacenada en el resorte. Conforme el bloque comienza a moverse, el sistema adquiere energía cinética y pierde energía potencial. El bloque oscila (se mueve hacia atrás y hacia adelante) entre los dos puntos $x = -x_{máx}$ y $x = +x_{máx}$, llamados *puntos de retorno*. De hecho, como ninguna energía se transforma en energía interna debido a la fricción, el bloque oscila entre $-x_{máx}$ y $+x_{máx}$ por siempre. (Estas oscilaciones se discuten más en el capítulo 15.)

Otro sistema mecánico simple con una configuración de equilibrio estable es una bola que rueda en el fondo de un tazón. En cualquier momento que la bola se desplaza de su posición más baja, tiende a regresar a dicha posición cuando se libera.

Ahora considere una partícula moviéndose a lo largo del eje x bajo la influencia de una fuerza conservativa F_x, donde la curva U contra x se muestra en la figura 7.21. Nuevamente, $F_x = 0$ en $x = 0$, y por ende la partícula está en equilibrio en este punto. Sin embargo, esta posición es de **equilibrio inestable** por la siguiente razón. Suponga que la partícula se desplaza hacia la derecha ($x > 0$). Como la pendiente es negativa para $x > 0$, $F_x = -dU/dx$ es positiva y la partícula acelera alejándose de $x = 0$. Si en vez de ello la partícula está en $x = 0$ y se desplaza hacia la izquierda ($x < 0$), la fuerza es negativa porque la pendiente es positiva para $x < 0$, y la partícula de nuevo acelera alejándose de la posición de equilibrio. En esta situación la posición $x = 0$ es de equilibrio inestable, porque para cualquier desplazamiento a partir de este punto, la fuerza empuja la partícula más lejos del equilibrio y hacia una posición de menor energía potencial. Un lápiz que se equilibra sobre su punta está en una posición de equilibrio inestable. Si el lápiz se desplaza un poco de su posición absolutamente vertical y después se libera, es seguro que caerá. En general, las configuraciones de un sistema en equilibrio inestable corresponden a aquellas para las que $U(x)$ del sistema es un máximo.

Por último, una configuración llamada **equilibrio neutro** surge cuando U es constante en alguna región. Pequeños desplazamientos de un objeto desde una posición en esta región no producen fuerzas restauradoras ni perturbadoras. Una bola que yace sobre una superficie horizontal plana es un ejemplo de objeto en equilibrio neutro.

Ejemplo 7.9 Fuerza y energía a escala atómica

La energía potencial asociada con la fuerza entre dos átomos en una molécula se representa mediante la función de energía potencial de Lennard-Jones:

$$U(x) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

donde x es la separación de los átomos. La función $U(x)$ contiene dos parámetros, σ y ϵ, que están determinados experimentalmente. Valores muestra para la interacción entre dos átomos en una molécula son $\sigma = 0.263$ nm y $\epsilon = 1.51 \times 10^{-22}$ J. Con una hoja de cálculo o herramienta similar, grafique esta función y encuentre la distancia más probable entre los dos átomos.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los dos átomos en la molécula se identifican como un sistema. Basados en que sabemos que existen moléculas estables, se espera encontrar equilibrio estable cuando los dos átomos estén separados por cierta distancia de equilibrio.

Categorizar Ya que existe una función de energía potencial, la fuerza entre los átomos se clasifica como conservativa. Para una fuerza conservativa, la ecuación 7.29 describe la relación entre la fuerza y la función de energía potencial.

Analizar Existe equilibrio estable para una distancia de separación en que la energía potencial del sistema de dos átomos (la molécula) es un mínimo.

Tome la derivada de la función $U(x)$:

$$\frac{dU(x)}{dx} = 4\epsilon\,\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right] = 4\epsilon\left[\frac{-12\sigma^{12}}{x^{13}} + \frac{6\sigma^{6}}{x^{7}}\right]$$

Minimice la función $U(x)$ al hacer su derivada igual a cero:

$$4\epsilon\left[\frac{-12\sigma^{12}}{x_{eq}{}^{13}} + \frac{6\sigma^{6}}{x_{eq}{}^{7}}\right] = 0 \quad \rightarrow \quad x_{eq} = (2)^{1/6}\sigma$$

Evalúe x_{eq}, la separación de equilibrio de los dos átomos en la molécula:

$$x_{eq} = (2)^{1/6}(0.263\ \text{nm}) = 2.95 \times 10^{-10}\ \text{m}$$

Grafique la función de Lennard-Jones en ambos lados de este valor crítico para generar el diagrama de energía, como se muestra en la figura 7.22.

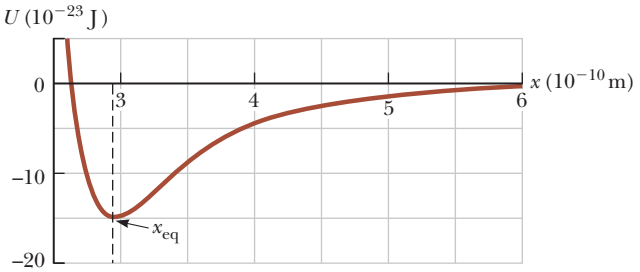


Figura 7.22 (Ejemplo 7.9) Curva de energía potencial asociada con una molécula. La distancia x es la separación entre los dos átomos que conforman la molécula.

Finalizar Advierta que $U(x)$ es extremadamente grande cuando los átomos están muy cerca uno del otro, es un mínimo cuando los átomos están en su separación crítica y después aumenta de nuevo conforme los átomos se separan. Cuando $U(x)$ es mínima, los átomos están en equilibrio estable, lo que indica que la separación más probable entre ellos se presenta en este punto.

Resumen

Definiciones

Con mucha frecuencia, un **sistema** es una sola partícula, un conjunto de partículas o una región del espacio, y puede variar en tamaño y forma. La **frontera del sistema** separa al sistema del **entorno**.

El **trabajo** W realizado sobre un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el sistema es el producto de la magnitud Δr del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y la componente $F\cos\theta$ de la fuerza a lo largo de la dirección del desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$:

$$W \equiv F\,\Delta r\cos\theta \qquad (7.1)$$

continúa

Si una fuerza variable realiza trabajo sobre una partícula conforme ésta se mueve a lo largo del eje x, desde x_i hasta x_f, el trabajo efectuado por la fuerza sobre la partícula está dado por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \qquad (7.7)$$

donde F_x es la componente de fuerza en la dirección x.

El **producto escalar** (producto punto) de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se define mediante la relación

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \equiv AB \cos\theta \qquad (7.2)$$

donde el resultado es una cantidad escalar y θ es el ángulo entre los dos vectores. El producto escalar obedece a las leyes conmutativa y distributiva.

La **energía cinética** de una partícula de masa m que se mueve con una rapidez v es

$$K \equiv \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (7.16)$$

Si una partícula de masa m está a una distancia y sobre la superficie de la Tierra, la **energía potencial gravitacional** del sistema partícula-Tierra es

$$U_g \equiv mgy \qquad (7.19)$$

La **energía potencial elástica** almacenada en un resorte de constante de fuerza k es

$$U_s \equiv \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (7.22)$$

Una fuerza es **conservativa** si el trabajo que realiza sobre una partícula que es integrante del sistema, conforme la partícula se mueve entre dos puntos, es independiente de la trayectoria que sigue la partícula entre los dos puntos. Además, una fuerza es conservativa si el trabajo que efectúa sobre una partícula es cero cuando la partícula se mueve a través de una trayectoria cerrada arbitraria y regresa a su posición inicial. Una fuerza que no satisface estos criterios se dice que es **no conservativa**.

La **energía mecánica total de un sistema** se define como la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E_{\text{mec}} \equiv K + U \qquad (7.25)$$

Conceptos y principios

El **teorema trabajo-energía cinética** establece que si una fuerza externa realiza trabajo sobre un sistema y el único cambio en el sistema es en su rapidez,

$$W_{\text{ext}} = K_f - K_i = \Delta K = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \qquad (7.15,\ 7.17)$$

Una **función de energía potencial** U se asocia sólo con una fuerza conservativa. Si una fuerza conservativa $\vec{\mathbf{F}}$ actúa entre integrantes de un sistema mientras un integrante se mueve a lo largo del eje x, de x_i a x_f, el cambio en la energía potencial del sistema es igual al negativo del trabajo realizado por dicha fuerza:

$$U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \qquad (7.27)$$

Los sistemas pueden estar en tres tipos de configuraciones de equilibrio cuando la fuerza neta sobre un integrante del sistema es cero. Las configuraciones de **equilibrio estable** son aquellas donde $U(x)$ es un mínimo.

Las configuraciones de **equilibrio inestable** corresponden a $U(x)$ máxima.

El **equilibrio neutro** surge cuando U es constante mientras un integrante del sistema se mueve en alguna región.

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Alex y John cargan vitrinas idénticas sobre una camioneta. Alex levanta su vitrina directamente del suelo a la plataforma de la camioneta, mientras que John desliza su vitrina sobre una rampa rugosa hacia la camioneta. ¿Cuál enunciado es correcto respecto del trabajo realizado sobre el sistema vitrina-Tierra? (a) Alex y John hacen la misma cantidad de trabajo. (b) Alex efectúa más trabajo que John. (c) John realiza más trabajo que Alex. (d) Ninguno de estos enunciados es necesariamente verdadero, porque se desconoce la fuerza de fricción. (e) Ninguno de estos enunciados es necesariamente cierto, porque se ignora el ángulo de la rampa.
2. Si el trabajo neto realizado por fuerzas externas sobre una partícula es cero, ¿cuál de los siguientes enunciados respecto de la partícula es verdadero? (a) Su velocidad es cero. (b) Su velocidad disminuyó. (c) Su velocidad no cambió. (d) Su rapidez no cambió. (e) Se necesita más información.

3. Un trabajador empuja una carretilla con una fuerza horizontal de 50 N sobre el nivel del suelo durante una distancia de 5.0 m. Si una fuerza de fricción de 43 N actúa sobre la carretilla en una dirección opuesta a la del trabajador, ¿qué trabajo es realizado sobre la carretilla por el trabajador? (a) 250 J, (b) 215 J, (c) 35 J, (d) 10 J, (e) ninguna de estas respuestas es correcta.

4. Un carro se pone a rodar a través de una mesa a nivel, con la misma rapidez en cada pista. Si corre en un tramo de arena, el carro ejerce sobre la arena una fuerza horizontal promedio de 6 N y recorre una distancia de 6 cm a través de la arena conforme llega al reposo. Si en vez de ello el carro corre en un tramo de grava sobre la que ejerce una fuerza horizontal promedio de 9 N, ¿cuánto recorrerá el carro en la grava hasta detenerse? (a) 9 cm, (b) 6 cm, (c) 4 cm, (d) 3 cm, (e) ninguna de estas respuestas.

5. $\hat{\mathbf{N}}$ representa la dirección horizontal al Norte, $\widehat{\mathbf{NE}}$ representa el noreste (la mitad entre Norte y Este), y así sucesivamente. Cada especificación de dirección se considera como un vector unitario. Clasifique de mayor a menor los siguientes productos punto. Observe que cero es mayor que un número negativo. Si dos cantidades son iguales, muestre ese hecho en su clasificación. (a) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{N}}$ (b) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \widehat{\mathbf{NE}}$ (c) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ (d) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$ (e) $\widehat{\mathbf{SE}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$.

6. ¿Es el trabajo requerido que efectuará una fuerza externa sobre un objeto en una mesa horizontal sin fricción para acelerarlo de una rapidez v a una rapidez $2v$, (a) igual al trabajo requerido para acelerar el objeto de $v = 0$ a v, (b) el doble del trabajo requerido para acelerar el objeto de $v = 0$ a v, (c) tres veces el trabajo requerido para acelerar el objeto de $v = 0$ a v, (d) cuatro veces el trabajo requerido para acelerar el objeto de 0 a v, o (e) no se sabe sin el conocimiento de la aceleración?

7. Un bloque de masa m es liberado desde el cuarto piso de un edificio y golpea el suelo a una rapidez v. ¿Desde cuál piso se debería soltar el bloque para doblar la rapidez de impacto? (a) Del sexto piso, (b) del octavo piso, (c) del décimo piso, (d) del doceavo piso, (e) del dieciseisavo piso.

8. Cuando un péndulo simple oscila hacia atrás y hacia adelante, las fuerzas que actúan sobre el objeto suspendido son (a) la fuerza gravitacional, (b) la tensión en la cuerda de soporte y (c) la resistencia del aire. **(i)** ¿Cuál de estas fuerzas, si hay alguna, no realiza trabajo sobre el péndulo en ningún instante? **(ii)** ¿Cuál de estas fuerzas efectúa trabajo negativo sobre el péndulo en todo momento durante su movimiento?

9. La bala 2 tiene el doble de masa que la bala 1. Ambas se disparan de modo que tienen la misma rapidez. Si la energía cinética de la bala 1 es K, la energía cinética de la bala 2 es (a) $0.25K$, (b) $0.5K$, (c) $0.71K$, (d) K o (d) $2K$.

10. La figura PO7.10 muestra un resorte ligero extendido que ejerce una fuerza F_s hacia la izquierda sobre un bloque. **(i)** ¿El bloque ejerce una fuerza sobre el resorte? Elija cada respuesta correcta. (a) No, no lo hace. (b) Sí, hacia la izquierda. (c) Sí, hacia la derecha. (d) Sí lo hace, y su magnitud es mayor que F_s. (e) Sí lo hace, y su magnitud es igual a F_s. **(ii)** ¿El resorte ejerce una fuerza sobre la pared?

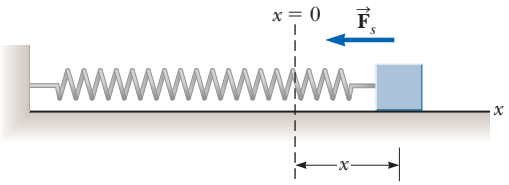


Figura PO7.10

Elija cada respuesta correcta de la misma lista, de la (a) a la (e).

11. Si la rapidez de una partícula se duplica, ¿qué ocurre con su energía cinética? (a) Se vuelve cuatro veces mayor. (b) Se vuelve dos veces mayor. (c) Se vuelve $\sqrt{2}$ veces mayor. (d) No cambia. (e) Se reduce a la mitad.

12. Mark y David cargan bloques de cemento idénticos a la camioneta de David. Mark levanta su bloque directamente del suelo hacia la camioneta, mientras que David desliza su bloque sobre una rampa con rodillos sin fricción. ¿Cuál enunciado es verdadero respecto al trabajo realizado sobre el sistema bloque-Tierra? (a) Mark efectúa más trabajo que David. (b) Mark y David hacen la misma cantidad de trabajo. (c) David realiza más trabajo que Mark. (d) Ninguno de estos enunciados es necesariamente cierto, porque no se da la masa de un bloque.

13. (i) Clasifique las aceleraciones gravitacionales que medría para los siguientes objetos en caída: (a) un objeto de 2 kg a 5 cm sobre el piso, (b) un objeto de 2 kg a 120 cm sobre el suelo, (c) un objeto de 3 kg a 120 cm sobre el suelo y (d) un objeto de 3 kg a 80 cm sobre el piso. Primero mencione el que tiene aceleración con mayor magnitud. Si cualesquiera son iguales, muestre su igualdad en la lista. (ii) Clasifique las fuerzas gravitacionales sobre los mismos cuatro objetos, primero la de mayor magnitud. (iii) Clasifique las energías potenciales gravitacionales (del sistema objeto-Tierra) para los mismos cuatro objetos, primero la mayor, y tome $y = 0$ en el suelo.

14. Un cierto resorte que obedece la ley de Hooke es estirado por un agente externo. El trabajo realizado para estirarlo 10 cm es 4 J. ¿Cuánto trabajo adicional se requiere para estirar el resorte 10 cm adicionales? (a) 2 J, (b) 4 J, (c) 8 J, (d) 12 J, (e) 16 J.

15. Un carro se pone a rodar sobre una mesa a nivel, con la misma rapidez en cada pista. Si corre en un tramo de arena, el carro ejerce sobre la arena una fuerza horizontal promedio de 6 N y recorre una distancia de 6 cm a través de la arena conforme llega al reposo. Si en vez de ello el carro corre en un tramo de harina, rueda un promedio de 18 cm antes de parar. ¿Cuál es la magnitud promedio de la fuerza horizontal que el carro ejerce sobre la harina? (a) 2 N, (b) 3 N, (c) 6 N, (d) 18 N, (e) ninguna de las respuestas.

16. A un cubo de hielo se le da un empujón y se desliza sin fricción sobre una mesa a nivel. ¿Qué es correcto? (a) Está en equilibrio estable. (b) Está en equilibrio inestable. (c) Está en equilibrio neutro. (d) No está en equilibrio.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. ¿Una fuerza normal puede realizar trabajo? Si no, ¿por qué no? Si sí, dé un ejemplo.
2. El objeto 1 empuja sobre el objeto 2 mientras se mueven juntos, como un bulldozer que empuja una piedra. Suponga que el objeto 1 hace 15.0 J de trabajo sobre el objeto 2. ¿El objeto 2 realiza trabajo sobre el objeto 1? Explique su respuesta. Si es posible, determine cuánto trabajo y explique su razonamiento.
3. Un estudiante tiene la idea de que el trabajo total efectuado sobre un objeto es igual a su energía cinética final. ¿Esta idea es cierta siempre, a veces o nunca? Si a veces es cierta, ¿bajo qué circunstancias? Si es siempre o nunca, explique por qué.
4. (a) ¿Para qué valores del ángulo θ entre dos vectores su producto escalar es positivo? (b) ¿Para qué valores de θ su producto escalar es negativo?
5. ¿La energía cinética puede ser negativa? Explique.
6. Analice el trabajo realizado por un pítcher que lanza una pelota de béisbol. ¿Cuál es la distancia aproximada a través de la cual actúa la fuerza mientras se lanza la pelota?
7. Analice si algún trabajo es realizado por cada uno de los siguientes agentes y, de ser así, si el trabajo es positivo o negativo. (a) Un pollo que rasca la tierra, (b) una persona que estudia, (c) una grúa que levanta una cubeta de concreto, (d) la fuerza gravitacional sobre la cubeta del inciso (c), (e) los músculos de la pierna de una persona en el acto de sentarse.
8. Si sólo una fuerza externa actúa sobre una partícula, ¿necesariamente cambia (a) la energía cinética de la partícula? (b) ¿Su velocidad?
9. Para limpiarlas, usted quita todas las teclas removibles de un teclado de computadora. Cada tecla tiene la forma de una pequeña caja con un lado abierto. Por accidente, tira las teclas en el suelo. Explique por qué muchas más de ellas aterrizan con el lado de la letra hacia abajo que con el lado abierto.
10. Se le encomienda regresar a sus anaqueles los libros de una biblioteca. Levante un libro desde el suelo hasta el anaquel superior. La energía cinética del libro sobre el suelo fue cero y la energía cinética del libro en el anaquel superior es cero, así que no ocurre cambio en la energía cinética, aunque usted hizo algo de trabajo para levantar el libro. ¿Se violó el teorema trabajo-energía cinética? Explique.
11. Cierto resorte uniforme tiene constante de resorte k. Ahora el resorte se corta a la mitad. ¿Cuál es la relación entre k y la constante de resorte k' de cada resorte más pequeño resultante? Explique su razonamiento.
12. ¿Qué forma tendría la gráfica de U contra x si una partícula estuviese en una región de equilibrio neutro?
13. ¿La energía cinética de un objeto depende del marco de referencia en el que se observa el movimiento? Dé un ejemplo para ilustrar este punto.
14. Cite dos ejemplos en los que se ejerza una fuerza sobre un objeto sin realizar trabajo alguno sobre el objeto.

Problemas

1. sencillo; 2. intermedio; 3. desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 7.2 Trabajo realizado por una fuerza constante

1. Una cliente en un supermercado empuja un carro con una fuerza de 35.0 N dirigida a un ángulo de 25.0° bajo la horizontal. La fuerza es justo lo suficiente para equilibrar a varias fuerzas de fricción, así el carro se mueve con rapidez constante. (a) Encuentre el trabajo realizado por la cliente sobre el carro conforme ella avanza 50.0 m a lo largo del pasillo. (b) La cliente camina al siguiente pasillo, empujando horizontalmente y manteniendo la misma rapidez que antes. Si la fuerza de fricción no cambia, ¿la fuerza aplicada de la cliente sería mayor, menor o la misma? (c) ¿Qué puede decirse sobre el trabajo realizado por la persona sobre el carro?
2. Una gota de lluvia de 3.35×10^{-5} kg de masa cae verticalmente con rapidez constante bajo la influencia de la gravedad y la resistencia del aire. Modele la gota como una partícula. Mientras cae 100 m, ¿cuál es el trabajo efectuado sobre la gota (a) por la fuerza gravitacional y (b) por la resistencia del aire?
3. En 1990, Walter Arfeuille, de Bélgica, levantó un objeto de 281.5 kg a través de una distancia de 17.1 cm utilizando sólo sus dientes. (a) ¿Cuánto trabajo realizó Arfeuille en este proceso, suponiendo que el objeto se levantó a rapidez constante? (b) ¿Qué fuerza total se ejerció sobre los dientes de Arfeuille durante este proceso?
4. El récord de levantamiento de botes, incluyendo el objeto y su tripulación de diez miembros, corresponde a Sami Heinonen y Juha Räsänen de Suecia, en el 2000. Ellos levantaron una masa total de 653.2 kg aproximadamente a 4 pulgadas del suelo, y lo hicieron 24 veces. Estime el trabajo total efectuado por los dos hombres sobre el bote en este levantamiento récord, ignore el trabajo negativo realizado por los hombres cuando bajan el bote al suelo.
5. Un bloque de masa $m = 2.50$ kg es empujado una distancia $d = 2.20$ m sobre una mesa horizontal sin fricción por una fuerza constante de magnitud $F = 16.0$ N dirigida a un ángulo de 25.0° bajo la horizontal, como se muestra en la figura P7.5. Determine el trabajo realizado sobre el blo-

que por (a) la fuerza aplicada, (b) la fuerza normal que ejerce la mesa, (c) la fuerza gravitacional y (d) la fuerza neta sobre el bloque.

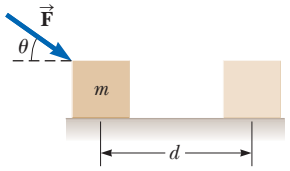


Figura P7.5

6. El hombre araña, cuya masa es 80.0 kg, está colgado en el extremo libre de una soga de 12.0 m, el otro extremo está fijo de la rama de un árbol arriba de él. Al flexionar repetidamente la cintura, hace que la cuerda se ponga en movimiento, y eventualmente la hace balancear lo suficiente para que pueda llegar a una repisa cuando la cuerda forma un ángulo de 60.0° con la vertical. ¿Cuánto trabajo realizó la fuerza gravitacional sobre el hombre araña en esta maniobra?

Sección 7.3 Producto escalar de dos vectores

7. Para dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, demuestre que $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$. *Sugerencia*: Escriba $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en forma de vectores unitarios y aplique las ecuaciones 7.4 y 7.5.

8. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una magnitud de 5.00 unidades y $\vec{\mathbf{B}}$ tiene una magnitud de 9.00 unidades. Los dos vectores forman un ángulo de 50.0° entre sí. Determine $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$.

Nota: En los problemas 9 a 12, obtenga respuestas numéricas con tres cifras significativas, como es usual.

9. Para los vectores $\vec{\mathbf{A}} = 3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$, y $\vec{\mathbf{C}} = 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$, encuentre $\vec{\mathbf{C}} \cdot (\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}})$.

10. Encuentre el producto escalar de los vectores en la figura P7.10.

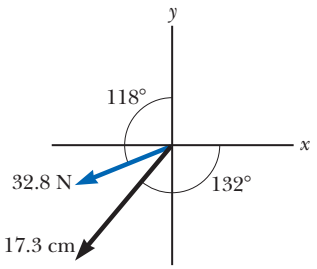


Figura P7.10

11. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (6\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}})$ N actúa sobre una partícula que experimenta un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$ m. Encuentre (a) el trabajo efectuado por la fuerza sobre la partícula y (b) el ángulo entre $\vec{\mathbf{F}}$ y $\Delta\vec{\mathbf{r}}$.

12. Con la definición del producto escalar, encuentre los ángulos entre (a) $\vec{\mathbf{A}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 4\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$, (b) $\vec{\mathbf{A}} = -2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, y (c) $\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$.

13. Sea $\vec{\mathbf{B}} = 5.00$ m a 60.0°. Sea $\vec{\mathbf{C}}$ que tiene la misma magnitud que $\vec{\mathbf{A}}$ y un ángulo de dirección mayor que el de $\vec{\mathbf{A}}$ en 25.0°. Sea $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 30.0\ \text{m}^2$ y $\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{C}} = 35.0\ \text{m}^2$. Encuentre la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{A}}$.

Sección 7.4 Trabajo realizado por una fuerza variable

14. La fuerza que actúa sobre una partícula varía como se muestra en la figura P7.14. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula conforme se mueve (a) de $x = 0$ a $x = 8.00$ m, (b) de $x = 8.00$ m a $x = 10.0$ m y (c) de $x = 0$ a $x = 10.0$ m.

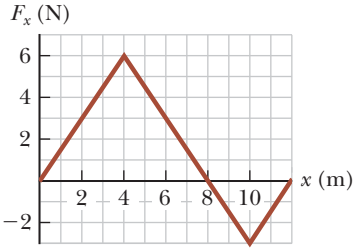


Figura P7.14

15. Una partícula se somete a una fuerza F_x que varía con la posición, como se muestra en la figura P7.15. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula mientras se mueve (a) de $x = 0$ a $x = 5.00$ m, (b) de $x = 5.00$ m a $x = 10.0$ m y (c) de $x = 10.0$ m a $x = 15.0$ m. (d) ¿Cuál es el trabajo total efectuado por la fuerza sobre la distancia $x = 0$ a $x = 15.0$ m?

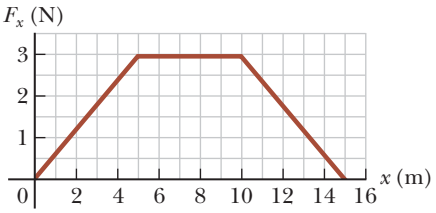


Figura P7.15 Problemas 15 y 34.

16. En un sistema de control, un acelerómetro consiste de un objeto de 4.70 g que se desliza sobre un riel horizontal calibrado. Un resorte de masa pequeña une al objeto a una pestaña en un extremo del riel. La grasa en el riel hace despreciable la fricción estática, pero amortigua rápidamente las vibraciones del objeto deslizante. Cuando se somete a una aceleración fija de $0.800g$, el objeto debería estar en una posición a 0.500 cm de su posición de equilibrio. Encuentre la constante de fuerza del resorte requerida para una correcta calibración.

17. Cuando un objeto de 4.00 kg cuelga verticalmente en cierto resorte ligero descrito por la ley de Hooke, el resorte se estira 2.50 cm. Si se quita el objeto de 4.00 kg, (a) ¿cuánto se estirará el resorte si se le cuelga un objeto de 1.50 kg? (b) ¿Cuánto trabajo debe efectuar un agente externo para estirar el mismo resorte 4.00 cm desde su posición sin estirar?

18. La ley de Hooke describe cierto resorte ligero de 35.0 cm de longitud sin estirar. Cuando un extremo se une a la parte superior de un marco de puerta y del otro extremo se cuelga un objeto de 7.50 kg, la longitud del resorte es 41.5 cm. (a) Encuentre su constante de resorte. (b) La carga y el resorte se desmontan. Dos personas jalan en direcciones opuestas en los extremos del resorte, cada una con una fuerza de 190 N. Encuentre la longitud del resorte en esta situación.

19. Un arquero jala hacia atrás la cuerda de su arco 0.400 m al ejercer una fuerza que aumenta uniformemente de cero a 230 N. (a) ¿Cuál es la constante de resorte equivalente del arco? (b) ¿Cuánto trabajo efectúa el arquero al estirar su arco?

20. Un resorte ligero, con constante de resorte 1 200 N/m, cuelga de un soporte elevado. De su extremo inferior cuelga un segundo resorte ligero, que tiene constante de resorte 1 800 N/m. Un objeto de 1.50 kg de masa cuelga en reposo del extremo inferior del segundo resorte. (a) Encuentre la distancia de extensión total del par de resortes. (b) Encuentre la constante de resorte efectiva del par de resortes como sistema. Describa estos resortes como *en serie*.

21. Un resorte ligero, con constante de resorte k_1, cuelga de un soporte elevado. De su extremo inferior cuelga un segundo resorte ligero, que tiene constante de resorte k_2. Un objeto de masa m cuelga en reposo del extremo inferior del segundo resorte. (a) Encuentre la distancia de extensión total del par de resortes. (b) Encuentre la constante de resorte efectiva del par de resortes como sistema.

22. Exprese, en unidades fundamentales SI, las unidades de la constante de fuerza de un resorte.

23. Un dispensador de charolas en una cafetería sostiene una pila de charolas sobre un anaquel que cuelga de cuatro resortes en espiral idénticos bajo tensión, uno cerca de cada esquina del anaquel. Cada charola es rectangular, de 45.3 cm por 35.6 cm, 0.450 cm de grosor y 580 g de masa. (a) Demuestre que la charola superior en la pila siempre está a la misma altura sobre el piso, aunque haya muchas charolas en el dispensador. (b) Encuentre la constante de resorte que cada uno debe tener para que el dispensador funcione en esta forma conveniente. (c) ¿Alguna porción de los datos es innecesaria para esta determinación?

24. Un resorte ligero, con constante de fuerza 3.85 N/m, se comprime 8.00 cm mientras se mantiene entre un bloque de 0.250 kg a la izquierda y un bloque de 0.500 kg a la derecha, ambos en reposo sobre una superficie horizontal. El resorte ejerce una fuerza sobre cada bloque, y tiende a separarlos. Los bloques se sueltan simultáneamente desde el reposo. Encuentre la aceleración con la que cada bloque comienza a moverse, dado que el coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie es (a) 0, (b) 0.100 y (c) 0.462.

25. Una partícula pequeña de masa m se jala hacia lo alto de un medio cilindro sin fricción (de radio R) mediante una cuerda que pasa sobre lo alto del cilindro, como se ilustra en la figura P7.25. (a) Si supone que la partícula se mueve con rapidez constante, demuestre que $F = mg\cos\theta$. *Nota*: si la partícula se mueve con rapidez constante, la componente de su aceleración tangente al cilindro debe ser cero en todo momento. (b) Mediante integración directa de $W = \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$, encuentre el trabajo realizado al mover la partícula con rapidez constante desde el fondo hasta lo alto del medio cilindro.

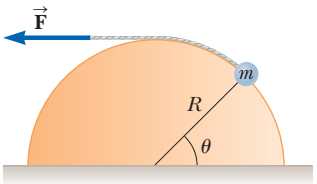


Figura P7.25

26. La fuerza que actúa sobre una partícula es $F_x = (8x - 16)$, donde F está en newtons y x está en metros. (a) Grafique esta fuerza contra x desde $x = 0$ hasta $x = 3.00$ m. (b) A partir de su gráfica, encuentre el trabajo neto realizado por esta fuerza sobre la partícula conforme se traslada de $x = 0$ a $x = 3.00$ m.

27. Cuando se cuelgan diferentes cargas de un resorte, el resorte se estira a diferentes longitudes, como se muestra en la siguiente tabla. (a) Elabore una gráfica de la fuerza aplicada contra la extensión del resorte. (b) Mediante ajuste por mínimos cuadrados, determine la línea recta que ajusta mejor los datos. (c) Para completar el inciso (b), ¿quiere emplear todos los datos o debería ignorar algunos de ellos? Explique. (d) A partir de la pendiente de la línea recta de mejor ajuste, encuentre la constante de resorte k. (e) Si el resorte se extiende a 105 mm, ¿qué fuerza ejerce sobre el objeto suspendido?

F (N)	2.0	4.0	6.0	8.0	10	12	14	16	18	20	22
L (mm)	15	32	49	64	79	98	112	126	149	175	190

28. Se dispara una bala de 100 g de un rifle que tiene un cañón de 0.600 m de largo. Elija el origen como la ubicación donde la bala comienza a moverse. Entonces la fuerza (en newtons) que ejercen sobre la bala los gases en expansión es $15\,000 + 10\,000x - 25\,000x^2$, donde x está en metros. (a) Determine el trabajo efectuado por el gas sobre la bala conforme ésta recorre la longitud del cañón. (b) **¿Qué pasaría si?** Si el cañón mide 1.00 m de largo, ¿cuánto trabajo se realiza?, y (c) ¿cómo se compara este valor con el trabajo calculado en el inciso (a)?

29. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (4x\hat{\mathbf{i}} + 3y\hat{\mathbf{j}})$, donde $\vec{\mathbf{F}}$ está en newtons y x y y están en metros, actúa sobre un objeto conforme éste se mueve en la dirección x desde el origen hasta $x = 5.00$ m. Encuentre el trabajo $W = \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ efectuado por la fuerza sobre el objeto.

30. **Problema de repaso.** La gráfica en la figura P7.30 especifica una relación funcional entre las dos variables u y v. (a) Encuentre $\int_a^b u\,dv$. (b) Obtenga $\int_b^a u\,dv$. (c) Encuentre $\int_a^b v\,du$.

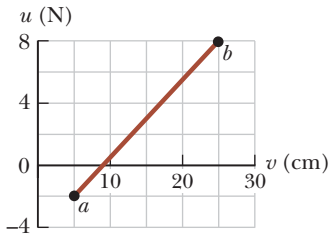


Figura P7.30

Sección 7.5 Energía cinética y el teorema trabajo–energía cinética

31. Un objeto de 3.00 kg tiene una velocidad de $(6.00\hat{\mathbf{i}} - 2.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. (a) ¿Cuál es su energía cinética en este momento? (b) ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el objeto si su velocidad cambia a $(8.00\hat{\mathbf{i}} + 4.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s? *Nota*: de la definición del producto punto, $v^2 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.)

32. Un empleado empuja una caja de madera de 35.0 kg a rapidez constante a lo largo de 12.0 m de un piso de madera y hace un trabajo de 350 J aplicando una fuerza horizontal constante de magnitud F sobre la caja. (a) Determine el valor de F. (b) Si ahora el empleado aplica una fuerza más grande que F, describa el movimiento subsecuente de la caja. (c) Describa qué pasaría a la caja si la fuerza aplicada es menor que F.

33. Una partícula de 0.600 kg tiene una rapidez de 2.00 m/s en el punto Ⓐ y energía cinética de 7.50 J en el punto Ⓑ.

¿Cuál es (a) su energía cinética en Ⓐ, (b) su rapidez en Ⓑ y (c) el trabajo neto realizado sobre la partícula por las fuerzas externas cuando se mueve de Ⓐ a Ⓑ?

34. Una partícula de 4.00 kg se somete a una fuerza neta que varía con la posición, como se muestra en la figura P7.15. La partícula parte del reposo en $x = 0$. ¿Cuál es su rapidez en (a) $x = 5.00$ m, (b) $x = 10.0$ m y (c) $x = 15.0$ m?

35. Un martinete de 2 100 kg se usa para enterrar una viga de acero I en la tierra. El martinete cae 5.00 m antes de quedar en contacto con la parte superior de la viga, y clava la viga 12.0 cm más en el suelo mientras llega al reposo. Aplicando consideraciones de energía, calcule la fuerza promedio que la viga ejerce sobre el martinete mientras éste logra el reposo.

36. Problema de repaso. En un microscopio electrónico, hay un cañón de electrones que contiene dos placas metálicas cargadas, separadas 2.80 cm. Una fuerza eléctrica acelera cada electrón en el haz desde el reposo hasta 9.60% de la rapidez de la luz sobre esta distancia. (a) Determine la energía cinética del electrón mientras abandona el cañón de electrones. Los electrones llevan esta energía a un material fosforescente en la superficie interior de la pantalla del televisor y lo hacen brillar. Para un electrón que pasa entre las placas en el cañón de electrones, determine (b) la magnitud de la fuerza eléctrica constante que actúa sobre el electrón, (c) la aceleración del electrón y (d) el tiempo que el electrón pasa entre las placas.

37. Problema de repaso. Se puede considerar al teorema trabajo-energía cinética como una segunda teoría de movimiento, paralela a las leyes de Newton, en cuanto que describe cómo las influencias externas afectan el movimiento de un objeto. En este problema, resuelva los incisos (a), (b) y (c) por separado de los incisos (d) y (e), de modo que pueda comparar las predicciones de las dos teorías. En un cañón de rifle de longitud 72.0 cm, una bala de 15.0 g acelera desde el reposo hasta una rapidez de 780 m/s. (a) Encuentre la energía cinética de la bala cuando abandona el cañón. (b) Use el teorema trabajo-energía cinética para obtener el trabajo neto realizado sobre la bala. (c) Utilice su resultado del inciso (b) para encontrar la magnitud de la fuerza neta promedio que actuó sobre la bala mientras ésta estaba en el cañón. (d) Ahora modele a la bala como una partícula bajo aceleración constante. Obtenga la aceleración constante de una bala que inicia desde el reposo y gana una rapidez de 780 m/s en una distancia de 72.0 cm. (e) Modele la bala como una partícula bajo una fuerza neta, para encontrar la fuerza neta que actuó sobre ella durante su aceleración. (f) ¿Qué conclusión obtiene al comparar los resultados de los incisos (c) y (e)?

38. Problema de repaso. Una bala de 7.80 g con una rapidez de 575 m/s golpea la mano de un superhéroe, haciendo que su mano se mueva 5.50 cm en la dirección de la velocidad de la bala antes de parar. (a) Use consideraciones de trabajo y energía para encontrar la fuerza promedio que detuvo a la bala. (b) Suponga que la fuerza es constante, luego determine cuánto tiempo transcurrió entre el momento que la bala golpeó la mano hasta el instante en que se detuvo.

39. Problema de repaso. Un objeto de 5.75 kg pasa por el origen en el tiempo $t = 0$ tal que la componente x de su velocidad es 5.00 m/s y su componente y de velocidad es −3.00 m/s. (a) ¿Cuál es la energía cinética del objeto en este instante? (b) Al tiempo $t = 2.00$ s, la partícula se localiza en $x = 8.50$ m y $y = 5.00$ m. ¿Qué fuerza constante actuó sobre el objeto durante este intervalo de tiempo? (c) ¿Cuál es la rapidez de la partícula en $t = 2.00$ s?

Sección 7.6 Energía potencial de un sistema

40. Un carro de montaña rusa, de 1 000 kg, inicialmente está en lo alto de un bucle, en el punto Ⓐ. Luego se mueve 135 pies a un ángulo de 40.0° bajo la horizontal, hacia un punto inferior Ⓑ. (a) Elija el carro en el punto Ⓑ como la configuración cero para la energía potencial gravitacional del sistema montaña rusa-Tierra. Determine la energía potencial del sistema cuando el carro está en los puntos Ⓐ y Ⓑ, y el cambio en energía potencial conforme se mueve el carro entre estos puntos. (b) Repita el inciso (a), pero haga la configuración cero con el carro en el punto Ⓐ.

41. Una piedra de 0.20 kg se mantiene a 1.3 m sobre el borde de un pozo de agua y entonces se le deja caer en él. El pozo tiene una profundidad de 5.0 m. Respecto de la configuración con la piedra en el borde del pozo, ¿cuál es la energía potencial gravitacional del sistema piedra-Tierra (a) antes de liberar la piedra y (b) cuando ésta llega al fondo del pozo? (c) ¿Cuál es el cambio en energía potencial gravitacional del sistema desde que se suelta la piedra hasta que alcanza el fondo del pozo?

42. Un niño de 400 N está en un columpio unido a cuerdas de 2.00 m de largo. Encuentre la energía potencial gravitacional del sistema niño-Tierra en relación con la posición más baja del niño cuando (a) las cuerdas están horizontales, (b) las cuerdas forman un ángulo de 30.0° con la vertical y (c) el niño está en el fondo del arco circular.

Sección 7.7 Fuerzas conservativas y no conservativas

43. Una partícula de 4.00 kg se mueve desde el origen a la posición Ⓒ, que tiene coordenadas $x = 5.00$ m y $y = 5.00$ m (figura P7.43). Una fuerza sobre la partícula es la fuerza gravitacional que actúa en la dirección y negativa. Con la ecuación 7.3, calcule el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre la partícula conforme va de O a Ⓒ a lo largo de (a) la trayectoria violeta, (b) la trayectoria roja y (c) la trayectoria azul. (d) Sus resultados deberían ser idénticos, ¿por qué?

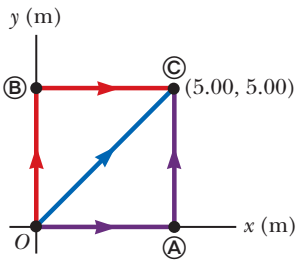


Figura P7.43
Problemas 43 al 46.

44. (a) Suponga que una fuerza constante actúa sobre un objeto. La fuerza no varía con el tiempo o con la posición o la velocidad del objeto. Comience con la definición general del trabajo realizado por una fuerza

$$W = \int_i^f \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

y demuestre que la fuerza es conservativa. (b) Como caso especial, suponga que la fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}})$ N actúa

sobre una partícula que se mueve de O a Ⓒ en la figura P7.43. Calcule el trabajo efectuado por $\vec{\mathbf{F}}$ sobre la partícula conforme se mueve a lo largo de cada una de las tres trayectorias mostradas en la figura y muestre que el trabajo realizado tiene el mismo valor para las tres trayectorias.

45. Una fuerza que actúa sobre una partícula moviéndose en el plano xy está dada por $\vec{\mathbf{F}} = (2y\hat{\mathbf{i}} + x^2\hat{\mathbf{j}})$, donde $\vec{\mathbf{F}}$ está en newtons y x y y están en metros. La partícula se mueve desde el origen hasta la posición final con coordenadas $x = 5.00$ m y $y = 5.00$ m, como se muestra en la figura P7.43. Calcule el trabajo efectuado por $\vec{\mathbf{F}}$ sobre la partícula cuando ésta se desplaza a lo largo de (a) la trayectoria violeta, (b) la trayectoria roja y (c) la trayectoria azul. (d) ¿$\vec{\mathbf{F}}$ es conservativa o no conservativa? (e) Explique su respuesta al inciso (d).

46. Un objeto se mueve en el plano xy en la figura P7.43 y experimenta una fuerza de fricción con magnitud constante de 3.00 N, siempre actuando en la dirección opuesta a la velocidad del objeto. Calcule el trabajo que usted debe realizar para deslizar el objeto a rapidez constante contra la fuerza de fricción conforme el objeto se mueve a lo largo de (a) la trayectoria violeta O a Ⓐ seguida de un retorno por la trayectoria violeta a O, (b) la trayectoria violeta O a Ⓒ seguida de un regreso por la trayectoria azul a O y (c) la trayectoria azul O a Ⓒ seguida de un retorno por la trayectoria azul a O. (d) Cada una de sus tres respuestas debería ser distinta de cero. ¿Cuál es el significado de esta observación?

Sección 7.8 Relación entre fuerzas conservativas y energía potencial

47. La energía potencial de un sistema de dos partículas separadas por una distancia r está dada por $U(r) = A/r$, donde A es una constante. Encuentre la fuerza radial $\vec{\mathbf{F}}_r$ que cada partícula ejerce sobre la otra.

48. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un bibliotecario levanta un libro desde el suelo hasta un estante, haciendo 20.0 J de trabajo en este proceso. Cuando él se voltea, el libro cae del estante de regreso al suelo. La fuerza gravitacional de la Tierra sobre el libro efectúa 20.0 J de trabajo sobre él mientras cae. Como el trabajo realizado fue 20.0 J + 20.0 J = 40.0 J, el libro golpea el suelo con 40.0 J de energía cinética.

49. Una función de energía potencial para un sistema en el cual una fuerza bidimensional actúa es de la forma $U = 3x^3y - 7x$. Encuentre la fuerza que actúa en el punto (x, y).

50. Una sola fuerza conservativa que actúa sobre una partícula dentro de un sistema varía como $\vec{\mathbf{F}} = (-Ax + Bx^2)\hat{\mathbf{i}}$, donde A y B son constantes, $\vec{\mathbf{F}}$ está en newtons y x está en metros. (a) Calcule la función de energía potencial $U(x)$ asociada con esta fuerza, y tome $U = 0$ en $x = 0$. Encuentre (b) el cambio en energía potencial y (c) el cambio en energía cinética del sistema conforme la partícula se mueve de $x = 2.00$ m a $x = 3.00$ m.

51. Una sola fuerza conservativa actúa sobre una partícula de 5.00 kg dentro de un sistema debido a su interacción con el resto del sistema. La ecuación $F_x = 2x + 4$ describe la fuerza, donde F_x está en newtons y x está en metros. Conforme la partícula se desplaza a lo largo del eje x desde $x = 1.00$ m hasta $x = 5.00$ m, calcule (a) el trabajo realizado por esta fuerza sobre la partícula, (b) el cambio en la energía potencial del sistema y (c) la energía cinética que tiene la partícula en $x = 5.00$ m si su rapidez es 3.00 m/s en $x = 1.00$ m.

Sección 7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

52. Para la curva de energía potencial que se muestra en la figura P7.52, (a) determine si la fuerza F_x es positiva, negativa o cero en los cinco puntos señalados. (b) Indique los puntos de equilibrio estable, inestable y neutro. (c) Bosqueje la curva de F_x contra x desde $x = 0$ hasta $x = 9.5$ m.

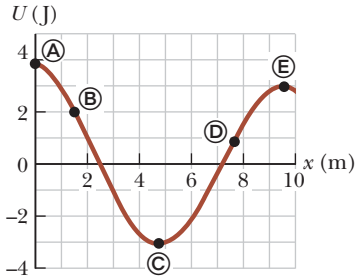


Figura P7.52

53. Un cono circular recto se puede equilibrar, teóricamente, sobre una superficie horizontal en tres diferentes formas. Bosqueje estas tres configuraciones de equilibrio e identifíquelas como posiciones de equilibrio estable, inestable o neutro.

Problemas adicionales

54. La función de energía potencial de un sistema de partículas está dada por $U(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$, donde x es la posición de una partícula en el sistema. (a) Determine la fuerza F_x sobre la partícula como una función de x. (b) ¿Para qué valores de x es la fuerza igual a cero? (c) Grafique $U(x)$ contra x y F_x *contra* x y señale los puntos de equilibrio estable y de equilibrio inestable.

55. **Problema de repaso.** Un jardinero de béisbol lanza una pelota de 0.150 kg con una rapidez de 40.0 m/s y un ángulo inicial de 30.0° respecto de la horizontal. ¿Cuál es la energía cinética de la pelota en el punto más alto de su trayectoria?

56. Una partícula se mueve a lo largo del eje x desde $x = 12.8$ m hasta $x = 23.7$ m bajo la influencia de una fuerza

$$F = \frac{375}{x^3 + 3.75x}$$

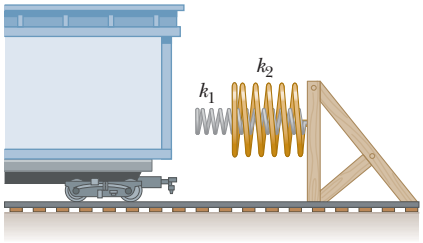
donde F está en newtons y x en metros. Con el uso de integración numérica, determine el trabajo efectuado por esta fuerza sobre la partícula durante este desplazamiento. Su resultado debería ser exacto hasta 2%.

57. Dos bolas de acero, cada una con 25.4 mm de diámetro, se mueven en direcciones opuestas a 5 m/s, corren una hacia la otra frontalmente y rebotan. Antes de la colisión, una de las bolas se comprime en una prensa de banco mientras se hacen mediciones precisas de la cantidad de compresión resultante. Los resultados muestran que la ley de Hooke es un buen modelo del comportamiento elástico de la bola. Para un dato, una fuerza de 16 kN ejercida por cada mandíbula de la prensa de banco resulta en una reducción de 0.2 mm en el diámetro de la bola. El diámetro regresa a su valor original cuando la fuerza se quita. (a) Modele la bola como un resorte, encuentre su constante de resorte. (b) ¿La interacción de las bolas durante la colisión dura sólo un instante o un intervalo de tiempo distinto de cero? Establezca su evidencia. (c) Calcule una estimación de la

energía cinética de cada una de las bolas antes de chocar. (d) Calcule una estimación para la cantidad máxima de compresión que cada bola experimenta cuando chocan. (e) Calcule una estimación del orden de magnitud para el intervalo de tiempo que dura el contacto de las bolas. (En el capítulo 15 aprenderá a calcular el tiempo de contacto preciso en este modelo.)

58. Cuando un objeto se desplaza una cantidad x de su equilibrio estable, entonces una fuerza restauradora actúa sobre él, intentando retornar al objeto a su posición de equilibrio. La magnitud de la fuerza de restitución puede ser una complicada función de x. En tales casos, en general se puede suponer que la función de fuerza $F(x)$ es una serie de potencias en x, como $F(x) = -(k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \cdots)$. Aquí el primer término es justamente la ley de Hooke, la cual describe la fuerza ejercida por un resorte simple para pequeños desplazamientos. Para pequeñas excursiones fuera del equilibrio, en general ignoramos los términos de alto orden, pero en algunos casos puede ser deseable mantener el segundo término. Si la fuerza de restitución se modela como $F(x) = -(k_1x + k_2x^2)$, ¿cuánto trabajo se realiza sobre un objeto al desplazarlo de $x = 0$ a $x = x_{máx}$ mediante una fuerza aplicada $-F$?

59. Un vagón de 6 000 kg rueda a lo largo de la vía con fricción despreciable. El vagón se lleva al reposo mediante una combinación de dos resortes en espiral, como se ilustra en la figura P7.59. Ambos resortes se describen con la ley de Hooke y tienen constantes de resorte $k_1 = 1\ 600$ N/m y $k_2 = 3\ 400$ N/m. Después que el primer resorte se comprime una distancia de 30.0 cm, el segundo resorte actúa con el primero para aumentar la fuerza mientras se presenta una compresión adicional, como se muestra en la gráfica. El vagón llega al reposo 50.0 cm después de que hace el primer contacto con el sistema de dos resortes. Encuentre la rapidez inicial del vagón.



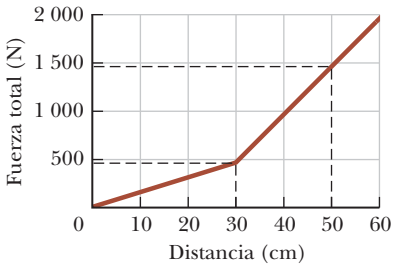


Figura P7.59

60. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* En un nuevo casino se introduce una máquina de pinball gigante. El casino advierte que su tamaño es comparable a la altura de un jugador de basquetbol. El lanzador de bola en la máquina envía bolas de metal por un lado de la máquina para jugar. El resorte en el lanzador (figura P7.60) tiene una constante de fuerza de 1.20 N/cm. La superficie sobre la que se mueve la bola está inclinada $\theta = 10.0°$ respecto de la horizontal. El resorte inicialmente se comprime su distancia máxima $d = 5.00$ cm. Una bola de masa 100 g es lanzada para entrar en juego al soltar el émbolo. En el casino los visitantes encuentran muy emocionante este juego con la gigantesca máquina.

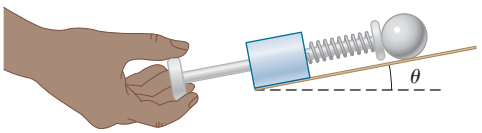


Figura P7.60

61. **Problema de repaso.** Dos fuerzas constantes actúan sobre un objeto de 5.00 kg que se mueve en el plano xy, como se muestra en la figura P7.61. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ es de 25.0 N a 35.0° y la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2$ es de 42.0 N a 150°. En el tiempo $t = 0$, el objeto está en el origen y tiene velocidad $(4.00\hat{\mathbf{i}} + 2.50\hat{\mathbf{j}})$ m/s. (a) Exprese las dos fuerzas en notación de vector unitario. Use notación de vectores unitarios para sus otras respuestas. (b) Encuentre la fuerza total que se ejerce sobre el objeto. (c) Encuentre la aceleración del objeto. Ahora, considere el instante $t = 3.00$ s, encuentre (d) la velocidad del objeto, (e) su posición, (f) su energía cinética a partir de $\frac{1}{2}mv_f^2$, y (g) su energía cinética a partir de $\frac{1}{2}mv_i^2 + \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$. (h) ¿Qué conclusión puede sacar al comparar las respuestas a los incisos (f) y (g)?

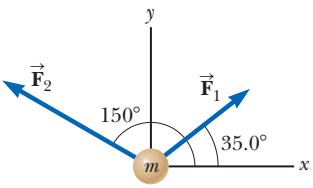


Figura P7.61

62. La constante de resorte del resorte de suspensión de un automóvil aumenta con la carga creciente debido a un muelle helicoidal que es más ancho en la base, y cambia de manera uniforme a un diámetro más pequeño cerca de la parte superior. El resultado es un viaje más suave sobre superficies de camino normal debido a los muelles helicoidales, pero el automóvil no va hasta abajo en los baches porque, cuando se colapsan los muelles inferiores, los muelles más rígidos cerca de lo alto absorben la carga. Para tales resortes, la fuerza que ejerce el resorte puede ser encontrada empíricamente, $F = ax^b$. Para un resorte helicoidal piramidal que se comprime 12.9 cm con una carga de 1 000 N y 31.5 cm con una carga de 5 000 N, (a) evalúe las constantes a y b en la ecuación empírica para F y (b) encuentre el trabajo necesario para comprimir el resorte 25.0 cm.

63. Un plano inclinado de ángulo $\theta = 20.0°$ tiene un resorte de constante de fuerza $k = 500$ N/m anclado en el fondo, tal que el resorte queda paralelo a la superficie, como se muestra en la figura P7.63. Un bloque de masa

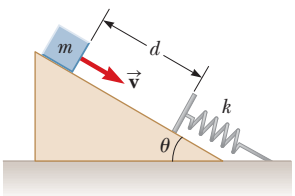


Figura P7.63
Problemas 63 y 64.

$m = 2.50$ kg se coloca en el plano a una distancia $d = 0.300$ m del resorte. Desde esta posición, el bloque es proyectado hacia abajo dirigido al resorte con rapidez $v = 0.750$ m/s. ¿Cuánto se comprime el resorte cuando el bloque está momentáneamente en reposo?

64. Un plano inclinado de ángulo θ tiene un resorte de constante de fuerza k anclado en el fondo, tal que el resorte es paralelo a la superficie. Un bloque de masa m se coloca sobre el plano a una distancia d del resorte. Desde esta posición, se libera el bloque y se proyecta hacia el resorte con rapidez v, como se muestra en la figura P7.63. ¿Cuánto se comprime el resorte cuando el bloque está momentáneamente en reposo?

65. (a) Tome $U = 5$ para un sistema con una partícula en la posición $x = 0$ y calcule la energía potencial del sistema como una función de la posición x de la partícula. La fuerza sobre la partícula está dada por $(8e^{-2x})\,\hat{\mathbf{i}}$. (b) Explique si la fuerza es conservativa o no conservativa y cómo puede decirlo.

Problemas de desafío

66. Una partícula de masa $m = 1.18$ kg se une entre dos resortes idénticos sobre una mesa horizontal sin fricción. Ambos resortes tienen constante de fuerza k e inicialmente no están estirados, y la partícula está en $x = 0$. (a) La partícula se jala una distancia x a lo largo de una dirección perpendicular a la configuración inicial de los resortes, como se muestra en la figura P7.66. Demuestre que la fuerza ejercida sobre la partícula es

$$\vec{\mathbf{F}} = -2kx\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

(b) Demuestre que la energía potencial del sistema es

$$U(x) = kx^2 + 2kL(L - \sqrt{x^2 + L^2})$$

(c) Elabore una gráfica de $U(x)$ contra x e identifique todos los puntos de equilibrio. Suponga $L = 1.20$ m y $k = 40.0$ N/m. (d) Si la partícula se jala 0.500 m hacia la derecha y después se libera, ¿cuál es su rapidez al llegar a $x = 0$?

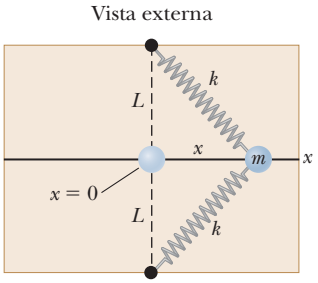


Figura P7.66

67. **Problema de repaso.** Un resorte ligero tiene una longitud sin estirar de 15.5 cm. Se describe mediante la ley de Hooke con constante de resorte 4.30 N/m. Un extremo del resorte horizontal se mantiene en un eje vertical fijo, y el otro extremo se une a un disco de masa m que se puede mover sin fricción sobre una superficie horizontal. El disco se pone en movimiento en un círculo con un periodo de 1.30 s. (a) Encuentre la extensión del resorte x cuando depende de m. Evalúe x para (b) $m = 0.070$ kg, (c) $m = 0.140$ kg, (d) $m = 0.180$ kg y (e) $m = 0.190$ kg. (f) Describa el patrón de variación de x como dependiente de m.

CAPÍTULO

8

Conservación de la energía



8.1 Análisis de modelo: sistema no aislado (energía)

8.2 Análisis de modelo: sistema aislado (energía)

8.3 Situaciones que incluyen fricción cinética

8.4 Cambios en la energía mecánica para fuerzas no conservativas

8.5 Potencia

Tres jovencitas disfrutan de la transformación de energía potencial en energía cinética en un tobogán de agua. Podemos analizar procesos como estos con las técnicas desarrolladas en este capítulo. *(Jade Lee/Asia Images/Getty Images)*

En el capítulo 7 se presentaron tres métodos para almacenar energía en un sistema: energía cinética, asociada con el movimiento de los integrantes del sistema; energía potencial, determinada por la configuración del sistema, y energía interna, que se relaciona con la temperatura del sistema.

Ahora se considera el análisis de situaciones físicas aplicando el método de energía para dos tipos de sistemas: *sistemas no aislados* y *aislados*. Para sistemas no aislados se investigarán formas en que la energía cruza la frontera del sistema, lo que resulta en un cambio en la energía total del sistema. Este análisis conduce a un principio muy importante llamado *conservación de la energía*. El principio de conservación de la energía se extiende más allá de la física y se aplica a organismos biológicos, sistemas tecnológicos y situaciones de ingeniería.

En los sistemas aislados la energía no cruza la frontera del sistema. Para dichos sistemas, la energía total del sistema es constante. Si dentro del sistema no actúan fuerzas no conservativas, se aplica la *conservación de energía mecánica* para resolver diferentes problemas.

Las situaciones que implican la transformación de energía mecánica en energía interna debido a fuerzas no conservativas requieren un manejo especial. Se investigan los procedimientos para estos tipos de problemas.

Por último, se reconoce que la energía puede cruzar las fronteras de un sistema a diferentes rapideces. La rapidez de transferencia de energía se describe con la cantidad *potencia*.

8.1 Análisis de modelo: sistema no aislado (energía)

Como se ha visto, sobre un objeto modelado como partícula pueden actuar fuerzas diferentes, resultando en un cambio en su energía cinética de acuerdo con el teorema del trabajo-energía cinética del capítulo 7. Si elegimos el objeto como el sistema, esta situación muy simple es el primer ejemplo de un *sistema no aislado*, en el cual la energía cruza la frontera del sistema durante cierto intervalo de tiempo debido a una interacción con el medio ambiente. Este escenario es común en problemas de física. Si un sistema no interactúa con su medio ambiente, se denomina *aislado* y se estudiará en la sección 8.2.

El teorema trabajo–energía cinética es el primer ejemplo de una ecuación de energía adecuada para un sistema no aislado. En el caso de dicho teorema, la interacción del sistema con su entorno es el trabajo hecho por la fuerza externa, y la cantidad que cambia en el sistema es la energía cinética.

Hasta el momento sólo se ha visto una forma de transferir energía a un sistema: trabajo. Enseguida se mencionan otras formas de transferencia de energía hacia o desde un sistema. Los detalles de estos procesos se estudiarán en otras secciones del libro. En la figura 8.1 se ilustran mecanismos para transferir energía y se resumen del modo siguiente.

El **trabajo**, como aprendió en el capítulo 7, es un método para transferir energía hacia un sistema mediante la aplicación de una fuerza al sistema y causar un desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza (figura 8.1a).

Las **ondas mecánicas** (capítulos 16–18) son un medio de transferencia de energía al facilitar que una perturbación se propague a través del aire u otro medio. Es el método mediante el que la energía (que usted detecta como sonido) deja su radioreloj a través de la bocina y entra a sus oídos para estimular el proceso de audición (figura 8.1b). Otros ejemplos de ondas mecánicas son las ondas sísmicas y las ondas oceánicas.

El **calor** (capítulo 20) es un mecanismo de transferencia de energía que se activa mediante una diferencia de temperatura entre dos regiones del espacio. Por ejem-



Figura 8.1 Mecanismos de transferencia de energía. En cada caso, se indica el sistema sobre el cual o del cual se transfiere la energía.

plo, imagine dividir una cuchara de metal en dos partes: el mango, que identificamos como el sistema, y la porción sumergida en una taza de café, que es parte del medio ambiente (figura 8.1c). El mango de la cuchara se calienta porque los electrones y los átomos en la parte sumergida de la cuchara chocan con los más lentos en la parte cercana del mango. Dichas partículas se mueven más rápido debido a las colisiones y chocan con el siguiente grupo de partículas lentas. Por lo tanto, la energía interna del mango de la cuchara se eleva a causa de la transferencia de energía debida a este proceso de colisión.

La **transferencia de materia** (capítulo 20) involucra situaciones en las cuales la materia cruza físicamente la frontera de un sistema, transportando energía. Los ejemplos incluyen llenar el tanque de su automóvil con gasolina (figura 8.1d) y transportar energía a las habitaciones de su hogar mediante circulación de aire caliente del horno, un proceso llamado *convección*.

La **transmisión eléctrica** (capítulos 27 y 28) es la transferencia de energía mediante corrientes eléctricas. Es como se transfiere energía en su secadora de pelo (figura 8.1e), sistema de sonido o cualquier otro dispositivo eléctrico.

La **radiación electromagnética** (capítulo 34) se refiere a las ondas electromagnéticas como la luz, microondas y ondas de radio (figura 8.1f) cruzando la frontera de un sistema. Los ejemplos de este método de transferencia incluyen cocinar una papa en su horno de microondas y la energía luminosa que viaja del Sol hacia la Tierra a través del espacio.[1]

Una característica central de la aproximación a la energía es el concepto de que no se puede crear ni destruir energía, la energía siempre se *conserva*. Esta característica se ha comprobado en incontables experimentos, y ningún experimento ha demostrado jamás que este enunciado sea incorrecto. Debido a eso, **si la cantidad total de energía en un sistema cambia, *sólo* es porque la energía cruzó la frontera del sistema mediante un mecanismo de transferencia, como alguno de los métodos mencionados anteriormente**.

La energía es una de las diferentes cantidades que se conservan en física. En los capítulos siguientes vamos a ver otras cantidades que se conservan. Hay muchas cantidades físicas que no obedecen un principio de conservación. Por ejemplo, no hay ningún principio de conservación de la fuerza o principio de conservación de la velocidad. Asimismo, en otras áreas distintas de las cantidades físicas, tales como en la vida cotidiana, se conservan algunas cantidades y algunas no. Por ejemplo, el dinero en el sistema de su cuenta bancaria es una cantidad que se conserva. La única forma de que el balance de su cuenta cambie es si su dinero cruza la frontera del sistema por depósitos o retiros. Por otro lado, el número de personas en el sistema de un país no se conserva. Aunque la gente de hecho cruza la frontera del sistema, el cual cambia la población total, la población también puede cambiar por gente que muere y por el nacimiento de bebés. Incluso si no hay personas que crucen la frontera del sistema, los nacimientos y las muertes cambiarán el número de personas en el sistema. No hay ningún equivalente en el concepto de energía para morir o nacer. El enunciado general del principio de **conservación de la energía** se puede describir matemáticamente con la **ecuación de conservación de la energía** de la siguiente manera:

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \sum T \tag{8.1}$$

◀ Conservación de la energía

donde E_{sistema} es la energía total del sistema, incluidos todos los métodos de almacenamiento de energía (cinética, potencial e interna) y T (por transferencia) es la cantidad de energía transferida a través de la frontera del sistema mediante algún mecanismo. Dos de los mecanismos de transferencia tienen notaciones simbólicas bien establecidas. Para trabajo, $T_{\text{trabajo}} = W$, como se discutió en el capítulo 7, y para calor, $T_{\text{calor}} = Q$, como se define en el capítulo 20. (Ahora que estamos familiariza-

Prevención de riesgos ocultos 8.1

El calor no es una forma de energía La palabra *calor* es una de las palabras que está más mal empleada en nuestro lenguaje popular. El calor es un método de *transferencia* de energía, no una forma de almacenar energía. Por lo tanto, frases como "contenido de calor", "el calor del verano" y "el calor se escapó" representan los usos de esta palabra que son inconsistentes con la definición física. Véase el capítulo 20.

[1]La radiación electromagnética y el trabajo hecho por las fuerzas de campo son los únicos mecanismos de transferencia de energía que no requieren de moléculas del medio ambiente disponibles en la frontera del sistema. Debido a eso, los sistemas rodeados por un vacío (como los planetas) sólo intercambian energía con el medio ambiente mediante estas dos posibilidades.

dos con el trabajo, podemos simplificar su apariencia en las ecuaciones haciendo que el simple símbolo W represente el trabajo externo W_{ext} sobre un sistema. Para el trabajo interno, *siempre* utilizaremos W_{int}, para diferenciarlo de W.) Los otros cuatro integrantes de la lista no tienen símbolos establecidos, así que se les llamará T_{OM} (ondas mecánicas), T_{TM} (transferencia de materia), T_{TE} (transmisión eléctrica) y T_{RE} (radiación electromagnética). La exposición completa de la ecuación 8.1 es

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = W + Q + T_{OM} + T_{TM} + T_{TE} + T_{RE} \quad (8.2)$$

que es la representación matemática básica de la versión energética del modelo de **sistema no aislado**. (En capítulos posteriores se verán otras versiones, incluida la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular.) En la mayoría de los casos, la ecuación 8.2 se reduce a una mucho más simple, porque algunos de los términos son cero. Si, para un sistema conocido, todos los términos en el lado derecho de la ecuación de conservación de energía son cero, el sistema es un *sistema aislado*, que se estudia en la siguiente sección.

La ecuación de conservación de energía no es más complicada que llevar cuentas sanas en su chequera. Si su cuenta es el sistema, el cambio en el saldo para un mes determinado es la suma de todas las transferencias: depósitos, retiros, comisiones, intereses y cheques expedidos. ¡Puede resultarle útil pensar en la energía como la *moneda de la naturaleza*!

Suponga que se aplica una fuerza a un sistema no aislado y el punto de aplicación de la fuerza se mueve a través de un desplazamiento. Por lo tanto, suponga que el único efecto sobre el sistema es cambiar su rapidez. En este caso, el único mecanismo de transferencia es el trabajo (de modo que el lado derecho de la ecuación 8.2 se reduce sólo a W) y la única clase de energía en el sistema que cambia es la energía cinética (de modo que el lado izquierdo de la ecuación 8.2 se reduce sólo a ΔK). Por consiguiente, la ecuación 8.2 se convierte en

$$\Delta K = W$$

que es el teorema trabajo–energía cinética. Este teorema es un caso especial del principio más general de conservación de energía. Se verán varios casos especiales en capítulos futuros.

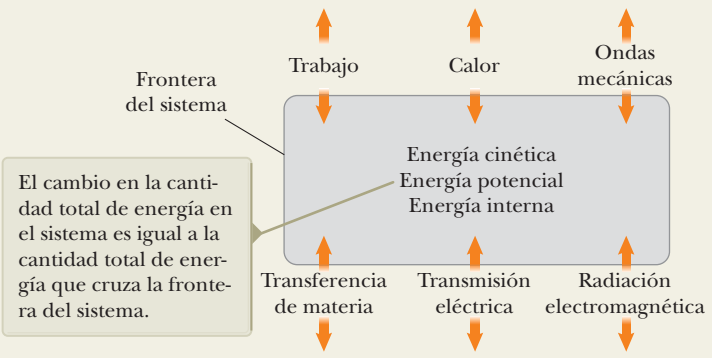
Examen rápido 8.1 ¿Mediante qué mecanismos de transferencia la energía entra y sale de **(a)** su televisor? **(b)** ¿Su podadora de gasolina? **(c)** ¿Su sacapuntas manual?

Examen rápido 8.2 Considere un bloque que se desliza sobre una superficie horizontal con fricción. Ignore cualquier sonido que pueda producir el deslizamiento. **(i)** Si el sistema es el *bloque*, este sistema es (a) aislado, (b) no aislado, (c) imposible de determinar. **(ii)** Si el sistema es la *superficie*, describa el sistema a partir del mismo conjunto de opciones. **(iii)** Si el sistema es el *bloque y la superficie*, describa el sistema a partir del mismo conjunto de opciones.

Análisis de modelo Sistema no aislado (energía)

Imagine que ha identificado un sistema para ser analizado y ha definido una frontera del sistema. La energía puede existir en el sistema en tres formas: interna, cinética y potencial. El total de la energía puede cambiar cuando la energía cruza la frontera del sistema por cualquiera de los seis métodos de transferencia que se muestran en el diagrama. El cambio total de energía en el sistema es igual a la cantidad total de energía que ha cruzado las fronteras del sistema. El enunciado matemático de ese concepto se expresa en la **ecuación de conservación de la energía**:

$$\Delta E_{sistema} = \Sigma T \quad (8.1)$$



Análisis de modelo **Sistema no aislado (energía) (*continuación*)**

La expansión completa de la ecuación 8.1 muestra los tipos específicos de almacenamiento de energía y transferencia:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W + Q + T_{\text{OM}} + T_{\text{TM}} + T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}} \tag{8.2}$$

Para un problema específico, esta ecuación se reduce generalmente a un número menor de términos eliminando los que son iguales a cero, porque no son adecuados a la situación.

Ejemplos:

- una fuerza hace trabajo en un sistema de un solo objeto, al cambiar su velocidad: el teorema de trabajo-energía cinética, $W = \Delta K$
- un gas contenido en un recipiente tiene trabajo hecho en él y experimenta una transferencia de energía por calor, dando como resultado un cambio en su temperatura: la primera ley de la termodinámica, $\Delta E_{\text{int}} = W + Q$ (capítulo 20)
- se enciende una lámpara incandescente, con energía entrando en el filamento por electricidad, causando que su temperatura aumente y salga luz: $\Delta E_{\text{int}} = T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}}$ (capítulo 27)
- un fotón entra en un metal, causando que un electrón se expulse del metal: el efecto fotoeléctrico, $\Delta K + \Delta U = T_{\text{RE}}$ (capítulo 40)

8.2 Análisis de modelo: sistema aislado (energía)

En esta sección se estudia otro escenario muy común en problemas físicos: un sistema se elige de manera tal que la energía no cruza la frontera del sistema por ningún método. En primer término se considera una situación gravitacional. Piense en el sistema libro–Tierra de la figura 7.15 en el capítulo anterior. Después de levantar el libro, existe energía potencial gravitacional almacenada en el sistema, que se calcula a partir del trabajo hecho por el agente externo en el sistema, con $W = \Delta U_g$. (Verifique que esta ecuación, que hemos visto antes, está contenida en la ecuación 8.2 anterior.)

Ahora ponga su atención al trabajo hecho sólo por la fuerza gravitacional *sobre el libro* (figura 8.2) a medida que el libro cae de regreso a su altura original. Mientras el libro cae de y_i a y_f, el trabajo hecho por la fuerza gravitacional sobre el libro es

$$W_{\text{sobre el libro}} = (m\vec{\mathbf{g}}) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = (-mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_i - mgy_f \tag{8.3}$$

A partir del teorema trabajo–energía cinética del capítulo 7, el trabajo hecho sobre el libro es igual al cambio en la energía cinética del libro:

$$W_{\text{sobre el libro}} = \Delta K_{\text{libro}}$$

Se pueden igualar estas dos expresiones para el trabajo hecho sobre el libro:

$$\Delta K_{\text{libro}} = mgy_i - mgy_f \tag{8.4}$$

Ahora relacione cada lado de esta ecuación con el *sistema* del libro y la Tierra. Para el lado derecho,

$$mgy_i - mgy_f = -(mgy_f - mgy_i) = -\Delta U_g$$

donde $U_g = mgy$ es la energía potencial gravitacional del *sistema*. Para el lado izquierdo de la ecuación 8.4, ya que el libro es la única parte del sistema que se está moviendo, se ve que $\Delta K_{\text{libro}} = \Delta K$, donde K es la energía cinética del sistema. Por lo tanto, con cada lado de la ecuación 8.4 sustituido con su equivalente de sistema, la ecuación se convierte en

$$\Delta K = -\Delta U_g \tag{8.5}$$

Esta ecuación se manipula para proporcionar un resultado general muy importante para resolver problemas. Primero, el cambio en energía potencial se mueve al lado izquierdo de la ecuación:

$$\Delta K + \Delta U_g = 0$$

El lado izquierdo representa una suma de cambios de la energía almacenada en el sistema. El lado derecho es cero, porque no hay transferencias de energía a través de la frontera del sistema; el sistema libro–Tierra está *aislado* del medio ambiente. Esta

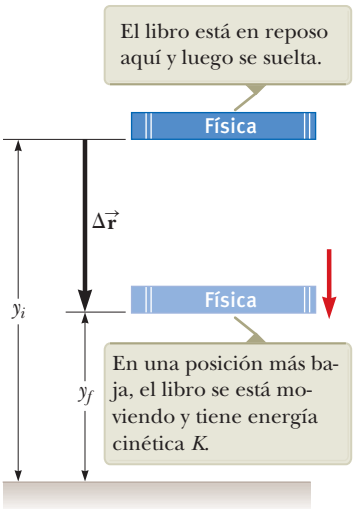


Figura 8.2 Un libro se libera a partir del reposo y cae debido al trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre él.

Prevención de riesgos ocultos 8.2

Condiciones para la ecuación 8.6 La ecuación 8.6 sólo es verdadera para un sistema en el que actúan fuerzas conservativas. Se verá cómo manipular fuerzas no conservativas en las secciones 8.3 y 8.4.

ecuación se desarrolló para un sistema gravitacional, pero se demuestra su validez para un sistema con cualquier tipo de energía potencial. En consecuencia, para un sistema aislado,

$$\Delta K + \Delta U = 0 \tag{8.6}$$

(Compruebe que esta ecuación está contenida dentro de la ecuación 8.2.)

En el capítulo 7 se definió la suma de las energías cinética y potencial de un sistema como su energía mecánica:

Energía mecánica de un sistema

$$E_{\text{mec}} \equiv K + U \tag{8.7}$$

donde U representa el total de *todos* los tipos de energía potencial. Ya que el sistema bajo consideración está aislado, las ecuaciones 8.6 y 8.7 dicen que la energía mecánica del sistema se conserva:

Se conserva la energía mecánica de un sistema aislado cuando no actúa alguna fuerza no conservativa

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0 \tag{8.8}$$

La ecuación 8.8 es un enunciado de la **conservación de energía mecánica** para un sistema aislado sin fuerzas no conservativas en actuación. La energía mecánica en tal sistema se conserva: la suma de las energías cinética y potencial permanece constante.

Ahora escribimos explícitamente los cambios en energía en la ecuación 8.6:

$$(K_f - K_i) + (U_f - U_i) = 0$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i \tag{8.9}$$

Para la situación gravitacional del libro que cae, la ecuación 8.9 se puede escribir como

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$

Mientras el libro cae hacia la Tierra, el sistema libro–Tierra pierde energía potencial y gana energía cinética tal que el total de las dos clases de energía siempre permanece constante. $E_{\text{total},i} = E_{\text{total},f}$.

Si hay fuerzas no conservativas actuando dentro del sistema, la energía mecánica se transforma en energía interna, como se discutió en la sección 7.7. Si fuerzas no conservativas actúan en un sistema aislado, la energía total del sistema se conserva aunque no la energía mecánica. En este caso, la conservación de energía del sistema se expresa como

La energía total de un sistema aislado se conserva

$$\Delta E_{\text{sistema}} = 0 \tag{8.10}$$

donde E_{sistema} incluye todas las energías cinética, potencial e interna. Esta ecuación es el enunciado más general del modelo de **sistema aislado**. Es equivalente a la ecuación 8.2 con todos los términos del lado derecho iguales a cero.

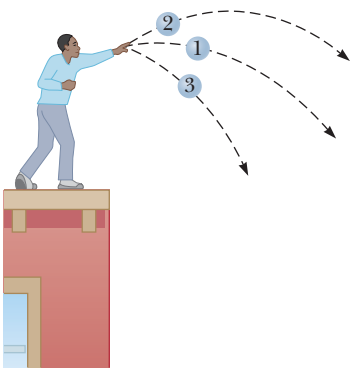


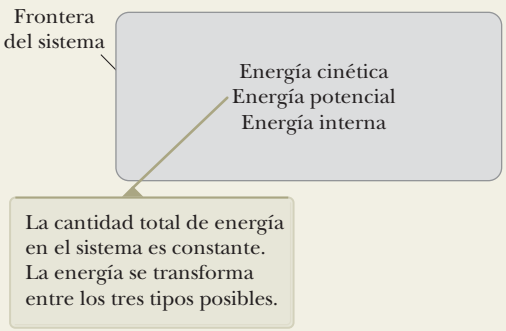
Figura 8.3 (Examen rápido 8.4) Tres bolas idénticas se lanzan con la misma rapidez inicial de la parte superior de un edificio.

Examen rápido 8.3 Una roca de masa m se deja caer hacia el suelo desde una altura h. Una segunda roca, con masa $2m$, se deja caer desde la misma altura. Cuando la segunda roca golpea el suelo, ¿cuál es su energía cinética? **(a)** El doble de la primera roca, **(b)** cuatro veces la de la primera roca, **(c)** la misma que en la primera roca, **(d)** la mitad de la primera roca, **(e)** imposible de determinar.

Examen rápido 8.4 Tres bolas idénticas se lanzan desde lo alto de un edificio, todas con la misma rapidez inicial. Como se muestra en la figura 8.3, la primera se lanza horizontalmente, la segunda a cierto ángulo sobre la horizontal y la tercera a cierto ángulo bajo la horizontal. Desprecie la resistencia del aire y clasifique las rapideces de las bolas en el instante que cada una golpea el suelo.

Análisis de modelo Sistema aislado (energía)

Imagine que ha identificado un sistema para analizar y ha definido una frontera del sistema. La energía puede existir en el sistema en tres formas: interna, cinética y potencial. También imagine una situación en la que ninguna energía cruza la frontera del sistema por cualquier método.



Entonces el sistema es aislado; la energía se transforma de una forma en otra y la ecuación 8.2 se convierte en

$$\Delta E_{\text{sistema}} = 0 \tag{8.10}$$

Si no actúan fuerzas no conservativas dentro del sistema aislado, se conserva la energía mecánica del sistema, así

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0 \tag{8.8}$$

Ejemplos:

- en un objeto en caída libre; la energía potencial gravitacional se transforma en energía cinética: $\Delta K + \Delta U = 0$
- una pelota rodando a través de un piso de un gimnasio se detiene; la energía cinética se transforma en energía interna: $\Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$
- se eleva un péndulo y se suelta con una rapidez inicial; su movimiento con el tiempo se detiene debido a la resistencia del aire; se transforma la energía potencial gravitacional y la energía cinética en energía interna, $\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0$ (capítulo 15)
- se conecta una batería a un resistor; la energía potencial química de la batería se transforma en energía interna en el resistor: $\Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0$ (capítulo 27)

Estrategia para resolución de problemas Sistemas aislado y no aislado con fuerzas no conservativas: conservación de energía

Muchos problemas en física se resuelven con el principio de conservación de la energía para un sistema aislado. El siguiente procedimiento se debe usar cuando aplique este principio:

1. Conceptualizar. Estudie cuidadosamente la situación física y forme una representación mental de lo que ocurre. A medida que se vuelva más hábil al trabajar problemas de energía, comenzará a sentirse cómodo al imaginar las clases de energía que cambian en el sistema y los tipos de transferencia de energía que ocurren en la frontera del sistema.

2. Categorizar. Defina su sistema, quizá consista en más de un objeto y puede o no incluir resortes u otras posibilidades para almacenar energía potencial. Identifique el intervalo de tiempo sobre el cual se analizarán los cambios de energía en el problema. Determine si se presenta alguna transferencia de energía a través de la frontera de su sistema en este intervalo de tiempo. Si es así, aplique el modelo de sistema no aislado, $\Delta E_{\text{sistema}} = \Sigma T$, de la sección 8.1. Si no, aplique el modelo de sistema aislado, $\Delta E_{\text{sistema}} = 0$.

Determine si dentro del sistema hay presentes fuerzas no conservativas. Si es así, use las técnicas de las secciones 8.3 y 8.4. Si no, aplique el principio de conservación de la energía mecánica que se presenta más adelante.

3. Analizar. Elija configuraciones para representar las condiciones inicial y final del sistema basados en su elección para el intervalo de tiempo. Para cada objeto que cambie elevación, seleccione una posición de referencia para el objeto que defina la configuración cero de energía potencial gravitacional para el sistema. Para un objeto sobre un resorte, la configuración cero para energía potencial elástica es cuando el objeto está en su posición de equilibrio. Si existe más de una fuerza conservativa, escriba una expresión para la energía potencial asociada con cada fuerza.

Comience con la ecuación 8.2 y retenga sólo los términos en la ecuación que son adecuados para la situación en el problema. Exprese cada cambio de energía almacenada en el sistema como el valor final menos el valor inicial. Sustituya expresiones adecuadas para cada valor inicial y final de almacenamiento de energía en el lado izquierdo de la ecuación y la transferencia de energía en el lado derecho de la ecuación. Resuelva para la incógnita.

continúa

Estrategia para resolución de problemas continuación

4. Finalizar. Asegúrese de que sus resultados sean consistentes con su representación mental. También cerciórese de que los valores de sus resultados son razonables y consistentes con experiencias cotidianas.

Ejemplo 8.1 Bola en caída libre AM

Una bola de masa m se deja caer desde una altura h sobre el suelo, como se muestra en la figura 8.4.

(A) Ignore la resistencia del aire y determine la rapidez de la bola cuando está a una altura y sobre el suelo. Elija el sistema como la bola y la Tierra.

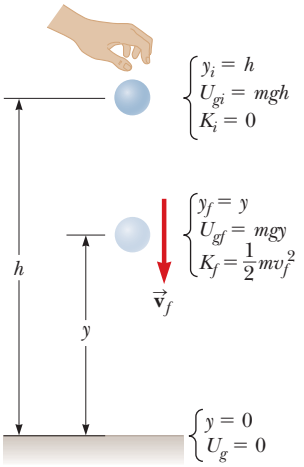


Figura 8.4 (Ejemplo 8.1) Una bola se deja caer desde una altura h sobre el suelo. Al inicio, la energía total del sistema bola–Tierra es energía potencial gravitacional, igual a mgh en relación con el suelo. En la elevación y, la energía total es la suma de las energías cinética y potencial.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 8.4 y la experiencia cotidiana con objetos que caen nos permiten formar ideas de la situación. Aunque este problema se resuelve fácilmente con las técnicas del capítulo 2, practique la aproximación de energía.

Categorizar Como sugiere el problema, el sistema se identifica como la bola y la Tierra. Ya que no hay ni resistencia del aire ni alguna otra interacción entre el sistema y el medio ambiente, el sistema es aislado y se usa el modelo de *sistema aislado*. La única fuerza entre los integrantes del sistema es la fuerza gravitacional, que es conservativa.

Analizar Como el sistema es aislado y no existen fuerzas no conservativas actuando dentro del sistema, se aplica el principio de conservación de energía mecánica al sistema bola–Tierra. En el instante que la bola se libera, su energía cinética es $K_i = 0$ y la energía potencial gravitacional del sistema es $U_{gi} = mgh$. Cuando la bola está a una distancia y sobre el suelo, su energía cinética es $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ y la energía potencial en relación con el suelo es $U_{gf} = mgy$.

Escriba la reducción adecuada de la ecuación 8.2, indicando que los únicos tipos de energía en el sistema que cambian son la energía cinética y la energía potencial gravitacional:

$$\Delta K + \Delta U_g = 0$$

Sustituya las energías:

$$\left(\tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0\right) + (mgy - mgh) = 0$$

Resuelva para v_f:

$$v_f^2 = 2g(h - y) \quad \rightarrow \quad v_f = \sqrt{2g(h - y)}$$

La rapidez siempre es positiva. Si se le pide encontrar la velocidad de la bola, usará el valor negativo de la raíz cuadrada como la componente y para indicar el movimiento hacia abajo.

(B) Determine otra vez la rapidez de la bola en y eligiendo a la bola como el sistema.

SOLUCIÓN

Categorizar En este caso, el único tipo que cambia de energía en el sistema es la energía cinética. Un solo objeto que se puede modelar como una partícula no puede tener energía potencial. El efecto de la gravedad es hacer trabajo sobre la bola a través de la frontera del sistema. Utilizamos el modelo de *sistema no aislado*.

Analizar Escriba la reducción apropiada de la ecuación 8.2:

$$\Delta K = W$$

Sustituya las energías cinéticas iniciales y finales y el trabajo:

$$\left(\tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0\right) = \vec{\mathbf{F}}_g \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = -mg\hat{\mathbf{j}} \cdot \Delta y\hat{\mathbf{j}}$$
$$= -mg\Delta y = -mg(y - h) = mg(h - y)$$

Se resuelve para v_f:

$$v_f^2 = 2g(h - y) \quad \rightarrow \quad v_f = \sqrt{2g(h - y)}$$

8.1 continuación

Finalizar El resultado final es el mismo, independientemente de la elección del sistema. En la solución de su problema futuro, considere que la elección del sistema es suya. A veces el problema es mucho más fácil de resolver, si se realiza una elección juiciosa del sistema a analizar.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Qué pasa si la bola se lanza hacia abajo desde la altura máxima con una rapidez v_i? ¿Cuál sería su rapidez en la altura y?

Respuesta Si al inicio la bola se lanza hacia abajo, esperamos que su rapidez a la altura y sea más grande que si simplemente se soltó. Haga su elección del sistema, ya sea sólo la bola o la bola y la Tierra. Encontrará que cualquier opción da el siguiente resultado:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(h - y)}$$

Ejemplo 8.2 Una gran entrada AM

Se le pide diseñar un aparato para sostener a un actor de 65 kg de masa que "volará" hacia el escenario durante la representación de una obra. Usted sujeta el arnés del actor a un saco de arena de 130 kg mediante un cable de acero ligero que corre de manera uniforme en dos poleas sin fricción, como en la figura 8.5a. Necesita 3.0 m de cable entre el arnés y la polea más cercana, de modo que quede oculta detrás de una cortina. Para que el aparato funcione, el saco de arena nunca debe levantarse arriba del suelo mientras el actor se balancea desde arriba del escenario hacia el suelo. Llame θ al ángulo inicial que el cable del actor forma con la vertical. ¿Cuál es el valor máximo que tiene θ antes que el saco de arena se levante del suelo?

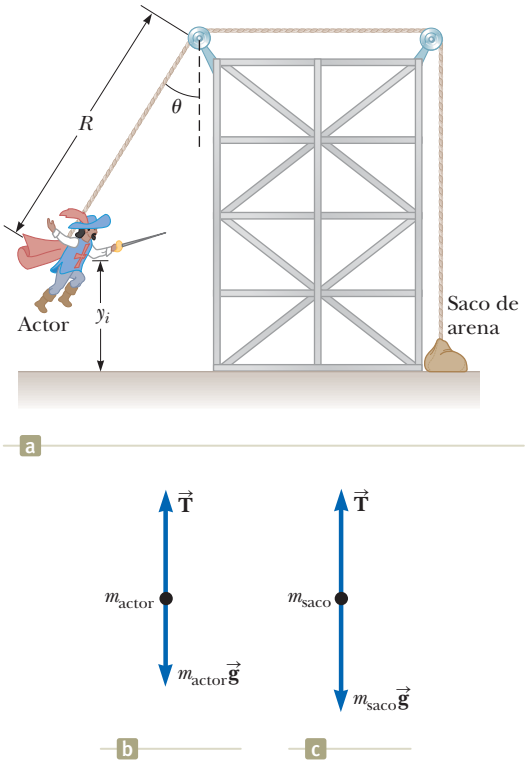


Figura 8.5 (Ejemplo 8.2) (a) Un actor usa un armazón para hacer su entrada. (b) Diagrama de cuerpo libre para el actor en el fondo de la trayectoria circular. (c) Diagrama de cuerpo libre para el saco de arena si la fuerza normal desde el suelo tiende a cero.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Se deben usar muchos conceptos para resolver este problema. Piense lo que sucede conforme el actor se aproxima a la parte baja del balanceo. En la parte baja, el cable es vertical y debe soportar su peso, así como proporcionar aceleración centrípeta de su cuerpo en la dirección hacia arriba. En este punto, la tensión en el cable es la más alta y el saco de arena tiene más probabilidades de levantarse del suelo.

Categorizar Primero, al observar el balanceo del actor desde el punto inicial hasta el punto más bajo, se modela al actor y a la Tierra como un *sistema aislado*. Se ignora la resistencia del aire, de modo que no hay fuerzas no conservativas en acción. En principio debe estar tentado a modelar el sistema como no aislado, debido a la interacción del sistema con el cable, que está en el entorno. Sin embargo, la fuerza aplicada al actor por el cable siempre es perpendicular a cada elemento del desplazamiento del actor y por tanto no realiza trabajo. En consecuencia, en términos de transferencias de energía a través de la frontera, el sistema está aislado.

Analizar Primero se encuentra la rapidez del actor a medida que llega al suelo como función del ángulo inicial θ y el radio R de la trayectoria circular que recorre.

Usando el modelo de sistema aislado, realice la reducción apropiada de la ecuación 8.2 para el sistema actor–Tierra:

$$\Delta K + \Delta U_g = 0$$

continúa

8.2 continuación

Sea y_i la altura inicial del actor sobre el suelo y v_f su rapidez en el instante antes de aterrizar. (Observe que $K_i = 0$, porque el actor parte del reposo, y que $U_f = 0$, porque la configuración del actor en el suelo se define con energía potencial gravitacional cero.)

$$(1)\quad \left(\tfrac{1}{2}m_{\text{actor}}v_f^2 - 0\right) + \left(0 - m_{\text{actor}}gy_i\right) = 0$$

De la geometría en la figura 8.5a, observe que $y_f = 0$, de modo que $y_i = R - R\cos\theta = R(1 - \cos\theta)$. Aplique esta correspondencia en la ecuación (1) y resuelva para v_f^2:

$$(2)\quad v_f^2 = 2gR(1 - \cos\theta)$$

Categorizar Ahora, concéntrese en el instante cuando el actor está en el punto más bajo. Ya que la tensión en el cable se transfiere como una fuerza aplicada al saco de arena, en este instante el actor se modela como una *partícula bajo una fuerza neta*. Como el actor se mueve a lo largo de un arco circular, experimenta en la parte inferior del balanceo una aceleración centrípeta de v_f^2/r dirigida hacia arriba.

Analizar Aplique la segunda ley de Newton al actor en la parte baja de su trayectoria, con el diagrama de cuerpo libre de la figura 8.5b como guía, y reconozca la aceleración como centrípeta:

$$\sum F_y = T - m_{\text{actor}}g = m_{\text{actor}}\frac{v_f^2}{R}$$

$$(3)\quad T = m_{\text{actor}}g + m_{\text{actor}}\frac{v_f^2}{R}$$

Categorizar Por último, observe que el saco de arena se levanta del suelo cuando la fuerza hacia arriba que el cable ejerce sobre él supera la fuerza gravitacional, que también actúa sobre él; la fuerza normal es cero cuando esto ocurre. Sin embargo, *no* se quiere que el saco de arena se levante del suelo. El saco de arena debe permanecer en reposo, así que se le modela como una *partícula en equilibrio*.

Analizar Una fuerza T de magnitud dada por la ecuación (3) se transmite mediante el cable al saco de arena. Si el saco de arena permanece en reposo, pero puede levantarse del suelo si el cable aplica un poco más de fuerza, la fuerza normal sobre él se vuelve cero y el modelo de partícula en equilibrio dice que $T = m_{\text{saco}}g$, como en la figura 8.5c.

Sustituya esta condición y la ecuación (2) en la (3):

$$m_{\text{saco}}g = m_{\text{actor}}g + m_{\text{actor}}\frac{2gR(1 - \cos\theta)}{R}$$

Resuelva para $\cos\theta$ y sustituya los parámetros que se proporcionan:

$$\cos\theta = \frac{3m_{\text{actor}} - m_{\text{saco}}}{2m_{\text{actor}}} = \frac{3(65.0\text{ kg}) - 130\text{ kg}}{2(65.0\text{ kg})} = 0.500$$

$$\theta = 60.0°$$

Finalizar En este caso se combinaron técnicas de diferentes áreas de nuestro estudio. Observe que la longitud R del cable desde el arnés del actor hasta la polea de la izquierda no aparece en la ecuación algebraica final para $\cos\theta$. Por tanto, la respuesta final es independiente de R.

Ejemplo 8.3 El rifle de juguete cargado por resorte AM

El mecanismo de lanzamiento de un rifle de juguete consiste en un resorte que suelta el gatillo (figura 8.6a). El resorte se comprime a una posición $y_Ⓐ$ y el gatillo es disparado. El proyectil de masa m se eleva a una posición $y_Ⓒ$ sobre la posición en la que deja el resorte, indicada en la figura 8.6b como la posición $y_Ⓑ = 0$. Considere un disparo del rifle para el que $m = 35.0$ g, $y_Ⓐ = -0.120$ y $y_Ⓒ = 20.0$ m.

(A) Desprecie todas las fuerzas resistivas, determine la constante del resorte.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en el proceso que se ilustra en los incisos (a) y (b) en la figura 8.6. El proyectil parte del reposo en Ⓐ, aumenta su rapidez conforme el resorte lo empuja hacia arriba, deja el resorte en Ⓑ y después disminuye su velocidad mientras la fuerza gravitacional lo jala hacia abajo, finalmente llega al reposo en el punto Ⓒ.

8.3 continuación

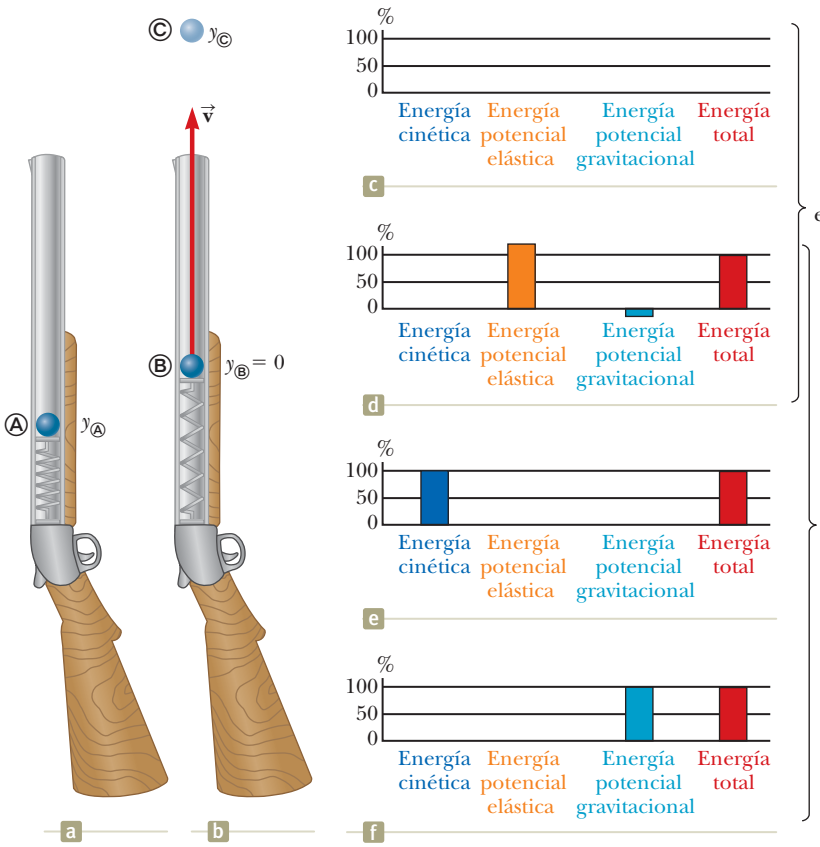


Figura 8.6 (Ejemplo 8.3) Rifle con resorte (a) antes de disparar y (b) cuando el resorte se extiende a su longitud relajada. (c) Una gráfica de barras para el sistema rifle–proyectil–Tierra antes de que se cargue el rifle de juguete. La energía en el sistema es cero. (d) El rifle de juguete se carga por medio de un agente externo que hace trabajo en el sistema para empujar hacia abajo el resorte. Por lo tanto, el sistema es no aislado durante este proceso. Después que se carga el rifle de juguete, la energía potencial elástica se almacena en el resorte y la energía potencial gravitacional del sistema es menor porque el proyectil está por debajo del punto Ⓑ. (e) Cuando el proyectil pasa por el punto Ⓑ, toda la energía del sistema aislado es cinética. (f) Cuando el proyectil alcanza el punto Ⓒ, toda la energía del sistema aislado es potencial gravitacional.

Categorizar El sistema se identifica como el proyectil, el resorte y la Tierra. Se ignora tanto la resistencia del aire sobre el proyectil como la fricción en el rifle; de esa manera el sistema se modela como aislado, sin que actúen fuerzas no conservativas.

Analizar Puesto que el proyectil parte del reposo, su energía cinética inicial es cero. La configuración cero para la energía potencial gravitacional del sistema se elige cuando el proyectil deja el resorte en Ⓑ. Para esta configuración, la energía potencial elástica también es cero.

Después de disparar el rifle, el proyectil se eleva a una altura máxima $y_Ⓒ$. La energía cinética final del proyectil es cero.

Del modelo de sistema aislado, escriba una ecuación de conservación de energía mecánica para el sistema entre las configuraciones cuando el proyectil está en los puntos Ⓐ y Ⓒ:

$$(1)\quad \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s = 0$$

Sustituya para las energías final e inicial:

$$(0 - 0) + (mgy_Ⓒ - mgy_Ⓐ) + (0 - \tfrac{1}{2}kx^2) = 0$$

Resuelva para k:

$$k = \frac{2mg(y_Ⓒ - y_Ⓐ)}{x^2}$$

Sustituya valores numéricos:

$$k = \frac{2(0.035\ 0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)[20.0\ \text{m} - (-0.120\ \text{m})]}{(0.120\ \text{m})^2} = \boxed{958\ \text{N/m}}$$

(B) Encuentre la rapidez del proyectil a medida que se traslada a través de la posición de equilibrio Ⓑ del resorte, como se muestra en la figura 8.6b.

SOLUCIÓN

Analizar La energía del sistema a medida que el proyectil se traslada a través de la posición de equilibrio del resorte, sólo incluye la energía cinética del proyectil $\frac{1}{2}mv_Ⓑ^2$. Ambos tipos de energía potencial son iguales a cero para esta configuración del sistema.

continúa

8.3 continuación

Escriba la ecuación (1) nuevamente para el sistema entre los puntos Ⓐ y Ⓑ: $\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s = 0$

Sustituya las energías inicial y final: $(\frac{1}{2}mv_{Ⓑ}^2 - 0) + (0 - mgy_{Ⓐ}) + (0 - \frac{1}{2}kx^2) = 0$

Resuelva para $v_{Ⓑ}$: $$v_{Ⓑ} = \sqrt{\frac{kx^2}{m} + 2gy_{Ⓐ}}$$

Sustituya valores numéricos: $$v_{Ⓑ} = \sqrt{\frac{(958\ \text{N/m})(0.120\ \text{m})^2}{(0.035\ 0\ \text{kg})} + 2(9.80\ \text{m/s}^2)(-0.120\ \text{m})} = 19.8\ \text{m/s}$$

Finalizar Éste es el primer ejemplo en el que se han incluido dos tipos de energía potencial. Observe en el inciso (A) que nunca hemos necesitado considerar nada acerca de la rapidez de la bola entre los puntos Ⓐ y Ⓒ, lo que es parte del poder del método de energía: los cambios en la energía cinética y potencial dependen sólo de los valores iniciales y finales, no de lo que ocurre entre las configuraciones correspondientes a estos valores.

8.3 Situaciones que incluyen fricción cinética

Considere de nuevo el libro de la figura 7.18a que se desliza hacia la derecha sobre la superficie de una mesa pesada y disminuye su velocidad debido a la fuerza de fricción. La fuerza de fricción hace trabajo porque hay una fuerza y un desplazamiento. Sin embargo, considere que las ecuaciones para trabajo incluyen el desplazamiento *del punto de aplicación de la fuerza*. En la figura 8.7a se muestra un modelo simple de la fuerza de fricción entre el libro y la superficie. Toda la fuerza de fricción entre el libro y la superficie se representa con dos dientes idénticos que se soldaron puntualmente uno con otro.[2] Un diente se proyecta hacia arriba desde la superficie, el otro hacia abajo desde el libro, y están soldados en los puntos donde se tocan. La fuerza de fricción actúa en la unión de los dos dientes. Piense que el libro se desliza una pequeña distancia d hacia la derecha, como en la figura 8.7b. Como los dientes se modelan como idénticos, su unión se mueve hacia la derecha una distancia $d/2$. En consecuencia, el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza de fricción es $d/2$, ¡pero el desplazamiento del libro es d!

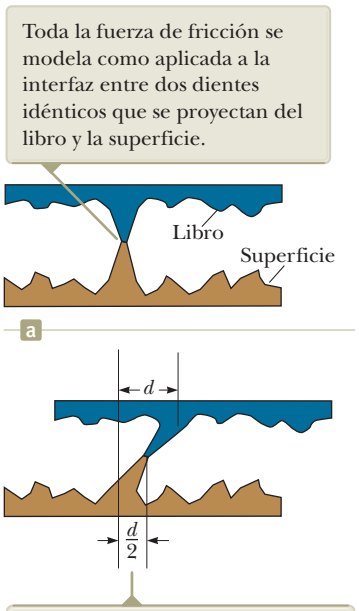


Figura 8.7 (a) Un modelo de fricción simplificado entre un libro y una superficie. (b) El libro se mueve hacia la derecha una distancia d.

En realidad, la fuerza de fricción se dispersa sobre toda el área de contacto de un objeto que se desliza sobre una superficie, de modo que la fuerza no se localiza en un punto. Además, como las magnitudes de las fuerzas de fricción en varios puntos cambian constantemente a medida que se presentan los puntos de soldadura individuales, la superficie y el libro se deforman de manera local, y de este modo el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza de fricción no es en absoluto el mismo que el desplazamiento del libro. De hecho, el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza de fricción no es calculable y tampoco lo es el trabajo hecho por la fuerza de fricción.

El teorema trabajo–energía cinética es válido para una partícula o un objeto que se modela como partícula. No obstante, cuando actúa una fuerza de fricción, no se puede calcular el trabajo invertido por la fricción. Para tales situaciones, la segunda ley de Newton todavía es válida para el sistema aun cuando el teorema trabajo–energía cinética no lo sea. El caso de un objeto no deformable, como el libro que se desliza sobre la superficie,[3] se puede manejar de una manera relativamente directa.

A partir de una situación en la que fuerzas, incluida la fricción, son aplicadas al libro, es posible seguir un procedimiento similar al efectuado en el desarrollo de la ecuación 7.17. Comience por escribir la ecuación 7.8 para todas las fuerzas distintas de la fricción:

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} = \int (\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{otras fuerzas}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \qquad (8.11)$$

[2]La figura 8.7 y su análisis se inspiraron en un artículo clásico acerca de fricción: B. A. Sherwood y W. H. Bernard, "Work and heat transfer in the presence of sliding friction", *American Journal of Physics*, **52,** p. 1001, 1984.

[3]La forma global del libro permanece igual, por lo que se dice que es indeformable. Sin embargo, a nivel microscópico existe deformación de la cara del libro cuando se desliza sobre la superficie.

El $d\vec{\mathbf{r}}$ en esta ecuación es el desplazamiento del objeto porque, para fuerzas distintas de la fricción, bajo la suposición de que dichas fuerzas no deforman el objeto, este desplazamiento es el mismo que el desplazamiento del punto de aplicación de las fuerzas. A cada lado de la ecuación 8.11 se añade la integral del producto escalar de la fuerza de fricción cinética y $d\vec{\mathbf{r}}$. De esta manera, ¡no estamos definiendo esta cantidad como trabajo! Simplemente estamos diciendo que es una cantidad que se puede calcular matemáticamente y llegará a ser útil para nosotros en lo que sigue.

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int \left(\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{otras fuerzas}}\right) \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

$$= \int \left(\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{otras fuerzas}} + \vec{\mathbf{f}}_k\right) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

El integrando en el lado derecho de esta ecuación es la fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$, de modo que

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

Al incorporar la segunda ley de Newton $\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ se obtiene

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{\mathbf{f}}_{\text{k}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int m\vec{\mathbf{a}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{d\text{t}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, dt \qquad \textbf{(8.12)}$$

donde se usó la ecuación 4.3 para reescribir $d\vec{\mathbf{r}}$ como $\vec{\mathbf{v}}\,dt$.. El producto escalar obedece la regla del producto para la derivación (véase la ecuación B.30 en el Apéndice B.6), de modo que la derivada del producto escalar de $\vec{\mathbf{v}}$ consigo misma se puede escribir

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = 2\,\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Donde se usó la propiedad conmutativa del producto escalar para justificar la expresión final en esta ecuación. En consecuencia,

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \tfrac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 8.12 se obtiene

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{t_i}^{t_f} m\left(\tfrac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}\right) dt = \tfrac{1}{2}m\int_{v_i}^{v_f} d(v^2) = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = \Delta K$$

Al observar el lado izquierdo de esta ecuación, note que en el marco inercial de la superficie, $\vec{\mathbf{f}}_k$ y $d\vec{\mathbf{r}}$ estarán en direcciones opuestas para cada incremento $d\vec{\mathbf{r}}$ de la trayectoria que sigue el objeto. En consecuencia, $\vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -f_k\, dr$. Ahora la expresión anterior se convierte en

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} - \int f_k\, dr = \Delta K$$

En el modelo para la fricción, la magnitud de la fuerza de fricción cinética es constante, de modo que f_k se puede sacar de la integral. La integral restante $\int_{dr}$ es simplemente la suma de incrementos de longitud a lo largo de la trayectoria, que es la longitud de trayectoria total d. Por lo tanto,

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} - f_k d = \Delta K \qquad \textbf{(8.13)}$$

La ecuación 8.13 se puede utilizar cuando una fuerza de fricción actúa sobre un objeto. El cambio en la energía cinética es igual al trabajo realizado por todas las fuerzas excepto la de fricción menos un término $f_k d$ asociado con la fuerza de fricción.

Considere de nuevo la situación del desplazamiento del libro, identifiquemos el sistema más grande del libro *y* la superficie que ralentiza el libro bajo la influencia de una sola fuerza de fricción. No hay trabajo hecho a través de la frontera de este sistema porque el sistema no interactúa con el medio ambiente. No hay otros tipos de transferencia de energía que ocurran a través de la frontera del sistema, ¡suponiendo que se ignora el inevitable sonido que hace el libro al deslizarse! En este caso, la ecuación 8.2 se convierte en

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

El cambio en energía cinética del sistema libro–superficie es el mismo que el cambio en energía cinética del libro, porque el libro es la única parte del sistema que se mueve. Por lo tanto, incorporando la ecuación 8.13 sin hacer trabajo por otras fuerzas da

$$-f_k d + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

Cambio en la energía interna debido a una fuerza de rozamiento constante dentro del sistema

$$\Delta E_{\text{int}} = f_k d \tag{8.14}$$

La ecuación 8.14 nos dice que el aumento de energía interna del sistema es igual al producto de la fuerza de fricción y la longitud de trayectoria en la que se mueve el libro. En resumen, una fuerza de fricción transforma la energía cinética de un sistema en energía interna. Si se hace trabajo en el sistema por fuerzas que no sean de fricción, la ecuación 8.13, con la ayuda de la ecuación 8.14, se puede escribir como

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} = W = \Delta K + \Delta E_{\text{int}} \tag{8.15}$$

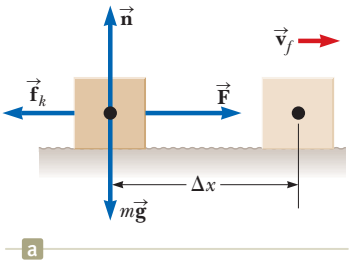
que es una forma reducida de la ecuación 8.2 y representa el modelo de sistema no aislado para un sistema dentro del cual actúa una fuerza no conservativa.

Examen rápido 8.5 Usted viaja a lo largo de una autopista a 65 mi/h. Su automóvil tiene energía cinética. Súbitamente derrapa hasta detenerse debido a un congestionamiento de tránsito. ¿Dónde está la energía cinética que alguna vez tuvo su automóvil? **(a)** Toda está en energía interna en el camino. **(b)** Toda está en energía interna en las llantas. **(c)** Parte de ella se transformó en energía interna y otra parte se transfirió mediante ondas mecánicas. **(d)** Toda se transfirió del automóvil mediante varios mecanismos.

Ejemplo 8.4 Se jala un bloque sobre una superficie rugosa AM

Un bloque de 6.0 kg, inicialmente en reposo, se jala hacia la derecha a lo largo de una superficie horizontal mediante una fuerza horizontal constante de 12 N.

(A) Encuentre la rapidez del bloque después que se mueve 3.0 m si las superficies en contacto tienen un coeficiente de fricción cinética de 0.15.



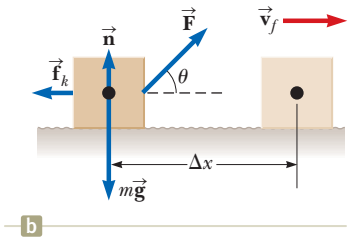


Figura 8.8 (Ejemplo 8.4) (a) Se jala un bloque hacia la derecha sobre una superficie rugosa mediante una fuerza horizontal constante. (b) La fuerza aplicada está en un ángulo θ con la horizontal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En este caso el ejemplo 7.6 se modifica de tal manera que la superficie ya no es sin fricción. La superficie rugosa aplica una fuerza de fricción sobre el bloque, opuesta a la fuerza aplicada. Como resultado, se espera que la rapidez sea menor que la encontrada en el ejemplo 7.6.

Categorizar El bloque se jala mediante una fuerza y la superficie es rugosa, de modo que el bloque y la superficie se representan como un *sistema no aislado* con una fuerza no conservativa en acción.

Analizar La figura 8.8a ilustra esta situación. Ni la fuerza normal ni la fuerza gravitacional realizan trabajo sobre el sistema, porque sus puntos de aplicación se desplazan horizontalmente.

Encuentre el trabajo hecho sobre el sistema por la fuerza aplicada, tal como en el ejemplo 7.6:

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} = W_F = F\Delta x$$

Aplique el modelo de *partícula en equilibrio* al bloque en la dirección vertical:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow n - mg = 0 \rightarrow n = mg$$

Encuentre la magnitud de la fuerza de fricción:

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg = (0.15)(6.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 8.82\ \text{N}$$

8.4 continuación

Sustituya las energías en la ecuación 8.15 y resuelva la rapidez final del bloque

$$F\Delta x = \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = (\tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0) + f_k d$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m}(-f_k d + F\,\Delta x)}$$

Sustituya valores numéricos

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{6.0\text{ kg}}[-(8.82\text{ N})(3.0\text{ m}) + (12\text{ N})(3.0\text{ m})]} = 1.8\text{ m/s}$$

Finalizar Como era de esperar, este valor es inferior a los 3.5 m/s del que se encontró en el caso del bloque que desliza sobre una superficie sin fricción (véase el ejemplo 7.6). La diferencia de energías cinéticas entre el bloque del ejemplo 7.6 y el de este ejemplo es igual al aumento en energía interna del sistema bloque–superficie en este ejemplo.

(B) Suponga que se aplica la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ en un ángulo θ, como se muestra en la figura 8.8b. ¿A qué ángulo se debe aplicar la fuerza para lograr la mayor velocidad posible después que el bloque se ha movido 3.0 m a la derecha?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Puede suponer que $\theta = 0$ daría la mayor rapidez, porque la fuerza tendría la mayor componente posible en la dirección paralela a la superficie. Sin embargo, piense en un ángulo arbitrario distinto de cero. Aunque la componente horizontal de la fuerza se redujera, la componente vertical de la fuerza reduciría la fuerza normal, lo que a su vez reduce la fuerza de fricción, esto sugiere que la rapidez se podría maximizar al jalar en un ángulo distinto de $\theta = 0$.

Categorizar Como en la parte (A), el bloque y la superficie se modelan como un *sistema no aislado* sin fuerzas no conservativas actuando.

Analizar Encuentre el trabajo hecho por la fuerza aplicada, observe que $\Delta x = d$, porque la trayectoria seguida por el bloque es una línea recta:

$$(1)\quad \sum W_{\text{otras fuerzas}} = W_F = F\,\Delta x \cos\theta = Fd\cos\theta$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al bloque en la dirección vertical:

$$\sum F_y = n + F\operatorname{sen}\theta - mg = 0$$

Resuelva para n:

$$(2)\quad n = mg - F\operatorname{sen}\theta$$

Aplique la ecuación 8.15 para encontrar la energía cinética final para esta situación:

$$W_F = \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = (K_f - 0) + f_k d \;\rightarrow\; K_f = W_F - f_k d$$

Sustituya los resultados en las ecuaciones (1) y (2):

$$K_f = Fd\cos\theta - \mu_k nd = Fd\cos\theta - \mu_k(mg - F\operatorname{sen}\theta)d$$

Maximizar la rapidez es equivalente a maximizar la energía cinética final. En consecuencia, derive K_f respecto de θ e iguale el resultado a cero:

$$\frac{dK_f}{d\theta} = -Fd\operatorname{sen}\theta - \mu_k(0 - F\cos\theta)d = 0$$

$$-\operatorname{sen}\theta + \mu_k\cos\theta = 0$$

$$\tan\theta = \mu_k$$

Evalúe θ para $\mu_k = 0.15$:

$$\theta = \tan^{-1}(\mu_k) = \tan^{-1}(0.15) = 8.5°$$

Finalizar Note que el ángulo en que la rapidez del bloque es un máximo no es, de hecho, $\theta = 0$. Cuando el ángulo supera 8.5°, la componente horizontal de la fuerza aplicada es demasiado pequeña para ser compensada por la fuerza de fricción reducida y la rapidez del bloque comienza a disminuir de su valor máximo.

Ejemplo conceptual 8.5 Física útil para conducción segura

Un automóvil que viaja con una rapidez inicial v se desliza una distancia d hasta detenerse después de aplicar los frenos. Si la rapidez inicial del automóvil es $2v$ en el momento de frenar, calcule la distancia que se desliza.

continúa

8.5 continuación

SOLUCIÓN

Se considera que la fuerza de fricción cinética entre el automóvil y la superficie del camino es constante y la misma para ambas magnitudes de velocidad. De acuerdo con la ecuación 8.13, la fuerza de fricción multiplicada por la distancia d es igual a la energía cinética inicial del automóvil (porque $K_f = 0$ y no hay trabajo hecho por otras fuerzas). Si la rapidez se duplica, como lo es en este ejemplo, la energía cinética se cuadruplica. Para una fuerza de fricción determinada, la distancia recorrida es cuatro veces mayor cuando la rapidez inicial se duplica, y por eso la distancia estimada que se desliza el automóvil es $4d$.

Ejemplo 8.6 Un sistema bloque–resorte AM

Un bloque de 1.6 kg de masa se une a un resorte horizontal que tiene una constante de fuerza de 1 000 N/m, como se muestra en la figura 8.9a. El resorte se comprime 2.0 cm y después se libera desde el reposo.

(A) Calcule la rapidez del bloque mientras pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$ si la superficie no tiene fricción.

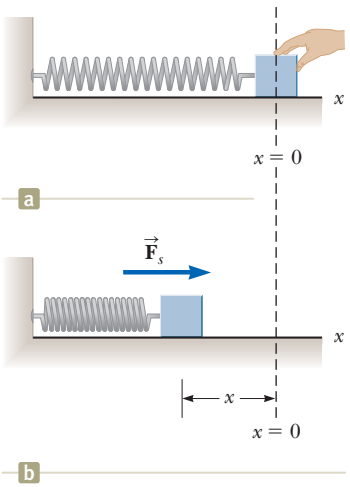


Figura 8.9 (Ejemplo 8.6) (a) Un bloque unido a un resorte es empujado hacia adentro desde una posición inicial $x = 0$ por un agente externo. (b) En la posición x, el bloque se suelta a partir del reposo y el resorte lo empuja hacia la derecha.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Esta situación ya se discutió antes y es fácil visualizar el bloque cuando es empujado hacia la derecha por el resorte y se mueve con cierta rapidez en $x = 0$.

Categorizar El sistema se identifica como el bloque y se modela como un *sistema no aislado*.

Analizar En esta situación, el bloque inicia con $v_i = 0$ en $x_i = -2.0$ cm y se quiere encontrar v_f en $x_f = 0$.

Aplique la ecuación 7.11 para encontrar el trabajo hecho por el resorte con $x_{máx} = x_i$

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_{máx}^2$$

Se hace trabajo sobre el bloque y su rapidez cambia. La ecuación de conservación de energía (ecuación 8.2) se reduce al teorema trabajo–energía cinética. Aplique dicho teorema para encontrar la rapidez en $x = 0$:

$$W_s = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + \frac{2}{m}W_s} = \sqrt{v_i^2 + \frac{2}{m}\left(\tfrac{1}{2}kx_{máx}^2\right)}$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$v_f = \sqrt{0 + \frac{2}{1.6\ \text{kg}}\left[\tfrac{1}{2}(1\,000\ \text{N/m})(0.020\ \text{m})^2\right]} = 0.50\ \text{m/s}$$

Finalizar Aunque este problema se pudo haber resuelto en el capítulo 7, aquí se presenta para ver la diferencia con la siguiente parte (B), que requiere las técnicas de este capítulo.

(B) Calcule la rapidez del bloque mientras pasa por la posición de equilibrio si una fuerza de fricción constante de 4.0 N retarda su movimiento desde el momento en que se libera.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La respuesta correcta debe ser menor que la encontrada en la parte (A), porque la fuerza de fricción retarda el movimiento.

Categorizar El sistema se identifica como el bloque y la superficie. El *sistema no está aislado* debido al trabajo consumido por el resorte y hay una fuerza no conservativa actuando: la fricción entre el bloque y la superficie.

8.6 continuación

Analizar Escriba la ecuación 8.15: $W_s = \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = (\frac{1}{2}mv_f^2 - 0) + f_k d$

Resuelva para v_f: $v_f = \sqrt{\frac{2}{m}(W_s - f_k d)}$

Sustituya el trabajo hecho por el resorte: $v_f = \sqrt{\frac{2}{m}(\frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2 - f_k d)}$

Sustituya valores numéricos: $v_f = \sqrt{\frac{2}{1.6\text{ kg}}[\frac{1}{2}(1\,000\text{ N/m})(0.020\text{ m})^2 - (4.0\text{ N})(0.020\text{ m})]} = 0.39\text{ m/s}$

Finalizar Como se esperaba, este valor es menor que los 0.50 m/s encontrados en la parte (A).

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la la fuerza de fricción aumenta a 10.0 N? ¿Cuál es la rapidez del bloque en $x = 0$?

Respuesta En este caso, el valor de $f_k d$ mientras el bloque se traslada a $x = 0$ es

$$f_k d = (10.0\text{ N})(0.020\text{ m}) = 0.20\text{ J}$$

que es igual en magnitud a la energía cinética en $x = 0$ sin la pérdida debida a la fricción. (¡Verifique esto!) Por lo tanto, toda la energía cinética se ha transformado a energía interna por fricción cuando el bloque llega a $x = 0$, y su rapidez en este punto es $v = 0$.

En esta situación, así como en la parte (B), la rapidez del bloque alcanza un máximo en alguna posición distinta de $x = 0$. El problema 53 le pide ubicar dichas posiciones.

8.4 Cambios en la energía mecánica para fuerzas no conservativas

Considere el libro que se desliza a través de la superficie en la sección anterior. A medida que el libro se mueve a través de una distancia d, la única fuerza que realiza trabajo en él es la fuerza de fricción cinética. Esta fuerza causa un cambio $-f_k d$ en la energía cinética del libro, como se describe mediante la ecuación 8.13.

Sin embargo, ahora considere que el libro es parte de un sistema que además presenta un cambio en energía potencial. En este caso, $-f_k d$ es la cantidad por la que cambia la energía *mecánica* del sistema debido a la fuerza de fricción cinética. Por ejemplo, si el libro se mueve sobre un plano inclinado que no tiene fricción, hay un cambio tanto en la energía cinética como en la energía potencial gravitacional del sistema libro–Tierra. En consecuencia,

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U_g = -f_k d = -\Delta E_{\text{int}}$$

En general, si actúa una fuerza no conservativa dentro de un sistema aislado,

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0 \qquad \textbf{(8.16)}$$

donde ΔU es el cambio en todas las formas de energía potencial. Note que la ecuación 8.16 se reduce a la ecuación 8.2 cuando no hay transferencia de energía en la frontera del sistema.

Si el sistema en el que actúan las fuerzas no conservativas es no aislado, y la influencia externa sobre el sistema es por medio de trabajo, la generalización de la ecuación 8.13 es

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} - f_k d = \Delta E_{\text{mec}}$$

Esta ecuación, con la ayuda de las ecuaciones 8.7 y 8.14, se puede escribir como:

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} = W = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} \qquad \textbf{(8.17)}$$

Esta forma reducida de la ecuación 8.2 representa el modelo de sistema no aislado para un sistema que posee energía potencial y dentro del cual actúa una fuerza no conservativa.

Ejemplo 8.7 Caja que se desliza por una rampa AM

Una caja de 3.00 kg se desliza hacia abajo por una rampa. La rampa mide 1.00 m de largo y está inclinada en un ángulo de 30.0°, como se muestra en la figura 8.10. La caja parte del reposo en lo alto, experimenta una fuerza de fricción constante de 5.00 N de magnitud y continúa su movimiento una corta distancia sobre el piso horizontal, después de dejar la rampa.

(A) Utilice métodos de energía para determinar la rapidez de la caja en el fondo de la rampa.

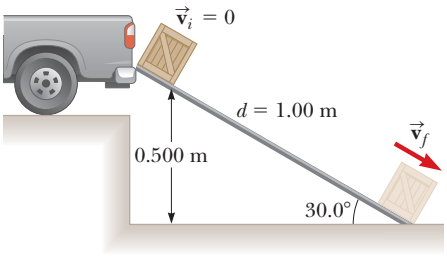


Figura 8.10 (Ejemplo 8.7) Una caja se desliza hacia abajo por una rampa bajo la influencia de la gravedad. La energía potencial del sistema disminuye, mientras que la energía cinética aumenta.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en la caja que se desliza por la rampa en la figura 8.10. Mientras más grande sea la fuerza de fricción, más lenta se deslizará la caja.

Categorizar Identifique la caja, la superficie y la Tierra como el sistema. El sistema se clasifica como un *sistema aislado* con una fuerza no conservativa actuando.

Analizar Como $v_i = 0$, la energía cinética inicial del sistema, cuando la caja está en lo alto de la rampa, es cero. Si la coordenada y se mide desde la base de la rampa (la posición final de la caja, para la cual se elige que la energía potencial gravitacional del sistema sea cero) con la dirección hacia arriba positiva, por lo tanto $y_i = 0.500$ m.

Escriba la ecuación de conservación de la energía (ec. 8.2) para este sistema.
$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

Sustituya las energías:
$$(\tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0) + (0 - mgy_i) + f_k d = 0$$

Resuelva para v_f:
$$(1)\quad v_f = \sqrt{\frac{2}{m}(mgy_i - f_k d)}$$

Sustituya valores numéricos:
$$v_f = \sqrt{\frac{2}{3.00\text{ kg}}[(3.00\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(0.500\text{ m}) - (5.00\text{ N})(1.00\text{ m})]} = 2.54\text{ m/s}$$

(B) ¿A qué distancia se desliza la caja sobre el piso horizontal si continúa experimentando una fuerza de fricción de 5.00 N de magnitud?

SOLUCIÓN

Analizar Esta parte del problema se maneja exactamente igual que la parte (A), pero en este caso se considera que la energía mecánica del sistema consiste sólo en energía cinética, porque la energía potencial del sistema permanece fija.

Escriba la ecuación de la conservación de la energía para esta situación:
$$\Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

Sustituya las energías:
$$(0 - \tfrac{1}{2}mv_i^2) + f_k d = 0$$

Resuelva para la distancia d y sustituya los valores numéricos:
$$d = \frac{mv_i^2}{2f_k} = \frac{(3.00\text{ kg})(2.54\text{ m/s})^2}{2(5.00\text{ N})} = 1.94\text{ m}$$

Finalizar Por comparación, es posible que pretenda calcular la rapidez de la caja en la parte baja de la rampa en el caso en el que la rampa no tiene fricción. Note también que el aumento en energía interna del sistema, a medida que la caja se desliza hacia abajo por la rampa, es $f_k d = (5.00\text{ N})(1.00\text{ m}) = 5.00$ J. Esta energía se comparte entre la caja y la superficie, y cada una está un poco más caliente que antes.

Observe además que la distancia d que se desliza el objeto sobre la superficie horizontal es infinita si la superficie no tiene fricción. ¿Esto es consistente con su marco conceptual de la situación?

¿QUÉ PASARÍA SI? Un trabajador precavido decide que la rapidez de la caja cuando llega a la parte baja de la rampa es tal que su contenido podría dañarse. Por lo tanto, sustituye la rampa con una más larga de tal modo que la nueva rampa forma un ángulo de 25.0° con el suelo. ¿Esta nueva rampa reduce la rapidez de la caja a medida que llega al suelo?

8.7 continuación

Respuesta Ya que la rampa es más larga, la fuerza de fricción actúa en una distancia mayor y transforma más de la energía mecánica en energía interna. El resultado es una reducción en la energía cinética de la caja y se espera una rapidez menor cuando llegue al suelo.

Encuentre la longitud d de la rampa nueva:

$$\operatorname{sen} 25.0^\circ = \frac{0.500\ \text{m}}{d} \quad \rightarrow \quad d = \frac{0.500\ \text{m}}{\operatorname{sen} 25.0^\circ} = 1.18\ \text{m}$$

Determine v_f de la ecuación (1) en la parte (A):

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{3.00\ \text{kg}}\left[(3.00\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(0.500\ \text{m}) - (5.00\ \text{N})(1.18\ \text{m})\right]} = 2.42\ \text{m/s}$$

De hecho, la rapidez final es menor que en el caso de un ángulo mayor.

Ejemplo 8.8 Colisión bloque–resorte AM

A un bloque que tiene 0.80 kg de masa se le da una velocidad inicial $v_{Ⓐ} = 1.2$ m/s hacia la derecha y choca con un resorte con masa despreciable y cuya constante de fuerza es $k = 50$ N/m, como se muestra en la figura 8.11.

(A) Suponga que la superficie no tiene fricción y calcule la compresión máxima del resorte después del choque.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Las diversas partes de la figura 8.11 ayudan a imaginar lo que hará el bloque en esta situación. Todo el movimiento tiene lugar en un plano horizontal, así que no es necesario considerar cambios en la energía potencial gravitacional.

Categorizar El sistema se identifica como el bloque y el resorte, y es un *sistema aislado* sin que actúen fuerzas no conservativas.

Analizar Antes de la colisión, cuando el bloque está en Ⓐ, tiene energía cinética y el resorte no está comprimido, de modo que la energía potencial elástica almacenada en el sistema es cero. Por lo tanto, la energía mecánica total del sistema antes de la colisión es justo $\frac{1}{2}mv_{Ⓐ}^2$. Después de la colisión, cuando el bloque está en Ⓒ, el resorte está completamente comprimido; ahora el bloque está en reposo y, por eso, tiene energía cinética cero. Sin embargo, la energía potencial elástica almacenada en el sistema tiene su valor máximo $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2$, donde el origen de coordenadas $x = 0$ se elige como la posición de equilibrio del resorte y $x_{\text{máx}}$ es la compresión máxima del resorte, que en este caso es en $x_{Ⓒ}$. La energía mecánica total del sistema se conserva, porque sobre los objetos del sistema aislado no actúan fuerzas no conservativas.

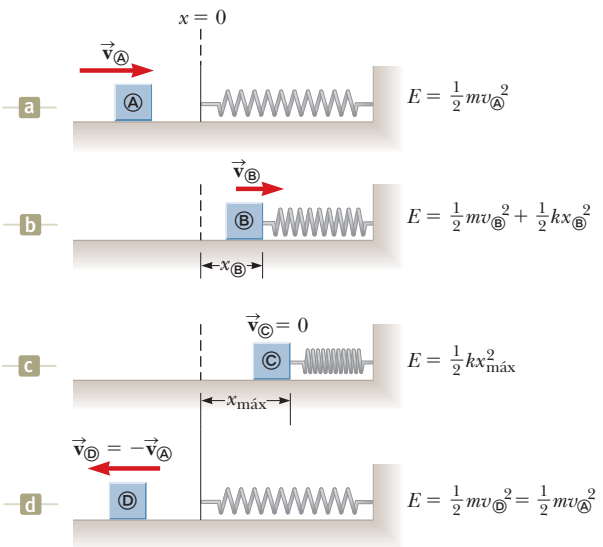


Figura 8.11 (Ejemplo 8.8) Un bloque que se desliza sobre una superficie horizontal uniforme choca con un resorte ligero. (a) Al inicio, toda la energía mecánica es energía cinética. (b) La energía mecánica es la suma de la energía cinética del bloque y la energía potencial elástica en el resorte. (c) La energía es completamente energía potencial. (d) La energía se transformó de regreso en la energía cinética del bloque. La energía total del sistema permanece constante a lo largo del movimiento.

Escriba una ecuación de conservación de la energía:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Sustituya las energías:

$$(0 - \tfrac{1}{2}mv_{Ⓐ}^2) + (\tfrac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2 - 0) = 0$$

Resuelva para $x_{\text{máx}}$ y evalúe:

$$x_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_{Ⓐ} = \sqrt{\frac{0.80\ \text{kg}}{50\ \text{N/m}}}(1.2\ \text{m/s}) = 0.15\ \text{m}$$

continúa

8.8 continuación

(B) Suponga que una fuerza constante de fricción cinética actúa entre el bloque y la superficie, con $\mu_k = 0.50$. Si la rapidez del bloque en el momento que choca con el resorte es $v_A = 1.2$ m/s, ¿cuál es la compresión máxima x_C en el resorte?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Debido a la fuerza de fricción, se espera que la compresión del resorte sea más pequeña que en la parte (A), porque parte de la energía cinética del bloque se transforma en energía interna en el bloque y la superficie.

Categorizar El sistema se identifica como el bloque, la superficie y el resorte. Este *sistema está aislado,* pero ahora involucra una fuerza no conservativa.

Analizar En este caso, la energía mecánica $E_{mec} = K + U_s$ del sistema no se conserva, porque una fuerza de fricción actúa en el bloque. A partir del modelo de *partícula en equilibrio* en la dirección vertical, se ve que $n = mg$.

Evalúe la magnitud de la fuerza de fricción: $f_k = \mu_k n = \mu_k mg$

Escriba la ecuación de la conservación de la energía para esta situación: $\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = 0$

Sustituya las energías inicial y final: $(0 - \frac{1}{2}mv_A^2) + (\frac{1}{2}kx_C^2 - 0) + \mu_k mgx_C = 0$

Reacomode los términos en una ecuación cuadrática: $kx_C^2 + 2\mu_k mgx_C - mv_A^2 = 0$

Sustituya los valores numéricos: $50x_C^2 + 2(0.50)(0.80)(9.80)x_C - (0.80)(1.2)^2 = 0$

$$50x_C^2 + 7.84x_C - 1.15 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática para x_C da $x_C = 0.092$ m y $x_C = -0.25$ m. El significado físico de la raíz es $x_C = 0.092$ m.

Finalizar La raíz negativa no aplica a esta situación porque el bloque debe estar a la derecha del origen (valor positivo de x) cuando llegue al reposo. Note que el valor de 0.092 m es menor que la distancia obtenida en el caso sin fricción de la parte (A), como se esperaba.

Ejemplo 8.9 Bloques conectados en movimiento AM

Dos bloques se conectan mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción, como se muestra en la figura 8.12. El bloque de masa m_1 se encuentra en una superficie horizontal y está conectado a un resorte con una constante de fuerza k. El sistema se libera desde el reposo cuando el resorte no está estirado. Si el bloque que cuelga de masa m_2 cae una distancia h antes de llegar al reposo, calcule el coeficiente de fricción cinética entre el bloque de masa m_1 y la superficie.

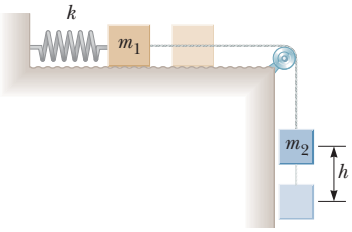


Figura 8.12 (Ejemplo 8.9) Conforme se mueve el bloque que cuelga de su elevación más alta a su nivel más bajo, el sistema pierde energía potencial gravitacional pero gana energía potencial elástica en el resorte. La energía mecánica se transforma en energía interna debido a la fricción entre el bloque deslizante y la superficie.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La palabra clave *reposo* aparece dos veces en el enunciado del problema. Esta palabra sugiere que las configuraciones del sistema asociadas con reposo son buenas candidatas para las configuraciones inicial y final, porque la energía cinética del sistema es cero para dichas configuraciones.

Categorizar En esta situación, el sistema consiste en dos bloques, el resorte y la Tierra. El *sistema está aislado* actuando con una fuerza no conservativa. Modelamos al bloque deslizante como una *partícula en equilibrio* en la dirección vertical, lo que conduce a $n = m_1 g$.

Analizar Es necesario considerar dos formas de energía potencial para el sistema, gravitacional y elástica: $\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi}$ es el cambio en la energía potencial gravitacional del sistema, y $\Delta U_s = U_{sf} - U_{si}$ es el cambio en la energía potencial elástica del sistema. El cambio en la energía potencial gravitacional del sistema se asocia sólo con el bloque que cae, porque la coordenada vertical del bloque que se desliza horizontalmente no cambia. Las energías cinéticas inicial y final del sistema son cero, de modo que $\Delta K = 0$.

8.9 continuación

Escriba la reducción adecuada de la ecuación 8.2: (1) $\Delta U_g + \Delta U_s + \Delta E_{\text{int}} = 0$

Sustituya las energías, advirtiendo que el bloque que cuelga cae una distancia h, el bloque horizontal en movimiento se mueve a la misma distancia h a la derecha y el resorte se extiende por una distancia h: $(0 - m_2gh) + (\frac{1}{2}kh^2 - 0) + f_k h = 0$

Sustituyendo la fuerza de fricción: $-m_2gh + \frac{1}{2}kh^2 + \mu_k m_1 gh = 0$

Resuelva para μ_k: $\mu_k = \dfrac{m_2 g - \frac{1}{2}kh}{m_1 g}$

Finalizar Esta configuración representa un método de medición del coeficiente de fricción cinética entre un objeto y cierta superficie. Observe cómo hemos resuelto los ejemplos en este capítulo utilizando el método de energía. Comenzamos con la ecuación 8.2 y luego lo adaptamos a la situación física. Este proceso puede incluir eliminar términos, como el término energía cinética y todos los términos en el lado derecho de la ecuación 8.2 en este ejemplo. También puede incluir desarrollar términos, así como reescribir ΔU debido a los dos tipos de energía potencial en este ejemplo.

Ejemplo conceptual 8.10 Interpretación de las barras de energía

Las gráficas de barras de energía en la figura 8.13 muestran tres instantes en el movimiento del sistema en la figura 8.12 y se describen en el ejemplo 8.9. Para cada gráfica de barras, identifique la configuración del sistema que corresponde a la gráfica.

SOLUCIÓN

En la figura 8.13a no hay ninguna energía cinética en el sistema. Por lo tanto, no hay nada en el sistema que se esté moviendo. La gráfica de barras muestra que el sistema contiene sólo energía potencial gravitacional y sin energía interna, que corresponde a la configuración de los bloques más oscuros en la figura 8.12 y representa el instante justo después que se libera el sistema.

En la figura 8.13b el sistema contiene cuatro tipos de energía. La altura de la barra de energía potencial gravitacional es al 50%, lo que nos dice que el bloque que cuelga se ha movido a la mitad de camino entre su posición correspondiente a la figura 8.13a y la posición definida como $y = 0$. Por lo tanto, en esta configuración el bloque que cuelga está entre las imágenes claras y oscuras del bloque que cuelga en la figura 8.12. El sistema ha ganado energía cinética porque los bloques se mueven, energía potencial elástica porque el resorte se estira y energía interna debido a la fricción entre el bloque de masa m_1 y la superficie.

En la figura 8.13c la altura de la barra de energía potencial gravitacional es cero, nos dice que el bloque que cuelga está en $y = 0$. Además, la altura de la barra de energía cinética es cero, indicando que los bloques se han detenido momentáneamente. Por lo tanto, la configuración del sistema se muestra con las imágenes claras de los bloques de la figura 8.12. La altura de la barra de energía potencial elástica es alta porque el resorte se estira a su valor máximo. La altura de la barra de energía interna es mayor que en la figura 8.13b porque el bloque de masa m_1 ha continuado deslizándose sobre la superficie después de la configuración que se muestra en la figura 8.13b.

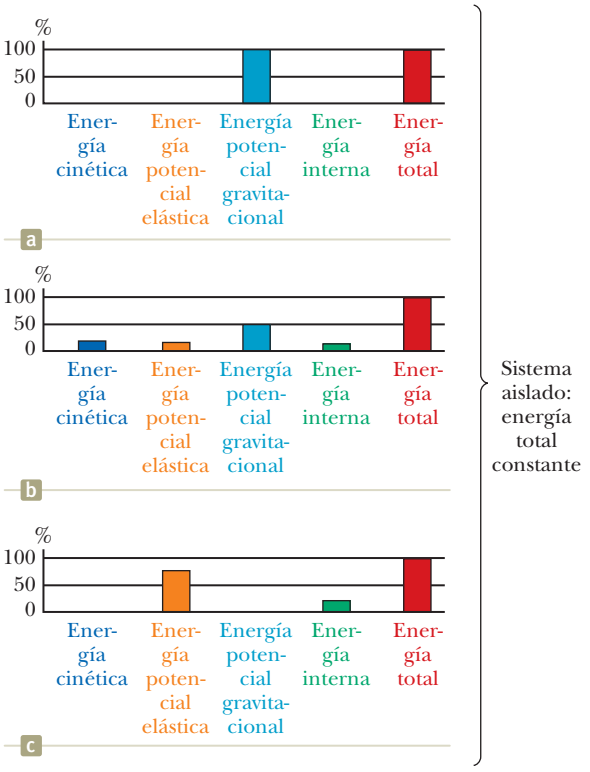


Figura 8.13 (Ejemplo conceptual 8.10) Se muestran tres gráficas de barras de energía para el sistema de la figura 8.12.

8.5 Potencia

Considere de nuevo el ejemplo conceptual 7.7, que implicó rodar un refrigerador hacia arriba de una rampa para llegar a una camioneta. Suponga que el hombre no

está convencido de que el trabajo es el mismo, sin importar la longitud de la rampa, y coloca una rampa larga con una suave elevación. Aunque él realiza la misma cantidad de trabajo que alguien que usa una rampa más corta, le toma más tiempo realizar el trabajo porque tiene que mover el refrigerador una mayor distancia. Aunque el trabajo realizado sobre ambas rampas es el mismo, hay *algo* diferente acerca de las tareas: el *intervalo de tiempo* durante el que se realiza el trabajo.

La razón de transferencia de energía con el tiempo se llama **potencia instantánea** P y se define como sigue:

Definición de potencia ▶

$$P \equiv \frac{dE}{dt} \tag{8.18}$$

En esta exposición se contará el trabajo como el método de transferencia de energía, pero considere que el concepto de potencia es válido para *cualquier* medio de transferencia de energía discutido en la sección 8.1. Si una fuerza externa se aplica a un objeto (que se representa como partícula) y si el trabajo invertido por esta fuerza en el objeto en el intervalo de tiempo Δt es W, la **potencia promedio** durante este intervalo es

$$P_{\text{prom}} = \frac{W}{\Delta t}$$

Debido a eso, en el ejemplo conceptual 7.7, aunque se consume el mismo trabajo al rodar el refrigerador por ambas rampas, para la rampa más larga se requiere menos potencia.

Al igual que la definición de velocidad y aceleración, la potencia instantánea es el valor límite de la potencia promedio a medida que Δt tiende a cero:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

donde se representó el valor infinitesimal del trabajo hecho mediante dW. De la ecuación 7.3 se encuentra que $dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$. En consecuencia, la potencia instantánea se escribe

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \tag{8.19}$$

donde $\vec{\mathbf{v}} = d\vec{\mathbf{r}}/dt$.

La unidad de potencia del SI es joules por segundo (J/s), también llamado **watt** (W), en honor de James Watt:

El watt ▶

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$$

Una unidad de potencia en el sistema acostumbrado estadounidense es el **caballo de fuerza** (hp):

$$1\ \text{hp} = 746\ \text{W}$$

Ahora se puede definir una unidad de energía (o trabajo) en términos de la unidad de potencia. Un **kilowatt hora** (kWh) es la energía transferida en 1 h a una rapidez constante de 1 kW = 1 000 J/s. La cantidad de energía representada por 1 kWh es

$$1\ \text{kWh} = (10^3\ \text{W})(3\,600\ \text{s}) = 3.60 \times 10^6\ \text{J}$$

Un kilowatt hora es una unidad de energía, no de potencia. Cuando usted paga el recibo de la electricidad, usted está comprando energía, y la cantidad de energía transferida por la transmisión eléctrica hacia un hogar durante el periodo representado por el recibo se expresa en kilowatt horas. Por ejemplo, su recibo puede establecer que usted usó 900 kWh de energía durante un mes y que se le cobra en una tarifa de 10 centavos por kilowatt hora. Por lo tanto, su deuda es de 90 dólares por esta cantidad de energía. Como otro ejemplo, suponga que una lámpara se especifica en 100 W. En 1.00 hora de operación, la línea de transmisión eléctrica tendría que transferir energía a la lámpara por la cantidad de $(0.100\ \text{kW})(1.00\ \text{h}) = 0.100\ \text{kWh} = 3.60 \times 10^5\ \text{J}$.

Prevención de riesgos ocultos 8.3

W, *W* y watts No confunda el símbolo W para el watt con el símbolo en cursiva *W* para trabajo. Recuerde también que el watt representa una rapidez de transferencia de energía, así que "watts por segundo" no tiene sentido. El watt *es lo mismo que* 1 joule por segundo.

Ejemplo 8.11 Potencia entregada por un motor de elevador AM

Un elevador (figura 8.14a) tiene una masa de 1 600 kg y transporta pasajeros con una masa combinada de 200 kg. Una fuerza de fricción constante de 4 000 N retarda su movimiento.

(A) ¿Cuánta potencia debe proporcionar un motor para levantar el elevador y a sus pasajeros con una rapidez constante de 3.00 m/s?

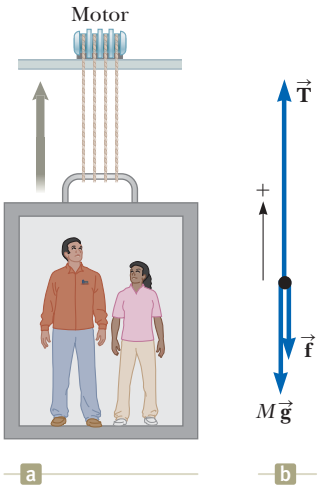


Figura 8.14 (Ejemplo 8.11) (a) El motor ejerce una fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{T}}$ sobre el elevador. La magnitud de esta fuerza es la tensión T en el cable que conecta el elevador y el motor. Las fuerzas que actúan hacia abajo del elevador son una fuerza de fricción $\vec{\mathbf{f}}$ y la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g = M\vec{\mathbf{g}}$. (b) Diagrama de cuerpo libre para el elevador.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El motor debe suministrar la fuerza de magnitud T que jale el elevador hacia arriba.

Categorizar La fuerza de fricción aumenta la potencia necesaria para levantar el elevador. El problema establece que la rapidez del elevador es constante, entonces: $a = 0$. El elevador se modela como una *partícula en equilibrio*.

Analizar El diagrama de cuerpo libre en la figura 8.14b especifica la dirección hacia arriba como positiva. La masa *total* M del sistema (cabina más pasajeros) es igual a 1 800 kg.

Mediante el modelo de partícula en equilibrio, aplique la segunda ley de Newton para el elevador:
$$\sum F_y = T - f - Mg = 0$$

Resuelva para T:
$$T = Mg + f$$

Utilice la ecuación 8.19 y que $\vec{\mathbf{T}}$ está en la misma dirección que $\vec{\mathbf{v}}$ para encontrar la potencia:
$$P = \vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = Tv = (Mg + f)v$$

Sustituya valores numéricos
$$P = [(1\,800\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) + (4\,000\text{ N})](3.00\text{ m/s}) = 6.49 \times 10^4\text{ W}$$

(B) ¿Qué potencia debe entregar el motor en el instante en que la rapidez del elevador es v si el motor está diseñado para proporcionar al elevador una aceleración hacia arriba de 1.00 m/s^2?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En este caso, el motor debe proporcionar la fuerza de magnitud T que jala al elevador hacia arriba con una rapidez creciente. Se espera que se requiera más potencia para hacer lo que en la parte (A), ya que el motor ahora debe realizar la tarea adicional de acelerar el elevador.

Categorizar En este caso, el elevador se modela como una *partícula bajo una fuerza neta* porque está acelerando.

Analizar Usando un modelo de *partícula bajo fuerza neta*, aplique la segunda ley de Newton al elevador:
$$\sum F_y = T - f - Mg = Ma$$

Resuelva para T:
$$T = M(a + g) + f$$

Use la ecuación 8.19 para obtener la potencia requerida:
$$P = Tv = [M(a + g) + f]v$$

Sustituyendo valores numéricos:
$$P = [(1\,800\text{ kg})(1.00\text{ m/s}^2 + 9.80\text{ m/s}^2) + 4\,000\text{ N}]v$$
$$= (2.34 \times 10^4)v$$

donde v es la rapidez instantánea del elevador en metros por segundo.

Finalizar Para comparar con la parte (A), sea $v = 3.00$ m/s, que proporciona una potencia de
$$P = (2.34 \times 10^4\text{ N})(3.00\text{ m/s}) = 7.02 \times 10^4\text{ W}$$
que es mayor que la potencia encontrada en la parte (A), como se esperaba.

Resumen

Definiciones

Un **sistema no aislado** es uno para el que la energía cruza la frontera del sistema. Un **sistema aislado** es uno para el que la energía no cruza la frontera del sistema.

La **potencia instantánea** P se define como la razón de transferencia de energía en el tiempo:

$$P \equiv \frac{dE}{dt} \tag{8.18}$$

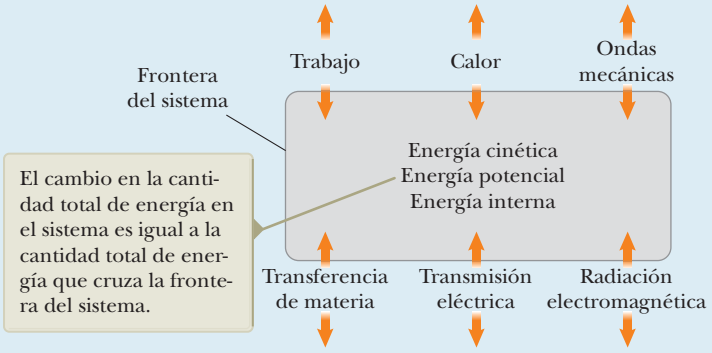
Conceptos y principios

Para un sistema no aislado, podemos igualar el cambio en la energía total almacenada en el sistema con la suma de todas las transferencias de energía a través de las fronteras del sistema, que es un enunciado de **conservación de la energía**. Para un sistema aislado, la energía total es constante.

Si una fuerza de fricción de magnitud f_k actúa sobre una distancia d dentro de un sistema, el cambio en la energía interna del sistema es

$$\Delta E_{\text{int}} = f_k d \tag{8.14}$$

Análisis de modelos para resolver problemas



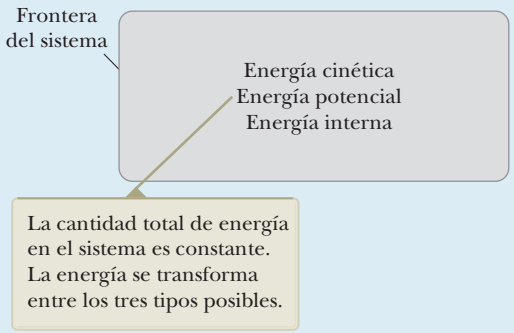
Sistema no aislado (energía). El enunciado más general que describe el comportamiento de un sistema no aislado es la ecuación de **conservación de energía**:

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \Sigma\, T \tag{8.1}$$

Al incluir los tipos de almacenamiento de energía y transferencia de energía que se han discutido se produce

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W + Q + T_{\text{OM}} + T_{\text{TM}} + T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}} \tag{8.2}$$

Para un problema específico, esta ecuación por lo general se reduce a un número más pequeño de términos al eliminar los que no son adecuados a la situación.



Sistema aislado (energía). La energía total de un sistema aislado se conserva, de modo que

$$\Delta E_{\text{sistema}} = 0 \tag{8.10}$$

que se puede escribir como

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0 \tag{8.16}$$

Si dentro del sistema no actúan fuerzas no conservativas, la energía mecánica del sistema se conserva, de modo que

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0 \tag{8.8}$$

que se puede escribir como

$$\Delta K + \Delta U = 0 \tag{8.6}$$

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Usted sostiene una resortera a la longitud de su brazo, jala la ligera banda elástica hacia su barbilla y la suelta para lanzar una piedra horizontalmente con una rapidez de 200 cm/s. Con el mismo procedimiento, dispara un frijol con rapidez de 600 cm/s. ¿Cuál es la razón de la masa del frijol a la masa de la piedra? (a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) 1 (d) 3 (e) 9.

2. Dos niños suben a una plataforma en lo alto del tobogán al lado de una piscina. El niño más pequeño salta recto hacia abajo a la alberca y al mismo tiempo el niño más grande se desliza desde lo alto del tobogán sin fricción. **(i)** Al momento de llegar al agua, en comparación con el niño mayor, ¿la energía cinética del niño pequeño es (a) mayor, (b) menor o (c) igual? **(ii)** Al momento de llegar al agua, en comparación con el niño mayor, ¿la rapidez del niño pequeño es (a) mayor, (b) menor o (c) igual? **(iii)** Durante los movimientos desde la plataforma al agua, en comparación con el niño mayor, ¿la aceleración promedio del niño pequeño es (a) mayor, (b) menor o (c) igual?

3. En la parte baja de una pista de aire inclinada a un ángulo θ, se le da un empujón a un deslizador de masa m para hacerlo que se deslice una distancia d hacia arriba de la pendiente a medida que frena y se detiene. Luego el deslizador regresa hacia abajo por la pista hasta su punto de partida. Ahora se repite el experimento con la misma rapidez original pero con un segundo deslizador idéntico colocado arriba del primero. El flujo de aire es lo suficientemente intenso como para soportar el par de deslizadores, de modo que se mueven libremente sobre la pista. La fricción estática mantiene al segundo deslizador fijo en relación con el primer deslizador a lo largo del movimiento. El coeficiente de fricción estática entre los dos deslizadores es μ_s. ¿Cuál es el cambio en la energía mecánica del sistema dos deslizadores–Tierra en el movimiento hacia arriba y abajo de la pendiente después que el par de deslizadores se libera? Elija una. (a) $-2\mu_s mg$ (b) $-2mgd\cos\theta$ (c) $-2\mu_s mgd\cos\theta$ (d) 0 (e) $+2\mu_s mgd\cos\theta$.

4. Un atleta saltando verticalmente en un trampolín deja la superficie con una velocidad de 8.5 m/s hacia arriba. ¿Qué altura máxima alcanza? (a) 13 m, (b) 2.3 m, (c) 3.7 m, (d) 0.27 m, (e) la respuesta no se puede determinar, ya que no se da la masa del atleta.

5. Responda sí o no a cada una de las siguientes preguntas. (a) ¿Un sistema objeto–Tierra puede tener energía cinética y no energía potencial gravitacional? (b) ¿Puede tener energía potencial gravitacional y no energía cinética? (c) ¿Puede tener ambos tipos de energía al mismo tiempo? (d) ¿Puede no tener ninguna?

6. En un laboratorio de modelos de automóviles que derrapan hasta detenerse, se obtuvo la información para cuatro pistas usando dos bloques. Los bloques tienen masas idénticas pero tienen diferentes coeficientes de fricción cinética con una mesa: $\mu_k = 0.2$ y 0.8. Cada bloque se lanza con rapidez $v_i = 1$ m/s y se desliza a través del nivel de la mesa conforme el bloque alcanza el reposo. Este proceso representa las primeras dos pistas. Para las siguientes dos pistas, se repite el procedimiento, pero los bloques se lanzan con rapidez $v_i = 2$ m/s. Ordene las cuatro pistas de la (a) a la (d) de acuerdo con la distancia de frenado, de mayor a menor. Si la distancia de frenado es la misma en dos casos, déles igual clasificación. (a) $v_i = 1$ m/s, $\mu_k = 0.2$, (b) $v_i = 1$ m/s, $\mu_k = 0.8$, (c) $v_i = 2$ m/s, $\mu_k = 0.2$, (d) $v_i = 2$ m/s, $\mu_k = 0.8$.

7. ¿Qué potencia promedio es generada por un montañista de 70.0 kg que sube a una cumbre de 325 m de altura en 95.0 min? (a) 39.1 W (b) 54.6 W (c) 25.5 W (d) 67.0 W (e) 88.4 W

8. Una bola de arcilla cae libremente hacia el piso duro. No rebota de manera notable, sino que llega al reposo muy rápidamente. ¿En tal caso, qué ocurrió con la energía que la bola tenía mientras caía? (a) Se usó para producir el movimiento hacia abajo. (b) Se transformó otra vez en energía potencial. (c) Se transfirió a la bola por calor. (d) Está en la bola y el suelo (y paredes) como energía de movimiento molecular invisible. (e) La mayor parte se fue en sonido.

9. Un martinete es un dispositivo que se usa para clavar postes en la tierra mediante la caída repetida de un objeto pesado sobre ellos. Suponga que el objeto se deja caer desde la misma altura cada vez. ¿En qué factor cambia la energía del sistema martinete–tierra cuando la masa del objeto a soltar se duplica? (a) $\frac{1}{2}$, (b) 1: la energía es la misma, (c) 2, (d) 4.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Una persona deja caer una bola desde lo alto de un edificio mientras que otra, en la base, observa su movimiento. ¿Estas dos personas estarán de acuerdo (a) con el valor de la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra? (b) ¿En el cambio en energía potencial? (c) ¿En la energía cinética de la bola en el mismo punto en su movimiento?

2. Un vendedor de automóviles afirma que un motor mejorado de 300 hp es una opción necesaria en un auto compacto en lugar del motor convencional de 130 hp. Suponga que usted tiene la intención de conducir el automóvil dentro de los límites de rapidez ($\leq$ 65 mi/h) en terreno plano. ¿Cómo contrarrestaría esta propaganda comercial?

3. ¿Todo tiene energía? Dé argumentos para su respuesta.

4. Usted viaja en bicicleta. ¿En qué sentido su bicicleta es impulsada por energía solar?

5. Una bola de boliche está suspendida del techo de un salón de conferencias mediante una fuerte cuerda. La bola se aleja de su posición de equilibrio y se libera del reposo desde la punta de la nariz de la conferencista, como se muestra en la figura PC8.5 (página 236). La conferencista permanece quieta. (a) Explique por qué la bola no la golpea en su viaje de retorno. (b) ¿La conferencista estaría a salvo si a la bola se le da un empujón desde su posición de partida en su nariz?

6. ¿Una fuerza de fricción estática puede hacer trabajo? Si no, ¿por qué? Si sí, proporcione un ejemplo.

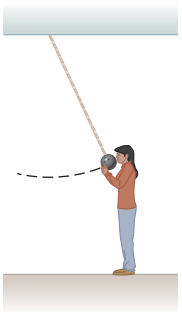


Figura PC8.5

7. En la ecuación general de conservación de energía, establezca qué términos predominan al describir cada uno de los siguientes dispositivos y procesos. Para un proceso que funciona de manera continua, puede considerar lo que ocurre en un intervalo de tiempo de 10 s. Establezca qué términos en la ecuación representan las formas original y final de energía, cuáles serían entradas y cuáles serían salidas. (a) Una resortera que dispara una piedra, (b) un fuego ardiendo, (c) un radio portátil en operación, (d) un carro que frena hasta detenerse, (e) la superficie del Sol brillando visiblemente, (f) una persona que salta encima de una silla.

8. Considere la transferencia de energía y transformaciones que se mencionan a continuación en los incisos del (a) hasta el (e). Por cada inciso, **(i)** describa dispositivos hechos por el hombre diseñados para producir cada una de las transformaciones o transferencia de energía y, **(ii)** siempre que sea posible, también describa un proceso natural en el que se presente la transferencia de energía o transformación. Dé detalles para defender sus opciones, tales como identificar el sistema e identificar otras energías de salida si el dispositivo o proceso natural tiene eficiencia limitada. (a) La energía potencial química se transforma en energía interna. (b) La energía transferida por transmisión eléctrica se convierte en energía potencial gravitacional. (c) Se transfiere energía potencial elástica de un sistema por calor. (d) La energía transferida por ondas mecánicas hace trabajo sobre un sistema. (e) La energía transportada por ondas electromagnéticas se convierte en energía cinética en un sistema.

9. Un bloque se conecta a un resorte que está suspendido del techo. Si supone que el bloque se pone en movimiento vertical y se ignora la resistencia del aire, describa las transformaciones de energía que se presentan dentro del sistema que consiste del bloque, la Tierra y el resorte cuando el bloque está en movimiento vertical.

10. En el capítulo 7 se introdujo el teorema trabajo–energía cinética, $W = \Delta K$. Esta ecuación establece que el trabajo hecho en un sistema aparece como un cambio en energía cinética. Es una ecuación de caso especial, válida si no hay cambios en algún otro tipo de energía, como la potencial o la interna. Proporcione dos o tres ejemplos en los que se haga trabajo sobre un sistema, pero que el cambio en energía del sistema no sea un cambio en energía cinética.

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 8.1 Análisis de modelo: sistema no aislado (energía)

1. Para cada uno de los siguientes sistemas e intervalos de tiempo, escriba la versión reducida y adecuada de la ecuación 8.2, la ecuación de conservación de energía. (a) Las bobinas de calentamiento en su tostadora durante los primeros cinco segundos después de que enciende la tostadora, (b) su automóvil, desde justo antes de que llene el tanque con gasolina, hasta que sale de la gasolinera con una rapidez v, (c) su cuerpo mientras está sentado tranquilamente y come un emparedado de mantequilla de cacahuate y mermelada durante su almuerzo, (d) su casa durante cinco minutos de una tarde soleada mientras la temperatura en la casa permanece fija.

2. Una bola de masa m cae desde una altura h al piso. (a) Escriba la versión adecuada de la ecuación 8.2 para el sistema de la bola y la Tierra, y utilícela para calcular la rapidez de la bola justo antes de que pegue en la Tierra. (b) Escriba la versión apropiada de la ecuación 8.2 para el sistema de la bola y utilícela para calcular la rapidez de la pelota justo antes de que pegue en la Tierra.

Sección 8.2 Análisis de modelo: sistema aislado (energía)

3. Un bloque de 0.250 kg de masa se coloca en lo alto de un resorte vertical ligero de constante de fuerza 5 000 N/m y se empuja hacia abajo de modo que el resorte se comprime 0.100 m. Después que el bloque se libera desde el reposo, viaja hacia arriba y luego deja el resorte. ¿A qué altura máxima arriba del punto de liberación llega?

4. Una bola de cañón de 20.0 kg se dispara desde un cañón con rapidez de boquilla de 1 000 m/s con un ángulo de 37.0° con la horizontal. Una segunda bala de cañón se dispara con un ángulo de 90.0°. Aplique el modelo de sistema aislado para encontrar (a) la altura máxima que alcanza cada bola y (b) la energía mecánica total del sistema bola–Tierra a la altura máxima para cada bola. Sea $y = 0$ en el cañón.

5. **Problema de repaso.** Una bolita perforada se desliza sin fricción alrededor de un bucle (figura P8.5). La bolita se libera desde una altura $h = 3.50R$. (a) ¿Cuál es la rapidez de la bolita en el punto Ⓐ? (b) ¿Qué tan grande es la fuerza normal sobre la bolita en el punto Ⓐ si su masa es 5.00 g?

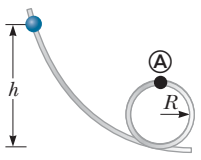


Figura P8.5

6. Un bloque de masa $m = 5.00$ kg se libera desde el punto Ⓐ y se desliza sobre la pista sin fricción que se muestra en la figura P8.6. Determine (a) la rapidez del bloque en los

puntos Ⓑ y Ⓒ y (b) el trabajo neto hecho por la fuerza gravitacional sobre el bloque cuando se mueve de Ⓐ a Ⓒ.

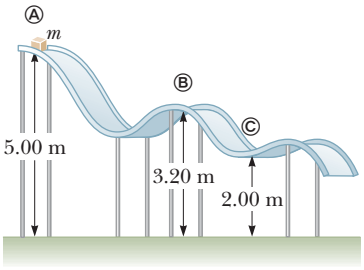


Figura P8.6

7. Dos objetos se conectan mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea ligera sin fricción, como se muestra en la figura P8.7. El objeto de masa $m_1 = 5.00$ kg se libera desde el reposo, a una altura $h = 4.00$ m arriba de la mesa. Con el modelo de sistema aislado, (a) determine la rapidez del objeto de masa $m_2 = 3.00$ kg justo cuando el objeto de 5.00 kg golpea en la mesa. (b) Encuentre la altura máxima arriba de la mesa a la que llega el objeto de 3.00 kg.

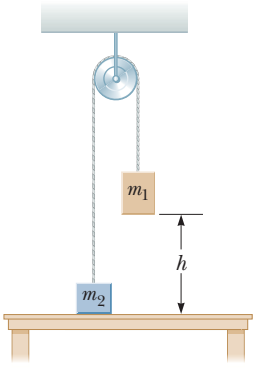


Figura P8.7
Problemas 7 y 8.

8. Dos objetos se conectan mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea ligera sin fricción, como se muestra en la figura P8.7. El objeto de masa m_1 se libera desde el reposo, a una altura h arriba de la mesa. Con el modelo de sistema aislado, (a) determine la rapidez del objeto de masa m_2 justo cuando el objeto de masa m_1 pega en la mesa. (b) Encuentre la altura máxima arriba de la mesa a la que llega la masa m_2.

9. Una barra ligera rígida mide 77.0 cm de largo. Su extremo superior tiene como pivote un eje horizontal de baja fricción. La barra cuelga recta hacia abajo en reposo con una pequeña bola de gran masa unida a su extremo inferior. Usted golpea la bola y súbitamente le da una velocidad horizontal de modo que se balancea alrededor de un círculo completo. ¿Qué rapidez mínima se requiere en la parte más baja para hacer que la bola pase por lo alto del círculo?

10. A las 11:00 a.m. del 7 de septiembre de 2001, más de 1 millón de escolares británicos saltaron hacia arriba y hacia abajo durante un minuto para simular un terremoto. (a) Encuentre la energía almacenada en los cuerpos de los niños que fue convertida en energía interna en el suelo y en sus cuerpos y se propagó en el suelo mediante ondas sísmicas durante el experimento. Suponga que los 1 050 000 niños de masa promedio 36.0 kg saltaron 12 veces cada uno, aumentando sus centros de masa por 25.0 cm cada vez y descansando brevemente entre un salto y el siguiente. (b) De la energía que se propaga en el suelo, la mayoría produce vibraciones de alta frecuencia, "microtemblores", que fueron rápidamente amortiguadas y no viajaron mucho. Suponga que el 0.01% de la energía total se transportó lejos por ondas sísmicas de largo alcance. La magnitud de un sismo en la escala de Richter está dada por:

$$M = \frac{\log E - 4.8}{1.5}$$

donde E es la energía de la onda sísmica en joules. De acuerdo con este modelo, ¿cuál fue la magnitud de sismo de demostración?

11. Problema de repaso. El sistema que se muestra en la figura P8.11 consiste de una cuerda ligera inextensible, poleas ligeras sin fricción y bloques de igual masa. Observe que el bloque B está unido a una de las poleas. Inicialmente el sistema se mantiene en reposo, de modo que los bloques están a la misma altura sobre el suelo. Después los bloques se liberan. Encuentre la rapidez del bloque A en el momento que la separación vertical de los bloques es h.

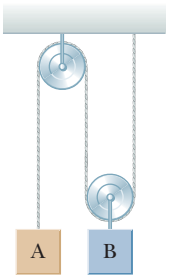


Figura P8.11

Sección 8.3 Situaciones que incluyen fricción cinética

12. A un trineo de masa m se le da una patada sobre un lago congelado. La patada le imparte una rapidez inicial de 2.00 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el trineo y el hielo es 0.100. Aplique consideraciones energéticas para encontrar la distancia que el trineo se mueve antes de detenerse.

13. A un trineo de masa m se le da una patada sobre un lago congelado. La patada le imparte una rapidez inicial v. El coeficiente de fricción cinética entre el trineo y el hielo es μ_k. Aplique consideraciones energéticas para encontrar la distancia que el trineo se mueve antes de detenerse.

14. Una caja de 10.0 kg de masa se jala hacia arriba de un plano inclinado rugoso con una rapidez inicial de 1.50 m/s. La fuerza del jalón es 100 N paralela al plano, que forma un ángulo de 20.0° con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética es 0.400 y la caja se jala 5.00 m. (a) ¿Cuánto trabajo hace la fuerza gravitacional sobre la caja? (b) Determine el aumento en energía interna del sistema caja–plano inclinado debido a la fricción. (c) ¿Cuánto trabajo hace la fuerza de 100 N en la caja? (d) ¿Cuál es el cambio en energía cinética de la caja? (e) ¿Cuál es la rapidez de la caja después de jalarse 5.00 m?

15. Un bloque de $m = 2.00$ kg se une a un resorte con constante de fuerza $k = 500$ N/m, como se muestra en la figura P8.15. Se jala el bloque 5.00 cm hacia la derecha del equilibrio y se libera desde el reposo. Encuentre la rapidez que tiene el bloque cuando pasa a través del equilibrio si (a) la superficie horizontal no tiene fricción y (b) el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es $\mu_k = 0.350$.

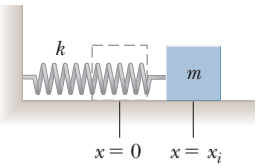


Figura P8.15

16. Una caja de 40.0 kg, inicialmente en reposo, se empuja 5.00 m a lo largo de un suelo horizontal rugoso, con una fuerza constante horizontal aplicada de 130 N. El coeficiente de

fricción entre la caja y el suelo es 0.300. Encuentre: (a) el trabajo hecho por la fuerza aplicada, (b) el aumento en energía interna en el sistema caja–suelo como resultado de la fricción, (c) el trabajo hecho por la fuerza normal, (d) el trabajo hecho por la fuerza gravitacional, (e) el cambio en energía cinética de la caja y (f) la rapidez final de la caja.

17. Se coloca un aro circular plano con un radio de 0.500 m sobre el piso. Una partícula de 0.400 kg se desliza alrededor del borde interior del aro. A la partícula se le da una rapidez inicial de 8.00 m/s. Después de una revolución, su rapidez cae a 6.00 m/s debido a la fricción con el suelo rugoso de la pista. (a) Encuentre la energía transformada de mecánica en interna en el sistema como resultado de la fricción en una revolución. (b) ¿Cuál es el número total de revoluciones que da la partícula antes de detenerse? Suponga que la fuerza de fricción permanece constante durante todo el movimiento.

Sección 8.4 Cambios en la energía mecánica para fuerzas no conservativas

18. En un tiempo t_i, la energía cinética de una partícula es 30.0 J y la energía potencial del sistema al que pertenece es 10.0 J. En algún tiempo posterior t_f, la energía cinética de la partícula es 18.0 J. (a) Si sólo fuerzas conservativas actúan sobre la partícula, ¿cuáles son la energía potencial y la energía total del sistema en el tiempo t_f? (b) Si la energía potencial del sistema en el tiempo t_f es 5.00 J, ¿existen fuerzas no conservativas que actúan sobre la partícula? (c) Explique su respuesta del inciso (b).

19. Un niño en silla de ruedas (masa total de 47.0 kg) tiene una rapidez de 1.40 m/s en la cima de una cuesta de 2.60 m de alto y 12.4 m de largo. En la parte inferior de la pendiente su rapidez es de 6.20 m/s. Suponga que la resistencia del aire y la resistencia de rodamiento se pueden modelar como una fuerza de fricción constante de 41.0 N. Encuentre el trabajo que hizo en empujar hacia adelante sus ruedas durante el descenso de la colina.

20. Como se muestra en la figura P8.20, una cuenta verde de masa 25 g se desliza a lo largo de un alambre recto. La longitud del alambre desde el punto Ⓐ al punto Ⓑ es 0.600 m y el punto Ⓐ está 0.200 m más arriba que el punto Ⓑ.

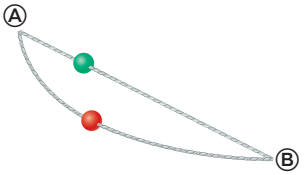


Figura P8.20

Una fuerza de rozamiento constante de magnitud 0.025 N actúa sobre la cuenta. (a) Si la cuenta se libera a partir del reposo en el punto Ⓐ, ¿cuál es su rapidez en el punto Ⓑ? (b) Una cuenta roja de masa 25 g se desliza a lo largo de un alambre curvado, sujeto a una fuerza de fricción con la misma magnitud constante que la de la cuenta verde. Si las cuentas verde y roja se liberan al mismo tiempo a partir del reposo en el punto Ⓐ, ¿qué cuenta alcanza el punto Ⓑ con una rapidez mayor? Explique.

21. Un arma de juguete usa un resorte para proyectar una bola de hule suave de 5.30 g. El resorte originalmente se comprime 5.00 cm y tiene una constante de fuerza de 8.00 N/m. Cuando el arma se dispara, la bola se mueve 15.0 cm a través del cañón horizontal del arma y el cañón ejerce una fuerza de fricción constante de 0.032 0 N sobre la bola. (a) ¿Con qué rapidez el proyectil deja el cañón del arma? (b) ¿En qué punto la bola tiene rapidez máxima? (c) ¿Cuál es esta rapidez máxima?

22. El coeficiente de fricción entre el bloque de masa m_1 = 3.00 kg y la superficie en la figura P8.22 es μ_k = 0.400. El sistema parte del reposo. ¿Cuál es la rapidez de la bola de masa m_2 = 5.00 kg cuando cae una distancia h = 1.50 m?

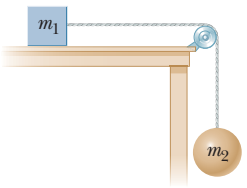


Figura P8.22

23. Un bloque de 5.00 kg se pone en movimiento hacia arriba de un plano inclinado con una rapidez inicial v_i = 8.00 m/s (figura P8.23). El bloque llega al reposo después de viajar d = 3.00 m a lo largo del plano, que está inclinado en un ángulo de 30.0° con la horizontal. Para este movimiento, determine (a) el cambio en la energía cinética del bloque, (b) el cambio en la energía potencial del sistema bloque–Tierra y (c) la fuerza de fricción que se ejerce sobre el bloque (supuesta constante). (d) ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética?

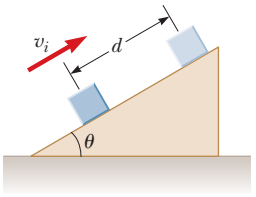


Figura P8.23

24. Un objeto de 1.50 kg se mantiene 1.20 m sobre un resorte vertical relajado sin masa con una constante de fuerza de 320 N/m. Se deja caer el objeto sobre el resorte. (a) ¿Cuánto comprime al resorte? (b) **¿Qué pasaría si?** Repita el inciso (a), pero esta vez suponga que una fuerza de resistencia al aire constante de 0.700 N actúa sobre el objeto durante su movimiento. (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuánto comprime el objeto al resorte si el mismo experimento se realiza en la Luna, donde g = 1.63 m/s^2 y se desprecia la resistencia del aire?

25. Un bloque de 200 g se presiona contra un resorte con 1.40 kN/m de constante de fuerza hasta que el bloque comprime el resorte 10.0 cm. El resorte descansa en la parte baja de una rampa inclinada 60.0° con la horizontal. Mediante consideraciones de energía, determine cuánto se mueve el bloque hacia arriba del plano inclinado antes de detenerse (a) si la rampa no ejerce fuerza de fricción sobre el bloque y (b) si el coeficiente de fricción cinética es 0.400.

26. Un paracaidista de 80.0 kg salta de un globo a una altura de 1 000 m y abre el paracaídas a una altitud de 200 m. (a) Si supone que la fuerza retardadora total sobre el paracaidista es constante en 50.0 N con el paracaídas cerrado y constante en 3 600 N con el paracaídas abierto, encuentre la rapidez del paracaidista cuando aterriza en el suelo. (b) ¿Cree que el paracaidista se lesionará? Explique. (c) ¿A qué altura se debe abrir el paracaídas de modo que la rapidez final del paracaidista cuando golpee el suelo sea 5.00 m/s? (d) ¿Qué tan real es la suposición de que la fuerza retardadora total es constante? Explique.

27. Una niña de masa m parte del reposo y se desliza sin fricción desde una altura h a lo largo de un tobogán al lado de una piscina (figura P8.27). Se lanzó desde una altura $h/5$ en el

aire sobre la piscina. Queremos encontrar la altura máxima que alcanza arriba del agua en su movimiento como proyectil. (a) ¿Es el sistema niña–Tierra aislado o no aislado? ¿Por qué? (b) ¿Hay una fuerza no conservativa que actúa dentro del sistema? (c) Defina la configuración del sistema cuando la niña está en el nivel del agua que tiene cero energía potencial gravitacional. Exprese la energía total del sistema cuando la niña está en la parte superior del tobogán. (d) Exprese la energía total del sistema cuando la niña está en el punto de lanzamiento. (e) Exprese la energía total del sistema cuando la niña está en el punto más alto en su movimiento de proyectil. (f) A partir de los incisos (c) y (d), determine su rapidez inicial v_i en el punto de lanzamiento en términos de g y h. (g) De los incisos (d), (e) y (f), determine su altura máxima en el aire $y_{máx}$ en términos de h y del ángulo de lanzamiento θ. (h) ¿Sus respuestas serían las mismas si el tobogán no tuviera fricción? Explique.

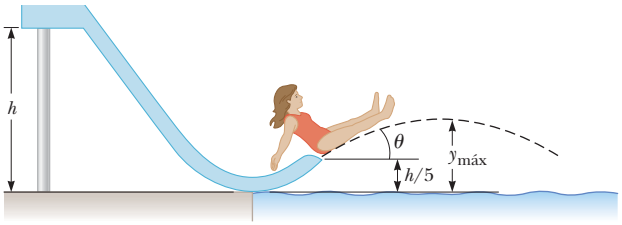


Figura 8.27

Sección 8.5 Potencia

28. Las aguas residuales en cierta estación de bombeo se levantan verticalmente por 5.49 m a una razón de 1 890 000 litros cada día. Las aguas residuales, de densidad 1 050 kg/m^3, entran y salen de la bomba a presión atmosférica y a través de tuberías de igual diámetro. (a) Encuentre la potencia mecánica de salida de la estación de elevación. (b) Suponga que el motor eléctrico que hace funcionar la bomba trabaja continuamente con una potencia promedio de 5.90 kW. Encuentre su eficiencia.

29. Un marino de 820 N en el entrenamiento básico sube por una cuerda vertical de 12.0 m con una rapidez constante en 8.00 s. ¿Cuál es su potencia de salida?

30. El motor eléctrico de un tren a escala acelera al tren desde el reposo a 0.620 m/s en 21.0 ms. La masa total del tren es 875 g. (a) Encuentre la potencia mínima entregada al tren por transmisión eléctrica desde los rieles de metal durante la aceleración. (b) ¿Por qué la potencia es mínima?

31. Cuando un automóvil se mueve con rapidez constante por una carretera, la mayoría de la potencia desarrollada por el motor se utiliza para compensar las transformaciones de energía debidas a las fuerzas de fricción ejercidas sobre el auto por el aire y la carretera. Si la potencia desarrollada por un motor es de 175 caballos de fuerza, calcule la fuerza de fricción total que actúa sobre el automóvil cuando se está moviendo a una rapidez de 29 m/s. Un caballo de fuerza equivale a 746 W.

32. Una cierta nube de lluvia a una altura de 1.75 km contiene 3.20×10^7 kg de vapor de agua. ¿Cuánto tiempo le tomaría a una bomba de 2.70 kW elevar la misma cantidad de agua desde la superficie de la Tierra a la posición de la nube?

33. Una lámpara con eficiencia energética que toma 28.0 W de potencia produce el mismo nivel de brillantez que una lámpara convencional que funciona a una potencia de 100 W. El tiempo de vida de la lámpara con eficiencia energética es 10 000 h y su precio de compra es 4.50 dólares, mientras que la lámpara convencional tiene un tiempo de vida de 750 h y cuesta 0.420 dólares por lámpara. Determine el ahorro total que se obtiene al usar una lámpara con eficiencia energética durante su tiempo de vida, en oposición a usar lámparas convencionales durante el mismo intervalo de tiempo. Suponga un costo de energía de 0.200 dólares por kilowatt hora.

34. Una motoneta eléctrica tiene una batería capaz de suministrar 120 Wh de energía. Si las fuerzas de fricción y otras pérdidas reducen al 60.0% la energía utilizada, ¿qué cambio en altitud puede lograr un motociclista cuando conduce en terreno montañoso si el conductor y la motoneta tienen un peso combinado de 890 N?

35. Haga una estimación del orden de magnitud de la potencia que aporta el motor de un automóvil para acelerar el auto a rapidez de autopista. En su solución, establezca las cantidades físicas que toma como datos y los valores que mide o estima para ellas. La masa del vehículo se proporciona en el manual del propietario.

36. Un modelo viejo de automóvil acelera de 0 a rapidez v en un intervalo de tiempo Δt. Un automóvil deportivo nuevo y más potente acelera de 0 a $2v$ en el mismo periodo. Suponiendo que la energía que proviene del motor aparece sólo como energía cinética de los autos, compare la potencia de los dos automóviles.

37. Para ahorrar energía, andar en bicicleta y caminar son medios de transporte mucho más eficientes que viajar en automóvil. Por ejemplo, al pedalear a 10.0 mi/h, un ciclista utiliza la energía del alimento a un ritmo de alrededor de 400 kcal/h arriba de lo que usaría si simplemente estuviese sentado. (En fisiología del ejercicio, la potencia suele medirse en kcal/h en lugar de watts. Aquí, 1 kcal = 1 caloría de nutrición = 4 186 J.) Caminar a 3.00 mi/h requiere unas 220 kcal/h. Es interesante comparar estos valores con el consumo de energía necesario para viajar en auto. La gasolina rinde aproximadamente 1.30×10^8 J/gal. Encuentre el combustible ahorrado en millas por galón equivalentes para (a) una persona caminando y (b) en bicicleta.

38. Un elevador de 650 kg que parte del reposo se mueve hacia arriba durante 3.00 s con aceleración constante hasta que alcanza su rapidez de crucero de 1.75 m/s. (a) ¿Cuál es la potencia promedio del motor elevador durante este intervalo de tiempo? (b) ¿Cómo se compara esta potencia con la potencia del motor cuando el elevador se mueve con su rapidez de crucero?

39. Un piano de 3.50 kN es levantado por tres trabajadores a rapidez constante a un departamento que está a 25.0 m sobre la calle utilizando un sistema de polea fijado en el techo del edificio. Cada trabajador es capaz de entregar 165 W de potencia, y el sistema de poleas es 75.0% eficiente (así, 25.0% de la energía mecánica es transformada en otras formas debido a la fricción en la polea). Despreciando la masa de la polea, encuentre el tiempo necesario para levantar el piano desde la calle hasta el departamento.

40. Por convención, la energía se mide en calorías, así como en joules. Una caloría en nutrición es una kilocaloría, que se define como 1 kcal = 4 186 J. Metabolizar 1 g de grasa puede liberar 9.00 kcal. Un estudiante decide intentar perder peso mediante ejercicio. Planea subir y bajar corriendo las escaleras de un estadio de futbol tan rápido como pueda y tantas veces como sea necesario. Para evaluar el programa, suponga que sube un tramo de 80 escalones, cada uno de 0.150 m de alto, en 65.0 s. Por simplicidad, desprecie la energía que usa al bajar (que es pequeña). Suponga que una eficiencia típica para músculos humanos es de 20.0%. Esta afirmación significa que cuando su cuerpo convierte 100 J metabolizando grasa, 20 J realizan trabajo mecánico (en este caso, subir escaleras). El resto va a energía interna adicional. Suponga que la masa del estudiante es de 75.0 kg. (a) ¿Cuántas veces debe correr el tramo de escaleras para perder 1 kg de grasa? (b) ¿Cuál es su potencia desarrollada promedio, en watts y en caballos de fuerza, mientras sube corriendo las escaleras? (c) ¿Esta actividad en sí misma es una forma práctica para perder peso?

41. Un furgón cargado tiene una masa de 950 kg y rueda sobre rieles con fricción despreciable. Parte del reposo y un cable conectado a un malacate lo jala por el tiro de una mina. El tiro está inclinado 30.0° sobre la horizontal. El furgón acelera de manera uniforme a una rapidez de 2.20 m/s en 12.0 s y después continúa con rapidez constante. (a) ¿Qué potencia debe proporcionar el motor del malacate cuando el furgón se mueve con rapidez constante? (b) ¿Qué potencia máxima debe proporcionar el motor del malacate? (c) ¿Qué energía total transfirió el motor mediante trabajo para cuando el furgón salió de la pista, que tiene 1 250 m de largo?

Problemas adicionales

42. Haga una estimación del orden de magnitud de su potencia de salida cuando sube las escaleras. En su solución, indique las cantidades físicas que quiere tomar como datos y los valores que mide o estima para ellos. ¿Considera su potencia máxima o su energía sostenible?

43. Un bloque de masa $m = 200$ g se libera desde el reposo en el punto Ⓐ a lo largo del diámetro horizontal en el interior de un tazón hemisférico sin fricción con radio $R = 30.0$ cm (figura P8.43). Calcule (a) la energía potencial gravitacional del sistema bloque–Tierra cuando el bloque está en el punto Ⓐ en relación con el punto Ⓑ, (b) la energía cinética del bloque en el punto Ⓑ, (c) su rapidez en el punto Ⓑ y (d) su energía cinética y la energía potencial cuando el bloque está en el punto Ⓒ.

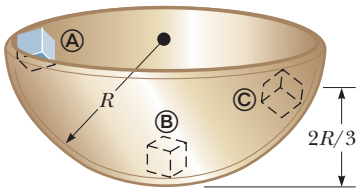


Figura P8.43 Problemas 43 y 44.

44. **¿Qué pasaría si?** El bloque de masa $m = 200$ g descrito en el problema 43 (figura P8.43) se libera desde el reposo en Ⓐ, y la superficie del tazón es rugosa. La rapidez del bloque en Ⓑ es 1.50 m/s. (a) ¿Cuál es su energía cinética en Ⓑ? (b) ¿Cuánta energía mecánica se transforma en energía interna a medida que el bloque se mueve de Ⓐ a Ⓑ? (c) ¿Es posible determinar el coeficiente de fricción a partir de estos resultados de alguna manera simple? Explique su respuesta al inciso (c).

45. **Problema de repaso.** Un niño comienza en reposo y se desliza por un tobogán sin fricción, como en la figura P8.45. El fondo de la pista tiene una altura h por encima del suelo. Después el muchacho sale de la pista horizontalmente, golpeando el suelo a una distancia d, como se muestra. Usando métodos de energía, determine la altura inicial H del niño por encima del suelo en términos de h y d.

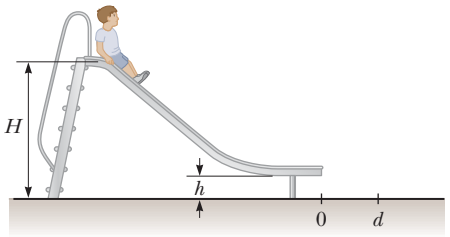


Figura P8.45

46. **Problema de repaso.** Como se muestra en la figura P8.46, una cuerda ligera que no se estira cambia de horizontal a vertical a medida que pasa sobre el borde de una mesa. La cuerda conecta un bloque de masa m_1 de 3.50 kg al principio en reposo sobre la mesa horizontal de una altura $h = 1.20$ m arriba del suelo, con un bloque que cuelga de masa m_2 de 1.90 kg, al principio a 0.900 m sobre el suelo. Ni la superficie de la mesa ni su borde ejercen una fuerza de fricción cinética. Los bloques comienzan a moverse a partir del reposo. El bloque deslizante de masa m_1 se proyecta horizontalmente después de alcanzar el borde de la mesa. El bloque que cuelga de masa m_2 se para sin rebotar cuando golpea el piso. Considere a los dos bloques más la Tierra como el sistema. (a) Encuentre la rapidez con la que m_1 deja el borde de la mesa. (b) Encuentre la rapidez de impacto de m_1 con el piso. (c) ¿Cuál es la longitud más corta de la cuerda que no está tensa mientras m_1 está en vuelo? (d) ¿Es la energía del sistema, cuando se libera desde el reposo, igual a la energía del sistema antes de que m_1 pegue en el suelo? (e) ¿Por qué sí o por qué no?

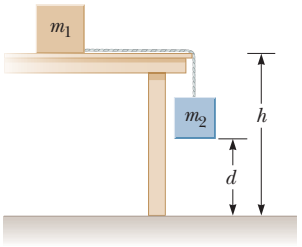


Figura P8.46

47. Una partícula de 4.00 kg se mueve a lo largo del eje x. Su posición varía con el tiempo de acuerdo con $x = t + 2.0t^3$, donde x está en metros y t en segundos. Encuentre: (a) la energía cinética en cualquier tiempo t, (b) la aceleración de la partícula y la fuerza que actúa sobre ella en el tiempo t, (c) la potencia que se entrega a la partícula en el tiempo t y (d) el trabajo hecho sobre la partícula en el intervalo $t = 0$ a $t = 2.00$ s.

48. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Una lanzadora de softbol tiene una extraña técnica: comienza con su mano en reposo en el punto más alto que puede alcanzar y luego gira rápidamente su brazo hacia atrás para que la bola se

mueva a través de una trayectoria semicircular. Libera la bola cuando la mano llega a la parte inferior de la trayectoria. La lanzadora mantiene una componente de la fuerza de magnitud constante 12.0 N sobre la bola de 0.180 kg en la dirección del movimiento alrededor de la trayectoria completa. Cuando la pelota llega a la parte inferior de la trayectoria, deja su mano con una rapidez de 25.0 m/s.

49. Un muchacho con su patineta se modela como una partícula de 76.0 kg de masa, ubicado en su centro de masa (que se estudiará en el capítulo 9). Como se muestra en la figura P8.49, el muchacho parte del reposo en una posición encorvada en el borde de un medio tubo (punto Ⓐ). El medio tubo es una mitad de un cilindro de 6.80 m de radio con su eje horizontal. En su descenso el muchacho se mueve sin fricción, de modo que su centro de masa se mueve a través de un cuarto de círculo de 6.30 m de radio. (a) Encuentre su rapidez en el fondo del medio tubo (punto Ⓑ). (b) Inmediatamente después de pasar el punto Ⓑ, se pone de pie y eleva los brazos, lo que eleva su centro de masa de 0.500 m a 0.950 m sobre el concreto (punto Ⓒ). A continuación, él se desliza hacia arriba con su centro de masa moviéndose en un cuarto de círculo de 5.85 m de radio. Su cuerpo está horizontal cuando pasa el punto Ⓓ, el borde lejano del medio tubo. Cuando pasa a través del punto Ⓓ, la velocidad del muchacho es 5.14 m/s. ¿Cuánta energía potencial química en el cuerpo del muchacho se convirtió en energía mecánica en el sistema muchacho–Tierra cuando se puso de pie en el punto Ⓑ? (c) ¿Qué tan alto por encima del punto Ⓓ se levanta? *Precaución:* no intente hacer este truco usted solo sin tener las habilidades y el equipo de protección necesarios.

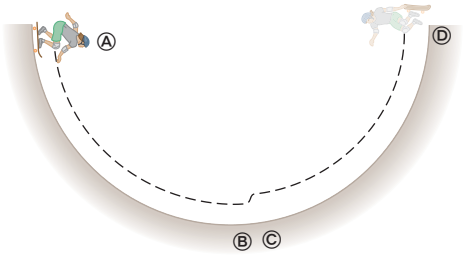


Figura P8.49

50. Haciendo caso omiso del peligro, un niño salta sobre una pila de colchones viejos para usarlos como un trampolín. Su movimiento entre dos puntos concretos se describe por la ecuación de conservación de energía

$$\tfrac{1}{2}(46.0\text{ kg})(2.40\text{ m/s})^2 + (46.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(2.80\text{ m} + x) = \tfrac{1}{2}(1.94 \times 10^4\text{ N/m})x^2$$

(a) Resuelva la ecuación para x. (b) Redacte el enunciado de un problema, incluyendo los datos para que esta ecuación dé la solución. (c) Agregue los dos valores de x obtenidos en el inciso (a) y divida entre 2. (d) ¿Cuál es el significado del valor resultante en el inciso (c)?

51. Jonathan anda en bicicleta y se encuentra con una colina de 7.30 m de altura. En la base de la colina, está viajando a 6.00 m/s. Cuando llega a la cima de la colina, está viajando a 1.00 m/s. Jonathan y su bicicleta juntos tienen una masa de 85.0 kg. Desprecie la fricción en el mecanismo de la bicicleta y entre los neumáticos de la bicicleta y la carretera. (a) ¿Cuál es el trabajo externo total hecho sobre el sistema de Jonathan y la bicicleta entre el tiempo que empieza a subir la colina y el tiempo en que llega a la cima? (b) ¿Cuál es el cambio en energía potencial almacenada en el cuerpo de Jonathan durante este proceso? (c) ¿Cuánto trabajo hace Jonathan al pedalear la bicicleta dentro del sistema Jonathan–bicicleta–Tierra durante este proceso?

52. Jonathan anda en bicicleta y se encuentra con una colina de altura h. En la base de la colina está viajando con una rapidez v_i. Cuando llega a la cima de la colina está viajando con una rapidez v_f. Jonathan y su bicicleta juntos tienen una masa m. Desprecie la fricción en el mecanismo de la bicicleta y entre los neumáticos de la bicicleta y la carretera. (a) ¿Cuál es el trabajo externo total hecho sobre el sistema de Jonathan y la bicicleta entre el tiempo que empieza a subir la colina y el tiempo en que llega a la cima? (b) ¿Cuál es el cambio en energía potencial almacenada en el cuerpo de Jonathan durante este proceso? (c) ¿Cuánto trabajo hace Jonathan al pedalear la bicicleta dentro del sistema Jonathan–bicicleta–Tierra durante este proceso?

53. Considere el sistema bloque–resorte–superficie en la parte (B) del ejemplo 8.6. (a) Usando un método de energía encuentre la posición x del bloque en que su rapidez es un máximo. (b) En la sección **¿Qué pasaría si?** de dicho ejemplo, se exploraron los efectos de una fuerza de fricción aumentada de 10.0 N. ¿En qué posición del bloque se presenta su rapidez máxima en esta situación?

54. Mientras limpia un estacionamiento, un quitanieve empuja una pila cada vez más grande de nieve enfrente de él. Suponga que un automóvil que se mueve a través del aire se modela como un cilindro de área A que empuja un disco creciente de aire enfrente de él. El aire originalmente estacionario se pone en movimiento a la rapidez constante v del cilindro, como se muestra en la figura P8.54. En un intervalo de tiempo Δt, un nuevo disco de aire de masa Δm se debe mover una distancia $v\,\Delta t$ y, por tanto, se le debe dar una energía cinética $\frac{1}{2}(\Delta m)v^2$. Con el uso de este modelo, muestre que la pérdida de potencia del automóvil debida a la resistencia del aire es $\frac{1}{2}\rho A v^3$, y que la fuerza resistiva que actúa sobre el automóvil es $\frac{1}{2}\rho A v^2$, donde ρ es la densidad del aire. Compare este resultado con la expresión empírica $\frac{1}{2}D\rho A v^2$ para la fuerza resistiva.

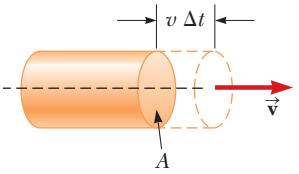


Figura P8.54

55. Una turbina de viento en un parque eólico responde a una fuerza de resistencia de aire de alta rapidez, $R = \frac{1}{2}D\rho A v^2$. La potencia disponible es $P = Rv = \frac{1}{2}D\rho\pi r^2 v^3$, donde v es la rapidez del viento y hemos supuesto una cara circular para la turbina de viento de radio r. Tome el coeficiente de arrastre como $D = 1.00$ y la densidad del aire del apéndice al final del libro. Para una turbina de viento que tiene $r = 1.50$ m, calcule la potencia disponible con (a) $v = 8.00$ m/s y (b) $v = 24.0$ m/s. La potencia entregada al generador está limitada por la eficiencia del sistema, alrededor del 25%. En comparación, una casa americana grande utiliza aproximadamente 2 kW de energía eléctrica.

56. Considere el rifle de juguete del ejemplo 8.3. Supongamos que la masa del proyectil, la distancia de compresión y la constante elástica permanecen constantes, como las dadas

o calculadas en el ejemplo. Sin embargo, suponga que hay una fuerza de fricción de magnitud 2.00 N que actúa sobre el proyectil conforme roza contra el interior del cañón. La longitud vertical desde el punto Ⓐ hasta el final del barril es 0.600 m. (a) Después que se comprime el resorte y se dispara el rifle de juguete, ¿hasta qué altura llega el proyectil por encima del punto Ⓑ? (b) Dibuje cuatro gráficas de barras de energía para esta situación, análogas a las figuras 8.6c–d.

57. Conforme el conductor pisa el pedal del acelerador, un automóvil de 1 160 kg de masa se acelera desde el reposo. Durante los primeros segundos de movimiento, el automóvil aumenta su aceleración con el tiempo de acuerdo con la expresión

$$a = 1.16t - 0.210t^2 + 0.240t^3$$

donde t está en segundos y a está en m/s^2. (a) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética del vehículo durante el intervalo de $t = 0$ a $t = 2.50$ s? (b) ¿Cuál es la potencia promedio mínima del motor en este intervalo de tiempo? (c) ¿Por qué el valor del inciso (b) se describe como el valor *mínimo*?

58. **Problema de repaso.** *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Se afirma que *una nueva montaña rusa de alta rapidez* es tan segura que los pasajeros no necesitan llevar cinturones de seguridad o cualquier otro dispositivo de restricción. La montaña está diseñada con una sección circular vertical sobre la cual la montaña viaja en el interior del círculo para que los pasajeros estén boca abajo durante un corto intervalo de tiempo. El radio de la sección circular es 12.0 m y la montaña rusa entra en la parte inferior de la sección circular con una rapidez de 22.0 m/s. Suponga que el carro se mueve sin fricción en la pista y modele al carro como una partícula.

59. Un resorte horizontal unido a una pared tiene una constante de fuerza $k = 850$ N/m. Un bloque de masa $m = 1.00$ kg se une al resorte y descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, como en la figura P8.59. (a) El bloque se jala a una posición $x_i = 6.00$ cm desde la posición de equilibrio y se suelta. Encuentre la energía potencial elástica almacenada en el resorte cuando el bloque está a 6.00 cm de la posición de equilibrio y cuando el bloque pasa por la posición de equilibrio. (b) Encuentre la rapidez del bloque cuando pasa por el punto de equilibrio. (c) ¿Cuál es la rapidez del bloque cuando está en una posición $x_i/2 = 3.00$ cm? (d) ¿Por qué la respuesta al inciso (c) no es la mitad de la respuesta del inciso (b).

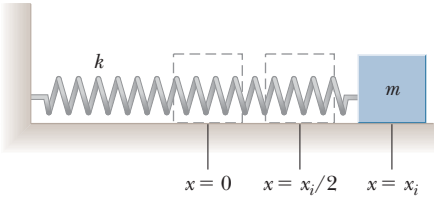


Figura P8.59

60. Hace más de 2 300 años el maestro griego Aristóteles escribió el primer libro llamado *Física*. Puesto en terminología más precisa, este pasaje es del final de su sección Eta:

> Sea P la potencia de un agente que causa movimiento; w, la carga movida; d, la distancia recorrida, y Δt, el intervalo de tiempo requerido. Entonces (1) una potencia igual a P en un intervalo de tiempo igual a Δt moverá $w/2$ una distancia $2d$, o (2) moverá $w/2$ la distancia dada d en el intervalo de tiempo $\Delta t/2$. Además, si (3) la potencia conocida P mueve la carga dada w una distancia $d/2$ en el intervalo de tiempo $\Delta t/2$, por lo tanto (4) $P/2$ moverá $w/2$ la distancia dada d en el intervalo de tiempo dado Δt.

(a) Demuestre que las proporciones de Aristóteles se incluyen en la ecuación $P\,\Delta t = bwd$, donde b es una constante de proporcionalidad. (b) Demuestre que la teoría de movimiento del libro incluye esta parte de la teoría de Aristóteles como un caso especial. En particular, describa una situación en la que sea verdadera, deduzca la ecuación que represente las proporciones de Aristóteles y determine la constante de proporcionalidad.

61. El zanco saltarín de un niño (figura P8.61) almacena energía en un resorte con una constante de fuerza de 2.50×10^4 N/m. En la posición Ⓐ ($x_Ⓐ = -0.100$ m), la compresión del resorte es un máximo y el niño momentáneamente está en reposo. En la posición Ⓑ ($x_Ⓑ = 0$), el resorte está relajado y el niño se mueve hacia arriba. En la posición Ⓒ, el niño de nuevo está momentáneamente en reposo en lo alto del salto. La masa combinada del niño y el zanco es de 25.0 kg. Aunque el niño debe inclinarse hacia adelante para permanecer en equilibrio, el ángulo es pequeño, por lo que vamos a suponer que el zanco saltarín es vertical. También se supone que el niño no dobla sus piernas durante el movimiento. (a) Calcule la energía total del sistema niño–zanco saltarín–Tierra, y considere las energías gravitacional y potencial elástica como cero para $x = 0$. (b) Determine $x_Ⓒ$. (c) Calcule la rapidez del niño en $x = 0$. (d) Determine el valor de x para el que la energía cinética del sistema sea un máximo. (e) Calcule la rapidez hacia arriba máxima del niño.

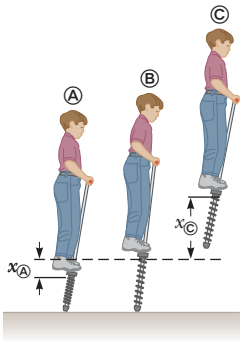


Figura P8.61

62. Un objeto de 1.00 kg se desliza hacia la derecha sobre una superficie que tiene un coeficiente de fricción cinética de 0.250 (figura P8.62a). El objeto tiene una rapidez $v_i = 3.00$ m/s cuando hace contacto con un resorte ligero que tiene una constante de fuerza de 50.0 N/m. El objeto

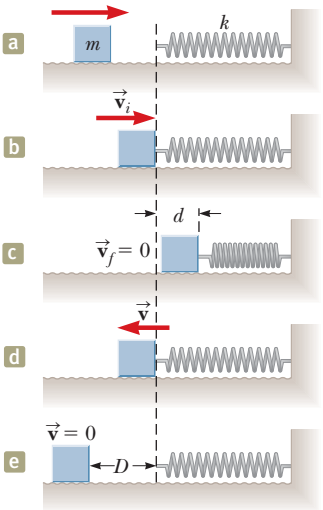


Figura P8.62

llega al reposo después que el resorte se comprime una distancia d (figura P8.62c). Entonces el objeto se fuerza hacia la izquierda mediante el resorte y continúa moviéndose en dicha dirección más allá de la posición no estirada del resorte (figura 8.62d). Al final, el objeto llega al reposo una distancia D a la izquierda del resorte no estirado (figura 8.62e). Encuentre (a) la distancia de compresión d, (b) la rapidez v en la posición no estirada cuando el objeto se está moviendo hacia la izquierda y (c) la distancia D donde el objeto llega al reposo.

63. Un bloque de 10.0 kg se libera desde el punto Ⓐ en la figura P8.63. La pista no tiene fricción, excepto por la porción entre los puntos Ⓑ y Ⓒ, que tiene una longitud de 6.00 m. El bloque viaja por la pista, golpea un resorte con 2 250 N/m de constante de fuerza y comprime el resorte 0.300 m desde su posición de equilibrio antes de llegar al reposo momentáneamente. Determine el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie rugosa entre Ⓑ y Ⓒ.

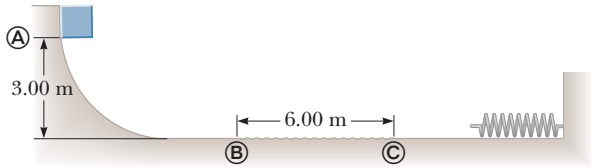


Figura P8.63

64. Un bloque de masa $m_1 = 20.0$ kg se conecta a un bloque de masa $m_2 = 30.0$ kg mediante una cuerda que pasa sobre una polea ligera sin fricción. El bloque de 30.0 kg se conecta a un resorte que tiene masa despreciable y una constante de fuerza de 250 N/m, como se muestra en la figura P8.64. El resorte no está estirado cuando el sistema está como se muestra en la figura y el plano inclinado no tiene fricción. El bloque de 20.0 kg se jala una distancia $h = 20.0$ cm hacia abajo del plano inclinado de ángulo $\theta = 40.0°$ y se libera desde el reposo. Encuentre la rapidez de cada bloque cuando el resorte ya no está estirado).

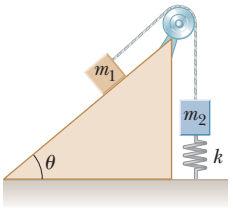


Figura P8.64

65. Un bloque de 0.500 kg de masa se empuja contra un resorte horizontal de masa despreciable hasta que el resorte se comprime una distancia x (figura P8.65). La constante de fuerza del resorte es 450 N/m. Cuando se libera, el bloque viaja a lo largo de una superficie horizontal sin fricción al punto Ⓐ, la parte baja de una pista circular vertical de radio $R = 1.00$ m, y continúa moviéndose a lo largo de la pista. La rapidez del bloque en la parte baja de la pista es $v_Ⓐ = 12.0$ m/s, y el bloque experimenta una fuerza de fricción promedio de 7.00 N mientras se desliza hacia arriba de la pista. (a) ¿Cuál es x? (b) Si el bloque alcanzará la parte superior de la pista, ¿cuál sería su rapidez en ese punto? (c) ¿En realidad el bloque llega a lo alto de la pista o cae antes de llegar a lo alto?

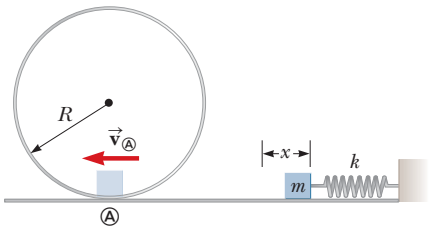


Figura P8.65

66. Problema de repaso. Como una broma, alguien equilibró una calabaza en el punto más alto de un gran silo. El silo tiene como remate un casco semiesférico que no tiene fricción cuando está mojado. La línea desde el centro de curvatura del casco hacia la calabaza forma un ángulo $\theta_i = 0°$ con la vertical. En una noche lluviosa, mientras está de pie en las cercanías, un soplo de viento hace que la calabaza se comience a deslizar hacia abajo desde el reposo. La calabaza pierde contacto con el casco cuando la línea desde el centro del hemisferio hacia la calabaza forma cierto ángulo con la vertical. ¿Cuál es este ángulo?

67. Problema de repaso. La masa de un automóvil es 1 500 kg. La forma del cuerpo del automóvil es tal que su coeficiente de arrastre aerodinámico es $D = 0.330$ y su área frontal es 2.50 m^2. Suponga que la fuerza de arrastre es proporcional a v^2 e ignore otras fuentes de fricción, calcule la potencia requerida para mantener una rapidez de 100 km/h mientras el automóvil asciende una larga colina con 3.20° de pendiente.

68. Un péndulo, que consta de una cuerda ligera de longitud L y una esfera pequeña, se balancea en el plano vertical. La cuerda golpea una clavija ubicada a una distancia d bajo el punto de suspensión (figura P8.68). (a) Demuestre que si la esfera se libera desde una altura por abajo de la clavija, regresará a esta altura después que la cuerda golpee la clavija. (b) Demuestre que si el péndulo se libera desde la posición horizontal ($\theta = 90°$) y se balancea en un círculo completo con centro en la clavija, el valor mínimo de d debe ser $3L/5$.

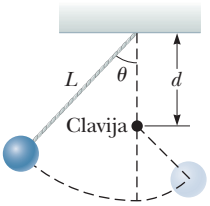


Figura P8.68

69. Un bloque de masa M descansa sobre una mesa. Se amarra al extremo inferior de un resorte vertical ligero. El extremo superior del resorte se amarra a un bloque de masa m. El bloque superior se empuja hacia abajo con una fuerza adicional $3mg$, así que la compresión del resorte es $4mg/k$. En esta configuración, el bloque superior se libera desde el reposo. El resorte eleva de la mesa al bloque inferior. En términos de m, ¿cuál es el mayor valor posible de M?

70. Problema de repaso. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Una atleta pone a prueba la fortaleza de sus manos al tener un asistente que cuelga pesos de su cinturón cuando se cuelga con sus manos de una barra horizontal. Cuando los pesos que cuelgan de su cinturón han aumentado hasta el 80% de su peso corporal, sus manos ya no pueden apoyarla y cae al piso. Frustrada por no cumplir su

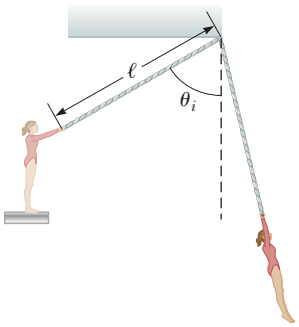


Figura P8.70

meta de fuerza en las manos, decide pivotar en un trapecio. El trapecio consiste en una barra suspendida por dos cuerdas paralelas, cada una de longitud ℓ, permitiendo a los artistas pivotar en un arco circular vertical (figura P8.70). La atleta sostiene la barra y sale de una plataforma elevada, comenzando a partir del reposo con las cuerdas en un ángulo $\theta_i = 60.0°$ con respecto a la vertical. Cuando se balancea hacia adelante y hacia atrás varias veces en un arco circular, olvida su frustración relacionada con la prueba de fuerza en las manos. Suponga que el tamaño del cuerpo de la artista es pequeño en comparación con la longitud ℓ y que la resistencia del aire es despreciable.

71. Mientras corre, una persona transforma 0.600 J de energía química en energía mecánica por paso por kilogramo de masa del cuerpo. Si un corredor de 60.0 kg transforma energía a un ritmo de 70.0 W durante una carrera, ¿qué tan rápido está corriendo la persona? Suponga que un paso corriendo tiene una longitud de 1.50 m.

72. Un carro de montaña rusa que se muestra en la figura P8.72 se libera desde el reposo a una altura h y luego se mueve libremente con fricción despreciable. La montaña rusa tiene un bucle circular de radio R en un plano vertical. (a) Primero suponga que el carro apenas libra el bucle; en lo alto del bucle, los pasajeros están cabeza abajo y se sienten sin peso. Encuentre la altura h requerida del punto de liberación por encima de la parte baja del bucle en términos de R. (b) Ahora suponga que el punto de liberación está en o arriba de la altura mínima requerida. Demuestre que la fuerza normal sobre el carro en la parte baja del bucle supera la fuerza normal en lo alto del bucle por seis veces el peso del carro. La fuerza normal sobre cada pasajero sigue la misma regla. Puesto que una fuerza normal tan grande es peligrosa y muy incómoda para los pasajeros, las montañas rusas no se construyen con bucles circulares en planos verticales. La figura P6.17 (página 170) muestra un diseño actual.

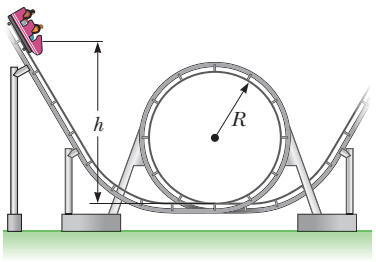


Figura P8.72

73. Una bola gira alrededor de un círculo *vertical* en el extremo de una cuerda. El otro extremo de la cuerda está fijo en el centro del círculo. Suponiendo que la energía total del sistema bola–Tierra permanece constante, demuestre que la tensión en la cuerda en la parte baja es mayor que la tensión en lo alto por seis veces el peso de la bola.

74. Un avión de 1.50×10^4 kg de masa hace un vuelo a nivel, moviéndose inicialmente a 60.0 m/s. La fuerza resistiva ejercida por el aire en el avión tiene una magnitud de 4.0×10^4 N. Por la tercera ley de Newton, si los motores ejercen una fuerza sobre los gases de escape para expulsarlos de la parte posterior del motor, los gases de escape ejercen una fuerza sobre los motores en la dirección de desplazamiento del avión. Esta fuerza se denomina empuje, y el valor del empuje en esta situación es 7.50×10^4 N. (a) ¿El trabajo realizado por los gases de escape en el avión durante un intervalo de tiempo es igual al cambio en la energía cinética del avión? Explique. (b) Encuentre la rapidez del avión después que ha viajado 5.0×10^2 m.

75. Considere la colisión bloque–resorte analizada en el ejemplo 8.8. (a) En la parte (B), para la situación en que la superficie ejerce una fuerza de fricción sobre el bloque, demuestre que el bloque nunca llega de regreso a $x = 0$. (b) ¿Cuál es el valor máximo del coeficiente de fricción que permitiría al bloque regresar a $x = 0$?

76. Haciendo bicicleta para ejercicio aeróbico, una mujer quiere que su ritmo cardiaco esté entre 136 y 166 latidos por minuto. Suponga que su ritmo cardiaco es directamente proporcional a su potencia mecánica de salida dentro del rango indicado. Desprecie todas las fuerzas sobre el sistema mujer–bicicleta, excepto la fricción estática hacia adelante en la tracción de la bicicleta y una fuerza de resistencia del aire proporcional al cuadrado de su rapidez. Cuando su rapidez es de 22.0 km/h, su ritmo cardiaco es 90.0 latidos por minuto. ¿En qué rango debe estar su rapidez para que su ritmo cardiaco esté en el rango que quiere?

77. **Problema de repaso.** En 1887, en Bridgeport, Connecticut, C. J. Belknap construyó el tobogán de agua que se muestra en la figura P8.77. Un pasajero en un pequeño trineo, de 80.0 kg de masa total, se empuja para arrancar en lo alto del tobogán (punto Ⓐ), con una rapidez de 2.50 m/s. El tobogán tiene 9.76 m de alto en la cima, 54.3 m de largo y 0.51 m de ancho. A lo largo de su longitud, 725 ruedas pequeñas hacen la fricción despreciable. Al momento de dejar el tobogán horizontalmente en su extremo inferior (punto Ⓒ), el pasajero pasa rozando el agua de Long Island Sound por hasta 50 m, "saltando como un guijarro plano", antes de que llegue al reposo y nade a la orilla, jalando su trineo tras de él. (a) Encuentre la rapidez del trineo y el pasajero en el punto Ⓒ. (b) Modele la fuerza de la fricción

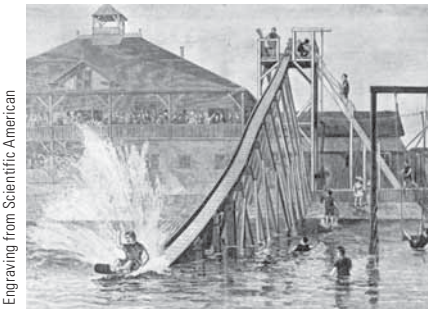


Figura P8.77

del agua como una fuerza retardadora constante que actúa sobre una partícula. Encuentre la magnitud de la fuerza de fricción que el agua ejerce sobre el trineo. (c) Encuentre la magnitud de la fuerza que el tobogán ejerce sobre el trineo en el punto Ⓑ. (d) En el punto Ⓒ el tobogán es horizontal, pero curvo en el plano vertical. Suponga que su radio de curvatura es 20.0 m. Encuentre la fuerza que el tobogán ejerce sobre el trineo en el punto Ⓒ.

78. En una biopsia con aguja, se extrae una tira estrecha de tejido de un paciente usando una aguja hueca. En lugar de empujar con la mano, para asegurar un corte limpio se dispara la aguja con un resorte dentro del cuerpo del paciente. Suponga que la aguja tiene una masa de 5.60 g, el resorte ligero tiene una constante de fuerza de 375 N/m y el resorte se comprime originalmente 8.10 cm para proyectar a la aguja horizontalmente sin fricción. Después que la aguja sale del resorte, la punta de la aguja se mueve a través de 2.40 cm de piel y tejido blando, que ejercen sobre ésta una fuerza resistiva de 7.60 N. Luego, la aguja corta 3.50 cm en un órgano, que ejerce sobre ésta una fuerza de retroceso de 9.20 N. Encuentre (a) la rapidez máxima de la aguja y (b) la rapidez con la que corre la brida en el extremo trasero de la aguja para parar y así limitar la penetración a 5.90 cm.

Problemas de desafío

79. **Problema de repaso.** Un tablero uniforme de longitud L se desliza a lo largo de un plano horizontal uniforme (sin fricción), como se muestra en la figura P8.79a. Después el tablero se desliza a través de la frontera con una superficie horizontal rugosa. El coeficiente de fricción cinética entre el tablero y la segunda superficie es μ_k. (a) Encuentre la aceleración del tablero cuando su extremo frontal recorre una distancia x más allá de la frontera. (b) El tablero se detiene en el momento que su extremo posterior llega a la frontera, como se muestra en la figura P8.79b. Encuentre la rapidez inicial v del tablero.

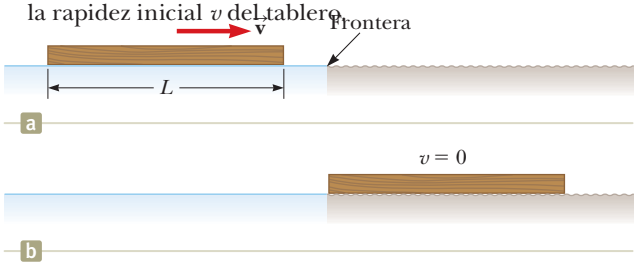


Figura P8.79

80. Desde el reposo, una persona de 64.0 kg hace un salto bungee desde un globo anclado a 65.0 m sobre el suelo. La cuerda bungee tiene masa despreciable y longitud no estirada de 25.8 m. Un extremo se amarra a la canasta del globo aerostático y el otro extremo a un arnés alrededor del cuerpo de la persona. La cuerda se modela como un resorte que obedece la ley de Hooke con una constante de resorte de 81.0 N/m, y el cuerpo de la persona se modela como partícula. El globo no se mueve. (a) Exprese la energía potencial gravitacional del sistema persona–Tierra como función de la altura variable y de la persona sobre el suelo. (b) Exprese la energía potencial elástica de la cuerda como función de y. (c) Exprese la energía potencial total del sistema persona–cuerda–Tierra como función de y. (d) Trace una gráfica de energías gravitacional, elástica y potencial total como funciones de y. (e) Suponga que la resistencia del aire es despreciable. Determine la altura mínima de la persona sobre el suelo durante su caída. (f) ¿La gráfica de energía potencial muestra alguna posición de equilibrio? Si es así, ¿a qué elevaciones? ¿Son estables o inestables? (g) Determine la rapidez máxima del saltador.

81. Jane, cuya masa es 50.0 kg, necesita columpiarse a través de un río (que tiene una anchura D), lleno de cocodrilos cebados con carne humana, para salvar a Tarzán del peligro. Ella debe columpiarse contra un viento que ejerce una fuerza horizontal constante $\vec{\mathbf{F}}$, en una liana que tiene longitud L e inicialmente forma un ángulo θ con la vertical (figura P8.81). Considere $D = 50.0$ m, $F = 110$ N, $L = 40.0$ m y $\theta = 50.0°$. (a) ¿Con qué rapidez mínima Jane debe comenzar su balanceo para apenas llegar al otro lado? (b) Una vez que el rescate está completo, Tarzán y Jane deben columpiarse de vuelta a través del río. ¿Con qué rapidez mínima deben comenzar su balanceo? Suponga que Tarzán tiene una masa de 80.0 kg.

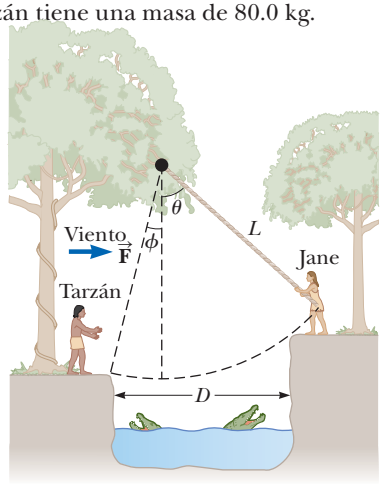


Figura P8.81

82. Una bola de masa $m = 300$ g se conecta mediante una cuerda resistente de longitud $L = 80.0$ cm a un pivote y se mantiene en su lugar con la cuerda vertical. Un viento ejerce fuerza constante F hacia la derecha sobre la bola, como se muestra en la figura P8.82. La bola se libera desde el reposo. El viento hace que se balancee para lograr altura máxima H sobre su punto de partida antes de que se balancee abajo de nuevo. (a) Encuentre H como función

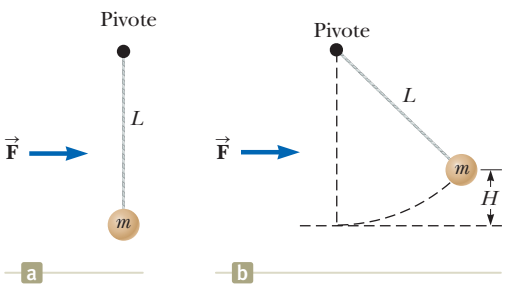


Figura P8.82

de F. Evalúe H (b) para $F = 1.00$ N y (c) para $F = 10.0$ N. ¿Cómo se comporta H (d) cuando F tiende a cero y (e) cuando F tiende a infinito? (f) Ahora considere la altura de equilibrio de la bola con el viento que sopla. Determínela como función de F. Evalúe la altura de equilibrio (g) para $F = 10$ N y (h) para F que tiende a infinito.

83. **¿Qué pasaría si?** Considere la montaña rusa que se describe en el problema 58. Debido a que hay algo de fricción entre la montaña y la pista, la montaña rusa entra en la sección circular con una rapidez de 15.0 m/s en lugar de los 22.0 m/s del problema 58. ¿Esta situación es más o menos peligrosa para los pasajeros que la del problema 58? Suponga que la sección circular aún está sin fricción.

84. Una cadena uniforme de 8.00 m de longitud inicialmente yace estirada sobre una mesa horizontal. (a) Suponiendo que el coeficiente de fricción estática entre la cadena y la mesa es 0.600, demuestre que la cadena comenzará a deslizarse de la mesa si al menos 3.00 m de ella cuelgan sobre el borde de la mesa. (b) Determine la rapidez de la cadena cuando su último eslabón deja la mesa, teniendo en cuenta que el coeficiente de fricción cinética entre la cadena y la mesa es 0.400.

85. Un atrevido planea un salto bungee desde un globo aerostático a 65.0 m del suelo. Usará una cuerda elástica uniforme, amarrada a un arnés alrededor de su cuerpo, para detener su caída en un punto 10.0 m sobre el suelo. Modele su cuerpo como una partícula y la cuerda como si tuviera masa despreciable y obedeciera la ley de Hooke. En una prueba preliminar, colgando en reposo de una cuerda de 5.00 m de largo, él encontró que el peso de su cuerpo estira la cuerda 1.50 m. Él pretende soltarse desde el reposo en el punto donde el extremo superior de una sección más larga de la cuerda está unida al globo fijo. (a) ¿Qué longitud de cuerda debe usar? (b) ¿Qué aceleración máxima experimentará?

CAPÍTULO

9

Cantidad de movimiento lineal y colisiones



9.1 Cantidad de movimiento lineal

9.2 Análisis de modelo: sistema aislado (cantidad de movimiento)

9.3 Análisis de modelo: sistema no aislado (cantidad de movimiento)

9.4 Colisiones en una dimensión

9.5 Colisiones en dos dimensiones

9.6 El centro de masa

9.7 Sistemas de muchas partículas

9.8 Sistemas deformables

9.9 Propulsión de cohetes

El concepto de cantidad de movimiento permite el análisis de colisiones de automóviles aun sin el conocimiento detallado de las fuerzas involucradas. Con estos análisis se puede determinar la velocidad relativa de los autos antes de la colisión, y además ayudar a los ingenieros en el diseño de vehículos más seguros. (La traducción al español del texto en Alemán a un lado del remolque es: "Escala técnica de tu vehículo.") *(AP Photos/ Keystone/Regina Kuehne)*

Considere lo que ocurre cuando dos autos colisionan como en la fotografía de inicio de este capítulo. Ambos automóviles alteran su movimiento, de alta velocidad pasan al reposo debido a la colisión. Debido a que cada auto experimenta un gran cambio en su velocidad durante un muy corto intervalo de tiempo, la fuerza promedio sobre cada automóvil es bastante grande. Por la tercera ley de Newton, los autos experimentan una fuerza de la misma magnitud. Por la segunda ley de Newton, los efectos de dichas fuerzas sobre el movimiento del auto dependen de la masa de éste.

Uno de los principales objetivos de este capítulo es permitirle entender y analizar estos eventos en una forma simple. Primero, se introduce el concepto de *cantidad de movimiento*, que es útil para describir objetos en movimiento. La cantidad de movimiento de un objeto se relaciona tanto con su masa como con su velocidad. El concepto de cantidad de movimiento conduce a una segunda ley de conservación, la conservación de la cantidad de movimiento. A su vez, se identifican nuevas versiones de análisis de modelos para la cantidad de movimiento de un sistema aislado y de uno no aislado. Esos modelos son especialmente útiles para tratar problemas que incluyen colisiones entre objetos y para analizar propulsión de cohetes. Este capítulo también introduce el concepto de centro de masa de un sistema de partículas. Se encuentra que el movimiento de un sistema de partículas se puede describir mediante el movimiento de una partícula ubicada en el centro de masa que represente a todo el sistema.

9.1 Cantidad de movimiento lineal

En el capítulo 8 se estudiaron situaciones que son difíciles de analizar con las leyes de Newton. Fue posible resolver problemas que involucran estas situaciones al identificar un sistema y aplicar un principio de conservación, el de conservación de energía. Considere ahora otra situación y vea si es posible resolverla con los modelos ya estudiados:

Un arquero de 60 kg está de pie, en reposo, sobre hielo sin fricción y dispara una flecha de 0.030 kg horizontalmente a 85 m/s. ¿Qué velocidad tiene el arquero, sobre el hielo, después de disparar la flecha?

A partir de la tercera ley de Newton, se sabe que la fuerza que el arco ejerce sobre la flecha se iguala mediante una fuerza en la dirección opuesta sobre el arco (y el arquero). Esta fuerza hace que el arquero se deslice hacia atrás sobre el hielo con la rapidez pedida en el problema. No es posible determinar esta rapidez si se emplean los modelos de movimiento como el de partícula bajo aceleración constante porque no se tiene información sobre la aceleración del arquero. No se pueden utilizar modelos de fuerza como el de partícula bajo una fuerza neta porque no se conocen las fuerzas involucradas en esta situación. Los modelos de energía no son de ayuda porque se ignora el trabajo realizado al estirar la cuerda del arco o la energía potencial elástica en el sistema relacionada con la tensión en la cuerda del arco.

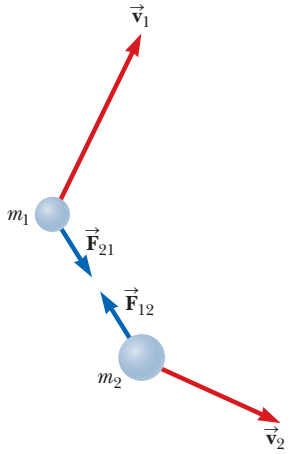


Figura 9.1 Dos partículas interactúan mutuamente. De acuerdo con la tercera ley de Newton, se debe tener $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$.

A pesar de la incapacidad para resolver el problema del arquero mediante las técnicas aprendidas hasta el momento, este problema es muy simple de solucionar si se introduce una nueva cantidad que describa el movimiento, la *cantidad de movimiento lineal*. Para generar esta nueva cantidad, considere un sistema aislado de dos partículas (figura 9.1) con masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades $\vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_2$ en un instante de tiempo. Como el sistema está aislado, la única fuerza sobre una partícula es a causa de la otra partícula. Si una fuerza proveniente de la partícula 1 (por ejemplo, una fuerza gravitacional) actúa sobre la partícula 2, debe haber una segunda fuerza, igual en magnitud pero opuesta en dirección, que la partícula 2 ejerce sobre la partícula 1. Es decir, las fuerzas sobre las partículas forman un par acción-reacción de la tercera ley de Newton, y $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$. Esta condición se expresa como

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} + \vec{\mathbf{F}}_{12} = 0$$

Desde el punto de vista del sistema, esta ecuación expresa que al sumar las fuerzas sobre las partículas en un sistema aislado, la suma es cero.

Analicemos más esta situación al incorporar la segunda ley de Newton. En el instante que se muestra en la figura 9.1, las partículas en interacción en el sistema tienen aceleraciones de acuerdo con las fuerzas sobre ellas. Por lo tanto, al sustituir la fuerza sobre cada partícula con $m\vec{\mathbf{a}}$ para la partícula se obtiene

$$m_1\vec{\mathbf{a}}_1 + m_2\vec{\mathbf{a}}_2 = 0$$

Ahora sustituya cada aceleración con su definición de la ecuación 4.5:

$$m_1\frac{d\vec{\mathbf{v}}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{\mathbf{v}}_2}{dt} = 0$$

Si las masas m_1 y m_2 son constantes, se les puede colocar adentro de la operación derivada, lo cual da

$$\frac{d(m_1\vec{\mathbf{v}}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{\mathbf{v}}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2) = 0 \qquad (9.1)$$

Observe que la derivada de la suma $m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2$ respecto del tiempo es cero. En consecuencia, esta suma debe ser constante. De esta discusión se aprende que la cantidad $m\vec{\mathbf{v}}$ para una partícula es importante en que la suma de estas cantidades para un sistema de partículas aislado se conserva. A esta cantidad se le llama *cantidad de movimiento lineal*:

Definición de cantidad de movimiento lineal de una partícula

La **cantidad de movimiento lineal** de una partícula o un objeto que se modela como una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ se define como el producto de la masa y la velocidad de la partícula:

$$\vec{\mathbf{p}} \equiv m\vec{\mathbf{v}} \qquad (9.2)$$

La cantidad de movimiento lineal es una cantidad vectorial porque es igual al producto de una cantidad escalar m y una cantidad vectorial $\vec{\mathbf{v}}$. Su dirección está a lo largo de $\vec{\mathbf{v}}$, tiene dimensiones ML/T y su unidad del SI es kg · m/s.

Si una partícula se está moviendo en una dirección arbitraria, $\vec{\mathbf{p}}$ tiene tres componentes y la ecuación 9.2 es equivalente a las ecuaciones por componentes

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

Como se observa a partir de su definición, el concepto de cantidad de movimiento[1] proporciona una distinción cuantitativa entre partículas pesadas y ligeras que se mueven con la misma velocidad. Por ejemplo, la cantidad de movimiento de una bola de boliche es mucho mayor que el de una bola de tenis que se mueve con la misma rapidez. Newton llamó al producto $m\vec{\mathbf{v}}$ *cantidad de movimiento*; tal vez hoy en día este término es una descripción más gráfica que la palabra *momentum*, que viene del latín y significa movimiento.

Se ha visto otra cantidad, energía cinética, que es una combinación de masa y rapidez. Es legítimo preguntar por qué se necesita otra cantidad, cantidad de movimiento, relacionada con masa y velocidad. Existen claras diferencias entre la energía cinética y la cantidad de movimiento. Primero, la energía cinética es un escalar, mientras que la cantidad de movimiento es un vector. Considere un sistema de dos partículas de igual masa que se mueven a lo largo de una línea recta, una hacia la otra, con la misma rapidez. El sistema tiene energía cinética porque sus integrantes están en movimiento. Sin embargo, debido a la naturaleza vectorial de la cantidad de movimiento, éste es cero para todo el sistema. Una segunda mayor diferencia es que la energía cinética se puede transformar en otros tipos de energía, como energía potencial o energía interna. Sólo existe un tipo de cantidad de movimiento lineal, así que no se observan estas transformaciones cuando en un problema se utiliza el método de cantidad de movimiento. Estas diferencias son suficientes para elaborar modelos apoyados en la cantidad de movimiento y separados de aquellos sustentados en la energía, así se tiene una herramienta independiente utilizable en la solución de problemas.

Al usar la segunda ley de movimiento de Newton, se puede relacionar la cantidad de movimiento lineal de una partícula con la fuerza resultante que actúa sobre ella. Se inicia con la segunda ley de Newton y se sustituye la definición de aceleración:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$

En la segunda ley de Newton la masa m se supone constante. Por lo tanto, se puede llevar m dentro de la operación derivada para dar

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{d(m\vec{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \qquad (9.3)$$

◀ **Segunda ley de Newton para una partícula**

Esta ecuación muestra que **la razón de cambio con el tiempo de la cantidad de movimiento lineal de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre la partícula.** En el capítulo 5, a la fuerza se le identificó con aquello que causa un cambio en el movimiento de un objeto (sección 5.2). En la segunda ley de Newton (ecuación 5.2) se utilizó la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ para representar el cambio en el movimiento. Ahora, con la ecuación 9.3 se observa que puede emplearse la derivada de la cantidad de movimiento $\vec{\mathbf{p}}$ con respecto al tiempo para representar el cambio en el movimiento.

Esta forma alternativa de la segunda ley de Newton es la manera en que Newton presentó la ley, y de hecho es más general que la expresión que se introdujo en el capítulo 5. Además de las situaciones en las que el vector velocidad varía con el tiempo, la ecuación 9.3 se puede emplear para estudiar fenómenos en los que cambia la masa. Por ejemplo, la masa de un cohete es variable conforme se quema el combustible y es expulsado del cohete. No se puede usar $\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ para analizar

[1]En este capítulo los términos *cantidad de movimiento* y *cantidad de movimiento lineal* tienen el mismo significado. Más adelante, en el capítulo 11, se usará el término *cantidad de movimiento angular* para una cantidad diferente cuando se trate con movimiento rotacional.

la propulsión de cohetes; se debe aplicar el método de la cantidad de movimiento, como se mostrará en la sección 9.9

Examen rápido 9.1 Dos objetos tienen iguales energías cinéticas. ¿De qué modo se comparan las magnitudes de sus cantidades de movimiento? **(a)** $p_1 < p_2$ **(b)** $p_1 = p_2$ **(c)** $p_1 > p_2$ y (d) no hay suficiente información para decidir.

Examen rápido 9.2 Su profesor de educación física le lanza una pelota de béisbol con cierta rapidez y usted la atrapa. Luego el profesor le lanza una pelota grande y pesada usada para gimnasia cuya masa es diez veces la masa de la pelota de béisbol. Usted tiene las siguientes opciones: la pelota grande y pesada se le puede lanzar con **(a)** la misma rapidez que la bola de béisbol, **(b)** la misma cantidad de movimiento o **(c)** la misma energía cinética. Clasifique estas opciones de la más fácil a la más difícil de atrapar.

9.2 Análisis de modelo: sistema aislado (cantidad de movimiento)

Al usar la definición de cantidad de movimiento, la ecuación 9.1 se puede reescribir

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2) = 0$$

Prevención de riesgos ocultos 9.1

La cantidad de movimiento de un sistema aislado se conserva Aunque la cantidad de movimiento de un sistema aislado se conserva, la cantidad de movimiento de una partícula dentro de un sistema aislado no necesariamente se conserva, porque es posible que otras partículas interactúen con ella. Evite aplicar la conservación de cantidad de movimiento a una sola partícula.

Ya que la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2$ es *cero*, se concluye que la cantidad de movimiento *total* del sistema aislado de las dos partículas en la figura 9.1 debe permanecer constante:

$$\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \text{constante} \tag{9.4}$$

o, de manera equivalente, durante un intervalo de tiempo,

$$\Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = 0 \tag{9.5}$$

La ecuación 9.5 se puede escribir como

$$\vec{\mathbf{p}}_{1i} + \vec{\mathbf{p}}_{2i} = \vec{\mathbf{p}}_{1f} + \vec{\mathbf{p}}_{2f}$$

donde $\vec{\mathbf{p}}_{1i}$ y $\vec{\mathbf{p}}_{2i}$ son los valores iniciales y $\vec{\mathbf{p}}_{1f}$ y $\vec{\mathbf{p}}_{2f}$ son los valores finales de las cantidades de movimiento para las dos partículas en el intervalo de tiempo en que las partículas interactúan. Esta ecuación en forma de componentes demuestra que las cantidades de movimiento totales en las direcciones x, y y z se conservan todas de manera independiente:

$$p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx} \qquad p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy} \qquad p_{1iz} + p_{2iz} = p_{1fz} + p_{2fz} \tag{9.6}$$

La ecuación 9.5 es el enunciado matemático de un nuevo análisis de modelo, el **sistema aislado (cantidad de movimiento)**. Se puede extender a cualquier número de partículas en un sistema aislado, como se muestra en la sección 9.7. En el capítulo 8 se estudió, para un sistema aislado, la versión de la energía ($\Delta E_{\text{sistema}} = 0$) y ahora se tiene una versión en cantidad de movimiento. En general, la ecuación 9.5 se puede establecer como sigue:

Versión de la cantidad de movimiento del modelo de sistema aislado

Siempre que interactúan dos o más partículas en un sistema aislado, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante.

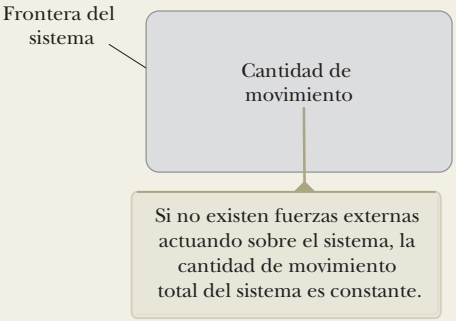
Este enunciado dice que la cantidad de movimiento total de un sistema aislado en todo momento es igual a su cantidad de movimiento inicial.

Advierta que no se hizo afirmación alguna en cuanto al tipo de fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema. Además, no se especificó si las fuerzas son conservativas o no conservativas. El único requisito es que las fuerzas deben ser *internas* al sistema. Este único requisito debería darle una idea del poder de este nuevo modelo.

Análisis de modelo Sistema aislado (cantidad de movimiento)

Imagine que identificó un sistema para analizarlo y que ha definido su frontera. Si no existen fuerzas externas sobre el sistema, éste está *aislado*. En ese caso, la cantidad de movimiento total del sistema, que es la suma vectorial de las cantidades de movimiento de todos los integrantes del sistema, se conserva:

$$\Delta \vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = 0 \qquad (9.5)$$



Ejemplos:

- una bola blanca golpea a otra en una mesa de billar
- una nave espacial enciende sus cohetes y se mueve más rápido a través del espacio
- las moléculas en un gas a una temperatura específica se mueven y chocan entre sí (capítulo 21)
- una partícula incidente golpea a un núcleo, crea un nuevo núcleo y una distinta partícula emergente (capítulo 44)
- un electrón y un positrón se aniquilan para formar dos fotones emergentes (capítulo 46)

Ejemplo 9.1 El arquero AM

Considere la situación propuesta al inicio de la sección 9.1. Un arquero de 60 kg está de pie, en reposo, sobre hielo sin fricción y dispara una flecha de 0.030 kg horizontalmente a 85 m/s (figura 9.2). ¿Con qué velocidad se mueve el arquero sobre el hielo después de disparar la flecha?

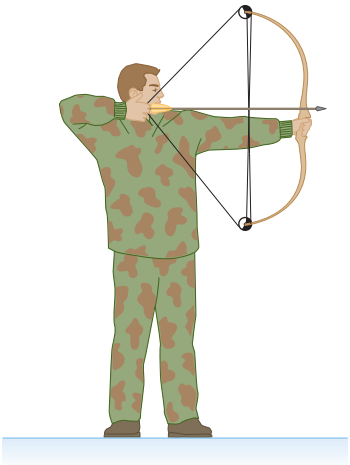


Figura 9.2 (Ejemplo 9.1) Un arquero dispara una flecha horizontalmente hacia la derecha. Como él está de pie sobre hielo sin fricción, comenzará a deslizarse hacia la izquierda sobre el hielo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Es posible que usted ya haya pensado en este problema al inicio de la sección 9.1. Imagine que la flecha se dispara en una dirección y el arquero retrocede en la dirección opuesta.

Categorizar Como se discutió en la sección 9.1, este problema no se puede resolver mediante modelos apoyados en movimiento, fuerza o energía. Sin duda, este problema *puede* resolverse muy fácilmente con un método que involucre a la cantidad de movimiento.

Considere el sistema constituido por el arquero (incluido el arco) y la flecha. El sistema no está aislado porque la fuerza gravitacional y la fuerza normal del hielo actúan sobre el sistema. Sin embargo, dichas fuerzas son verticales y perpendiculares al movimiento del sistema. No hay fuerzas externas en la dirección horizontal, así que puede aplicarse el modelo de *sistema aislado* (*cantidad de movimiento*) en términos de las componentes de la cantidad de movimiento en esta dirección.

Analizar La cantidad de movimiento horizontal total del sistema antes de disparar la flecha es cero, porque nada en el sistema se mueve. Por lo tanto, la cantidad de movimiento horizontal total del sistema después de disparar la flecha también debe ser cero. Se elige la dirección de disparo de la flecha como la dirección x positiva. Al identificar al arquero como la partícula 1 y la flecha como la partícula 2, se tiene $m_1 = 60$ kg, $m_2 = 0.030$ kg y $\vec{\mathbf{v}}_{2f} = 85\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s.

Utilice el modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento), iniciando con la ecuación 9.5:

$$\Delta \vec{\mathbf{p}} = 0 \rightarrow \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = 0 \rightarrow \vec{\mathbf{p}}_f = \vec{\mathbf{p}}_i \rightarrow m_1 \vec{\mathbf{v}}_{1f} + m_2 \vec{\mathbf{v}}_{2f} = 0$$

Resuelva esta ecuación para $\vec{\mathbf{v}}_{1f}$ y sustituya valores numéricos:

$$\vec{\mathbf{v}}_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{\mathbf{v}}_{2f} = -\left(\frac{0.030\text{ kg}}{60\text{ kg}}\right)(85\,\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}) = -0.042\,\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}$$

Finalizar El signo negativo para $\vec{\mathbf{v}}_{1f}$ indica que el arquero, después de disparar la flecha, se mueve hacia la izquierda en la figura 9.2, en la dirección opuesta a la dirección de movimiento de la flecha, en concordancia con la tercera ley de Newton. Como el arquero tiene mucho más masa que la flecha, su aceleración y, en consecuencia, su velocidad son mucho más pequeñas

continúa

9.1 continuación

que la aceleración y velocidad de la flecha. Note que este problema parece muy simple, pero no se puede resolver con los modelos sustentados en movimiento, fuerza o energía. Sin embargo, nuestro nuevo modelo de cantidad de movimiento muestra que el problema no sólo *parece* simple, ¡*es* simple!

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la flecha se dispara en una dirección que forma un ángulo θ con la horizontal? ¿Cómo cambiará la velocidad de retroceso del arquero?

Respuesta La velocidad de retroceso disminuirá en magnitud porque sólo una componente de la velocidad de la flecha está en la dirección x. La conservación de la cantidad de movimiento en la dirección x da

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \cos\theta = 0$$

lo que conduce a

$$v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2f} \cos\theta$$

Para $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, y la velocidad final del arquero se reduce al valor que tenía cuando la flecha se dispara horizontalmente. Para valores de θ distintos de cero, la función coseno es menor que 1 y la velocidad de retroceso es menor que el valor calculado para $\theta = 0$. Si $\theta = 90^\circ$, entonces $\cos\theta = 0$ y $v_{1f} = 0$, de modo que no hay velocidad de retroceso. En este caso, al disparar la flecha el arquero es empujado más fuerte contra el hielo.

Ejemplo 9.2 ¿En realidad se puede ignorar la energía cinética de la Tierra? AM

En la sección 7.6 se afirmó que se puede ignorar la energía cinética de la Tierra cuando se considera la energía de un sistema que consiste de la Tierra y una bola que se deja caer. Verifique esta afirmación.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que deja caer una bola en la superficie de la Tierra. Desde su punto de vista, la bola cae mientras la Tierra permanece fija. Sin embargo, por la tercera ley de Newton, la Tierra experimenta una fuerza hacia arriba y debido a eso una aceleración hacia arriba mientras la bola cae. En el cálculo que sigue se demostrará que este movimiento se puede ignorar porque es extremadamente pequeño.

Categorizar El sistema se identifica como la bola y la Tierra. Suponga que sobre el sistema no existen fuerzas provenientes del espacio exterior, así el sistema es aislado. Utilice la versión *cantidad de movimiento* del modelo de *sistema aislado*.

Analizar Establezca una relación entre las energías cinéticas de la Tierra y de la bola. Identifique v_T y v_b como la rapidez de la Tierra y la bola, respectivamente, después que la bola cae una cierta distancia.

Use la definición de energía cinética para establecer esta razón:

$$(1)\quad \frac{K_T}{K_b} = \frac{\frac{1}{2}m_T v_T^2}{\frac{1}{2}m_b v_b^2} = \left(\frac{m_T}{m_b}\right)\left(\frac{v_T}{v_b}\right)^2$$

Aplique el modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento), notando que la cantidad de movimiento inicial del sistema es cero:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = 0 \quad \rightarrow \quad p_i = p_f \quad \rightarrow \quad 0 = m_b v_b + m_T v_T$$

Resuelva la ecuación para la razón de rapideces:

$$\frac{v_T}{v_b} = -\frac{m_b}{m_T}$$

Sustituya esta expresión para v_E/v_b en la ecuación (1):

$$\frac{K_T}{K_b} = \left(\frac{m_T}{m_b}\right)\left(-\frac{m_b}{m_T}\right)^2 = \frac{m_b}{m_T}$$

Sustituya los números de orden de magnitud para las masas:

$$\frac{K_T}{K_b} = \frac{m_b}{m_T} \sim \frac{1\ \text{kg}}{10^{25}\ \text{kg}} \sim 10^{-25}$$

Finalizar La energía cinética de la Tierra es una fracción muy pequeña de la energía cinética de la bola, así que está justificado ignorarla en la energía cinética del sistema.

9.3 Análisis de modelo: sistema no aislado (cantidad de movimiento)

De acuerdo con la ecuación 9.3, la cantidad de movimiento de una partícula cambia si una fuerza neta actúa sobre la partícula. Lo mismo puede decirse de una fuerza

neta aplicada a un sistema, como se verá explícitamente en la sección 9.7: la cantidad de movimiento de un sistema cambia si una fuerza neta del entorno actúa sobre el sistema. Esto puede parecer similar a la discusión de energía del capítulo 8: la energía de un sistema cambia si en su frontera existe flujo de energía hacia o desde el entorno. En esta sección, se considera un *sistema no aislado*. Para consideraciones de energía, un sistema es no aislado si la energía cruza su frontera por cualquiera de los medios indicados en la sección 8.1. Para consideraciones de cantidad de movimiento, un sistema es no aislado si una fuerza neta actúa sobre el sistema durante un intervalo de tiempo. En este caso, puede considerarse que desde el entorno se transfiere cantidad de movimiento al sistema mediante una fuerza neta. Al resolver algunos tipos de problemas es útil conocer el cambio en la cantidad de movimiento causado por una fuerza. Para construir una mejor comprensión de este importante concepto, suponga que una fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ actúa sobre una partícula y que esta fuerza puede variar con el tiempo. De acuerdo con la segunda ley de Newton, expresada en la forma de la ecuación 9.3, $\sum \vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$, se puede escribir

$$d\vec{\mathbf{p}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \tag{9.7}$$

Es posible integrar[2] esta expresión para encontrar el cambio en la cantidad de movimiento de una partícula cuando la fuerza actúa durante algún intervalo de tiempo. Si la cantidad de movimiento de la partícula cambia de $\vec{\mathbf{p}}_i$ en el tiempo t_i a $\vec{\mathbf{p}}_f$ en el tiempo t_f, la integración de la ecuación 9.7 da

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \tag{9.8}$$

Para evaluar la integral, es necesario conocer cómo varía con el tiempo la fuerza neta. La cantidad en el lado derecho de esta ecuación es un vector llamado **impulso** de la fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre una partícula durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$:

$$\vec{\mathbf{I}} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \tag{9.9}$$

A partir de esta definición, se ve que el impulso $\vec{\mathbf{I}}$ es una cantidad vectorial que tiene una magnitud igual al área bajo la curva fuerza-tiempo, como se describe en la figura 9.3a. Se supone que la fuerza varía en el tiempo en la forma general mostrada en la figura y es distinta de cero en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$. La dirección del vector impulso es la misma que la dirección del cambio en la cantidad de movimiento. El impulso tiene las dimensiones de cantidad de movimiento, esto es, ML/T. El impulso *no* es una propiedad de una partícula; en vez de ello, es una medida del grado al cual una fuerza externa cambia la cantidad de movimiento de la partícula.

Ya que la fuerza neta que imparte un impulso a una partícula por lo general puede variar en el tiempo, es conveniente definir una fuerza neta promediada en el tiempo:

$$\left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \tag{9.10}$$

donde $\Delta t = t_f - t_i$. (Esta ecuación es una aplicación del teorema del valor medio del cálculo.) Entonces, la ecuación 9.9 se puede expresar como

$$\vec{\mathbf{I}} = \left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} \Delta t \tag{9.11}$$

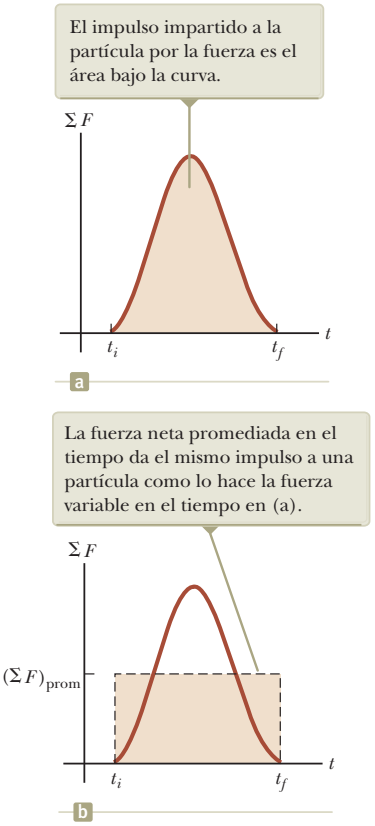


Figura 9.3 (a) Una fuerza neta que actúa sobre una partícula puede variar en el tiempo. (b) El valor de la fuerza constante $(\Sigma F)_{\text{prom}}$ (línea discontinua horizontal) se selecciona tal que el área $(\Sigma F)_{\text{prom}}\,\Delta t$ del rectángulo sea la misma área que bajo la curva en (a).

◀ **Impulso de una fuerza**

[2]Aquí se integra la fuerza con respecto al tiempo. Compare esta estrategia con los esfuerzos del capítulo 7, donde se integró la fuerza con respecto a la posición para encontrar el trabajo realizado por la fuerza.

Esta fuerza promediada en el tiempo, que se muestra en la figura 9.3b, puede ser interpretada como la fuerza constante que daría a la partícula, en el intervalo de tiempo Δt, el mismo impulso que da la fuerza variable en el tiempo durante este mismo intervalo.

En principio, si $\sum \vec{\mathbf{F}}$ se conoce como una función del tiempo, el impulso puede calcularse con la ecuación 9.9. El cálculo se vuelve especialmente simple si la fuerza que actúa sobre la partícula es constante. En este caso, $(\sum \vec{\mathbf{F}})_{\text{avg}} = \sum \vec{\mathbf{F}}$, donde $\sum \vec{\mathbf{F}}$ es la fuerza neta constante, y la ecuación 9.11 se convierte en

$$\vec{\mathbf{I}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\, \Delta t \tag{9.12}$$

Al combinar las ecuaciones 9.8 y 9.9 resulta un importante enunciado conocido como **teorema impulso-cantidad de movimiento**:

Teorema impulso–cantidad de movimiento ▶

El cambio en la cantidad de movimiento de una partícula es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre la partícula:

$$\Delta \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{I}} \tag{9.13}$$

Este enunciado es equivalente a la segunda ley de Newton. Cuando se dice que a una partícula se le da un impulso, significa que la cantidad de movimiento se transfiere de un agente externo a dicha partícula. La ecuación 9.13 es idéntica en forma a la ecuación de conservación de energía, la ecuación 8.1, y su completa expansión, ecuación 8.2. La ecuación 9.13 es el enunciado más general del principio de **conservación de la cantidad de movimiento** y se conoce como la **ecuación de conservación de la cantidad de movimiento**. En el caso de un enfoque con cantidad de movimiento, en diversos problemas los sistemas aislados aparecen con mayor frecuencia que los sistemas no aislados; así, en la práctica, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento con frecuencia se identifica como el caso especial de la ecuación 9.5.

El lado izquierdo de la ecuación 9.13 representa el cambio en la cantidad de movimiento del sistema, que en este caso es una sola partícula. El lado derecho es una medida de cuánta cantidad de movimiento cruza la frontera del sistema debido a la fuerza neta aplicada al sistema. La ecuación 9.13 es el enunciado matemático de un nuevo análisis de modelo, el modelo de **sistema no aislado (cantidad de movimiento)**. No obstante que esta ecuación es similar en forma a la ecuación 8.1, existen varias diferencias en su aplicación a los problemas. Primero, la ecuación 9.13 es una ecuación vectorial, mientras que la ecuación 8.1 es una ecuación escalar. Por lo tanto, las direcciones son importantes para la ecuación 9.13. Segundo, sólo hay un tipo de cantidad de movimiento y entonces sólo una manera de almacenar cantidad de movimiento en un sistema. En cambio, como se vio en la ecuación 8.2, existen tres formas de almacenar energía en un sistema: cinética, potencial e interna. Tercero, sólo hay una manera de transferir cantidad de movimiento al sistema: por aplicación de una fuerza sobre el sistema durante un intervalo de tiempo. La ecuación 8.2 muestra seis formas de transferir energía al sistema. Por lo tanto, no existe expansión de la ecuación 9.13 análoga a la ecuación 8.2.



© David Woods/CORBIS

Las bolsas de aire en los automóviles han salvado muchas vidas en los accidentes. La bolsa de aire incrementa el intervalo de tiempo que el pasajero tarda en llegar al reposo, disminuyendo así la fuerza sobre el pasajero y evitándole lesiones.

En muchas situaciones físicas se usará lo que se llama la **aproximación del impulso**, en la que se supone que una de las fuerzas ejercida sobre una partícula actúa durante un tiempo breve pero es mucho mayor que cualquiera otra fuerza presente. En este caso, la fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ en la ecuación 9.9 se sustituye con una sola fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ para encontrar el impulso sobre la partícula. Esta aproximación es especialmente útil al tratar colisiones en las cuales la duración de la colisión es muy breve. Cuando se hace esta aproximación, la fuerza sola se conoce como *fuerza impulsiva*. Por ejemplo, cuando un bat golpea una pelota de béisbol, el tiempo de la colisión es aproximadamente 0.01 s y la fuerza promedio que el bat ejerce sobre la pelota en este tiempo usualmente es de muchos miles de newtons. Ya que esta fuerza de

contacto es mucho más grande que la magnitud de la fuerza gravitacional, la aproximación del impulso justifica el ignorar las fuerzas gravitacionales ejercidas sobre la pelota y el bat durante la colisión. Cuando se utiliza esta aproximación, es importante recordar que $\vec{\mathbf{p}}_i$ y $\vec{\mathbf{p}}_f$ representan las cantidades de movimiento *inmediatamente* antes y después de la colisión, respectivamente. Por lo tanto, en cualquier situación en la que es adecuado usar la aproximación del impulso, la partícula se mueve muy poco durante la colisión.

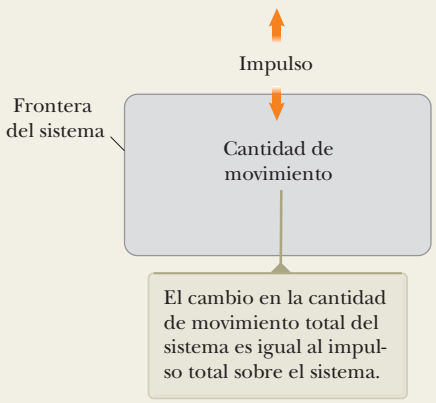
Examen rápido 9.3 Dos objetos están en reposo sobre una superficie sin fricción. El objeto 1 tiene una masa mayor que el objeto 2. **(i)** Cuando se aplica una fuerza constante al objeto 1, acelera a través de una distancia d en una línea recta. Se retira la fuerza del objeto 1 y se aplica al objeto 2. En el momento que el objeto 2 aceleró a través de la misma distancia d, ¿qué enunciados son verdaderos? (a) $p_1 < p_2$ (b) $p_1 = p_2$ (c) $p_1 > p_2$ (d) $K_1 < K_2$ (e) $K_1 = K_2$ (f) $K_1 > K_2$. **(ii)** Cuando se aplica una fuerza al objeto 1, éste acelera durante un intervalo de tiempo Δt. Se retira la fuerza del objeto 1 y se aplica al objeto 2. De la misma lista de opciones, ¿cuáles enunciados son verdaderos después que el objeto 2 acelera durante el mismo intervalo de tiempo Δt?

Examen rápido 9.4 Clasifique el tablero, el cinturón de seguridad y la bolsa de aire de un automóvil, cada objeto empleado por separado en colisiones con la misma rapidez, en términos de (a) el impulso y (b) la fuerza promedio que cada uno entrega a un pasajero en el asiento delantero, de mayor a menor.

Análisis de modelo — Sistema no aislado (cantidad de movimiento)

Imagine que ha identificado un sistema para ser analizado y que ha definido la frontera del sistema. Si se aplican fuerzas externas al sistema, éste es *no aislado*. En ese caso, el cambio en la cantidad de movimiento total del sistema es igual al impulso sobre él, un enunciado que se conoce como el **teorema impulso-cantidad de movimiento**:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{I}} \qquad (9.13)$$



Ejemplos

- una pelota de béisbol es golpeada por un bat
- un carrete colocado sobre una mesa es jalado por una cuerda (ejemplo 10.14 del capítulo 10)
- en un gas, una molécula golpea la pared del recipiente que contiene al gas (capítulo 21)
- fotones golpean una superficie absorbente y ejercen presión sobre ella (capítulo 34)

Ejemplo 9.3 ¿Qué tan útiles son las defensas? AM

En una prueba de choque, un automóvil de 1 500 kg de masa colisiona con una pared, como se muestra en la figura 9.4. Las velocidades inicial y final del auto son $\vec{\mathbf{v}}_i = -15.0\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s y $\vec{\mathbf{v}}_f = 2.60\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s, respectivamente. Si la colisión dura 0.150 s, encuentre el impulso causado por la colisión y la fuerza neta promedio ejercida sobre el automóvil.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Es breve el tiempo de colisión, así que puede imaginarse que el automóvil se lleva al reposo muy rápidamente y después se mueve de regreso en la dirección opuesta con una rapidez reducida.

Categorizar Suponga que la fuerza neta ejercida por la pared y la fricción del suelo sobre el automóvil es grande comparada con otras fuerzas sobre el auto (como la resistencia del aire). Además, la fuerza gravitacional y la fuerza normal ejercida por el camino sobre el automóvil son perpendiculares al movimiento y por lo tanto no afectan la cantidad de

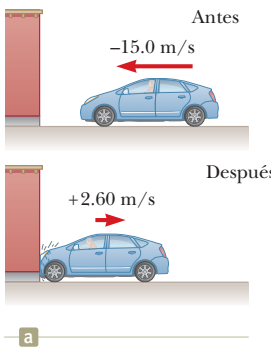




Figura 9.4 (Ejemplo 9.3) (a) La cantidad de movimiento del automóvil cambia como resultado de su colisión con la pared. (b) En una prueba de choque, mucha de la energía cinética inicial del automóvil se transforma en energía asociada con el daño al auto.

continúa

9.3 continuación

movimiento horizontal. Entonces, el problema se clasifica como uno en el que se puede aplicar la aproximación del impulso en la dirección horizontal. También se observa que la cantidad de movimiento del automóvil cambia debido a un impulso proveniente del entorno. En consecuencia, puede aplicarse el modelo de *sistema no aislado* (*cantidad de movimiento*).

Analizar

Utilice la ecuación 9.13 para encontrar el impulso del automóvil:

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = m\vec{\mathbf{v}}_f - m\vec{\mathbf{v}}_i = m(\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i)$$
$$= (1\,500\ \text{kg})[2.60\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s} - (-15.0\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s})] = 2.64 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Aplique la ecuación 9.11 para evaluar la fuerza neta promedio ejercida sobre el auto:

$$\left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} = \frac{\vec{\mathbf{I}}}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{0.150\ \text{s}} = 1.76 \times 10^5\hat{\mathbf{i}}\ \text{N}$$

Finalizar La fuerza neta obtenida es una combinación de la fuerza normal sobre el automóvil ejercida por la pared y de la fuerza de fricción entre las llantas y el suelo conforme se destruye el frente del auto. Si los frenos no funcionan durante el choque y el metal deformado no interfiere con la libre rotación de las llantas, esta fuerza de fricción sería relativamente pequeña debida a las ruedas en rotación pura. Note que los signos de las velocidades en este ejemplo indican la inversión de direcciones. ¿Qué sería lo que las matemáticas describirían si las velocidades inicial y final tuvieran el mismo signo?

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el automóvil no rebota de la pared? Suponga que la velocidad final del auto es cero y que el intervalo de tiempo de la colisión permanece en 0.150 s. ¿Esto representaría una fuerza neta mayor o menor ejercida sobre el automóvil?

Respuesta En la situación original en la que el auto rebota, la fuerza neta sobre el auto hace dos cosas durante el intervalo de tiempo: (1) detiene el automóvil y (2) hace que el auto se aleje de la pared a 2.60 m/s después de la colisión. Si el automóvil no rebota, la fuerza neta sólo hace el primero de estos pasos, parar el auto, lo cual requiere una fuerza *más pequeña*.

En términos matemáticos, en el caso del auto que no rebota, el impulso es

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = 0 - (1\,500\ \text{kg})(-15.0\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}) = 2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

La fuerza neta promedio ejercida sobre el automóvil es

$$\left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} = \frac{\vec{\mathbf{I}}}{\Delta t} = \frac{2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{0.150\ \text{s}} = 1.50 \times 10^5\hat{\mathbf{i}}\ \text{N}$$

que de hecho es más pequeña que el valor previamente calculado, como se argumentó conceptualmente.

9.4 Colisiones en una dimensión

En esta sección, se emplea el modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento) para describir lo que ocurre cuando colisionan dos partículas. El término **colisión** representa un evento durante el cual dos partículas se acercan entre sí e interactúan mediante fuerzas. Se supone que las fuerzas de interacción son mucho mayores que cualesquiera otras fuerzas externas presentes, así puede utilizar la aproximación del impulso.

Una colisión puede involucrar contacto físico entre dos objetos macroscópicos, como se describe en la figura 9.5a, pero la idea de lo que significa una colisión se debe ampliar porque "contacto físico" en una escala submicroscópica está mal definido y, por lo tanto, carece de significado. Para comprender este concepto considere una colisión a escala atómica (figura 9.5b), tal como la colisión de un protón con una partícula alfa (el núcleo de un átomo de helio). Ya que las partículas tienen carga positiva, se repelen mutuamente debido a la intensa fuerza electrostática entre ellas en separaciones cercanas y nunca entran en "contacto físico".

Cuando dos partículas de masas m_1 y m_2 colisionan como se muestra en la figura 9.5, las fuerzas impulsivas pueden variar en el tiempo en formas complicadas, como las que se indican en la figura 9.3. Sin embargo, sin importar la complejidad del comportamiento temporal de la fuerza impulsiva, esta fuerza es interna al sistema de dos partículas. Por lo tanto, las dos partículas forman un sistema aislado y la cantidad de movimiento del sistema se debe conservar en *cualquier* colisión.

En cambio, la energía cinética total del sistema de partículas puede o no conservarse, dependiendo del tipo de colisión. De hecho, las colisiones se categorizan como *elásticas* o como *inelásticas*, en función de si la energía cinética se conserva o no.

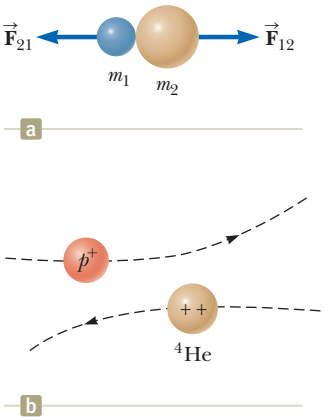


Figura 9.5 (a) Colisión entre dos objetos como resultado de contacto directo. (b) "Colisión" entre dos partículas cargadas.

Una **colisión elástica** entre dos objetos es aquella en donde la energía cinética total (así como la cantidad de movimiento total) del sistema es la misma antes y después de la colisión. Las colisiones entre ciertos objetos en el mundo macroscópico, como las bolas de billar, sólo son *aproximadamente* elásticas porque tiene lugar alguna deformación y pérdida de energía cinética. Por ejemplo, usted puede escuchar la colisión de una bola de billar, de modo que sabe que parte de la energía se transfiere del sistema mediante sonido. ¡Una colisión elástica debe ser perfectamente silenciosa! Las colisiones *verdaderamente* elásticas se presentan entre partículas atómicas y subatómicas. Esas colisiones se describen mediante el modelo de sistema aislado, tanto para energía como para la cantidad de movimiento. Aún más, no existe transformación de energía cinética en otros tipos de energía dentro del sistema.

En una **colisión inelástica** la energía cinética total del sistema no es la misma antes y después de la colisión (aun cuando la cantidad de movimiento del sistema se conserve). Las colisiones inelásticas son de dos tipos. Cuando los objetos se unen después de chocar, como ocurre cuando un meteorito colisiona con la Tierra, la colisión se llama **perfectamente inelástica**. Cuando los objetos en colisión no se unen, pero parte de la energía cinética se transforma o se transfiere, como en el caso de una bola de hule que choca con una superficie dura, la colisión se llama **inelástica** (sin adverbio modificador). Cuando la bola de hule choca con la superficie dura, parte de la energía cinética se transforma cuando la bola se deforma mientras está en contacto con la superficie. Las colisiones inelásticas se describen mediante el modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento). El sistema podría ser aislado en cuanto a la energía, con la energía cinética transformada en energía potencial o en energía interna. Si el sistema es no aislado, podría existir transferencia de energía abandonando el sistema. En este caso, también podría presentarse transformación de energía en el interior del sistema. En ambos casos cambia la energía cinética del sistema.

En lo que resta de esta sección se investigan los detalles matemáticos de colisiones en una dimensión y se consideran los dos casos extremos, las colisiones perfectamente inelásticas y las elásticas.

Prevención de riesgos ocultos 9.2

Colisiones inelásticas Por lo general, las colisiones inelásticas son difíciles de analizar sin información adicional. La falta de esta información aparece en la representación matemática con más incógnitas que ecuaciones.

Colisiones perfectamente inelásticas

Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales $\vec{\mathbf{v}}_{1i}$ y $\vec{\mathbf{v}}_{2i}$ a lo largo de la misma línea recta, como se muestra en la figura 9.6. Las dos partículas colisionan de frente, quedan unidas y luego se mueven con alguna velocidad común $\vec{\mathbf{v}}_f$ después de la colisión. Como la cantidad de movimiento de un sistema aislado se conserva en *cualquier* colisión, se puede decir que la cantidad de movimiento total antes de la colisión es igual a la cantidad de movimiento total del sistema compuesto después de la colisión:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f \quad \rightarrow \quad m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{\mathbf{v}}_f \tag{9.14}$$

Al resolver para la velocidad final se obtiene

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \frac{m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i}}{m_1 + m_2} \tag{9.15}$$

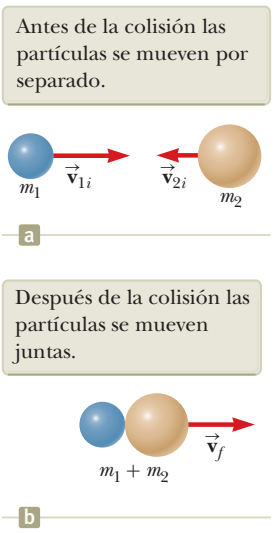


Figura 9.6 Representación esquemática de una colisión frontal perfectamente inelástica entre dos partículas.

Colisiones elásticas

Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales $\vec{\mathbf{v}}_{1i}$ y $\vec{\mathbf{v}}_{2i}$ a lo largo de la misma línea recta, como se muestra en la figura 9.7, página 258. Las dos partículas chocan frontalmente y luego dejan el sitio de colisión con diferentes velocidades $\vec{\mathbf{v}}_{1f}$ y $\vec{\mathbf{v}}_{2f}$. En una colisión elástica, tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética del sistema se conservan. Por lo tanto, al considerar velocidades a lo largo de la dirección horizontal en la figura 9.7, se tiene

$$p_i = p_f \quad \rightarrow \quad m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \tag{9.16}$$

$$K_i = K_f \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \tag{9.17}$$

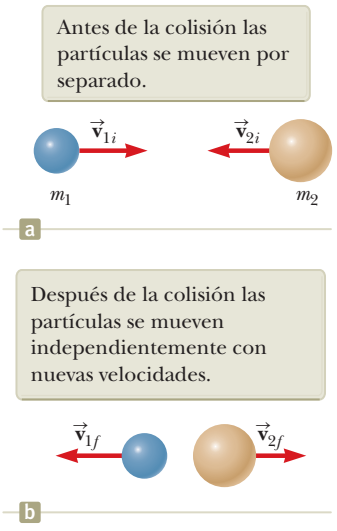


Figura 9.7 Representación esquemática de una colisión frontal elástica entre dos partículas.

Ya que todas las velocidades en la figura 9.7 son hacia la izquierda o hacia la derecha, se pueden representar mediante las correspondientes magnitudes de velocidad junto con los signos algebraicos que indican dirección. Se indicará v como positiva si una partícula se mueve hacia la derecha y negativa si se mueve hacia la izquierda.

En un problema típico que incluye colisiones elásticas existen dos cantidades desconocidas, y las ecuaciones 9.16 y 9.17 se pueden resolver simultáneamente para encontrarlas. Sin embargo, un método alternativo, uno que involucra un poco de manipulación matemática de la ecuación 9.17, con frecuencia simplifica este proceso. Para ver cómo, cancele el factor $\frac{1}{2}$ en la ecuación 9.17 y reescríbala agrupando a la izquierda los términos con subíndice 1, y a la derecha los que tengan subíndice 2:

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

La factorización de ambos lados de esta ecuación da

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})\ (v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \qquad \textbf{(9.18)}$$

A continuación, se separan los términos que contienen a m_1 y m_2 en la ecuación 9.16, para obtener

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \qquad \textbf{(9.19)}$$

Para obtener el resultado final, se divide la ecuación 9.18 entre la ecuación 9.19

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

Ahora se arreglan los términos, colocando las cantidades iniciales a la izquierda y las finales a la derecha:

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \qquad \textbf{(9.20)}$$

Esta ecuación, en combinación con la ecuación 9.16, se emplea para resolver problemas que traten con colisiones elásticas. Este par de ecuaciones (ecuaciones 9.16 y 9.20) es más fácil de manejar que el par de ecuaciones 9.16 y 9.17, porque no hay términos cuadráticos como en la ecuación 9.17. De acuerdo con la ecuación 9.20, la velocidad *relativa* de las dos partículas antes de la colisión, $v_{1i} - v_{2i}$, es igual al negativo de su velocidad relativa después de la colisión, $-(v_{1f} - v_{2f})$.

Prevención de riesgos ocultos 9.3

No es una ecuación general La ecuación 9.20 sólo se puede usar en una situación muy específica, una colisión elástica unidimensional entre dos objetos. El concepto *general* es la conservación de la cantidad de movimiento (y la conservación de la energía cinética si la colisión es elástica) para un sistema aislado.

Suponga que se conocen las masas y velocidades iniciales de ambas partículas. Las ecuaciones 9.16 y 9.20 se pueden resolver para las velocidades finales en términos de las velocidades iniciales, porque existen dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \qquad \textbf{(9.21)}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \qquad \textbf{(9.22)}$$

Es importante utilizar los signos apropiados para v_{1i} y v_{2i} en las ecuaciones 9.21 y 9.22.

Considere algunos casos especiales. Si $m_1 = m_2$, las ecuaciones 9.21 y 9.22 muestran que $v_{1f} = v_{2i}$ y $v_{2f} = v_{1i}$, lo cual significa que las partículas intercambian velocidades si tienen masas iguales. Esto es aproximadamente lo que uno observa en las colisiones frontales de las bolas de billar: la bola blanca se detiene y la bola golpeada se aleja de la colisión con la misma velocidad que tenía la bola blanca.

Si la partícula 2 está inicialmente en reposo, entonces $v_{2i} = 0$, y las ecuaciones 9.21 y 9.22 se convierten en

Colisión elástica: partícula 2 inicialmente en reposo ▶

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \qquad \textbf{(9.23)}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \qquad \textbf{(9.24)}$$

Si m_1 es mucho mayor que m_2 y $v_{2i} = 0$, se ve de las ecuaciones 9.23 y 9.24 que $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 2v_{1i}$. Es decir, cuando una partícula muy pesada colisiona frontal-

mente con una muy ligera que inicialmente está en reposo, la partícula pesada continúa su movimiento sin alterarse después de la colisión y la partícula ligera rebota con una rapidez igual a casi el doble de la rapidez inicial de la partícula pesada. Un ejemplo de tal colisión es la de un átomo pesado en movimiento, como el uranio, que golpea un átomo ligero, como el hidrógeno.

Si m_2 es mucho mayor que m_1 y la partícula 2 inicialmente está en reposo, entonces $v_{1f} \approx -v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 0$. Es decir, cuando una partícula muy ligera colisiona frontalmente con una partícula muy pesada que inicialmente está en reposo, la partícula ligera invierte su velocidad y la pesada permanece prácticamente en reposo. Por ejemplo, piense qué ocurre cuando se lanza una pelota de ping pong contra una bola de boliche, como en el examen rápido 9.6.

Examen rápido 9.5 En una colisión unidimensional perfectamente inelástica entre dos objetos en movimiento, ¿qué condición única es necesaria de modo que la energía cinética final del sistema sea cero después de la colisión? **(a)** Los objetos deben tener cantidades de movimiento iniciales con la misma magnitud pero direcciones opuestas. **(b)** Los objetos deben tener la misma masa. **(c)** Los objetos deben tener la misma velocidad inicial. **(d)** Los objetos deben tener la misma rapidez inicial, con vectores velocidad en direcciones opuestas.

Examen rápido 9.6 Una pelota de ping pong se lanza hacia una bola de boliche fija. La bola de ping pong hace una colisión elástica unidimensional y rebota de regreso a lo largo de la misma línea. En comparación con la bola de boliche después de la colisión, ¿la pelota de ping pong tiene **(a)** una magnitud mayor de cantidad de movimiento y más energía cinética, **(b)** una magnitud menor de cantidad de movimiento y más energía cinética, **(c)** una magnitud mayor de cantidad de movimiento y menos energía cinética, **(d)** una magnitud menor de cantidad de movimiento y menos energía cinética o **(e)** la misma magnitud de cantidad de movimiento y la misma energía cinética?

Estrategia para resolución de problemas Colisiones unidimensionales

Debe aplicar el planteamiento siguiente cuando resuelva problemas de colisiones en una dimensión:

1. Conceptualizar. Imagine que la colisión ocurre en su mente. Dibuje diagramas simples de las partículas antes y después de la colisión e incluya vectores velocidad apropiados. Al principio, es posible que deba sugerir las direcciones de los vectores velocidad finales.

2. Categorizar. ¿El sistema de partículas es aislado? Si es así, utilice el modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento). Clasifique la colisión como elástica, inelástica o perfectamente inelástica.

3. Analizar. Establezca la representación matemática adecuada para el problema. Si la colisión es perfectamente inelástica, use la ecuación 9.15. Si la colisión es elástica, aplique las ecuaciones 9.16 y 9.20. Si la colisión es inelástica, utilice la ecuación 9.16. Para encontrar las velocidades finales en este caso, necesitará alguna información adicional.

4. Finalizar. Una vez que determine su resultado, compruebe si sus respuestas son congruentes con las representaciones mental y gráfica, y que sus resultados sean realistas.

Ejemplo 9.4 Aliviador de estrés para ejecutivos AM

En la figura 9.8 (página 260) se muestra un ingenioso dispositivo que ilustra la conservación de la cantidad de movimiento y la energía cinética. Consiste de cinco bolas duras idénticas sostenidas por cuerdas de iguales longitudes. Cuando la bola 1 se retira y se libera, después de la colisión casi elástica entre ella y la bola 2, la bola 1 se detiene y la bola 5 se mueve hacia fuera, como se muestra en la figura 9.8b. Si las bolas 1 y 2 se jalan y liberan, se detienen después de la colisión y las bolas 4 y 5 se balancean hacia fuera, y así sucesivamente. ¿Alguna vez es posible que, cuando se libere la bola 1, se detenga después de la colisión y las bolas 4 y 5 se balanceen en el lado opuesto y viajen con la mitad de la rapidez de la bola 1, como en la figura 9.8c?

continúa

9.4 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con la ayuda de la figura 9.8c, imagine que una bola llega desde la izquierda y dos bolas salen de la colisión a la derecha. Éste es el fenómeno que se quiere probar para ver si podría ocurrir alguna vez.

Categorizar Debido al intervalo de tiempo muy breve entre la llegada de la bola desde la izquierda y la partida de las bolas de la derecha, se puede usar la aproximación de impulso para ignorar las fuerzas gravitacionales sobre las bolas y modelar las cinco bolas como un *sistema aislado* en términos de cantidad de movimiento y energía. Como las bolas son duras, las colisiones entre ellas se clasifican como elásticas para propósitos de cálculo.

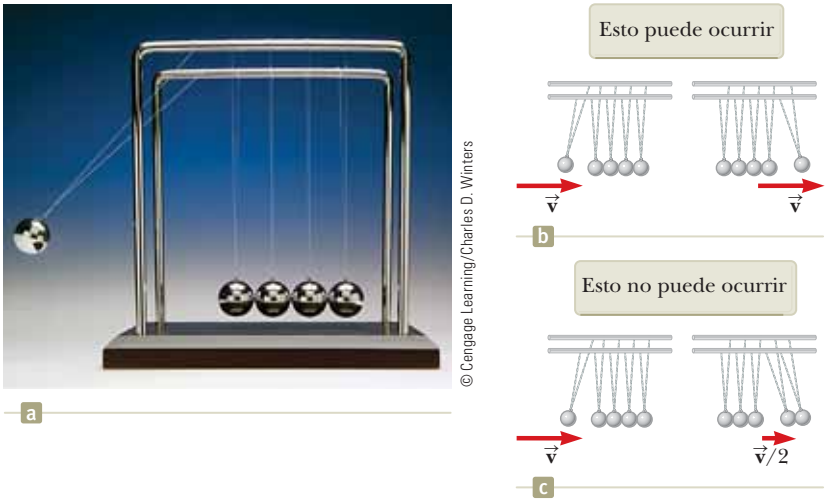


Figura 9.8 (Ejemplo 9.4) (a) Un aliviador de estrés para ejecutivos. (b) Si una bola se impulsa a la izquierda, se ve que una bola se aleja en el otro extremo. (c) ¿Es posible que una bola se impulse a la izquierda y dos bolas dejen el otro extremo con la mitad de la rapidez de la primera bola? En (b) y (c), los vectores de velocidad que se muestran representan los de las bolas inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión.

Analizar Considere la situación que se muestra en la figura 9.8c. La cantidad de movimiento del sistema antes de la colisión es mv, donde m es la masa de la bola 1 y v es su rapidez inmediatamente antes de la colisión. Después de la colisión, se supone que la bola 1 se detiene y las bolas 4 y 5 se alejan, cada una con rapidez $v/2$. La cantidad de movimiento total del sistema después de la colisión sería $m(v/2) + m(v/2) = mv$. Por lo tanto, ¡la cantidad de movimiento del sistema se conserva en la situación que se indica en la figura 9.8c!

La energía cinética del sistema inmediatamente antes de la colisión es $K_i = \frac{1}{2}mv^2$ y después de la colisión es $K_f = \frac{1}{2}m(v/2)^2 + \frac{1}{2}m(v/2)^2 = \frac{1}{4}mv^2$. Esto muestra que la energía cinética del sistema *no* se conserva, lo que es inconsistente con la suposición de que las colisiones son elásticas.

Finalizar El análisis muestra que no es posible que las bolas 4 y 5 se balanceen cuando sólo se libera la bola 1. La única forma de conservar tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética del sistema es que una bola se mueva cuando una bola se libera, dos bolas se muevan cuando dos se liberan, y así sucesivamente.

¿QUÉ PASARÍA SI? Considere lo que ocurre si las bolas 4 y 5 se unen con pegamento. ¿Qué ocurre ahora cuando la bola 1 se aleja y se libera?

Respuesta En esta situación, las bolas 4 y 5 *deben* moverse juntas como un solo objeto después de la colisión. Se argumentó que, en este caso, la cantidad de movimiento y energía del sistema no se pueden conservar. Sin embargo, se supone que la bola 1 se detiene después de golpear la bola 2. ¿Y si no se hace esta suposición? Considere las ecuaciones de conservación con la suposición de que la bola 1 se mueve después de la colisión. Por conservación de cantidad de movimiento

$$p_i = p_f$$
$$mv_{1i} = mv_{1f} + 2mv_{4,5}$$

donde $v_{4,5}$ se refiere a la rapidez final de la combinación bola 4-bola 5. La conservación de la energía cinética da

$$K_i = K_f$$
$$\tfrac{1}{2}mv_{1i}^{\,2} = \tfrac{1}{2}mv_{1f}^{\,2} + \tfrac{1}{2}(2m)v_{4,5}^{\,2}$$

Al combinar estas ecuaciones se obtiene

$$v_{4,5} = \tfrac{2}{3}v_{1i} \qquad v_{1f} = -\tfrac{1}{3}v_{1i}$$

Por lo tanto, las bolas 4 y 5 se mueven juntas como un objeto después de la colisión mientras que la bola 1 rebota en la colisión con un tercio de su rapidez original.

Ejemplo 9.5 ¡Lleve seguro contra choques! AM

A un automóvil de 1 800 kg detenido en un semáforo lo golpea por la parte trasera un automóvil de 900 kg. Los dos autos quedan unidos y se mueven a lo largo de la misma trayectoria que la del automóvil en movimiento. Si el auto más pequeño se movía a 20.0 m/s antes de la colisión, ¿cuál es la velocidad de los automóviles unidos después de la colisión?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este tipo de colisión se visualiza con facilidad, y se puede predecir que, después de la colisión, ambos automóviles se moverán en la misma dirección que la del auto en movimiento. Como el automóvil en movimiento sólo tiene la mitad de masa que el auto fijo, se espera que la velocidad final de los automóviles sea relativamente pequeña.

Categorizar Identifique a los dos autos como un sistema *aislado* en términos de la *cantidad de movimiento* en la dirección horizontal y aplique la aproximación del impulso durante el breve intervalo de tiempo de la colisión. La frase "quedan unidos" pide clasificar la colisión como perfectamente inelástica.

Analizar La magnitud de la cantidad de movimiento total del sistema antes de la colisión es igual a la del automóvil más pequeño porque el auto más grande inicialmente está en reposo.

Utilice el modelo de sistema aislado para la cantidad de movimiento:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = 0 \quad \rightarrow \quad p_i = p_f \quad \rightarrow \quad m_1 v_i = (m_1 + m_2) v_f$$

Resuelva para v_f y sustituya valores numéricos:

$$v_f = \frac{m_1 v_i}{m_1 + m_2} = \frac{(900\ \text{kg})(20.0\ \text{m/s})}{900\ \text{kg} + 1\,800\ \text{kg}} = 6.67\ \text{m/s}$$

Finalizar Ya que la velocidad final es positiva, la dirección de la velocidad final de la combinación es la misma que la velocidad del automóvil en movimiento, como se predijo. La rapidez de la combinación también es mucho menor que la rapidez inicial del auto en movimiento.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que se invierten las masas de los automóviles. ¿Y si un auto de 1 800 kg en movimiento golpea a un automóvil fijo de 900 kg? ¿La rapidez final es la misma que antes?

Respuesta Por intuición, se supone que la rapidez final de la combinación es mayor que 6.67 m/s si el automóvil en movimiento es el auto más grande. Matemáticamente, ése debe ser el caso porque el sistema tiene una cantidad de movimiento más grande si el automóvil en movimiento es el más masivo. Al resolver para la nueva velocidad final, se encuentra

$$v_f = \frac{m_1 v_i}{m_1 + m_2} = \frac{(1\,800\ \text{kg})(20.0\ \text{m/s})}{1\,800\ \text{kg} + 900\ \text{kg}} = 13.3\ \text{m/s}$$

que es dos veces más grande que la velocidad final previa.

Ejemplo 9.6 El péndulo balístico AM

El péndulo balístico (figura 9.9, página 262) es un aparato que se emplea para medir la rapidez de un proyectil que se mueve rápidamente, como una bala. Un proyectil de masa m_1 se dispara hacia un gran bloque de madera de masa m_2 suspendido de unos alambres ligeros. El proyectil se incrusta en el bloque y todo el sistema se balancea hasta una altura h. ¿Cómo se determina la rapidez del proyectil a partir de una medición de h?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.9a ayuda a conceptualizar la situación. Corra la animación en su mente: el proyectil entra al péndulo, que se balancea cierta altura en la cual está momentáneamente en reposo.

Categorizar El proyectil y el bloque forman un *sistema aislado* en términos de la cantidad de movimiento si se identifica la configuración A como inmediatamente antes de la colisión y la configuración B como inmediatamente después de la colisión. Ya que el proyectil se incrusta en el bloque, la colisión entre ellos se considera como perfectamente inelástica.

Analizar Para analizar la colisión, utilice la ecuación 9.15, que da la rapidez del sistema inmediatamente después de la colisión cuando se considera la aproximación del impulso.

continúa

9.6 continuación

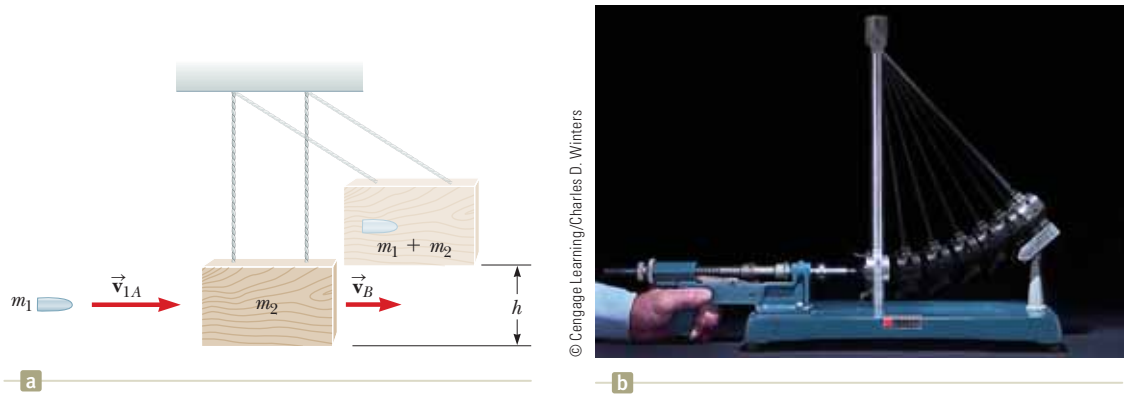


Figura 9.9 (Ejemplo 9.6) (a) Diagrama de un péndulo balístico. Note que $\vec{\mathbf{v}}_{1A}$ es la velocidad del proyectil inmediatamente antes de la colisión y $\vec{\mathbf{v}}_B$ es la velocidad del sistema proyectil-bloque inmediatamente después de la colisión perfectamente inelástica. (b) Fotografía estroboscópica de un péndulo balístico empleado en el laboratorio.

Advierta que $v_{2A} = 0$, resuelva la ecuación 9.15 para v_B: (1) $v_B = \dfrac{m_1 v_{1A}}{m_1 + m_2}$

Categorizar Para el proceso donde la combinación proyectil-bloque se balancea hacia arriba a una altura h (y termina en la configuración C), considere un sistema *diferente*, el del proyectil, el bloque y la Tierra. Esta parte del problema se clasifica como un *sistema aislado* para *energía* sin fuerzas no conservativas actuando.

Analizar Escriba una expresión para la energía cinética total del sistema inmediatamente después de la colisión: (2) $K_B = \frac{1}{2}(m_1 + m_2){v_B}^2$

Sustituya el valor de v_B de la ecuación (1) en la ecuación (2): $K_B = \dfrac{{m_1}^2 {v_{1A}}^2}{2(m_1 + m_2)}$

Esta energía cinética del sistema inmediatamente después de la colisión es *menor* que la energía cinética inicial del proyectil, como se esperaba en una colisión inelástica.

La energía potencial gravitacional del sistema se define como cero para la configuración B. Por lo tanto, $U_B = 0$, mientras que $U_C = (m_1 + m_2)gh$.

Aplique el modelo de sistema aislado: $\Delta K + \Delta U = 0 \rightarrow (K_C - K_B) + (U_C - U_B) = 0$

Sustituya las energías: $\left(0 - \dfrac{{m_1}^2 {v_{1A}}^2}{2(m_1 + m_2)}\right) + [(m_1 + m_2)gh - 0] = 0$

Resuelva para v_{1A}: $v_{1A} = \left(\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh}$

Finalizar Este problema tuvo que resolverse en dos etapas. Cada etapa involucró un sistema diferente y un distinto análisis de modelo: sistema aislado (cantidad de movimiento) para la primera etapa y sistema aislado (energía) para la segunda. Ya que la colisión se considera perfectamente inelástica, algo de la energía mecánica se transformó en energía interna durante la colisión. Así, hubiera sido *incorrecto* aplicar el modelo de sistema aislado (energía) a todo el proceso al igualar la energía cinética inicial del proyectil que entra con la energía potencial gravitacional final de la combinación proyectil-bloque-Tierra.

Ejemplo 9.7 Una colisión de dos cuerpos con un resorte AM

Un bloque de masa $m_1 = 1.60$ kg inicialmente móvil hacia la derecha con una rapidez de 4.00 m/s sobre una pista horizontal sin fricción, choca con un resorte unido a un segundo bloque de masa $m_2 = 2.10$ kg que inicialmente se mueve hacia la izquierda con una rapidez de 2.50 m/s, como se muestra en la figura 9.10a. La constante de resorte es 600 N/m.

9.7 continuación

(A) Encuentre las velocidades de los dos bloques después de la colisión.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con ayuda de la figura 9.10a, en su mente corra una animación de la colisión. La figura 9.10b muestra un instante durante la colisión, cuando se comprime el resorte. Eventualmente, el bloque 1 y el resorte se separarán de nuevo, así el sistema se parecerá otra vez a la figura 9.10a, pero con diferentes vectores velocidad para los dos bloques.

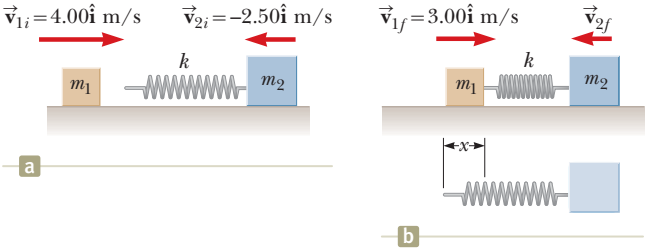


Figura 9.10 (Ejemplo 9.7) Un bloque en movimiento se aproxima a un segundo bloque en movimiento que está unido a un resorte.

Categorizar Ya que la fuerza del resorte es conservativa, la energía cinética en el sistema de dos bloques y el resorte no se transforma en energía interna durante la compresión del resorte. Si ignora cualquier sonido generado cuando el bloque golpea el resorte, clasifique la colisión como elástica con los dos bloques y el resorte como un *sistema aislado* para la *energía* y para la *cantidad de movimiento*.

Analizar Como la cantidad de movimiento del sistema se conserva, aplique la ecuación 9.16:

$$(1)\quad m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Puesto que la colisión es elástica, aplique la ecuación 9.20:

$$(2)\quad v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

Multiplique la ecuación (2) por m_1:

$$(3)\quad m_1 v_{1i} - m_1 v_{2i} = -m_1 v_{1f} + m_1 v_{2f}$$

Sume las ecuaciones (1) y (3):

$$2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i} = (m_1 + m_2) v_{2f}$$

Resuelva para v_{2f}:

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_{2f} = \frac{2(1.60\ \text{kg})(4.00\ \text{m/s}) + (2.10\ \text{kg} - 1.60\ \text{kg})(-2.50\ \text{m/s})}{1.60\ \text{kg} + 2.10\ \text{kg}} = 3.12\ \text{m/s}$$

Resuelva la ecuación (2) para v_{1f} y sustituya valores numéricos:

$$v_{1f} = v_{2f} - v_{1i} + v_{2i} = 3.12\ \text{m/s} - 4.00\ \text{m/s} + (-2.50\ \text{m/s}) = -3.38\ \text{m/s}$$

(B) Determine la velocidad del bloque 2 durante la colisión, en el instante en que el bloque 1 se mueve hacia la derecha con una velocidad de +3.00 m/s, como en la figura 9.10b.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Concentre su atención en la figura 9.10b, que representa la configuración final del sistema para el intervalo de tiempo de interés.

Categorizar Como la cantidad de movimiento y la energía mecánica del *sistema aislado* de dos bloques y el resorte se conservan *durante* la colisión, entonces ésta se clasifica como elástica para *cualquier* instante final. Ahora elija el instante final cuando el bloque 1 se mueve con una velocidad de +3.00 m/s.

Analizar Aplique la ecuación 9.16:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Resuelva para v_{2f}:

$$v_{2f} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} - m_1 v_{1f}}{m_2}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_{2f} = \frac{(1.60\ \text{kg})(4.00\ \text{m/s}) + (2.10\ \text{kg})(-2.50\ \text{m/s}) - (1.60\ \text{kg})(3.00\ \text{m/s})}{2.10\ \text{kg}}$$

$$= -1.74\ \text{m/s}$$

continúa

9.7 continuación

Finalizar El valor negativo para v_{2f} significa que el bloque 2 todavía se mueve hacia la izquierda en el instante bajo consideración.

(C) Determine la distancia que se comprime el resorte en dicho instante.

SOLUCIÓN

Conceptualizar De nuevo, centre su atención en la configuración del sistema que se muestra en la figura 9.10b.

Categorizar Para el sistema del resorte y dos bloques, ni fricción ni otras fuerzas no conservativas actúan dentro del sistema. Por lo tanto, el sistema se clasifica como *aislado* en términos de *energía* sin fuerzas no conservativas en acción. El sistema también permanece *aislado* en términos de *cantidad de movimiento*.

Analizar Elija la configuración inicial del sistema como la existente inmediatamente antes de que el bloque 1 golpee el resorte y la configuración final cuando el bloque 1 se mueve hacia la derecha a 3.00 m/s.

Escriba la apropiada reducción de la ecuación 8.2: $\Delta K + \Delta U = 0$

Evalúe las energías, notando que dos objetos en el sistema tienen energía cinética y que la energía potencial es elástica: $[(\frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2) - (\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2)] + (\frac{1}{2}kx^2 - 0) = 0$

Resuelva para x^2: $x^2 = \frac{1}{k}[m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) + m_2(v_{2i}^2 - v_{2f}^2)]$

Sustituya valores numéricos: $x^2 = \left(\frac{1}{600\ \text{N/m}}\right)\{(1.60\ \text{kg})[(4.00\ \text{m/s})^2 - (3.00\ \text{m/s})^2] + (2.10\ \text{kg})[(2.50\ \text{m/s})^2 - (1.74\ \text{m/s})^2]\}$

$\rightarrow x = 0.173\ \text{m}$

Finalizar Esta respuesta no es la compresión máxima del resorte, ya que los dos bloques aún se mueven uno hacia el otro en el instante que se muestra en la figura 9.10b. ¿Se puede determinar la compresión máxima del resorte?

9.5 Colisiones en dos dimensiones

En la sección 9.2 se mostró que la cantidad de movimiento de un sistema de dos partículas se conserva cuando el sistema está aislado. Para cualquier colisión de dos partículas, este resultado implica que la cantidad de movimiento en cada una de las direcciones x, y y z se conserva. Un importante subconjunto de colisiones tiene lugar en un plano. El juego de billar es un ejemplo familiar que involucra múltiples colisiones de objetos que se mueven en una superficie bidimensional. Para tales colisiones en dos dimensiones, se obtienen dos ecuaciones componentes para conservación de cantidad de movimiento.

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$
$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

donde los tres subíndices en las componentes de velocidad en estas ecuaciones representan, respectivamente, la identificación del objeto (1, 2), los valores inicial y final (i, f) y la componente de velocidad (x, y).

Considere un problema bidimensional específico en donde la partícula 1 de masa m_1 colisiona con la partícula 2 de masa m_2 inicialmente en reposo, como en la figura 9.11. Después de la colisión (figura 9.11b), la partícula 1 se mueve en un ángulo θ respecto a la horizontal y la partícula 2 se desplaza en un ángulo ϕ respecto a la horizontal. Este evento se llama colisión *oblicua*. Al aplicar la ley de conservación de la cantidad de movimiento en forma de componentes y notar que la componente y inicial de la cantidad de movimiento del sistema de dos partículas es cero, se obtiene

$$\Delta p_x = 0 \rightarrow p_{ix} = p_{fx} \rightarrow m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\theta + m_2 v_{2f}\cos\phi \quad (9.25)$$
$$\Delta p_y = 0 \rightarrow p_{iy} = p_{fy} \rightarrow 0 = m_1 v_{1f}\,\text{sen}\,\theta - m_2 v_{2f}\,\text{sen}\,\phi \quad (9.26)$$

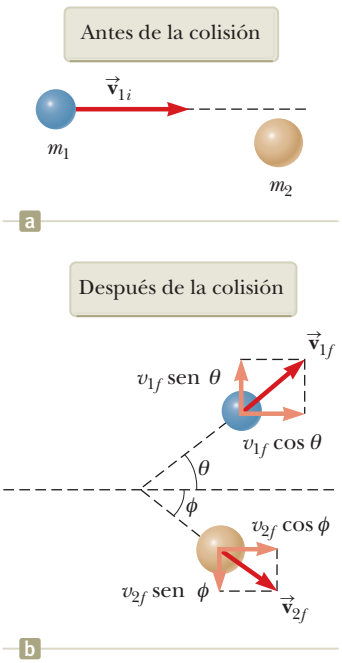


Figura 9.11 Una colisión elástica oblicua entre dos partículas.

donde el signo menos en la ecuación 9.26 se incluye porque, después de la colisión, la partícula 2 tiene una componente y de velocidad que es hacia abajo. (Los símbolos v en estas ecuaciones particulares son magnitudes de velocidad, no componentes de velocidad. La dirección del vector componente se indica explícitamente con los signos más o menos.) Ahora se tienen dos ecuaciones independientes. Ya que no más de dos de las siete cantidades en las ecuaciones 9.25 y 9.26 son incógnitas, se puede resolver este problema.

Si la colisión es elástica, también se puede usar la ecuación 9.17 (conservación de energía cinética) con $v_{2i} = 0$:

$$K_i = K_f \rightarrow \tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \qquad (9.27)$$

Al conocer la rapidez inicial de la partícula 1 y ambas masas, quedan cuatro incógnitas (v_{1f}, v_{2f}, θ y ϕ). Como sólo se tienen tres ecuaciones, entonces se debe proporcionar una de las cuatro cantidades restantes para determinar el movimiento, después de la colisión elástica, a partir sólo de principios de conservación.

Si la colisión es inelástica, la energía cinética *no* se conserva y la ecuación 9.27 *no* se aplica.

Estrategia para resolución de problemas Colisiones bidimensionales

Se recomienda el procedimiento siguiente cuando trate con problemas que involucran colisiones entre dos partículas en dos dimensiones.

1. Conceptualizar. Imagine las colisiones en proceso para predecir las direcciones aproximadas en las que se moverán las partículas después de la colisión. Establezca un sistema coordenado y defina sus velocidades en términos de dicho sistema. Es conveniente que el eje x coincida con una de las velocidades iniciales. Bosqueje el sistema coordenado, dibuje y etiquete todos los vectores velocidad e incluya toda la información dada.

2. Categorizar. ¿El sistema de partículas verdaderamente está aislado? Si es así, clasifique la colisión como elástica, inelástica o perfectamente inelástica.

3. Analizar. Escriba expresiones para las componentes x y y de la cantidad de movimiento de cada objeto antes y después de la colisión. Recuerde incluir los signos apropiados para las componentes de los vectores velocidad y ponga mucha atención a los signos durante el cálculo.

Aplique el modelo de sistema aislado para la cantidad de movimiento $\Delta\vec{\mathbf{p}} = 0$. Cuando se aplica en cada dirección, en general esta ecuación se reducirá a $p_{ix} = p_{fx}$ y $p_{iy} = p_{fy}$, donde cada uno de esos términos se refiere a la suma de las cantidades de movimiento de todos los objetos en el sistema. Escriba expresiones para la cantidad de movimiento *total* en la dirección x *antes* y *después* de la colisión, e iguale las dos. Repita este procedimiento para la cantidad de movimiento total en la dirección y.

Proceda a resolver las ecuaciones de cantidad de movimiento para las cantidades desconocidas. Si la colisión es inelástica, la energía cinética no se conserva y es posible que se requiera información adicional. Si la colisión es perfectamente inelástica, las velocidades finales de los dos objetos son iguales.

Si la colisión es elástica, la energía cinética se conserva y se puede igualar la energía cinética total del sistema antes de la colisión con la energía cinética total después de la colisión, lo que proporciona una relación adicional entre las magnitudes de velocidad.

4. Finalizar. Una vez que haya determinado su resultado, compruebe para ver si sus respuestas son consistentes con las representaciones mental y gráfica, y que sus resultados sean realistas.

Prevención de riesgos ocultos 9.4

No use la ecuación 9.20 La ecuación 9.20, que relaciona las velocidades relativas inicial y final de dos objetos que colisionan, sólo es válida para colisiones elásticas unidimensionales. No utilice esta ecuación cuando estudie colisiones en dos dimensiones.

Ejemplo 9.8 Colisión en un cruce AM

Un automóvil de 1 500 kg, que viaja al Este con una rapidez de 25.0 m/s, colisiona en un cruce con una camioneta de 2 500 kg que viaja al Norte con una rapidez de 20.0 m/s, como se muestra en la figura 9.12, página 266. Encuentre la dirección y magnitud de la velocidad de los restos después de la colisión, y suponga que los vehículos quedan unidos después del choque.

continúa

9.8 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.12 debe ayudarlo a conceptualizar la situación antes y después de la colisión. Elija el Este a lo largo de la dirección x positiva y el Norte a lo largo de la dirección y positiva.

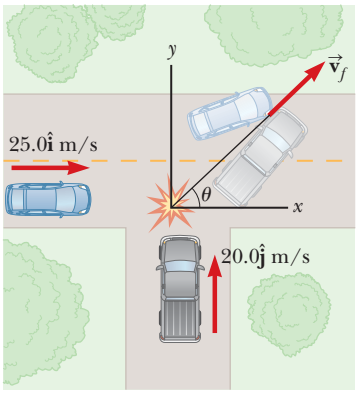


Figura 9.12 (Ejemplo 9.8) Un automóvil que viaja hacia el Este choca con una camioneta que viaja hacia el Norte.

Categorizar Como se consideran las cantidades de movimiento inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión al definir el intervalo de tiempo, ignore el pequeño efecto que la fricción tendría sobre las llantas de los vehículos y el sistema de dos autos se modela como *aislado* en términos de *cantidad de movimiento*. También se ignoran los tamaños de los automóviles y se les modela como partículas. La colisión es perfectamente inelástica porque los dos autos quedan unidos después de la colisión.

Analizar Antes de la colisión, el único objeto que tiene cantidad de movimiento en la dirección x es el automóvil. Por lo tanto, la magnitud de la cantidad de movimiento inicial total del sistema (auto más camioneta) en la dirección x sólo es la del automóvil. Similarmente, la cantidad de movimiento inicial total del sistema en la dirección y corresponde a la camioneta. Después de la colisión, suponga que los restos se mueven a un ángulo θ respecto al eje x y con rapidez v_f.

Aplique el modelo de sistema aislado para la cantidad de movimiento en la dirección x:

$$\Delta p_x = 0 \rightarrow \sum p_{xi} = \sum p_{xf} \rightarrow (1) \quad m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \cos\theta$$

Aplique el modelo de sistema aislado para la cantidad de movimiento en la dirección y:

$$\Delta p_y = 0 \rightarrow \sum p_{yi} = \sum p_{yf} \rightarrow (2) \quad m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \operatorname{sen}\theta$$

Divida la ecuación (2) entre la ecuación (1):

$$\frac{m_2 v_{2i}}{m_1 v_{1i}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

Resuelva para θ y sustituya valores numéricos:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 v_{2i}}{m_1 v_{1i}}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{(2\,500\text{ kg})(20.0\text{ m/s})}{(1\,500\text{ kg})(25.0\text{ m/s})}\right] = 53.1°$$

Utilice la ecuación (2) para encontrar el valor de v_f y sustituya valores numéricos:

$$v_f = \frac{m_2 v_{2i}}{(m_1 + m_2)\operatorname{sen}\theta} = \frac{(2\,500\text{ kg})(20.0\text{ m/s})}{(1\,500\text{ kg} + 2\,500\text{ kg})\operatorname{sen}53.1°} = 15.6\text{ m/s}$$

Finalizar Note que el ángulo θ está cualitativamente de acuerdo con la figura 9.12. También observe que la rapidez final de la combinación es menor que las magnitudes de velocidades iniciales de ambos autos. Este resultado es consistente con la energía cinética del sistema que se reduce en una colisión inelástica. Puede ser útil dibujar los vectores cantidad de movimiento de cada vehículo antes de la colisión y de los dos vehículos juntos después de la colisión.

Ejemplo 9.9 Colisión protón-protón AM

Un protón choca elásticamente con otro protón que inicialmente está en reposo. El protón incidente tiene una rapidez inicial de 3.50×10^5 m/s y hace una colisión oblicua con el segundo protón, como en la figura 9.11. (En separaciones cercanas, los protones ejercen una fuerza electrostática repulsiva mutua.) Después de la colisión, un protón se aleja en un ángulo de 37.0° hacia la dirección del movimiento original y el segundo se desvía a un ángulo ϕ con el mismo eje. Encuentre las magnitudes de las velocidad finales de los dos protones y el ángulo ϕ.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Esta colisión es similar a la mostrada en la figura 9.11, la cual le ayudará a formar ideas del comportamiento del sistema. El eje x se define a lo largo de la dirección del vector velocidad del protón inicialmente en movimiento.

Categorizar El par de protones forma un *sistema aislado*. Tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética del sistema se conservan en esta colisión elástica oblicua.

9.9 continuación

Analizar Utilice el modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento y para energía de una colisión elástica bidimensional, establezca la representación matemática mediante las ecuaciones 9.25 a la 9.27:

$$(1)\quad v_{1i} = v_{1f}\cos\theta + v_{2f}\cos\phi$$
$$(2)\quad 0 = v_{1f}\operatorname{sen}\theta - v_{2f}\operatorname{sen}\phi$$
$$(3)\quad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

Reordene las ecuaciones (1) y (2):

$$v_{2f}\cos\phi = v_{1i} - v_{1f}\cos\theta$$
$$v_{2f}\operatorname{sen}\phi = v_{1f}\operatorname{sen}\theta$$

Eleve al cuadrado estas dos ecuaciones y súmelas:

$$v_{2f}^2\cos^2\phi + v_{2f}^2\operatorname{sen}^2\phi = v_{1i}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos\theta + v_{1f}^2\cos^2\theta + v_{1f}^2\operatorname{sen}^2\theta$$

Aplique que la suma de los cuadrados del seno y el coseno de *cualquier* ángulo es igual a 1:

$$(4)\quad v_{2f}^2 = v_{1i}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos\theta + v_{1f}^2$$

Sustituya la ecuación (4) en la ecuación (3):

$$v_{1f}^2 + (v_{1i}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos\theta + v_{1f}^2) = v_{1i}^2$$
$$(5)\quad v_{1f}^2 - v_{1i}v_{1f}\cos\theta = 0$$

Una posible solución de esta ecuación es $v_{1f} = 0$, que corresponde a una colisión frontal en donde el primer protón se detiene y el segundo continúa con la misma rapidez en la misma dirección. Ésta no es la solución que se quiere.

Divida ambos lados de la ecuación (5) entre v_{1f} y resuelva para el restante factor de v_{1f}:

$$v_{1f} = v_{1i}\cos\theta = (3.50\times10^5\ \text{m/s})\cos 37.0^\circ = 2.80\times10^5\ \text{m/s}$$

Use la ecuación (3) para encontrar v_{2f}:

$$v_{2f} = \sqrt{v_{1i}^2 - v_{1f}^2} = \sqrt{(3.50\times10^5\ \text{m/s})^2 - (2.80\times10^5\ \text{m/s})^2}$$
$$= 2.11\times10^5\ \text{m/s}$$

Aplique la ecuación (2) para encontrar ϕ:

$$(2)\quad \phi = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{v_{1f}\operatorname{sen}\theta}{v_{2f}}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{(2.80\times10^5\ \text{m/s})\operatorname{sin}37.0^\circ}{(2.11\times10^5\ \text{m/s})}\right]$$
$$= 53.0^\circ$$

Finalizar Es interesante que $\theta + \phi = 90^\circ$. Este resultado *no* es accidental. Siempre que dos objetos de igual masa choquen elásticamente en una colisión oblicua y uno de ellos inicialmente en reposo, sus velocidades finales son mutuamente perpendiculares.

9.6 El centro de masa

En esta sección se describe el movimiento global de un sistema en términos de un punto especial llamado el **centro de masa** del sistema. El sistema puede ser un pequeño número de partículas o un objeto extendido continuo, como una gimnasta que salta en el aire. Se verá que el movimiento traslacional del centro de masa del sistema es el mismo, como si toda la masa del sistema estuviera concentrada en dicho punto. Es decir, el sistema se mueve como si la fuerza externa neta se aplicara a una sola partícula ubicada en el centro de masa. Este modelo, el *modelo* de *partícula*, se introdujo en el capítulo 2. Este comportamiento es independiente de otro movimiento, como la rotación o la vibración del sistema, o la deformación del sistema (por ejemplo, cuando la gimnasta dobla su cuerpo).

Considere un sistema que consiste de un par de partículas que tienen diferentes masas y se conectan mediante una barra rígida ligera (figura 9.13, página 268). La posición del centro de masa del sistema se describe como la *posición promedio* de la masa del sistema. El centro de masa del sistema se ubica en algún lugar en la línea que une las dos partículas y está más cerca de la partícula que tiene la masa más grande. Si se aplica una sola fuerza a un punto en la barra arriba del centro de masa, el sistema gira en sentido de las manecillas del reloj (vea la figura 9.13a). Si la fuerza se aplica en un punto en la barra por abajo del centro de masa, el sistema rota contra las manecillas del reloj (vea la figura 9.13b). Si la fuerza se aplica en el centro de

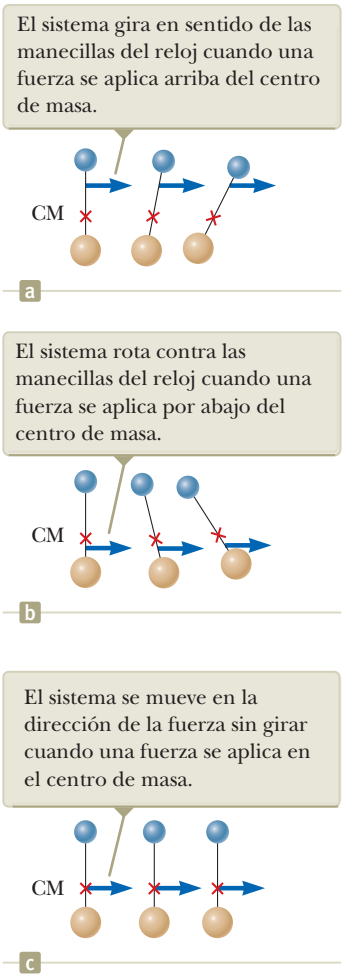


Figura 9.13 Se aplica una fuerza a un sistema de dos partículas de distintas masas unidas por una barra rígida ligera.

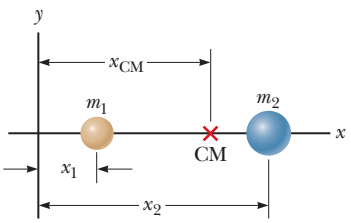


Figura 9.14 El centro de masa de dos partículas de masa distinta sobre el eje x se ubica en x_{CM}, un punto entre las partículas, más cerca de la que tiene la mayor masa.

masa, el sistema se mueve en la dirección de la fuerza sin girar (vea la figura 9.13c). El centro de masa de un objeto puede ubicarse mediante este procedimiento.

El centro de masa del par de partículas descritas en la figura 9.14 se localiza sobre el eje x y yace en algún lugar entre las partículas. Su coordenada x está dada por

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{9.28}$$

Por ejemplo, si $x_1 = 0$, $x_2 = d$ y $m_2 = 2m_1$, se encuentra que $x_{CM} = \frac{2}{3}d$. Es decir, el centro de masa se localiza más cerca de la partícula más masiva. Si las dos masas son iguales, el centro de masa se ubica a la mitad entre las partículas.

Se puede extender este concepto a un sistema de muchas partículas con masas m_i en tres dimensiones. La coordenada x del centro de masa de n partículas se define como

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \tag{9.29}$$

donde x_i es la coordenada x de la i-ésima partícula y la masa total es $M \equiv \Sigma_i$, con la suma incluyendo a las n partículas. Las coordenadas y y z del centro de masa se definen de manera similar mediante las ecuaciones

$$y_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \quad \text{y} \quad z_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i \tag{9.30}$$

El centro de masa se puede ubicar en tres dimensiones mediante su vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$. Las componentes de este vector son x_{CM}, y_{CM} y z_{CM}, definidas en las ecuaciones 9.29 y 9.30. Por lo tanto,

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} + z_{CM}\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i \hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i \tag{9.31}$$

donde $\vec{\mathbf{r}}_i$ es el vector de posición de la i-ésima partícula, definido por

$$\vec{\mathbf{r}}_i \equiv x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$$

Aunque localizar el centro de masa para un objeto extendido es algo más problemático que ubicar el centro de masa de un pequeño número de partículas, las ideas básicas discutidas aún se aplican. Piense en un objeto extendido como un sistema que contiene un gran número de pequeños elementos de masa, como el cubo en la figura 9.15. Ya que la separación entre elementos es muy pequeña, se considera que el objeto tiene una distribución de masa continua. Al dividir el objeto en elementos de masa Δm_i con coordenadas x_i, y_i, z_i se ve que la coordenada x del centro de masa es aproximadamente

$$x_{CM} \approx \frac{1}{M}\sum_i x_i \Delta m_i$$

con expresiones similares para y_{CM} y z_{CM}. Si se hace que el número n de elementos tienda a infinito, el tamaño de cada elemento tiende a cero y x_{CM} se conoce con precisión. En este límite, se sustituye la suma por una integral y Δm_i por el elemento diferencial dm:

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M}\sum_i x_i \Delta m_i = \frac{1}{M}\int x\, dm \tag{9.32}$$

Del mismo modo, para y_{CM} y z_{CM} se obtiene

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm \quad \text{y} \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\, dm \tag{9.33}$$

La posición vectorial del centro de masa de un objeto extendido se expresa en la forma

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\, dm \qquad (9.34)$$

que es equivalente a las tres expresiones dadas por las ecuaciones 9.32 y 9.33.

El centro de masa de cualquier objeto simétrico de densidad uniforme se encuentra sobre un eje de simetría y sobre cualquier plano de simetría. Por ejemplo, el centro de masa de una barra uniforme se localiza a la mitad entre sus extremos. El centro de masa de una esfera o de un cubo se encuentra en su centro geométrico.

Como un objeto extendido es una distribución continua de masa, entonces sobre cada pequeño elemento de masa actúa una fuerza gravitacional. El efecto neto de todas esas fuerzas es equivalente al efecto de una sola fuerza $M\vec{\mathbf{g}}$ actuando en un punto especial, llamado **centro de gravedad**. Si $\vec{\mathbf{g}}$ es constante en la distribución de masa, el centro de gravedad coincide con el centro de masa. Si un objeto extendido se pivotea en su centro de gravedad, entonces se balancea en cualquier orientación.

El centro de gravedad de un objeto con forma irregular, como una llave de tuerca, se determina al suspender el objeto, primero de un punto y luego de otro. En la figura 9.16, una llave de tuerca cuelga del punto A y se dibuja una línea vertical AB (que se puede establecer con una plomada) cuando la llave de tuerca deja de balancearse. Luego la llave de tuerca se cuelga del punto C, y se dibuja una segunda línea vertical CD. El centro de gravedad está a la mitad a través del grosor de la llave de tuerca, bajo la intersección de estas dos líneas. En general, si la llave de tuerca cuelga libremente de cualquier punto, la línea a través de este punto debe pasar por el centro de gravedad.

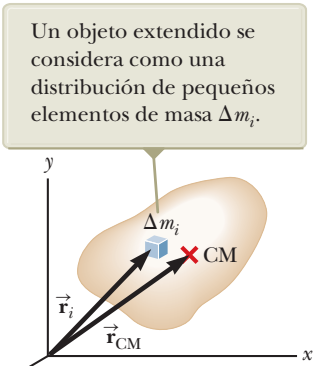


Figura 9.15 El centro de masa se ubica en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$, que tiene coordenadas x_{CM}, y_{CM} y z_{CM}.

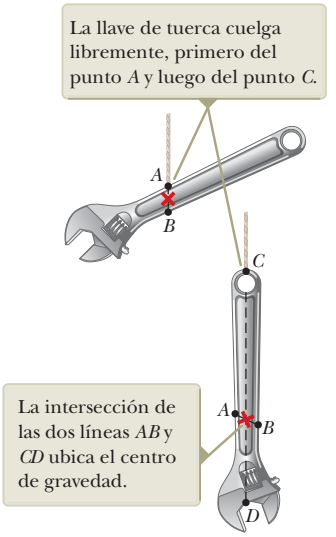


Figura 9.16 Una técnica experimental para determinar el centro de gravedad de una llave de tuerca.

Examen rápido 9.7 Un bat de béisbol de densidad uniforme se corta en la ubicación de su centro de masa, como se muestra en la figura 9.17. ¿Cuál pieza tiene la menor masa? **(a)** La de la derecha, **(b)** la de la izquierda, **(c)** ambas piezas tienen la misma masa, **(d)** imposible de determinar.

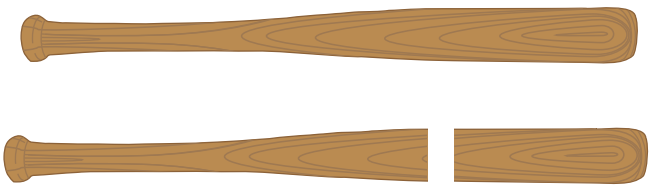


Figura 9.17 (Examen rápido 9.7) Un bat de béisbol cortado en la ubicación de su centro de masa.

Ejemplo 9.10 El centro de masa de tres partículas

Un sistema consiste de tres partículas ubicadas como se muestra en la figura 9.18. Encuentre el centro de masa del sistema. Las masas de las partículas son $m_1 = m_2 = 1.0$ kg y $m_3 = 2.0$ kg.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.18 muestra las tres masas. Su intuición debe decirle que el centro de masa se ubica en alguna parte en la región entre la partícula azul y el par de partículas cafés, como se indica en la figura.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución porque se usarán las ecuaciones para el centro de masa desarrolladas en esta sección.

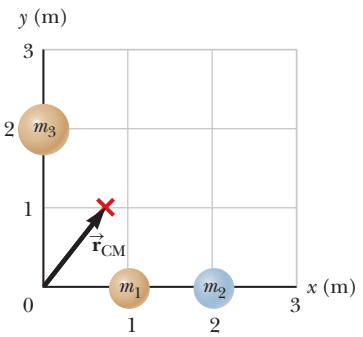


Figura 9.18 (Ejemplo 9.10) Dos partículas están localizadas sobre el eje x, y una sola partícula está colocada sobre el eje y, como se muestra. El vector indica la ubicación del centro de masa del sistema.

continúa

9.10 continuación

Use las ecuaciones que definen las coordenadas del centro de masa y advierta que $z_{CM} = 0$:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\text{ kg})(1.0\text{ m}) + (1.0\text{ kg})(2.0\text{ m}) + (2.0\text{ kg})(0)}{1.0\text{ kg} + 1.0\text{ kg} + 2.0\text{ kg}} = \frac{3.0\text{ kg}\cdot\text{m}}{4.0\text{ kg}} = 0.75\text{ m}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\text{ kg})(0) + (1.0\text{ kg})(0) + (2.0\text{ kg})(2.0\text{ m})}{4.0\text{ kg}} = \frac{4.0\text{ kg}\cdot\text{m}}{4.0\text{ kg}} = 1.0\text{ m}$$

Escriba el vector de posición del centro de masa:

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} \equiv x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} = (0.75\hat{\mathbf{i}} + 1.0\hat{\mathbf{j}})\text{ m}$$

Ejemplo 9.11 El centro de masa de una barra

(A) Demuestre que el centro de masa de una barra de masa M y longitud L se encuentra equidistante de sus extremos, si supone que la barra tiene una masa uniforme por unidad de longitud.

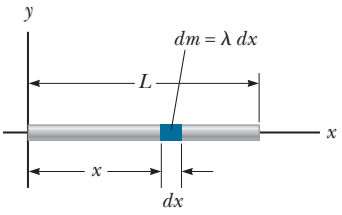


Figura 9.19 (Ejemplo 9.11) Geometría utilizada para encontrar el centro de masa de una barra uniforme.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La barra se muestra alineada a lo largo del eje x en la figura 9.19, así que $y_{CM} = z_{CM} = 0$. ¿Cuál es su predicción del valor de x_{CM}?

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de análisis, porque es necesario dividir la barra en pequeños elementos de masa para efectuar la integración en la ecuación 9.32.

Analizar La masa por unidad de longitud (esta cantidad se llama *densidad de masa lineal*) se puede escribir como $\lambda = M/L$ para la barra uniforme. Si la barra se divide en elementos de longitud dx, la masa de cada elemento es $dm = \lambda\, dx$.

Con la ecuación 9.32 encuentre una expresión para x_{CM}:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\, dx = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

Sustituya $\lambda = M/L$:

$$x_{CM} = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \tfrac{1}{2}L$$

También es posible utilizar argumentos de simetría para obtener el mismo resultado.

(B) Suponga que una barra *no es uniforme*, tal que su masa por unidad de longitud varía linealmente con x de acuerdo con la expresión $\lambda = \alpha x$, donde α es una constante. Encuentre la coordenada x del centro de masa como una fracción de L.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Como la masa por unidad de longitud no es constante sino proporcional a x, los elementos de la barra a la derecha son más masivos que los elementos cercanos al extremo izquierdo de la barra.

Categorizar Este problema se clasifica de manera similar al inciso **(A)**, con el sesgo añadido de que la densidad de masa lineal no es constante.

Analizar En este caso, sustituya dm en la ecuación 9.32 por $\lambda\, dx$, donde $\lambda = \alpha x$.

Use la ecuación 9.32 para encontrar una expresión para x_{CM}:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\, dx = \frac{1}{M}\int_0^L x\alpha x\, dx$$

$$= \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2\, dx = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

9.11 continuación

Encuentre la masa total de la barra:

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda\, dx = \int_0^L \alpha x\, dx = \frac{\alpha L^2}{2}$$

Sustituya M en la expresión para x_{CM}:

$$x_{CM} = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2/2} = \boxed{\tfrac{2}{3}L}$$

Finalizar Note que el centro de masa en la parte (B) está más hacia la derecha que en la parte (A). Este resultado es razonable porque los elementos de la barra se vuelven más masivos conforme uno se mueve hacia la derecha a lo largo de la barra en la parte (B).

Ejemplo 9.12 Centro de masa de un triángulo rectángulo

Se le pide colgar una señal metálica de un alambre vertical. La señal tiene la forma triangular que se muestra en la figura 9.20a. La parte baja de la señal es paralela al suelo. ¿A qué distancia del extremo izquierdo de la señal se debe unir el alambre de soporte?

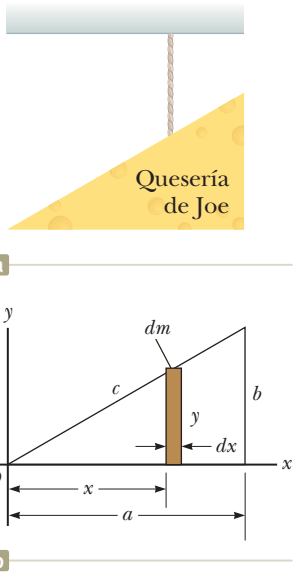


Figura 9.20 (Ejemplo 9.12) (a) Una señal triangular que se colgará de un solo alambre. (b) Construcción geométrica para ubicar el centro de masa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.20a muestra la señal que cuelga del alambre. El alambre se debe unir a un punto directamente sobre el centro de gravedad de la señal, que es el mismo que su centro de masa, porque está en un campo gravitacional uniforme.

Categorizar Como en el caso del ejemplo 9.11, este ejemplo se clasifica como un problema de análisis porque es necesario identificar elementos de masa infinitesimales de la señal para efectuar la integración en la ecuación 9.32.

Analizar Se supone que la señal triangular tiene una densidad uniforme y masa total M. Ya que la señal es una distribución de masa continua, se debe emplear la expresión integral de la ecuación 9.32 para hallar la coordenada x del centro de masa.

El triángulo se divide en delgadas tiras de ancho dx y altura y, como se muestra en la figura 9.20b, donde y es la altura de la hipotenusa del triángulo sobre el eje x para un valor dado de x. La masa de cada tira espacial es el producto del volumen de la tira y la densidad ρ del material del que está elaborada la señal: $dm = \rho y t\, dx$, donde t es el grosor de la señal metálica. La densidad del material es la masa total de la señal dividida entre su volumen total (área del triángulo multiplicada por el grosor).

Evalúe dm:

$$dm = \rho y t\, dx = \left(\frac{M}{\frac{1}{2}abt}\right) y t\, dx = \frac{2My}{ab}\, dx$$

Utilice la ecuación 9.32 para encontrar la coordenada x del centro de masa:

$$(1)\quad x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^a x\,\frac{2My}{ab}\, dx = \frac{2}{ab}\int_0^a xy\, dx$$

Para proceder aún más y evaluar la integral, debe expresar y en términos de x. La recta que representa la hipotenusa del triángulo en la figura 9.20b tiene una pendiente de b/a y pasa por el origen, así la ecuación de esta recta es $y = (b/a)x$.

Sustituya para y en la ecuación (1):

$$x_{CM} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2\, dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \boxed{\tfrac{2}{3}a}$$

Por lo tanto, el alambre se debe unir a la señal a una distancia de dos tercios de la longitud del borde inferior desde el extremo izquierdo.

continúa

9.12 continuación

Finalizar Esta respuesta es idéntica a la de la parte **(B)** del ejemplo 9.11. Para la señal triangular, el aumento lineal en altura y con la posición x significa que los elementos en la señal aumentan en masa linealmente a lo largo del eje x, semejante al incremento lineal en densidad de masa en el ejemplo 9.11. También se podría localizar la coordenada y del centro de masa de la señal, pero esto no es necesario para determinar dónde se debe unir el alambre. Puede intentar cortar un triángulo rectángulo de cartulina y colgarlo de una cuerda de modo que la base larga sea horizontal. ¿La cuerda necesita atarse en $\frac{2}{3}a$?

9.7 Sistemas de muchas partículas

Considere un sistema de dos o más partículas para el cual se ha identificado el centro de masa. Comenzará a entender el significado físico y la utilidad del concepto de centro de masa si toma la derivada con respecto al tiempo del vector de posición para el centro de masa dado por la ecuación 9.31. De la sección 4.1 se sabe que la derivada respecto al tiempo de un vector de posición es, por definición, el vector velocidad. Si supone que M permanece constante para un sistema de partículas, es decir, ninguna partícula entra o sale del sistema, se obtiene la siguiente expresión para la **velocidad del centro de masa** del sistema:

Velocidad del centro de masa de un sistema de partículas

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i \tag{9.35}$$

donde $\vec{\mathbf{v}}_i$ es la velocidad de la i-ésima partícula. Al reordenar la ecuación 9.35 resulta

Cantidad de movimiento total de un sistema de partículas

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{tot}} \tag{9.36}$$

Por lo tanto, la cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa. En otras palabras, la cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la de una sola partícula de masa M que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}}$.

Al derivar la ecuación 9.35 respecto del tiempo, se obtiene la **aceleración del centro de masa** del sistema:

Aceleración del centro de masa de un sistema de partículas

$$\vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{a}}_i \tag{9.37}$$

Al reordenar esta expresión y emplear la segunda ley de Newton se obtiene

$$M\vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{CM}} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i \tag{9.38}$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_i$ es la fuerza neta sobre la partícula i.

Las fuerzas sobre cualquier partícula en el sistema pueden incluir tanto fuerzas externas (desde afuera del sistema) como fuerzas internas (desde dentro del sistema). Sin embargo, por la tercera ley de Newton, la fuerza interna que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2, por ejemplo, es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza interna que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1. Por lo tanto, cuando en la ecuación 9.38 se suman todas las fuerzas internas, se cancelan en pares y se encuentra que la fuerza neta sobre el sistema la causan *solamente* las fuerzas externas. En tal caso se escribe la ecuación 9.38 en la forma

Segunda ley de Newton para un sistema de partículas

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}} = M\vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{CM}} \tag{9.39}$$

Es decir, la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa. Al comparar la ecuación 9.39 con la segunda ley de Newton para una sola partícula, se ve que el modelo de partícula empleado en varios capítulos se puede describir en términos del centro de masa:

> El centro de masa de un sistema de partículas que tiene masa combinada M se mueve como una partícula equivalente de masa M que se movería bajo la influencia de la fuerza externa neta en el sistema.

Se integra la ecuación 9.39 en un intervalo de tiempo finito:

$$\int \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}\, dt = \int M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}}\, dt = \int M\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}}{dt}\, dt = M\int d\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = M\,\Delta\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}$$

Note que esta ecuación se puede escribir como

$$\Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{I}} \tag{9.40}$$

◀ **Teorema impulso-cantidad de movimiento para un sistema de partículas**

donde $\vec{\mathbf{I}}$ es el impulso que las fuerzas externas imparten al sistema y $\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}$ es la cantidad de movimiento del sistema. La ecuación 9.40 es la generalización del teorema impulso-cantidad de movimiento para una partícula (ecuación 9.13) a un sistema de muchas partículas, y también es la representación matemática del modelo de sistema no aislado (cantidad de movimiento) para un sistema de múltiples partículas.

Por último, si la fuerza externa neta sobre un sistema es cero, el sistema es aislado; de la ecuación 9.39 se sigue que

$$M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = M\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}}{dt} = 0$$

Por lo tanto, el modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento de un sistema de muchas partículas queda descrito por

$$\Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = 0 \tag{9.41}$$

que puede escribirse como

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \text{constante (cuando} \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 0) \tag{9.42}$$

Es decir, la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas se conserva si no hay fuerza neta externa que actúe sobre el sistema. Se sigue que, para un sistema aislado de partículas, tanto la cantidad de movimiento total como la velocidad del centro de masa son constantes en el tiempo. Este enunciado es una generalización del modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento) para un sistema de muchas partículas.

Suponga que está en reposo el centro de masa de un sistema aislado que consta de dos o más integrantes. El centro de masa del sistema permanece en reposo si no existe fuerza neta sobre el sistema. Por ejemplo, considere un sistema de un nadador que está de pie sobre una balsa, con el sistema inicialmente en reposo. Cuando el nadador se clava horizontalmente desde la balsa, ésta se mueve en la dirección opuesta a la del nadador y el centro de masa del sistema permanece en reposo (si se desprecia la fricción entre la balsa y el agua). Además, la cantidad de movimiento lineal del nadador es igual en magnitud a la de la balsa, pero opuesta en dirección.

Examen rápido 9.8 Un crucero se mueve con rapidez constante a través del agua. Los vacacionistas en el barco están ansiosos por llegar a su siguiente destino. Deciden acelerar el crucero reuniéndose en la proa (el frente) y correr hacia la popa (la parte trasera) de la nave. **(i)** Mientras corren hacia la popa, ¿la rapidez de la nave es (a) mayor que antes, (b) invariable, (c) menor que antes, o (d) imposible de determinar? **(ii)** Los vacacionistas dejan de correr cuando llegan a la popa del barco. Después que todos dejan de correr, ¿la rapidez del barco es (a) mayor de la que era antes de que comenzaran a correr, (b) invariable de la que era antes de que comenzaran a correr, (c) menor de la que era antes de que comenzaran a correr, o (d) imposible de determinar?

Ejemplo conceptual 9.13 Explosión de un proyectil

Un proyectil disparado al aire súbitamente explota en varios fragmentos (figura 9.21, página 274).

(A) ¿Qué se puede decir sobre el movimiento del centro de masa del sistema conformado por todos los fragmentos después de la explosión?

continúa

9.13 continuación

SOLUCIÓN

Si desprecia la resistencia del aire, la única fuerza externa sobre el proyectil es la fuerza gravitacional. Por lo tanto, si el proyectil no explota, continuará moviéndose a lo largo de la trayectoria parabólica indicada por la línea discontinua en la figura 9.21. Ya que las fuerzas causadas por la explosión son internas, no afectan el movimiento del centro de masa del sistema (los fragmentos). En consecuencia, después de la explosión, el centro de masa de los fragmentos sigue la misma trayectoria parabólica que el proyectil habría seguido si no hubiese ocurrido la explosión.

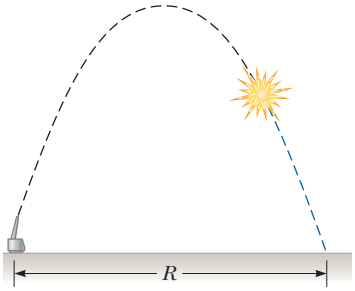


Figura 9.21 (Ejemplo conceptual 9.13) Cuando un proyectil explota en varios fragmentos, el centro de masa del sistema conformado por todos los fragmentos sigue la misma trayectoria parabólica que el proyectil habría tomado si no hubiese explotado.

(B) Si el proyectil no explota, aterrizará a una distancia R desde su punto de lanzamiento. Suponga que el proyectil explota y se rompe en dos piezas de igual masa. Una pieza aterriza a una distancia $2R$ a la derecha del punto de lanzamiento. ¿Dónde aterriza la otra pieza?

SOLUCIÓN

Como se discutió en la parte (A), el centro de masa del sistema de dos piezas aterriza a una distancia R desde el punto de lanzamiento. Una de las piezas aterriza a una distancia más allá de R desde el punto de aterrizaje (o a una distancia $2R$ desde el punto de lanzamiento), a la derecha en la figura 9.21. Ya que las dos piezas tienen la misma masa, la otra pieza debe aterrizar a una distancia R a la izquierda del punto de aterrizaje en la figura 9.21, ¡lo que coloca a esta pieza justo de regreso al punto de lanzamiento!

Ejemplo 9.14 El cohete que explota AM

Un cohete se dispara verticalmente hacia arriba. En el instante en que llega a una altura de 1 000 m y una rapidez de $v_i =$ 300 m/s, explota en tres fragmentos que tienen igual masa. Un fragmento se mueve hacia arriba con una rapidez de $v_1 = 450$ m/s después de la explosión. El segundo fragmento tiene una rapidez de $v_2 = 240$ m/s y se mueve al Este justo después de la explosión. ¿Cuál es la velocidad del tercer fragmento inmediatamente después de la explosión?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En su mente dibuje la explosión, con una pieza yendo hacia arriba y una segunda pieza moviéndose horizontalmente hacia el Este. ¿Tiene usted algún sentimiento intuitivo sobre la dirección en que se mueve la tercera pieza?

Categorizar Este ejemplo es un problema bidimensional porque tiene dos fragmentos móviles en direcciones perpendiculares después de la explosión, así como un tercer fragmento que se mueve en una dirección desconocida en el plano definida por los vectores velocidad de los otros dos fragmentos. Se supone que el intervalo de tiempo de la explosión es muy breve, así que se usa la aproximación del impulso en la que se ignora la fuerza gravitacional y la resistencia del aire. Como las fuerzas de la explosión son internas al sistema (el cohete), el cohete es un *sistema aislado* en términos de *cantidad de movimiento*. Por lo tanto, la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_i$ del cohete inmediatamente antes de la explosión debe ser igual a la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_f$ de los fragmentos inmediatamente después de la explosión.

Analizar Ya que los tres fragmentos tienen igual masa, la masa de cada fragmento es $M/3$, donde M es la masa total del cohete. Sea $\vec{\mathbf{v}}_3$ que representa la velocidad desconocida del tercer fragmento.

Utilice el modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento) para igualar la cantidad de movimiento inicial con la final del sistema y exprese las cantidades de movimiento en términos de masas y velocidades:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f \quad \rightarrow \quad M\vec{\mathbf{v}}_i = \frac{M}{3}\vec{\mathbf{v}}_1 + \frac{M}{3}\vec{\mathbf{v}}_2 + \frac{M}{3}\vec{\mathbf{v}}_3$$

Resuelva para $\vec{\mathbf{v}}_3$:

$$\vec{\mathbf{v}}_3 = 3\vec{\mathbf{v}}_i - \vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2$$

Sustituya los valores numéricos:

$$\vec{\mathbf{v}}_3 = 3(300\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}) - (450\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}) - (240\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}) = (-240\hat{\mathbf{i}} + 450\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}$$

Finalizar Observe que este evento es el inverso de una colisión perfectamente inelástica. Hay un objeto antes de la colisión y tres objetos después. Imagine correr hacia atrás una película del evento: los tres objetos se juntarían y se convertirían en un solo objeto. En una colisión perfectamente inelástica, la energía cinética del sistema disminuye. Si calcula la energía cinética antes

9.14 continuación

y después del evento en este ejemplo, encontrará que la energía cinética del sistema aumenta. (¡Inténtelo!) Este aumento de la energía cinética proviene de la energía potencial almacenada en cualquier combustible que explote para causar el rompimiento del cohete.

9.8 Sistemas deformables

Hasta el momento, en esta exposición de mecánica se analizó el movimiento de partículas o sistemas no deformables que se modelan como partículas. La discusión en la sección 9.7 se puede aplicar a un análisis del movimiento de sistemas deformables. Por ejemplo, suponga que está de pie sobre una patineta y se empuja con una pared, con lo que se pone en movimiento alejándose de la pared. Su cuerpo se ha deformado durante este evento: sus brazos se doblaron antes del evento y se estiraron mientras se empujaba de la pared. ¿Cómo describiría este evento?

La fuerza a causa de la pared sobre sus manos se mueve hasta el final sin desplazamiento; la fuerza siempre se localiza en la interfaz entre la pared y sus manos. Por lo tanto, la fuerza no hace trabajo sobre el sistema, formado por usted y la patineta. Sin embargo, empujarse de la pared en efecto da como resultado un cambio en la energía cinética del sistema. Si intenta usar el teorema trabajo-energía cinética, $W = \Delta K$, para describir este evento, notará que el lado izquierdo de la ecuación es cero, pero el lado derecho es distinto de cero. El teorema trabajo-energía cinética no es válido para este evento y con frecuencia no es válido para sistemas que son deformables.

Para analizar el movimiento de sistemas deformables se recurre a la ecuación 8.2, la ecuación de conservación de la energía, y a la ecuación 9.40, el teorema impulso-cantidad de movimiento. Para el ejemplo de usted empujándose con la pared sobre su patineta, la ecuación 8.2 da

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \sum T \quad \rightarrow \quad \Delta K + \Delta U = 0$$

donde ΔK es el cambio en energía cinética debido al aumento de rapidez del sistema, y ΔU es la disminución en energía potencial almacenada en el cuerpo resultante de las comidas previas. Esta ecuación dice que el sistema transformó energía potencial en energía cinética mediante el empleo de fuerza muscular necesaria para empujarse con la pared. Note que el sistema está aislado en términos de energía, pero no está aislado en términos de la cantidad de movimiento.

Al aplicar la ecuación 9.40 al sistema en esta situación, se obtiene

$$\Delta \vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{I}} \quad \rightarrow \quad m\,\Delta \vec{\mathbf{v}} = \int \vec{\mathbf{F}}_{\text{pared}}\, dt$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_{\text{pared}}$ es la fuerza ejercida por la pared sobre sus manos, m es la masa de usted y la patineta, y $\Delta \vec{\mathbf{v}}$ es el cambio en la velocidad del sistema durante el evento. Para evaluar el lado derecho de esta ecuación, se necesitaría conocer cómo varía en el tiempo la fuerza a causa de la pared. En general, este proceso podría ser complicado. Sin embargo, en el caso de fuerzas constantes o fuerzas bien comportadas, se puede evaluar la integral del lado derecho de la ecuación.

Ejemplo 9.15 Empujar sobre un resorte[3] AM

Como se muestra en la figura 9.22a (página 276), dos bloques están en reposo sobre una mesa a nivel sin fricción. Ambos bloques tienen la misma masa m y están conectados mediante un resorte de masa despreciable. La distancia de separación de los bloques cuando el resorte está relajado es L. Durante un intervalo de tiempo Δt, se aplica horizontalmente una fuerza

[3]El ejemplo 9.15 fue inspirado en parte por C. E. Mungan, "A primer on work-energy relationships for introductory physics", *The Physics Teacher* **43**:10, 2005.

continúa

9.15 continuación

constante F al bloque izquierdo y lo mueve una distancia x_1, como se muestra en la figura 9.22b. Durante este intervalo de tiempo, el bloque derecho se mueve una distancia x_2. Al final de este intervalo de tiempo se retira la fuerza F.

(A) Encuentre la rapidez resultante $\vec{\mathbf{v}}_{CM}$ del centro de masa del sistema.

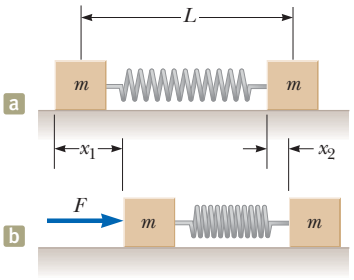


Figura 9.22 (Ejemplo 9.15) (a) Dos bloques de igual masa se conectan mediante un resorte. (b) El bloque izquierdo se empuja con una fuerza constante de magnitud F y se mueve una distancia x_1 durante cierto intervalo de tiempo. Durante este mismo intervalo de tiempo el bloque derecho se mueve una distancia x_2.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que sucede mientras empuja sobre el bloque izquierdo. Empieza a moverse hacia la derecha en la figura 9.22, y el resorte empieza a comprimirse. Como resultado, el resorte empuja hacia la derecha el bloque derecho, que comienza a moverse hacia la derecha. En cualquier momento dado, por lo general los bloques se mueven con diferentes velocidades. A medida que el centro de masa del sistema se mueve hacia la derecha con rapidez constante después de eliminar la fuerza, ambos bloques oscilan de ida y vuelta respecto al centro de masa.

Categorizar En este problema se aplican tres análisis de modelos: el sistema deformable de dos bloques y un resorte se modela como un *sistema no aislado* en términos de *energía,* porque la fuerza aplicada realiza trabajo sobre él. También es modelado como un *sistema no aislado* en términos de *cantidad de movimiento* debido a la fuerza que actúa sobre el sistema durante un intervalo de tiempo. Como la fuerza aplicada sobre el sistema es constante, entonces la aceleración de su centro de masa es constante y así el centro de masa se modela como una *partícula bajo aceleración constante.*

Analizar Utilice el modelo de sistema no aislado (cantidad de movimiento), aplique el teorema impulso-cantidad de movimiento al sistema de dos bloques y observe que la fuerza F es constante durante el intervalo de tiempo Δt mientras se aplica la fuerza.

Escriba la ecuación 9.40 para el sistema:

$$\Delta p_x = I_x \quad \rightarrow \quad (2m)(v_{CM} - 0) = F\,\Delta t$$

$$(1) \quad 2mv_{CM} = F\,\Delta t$$

Durante el intervalo de tiempo Δt, el centro de masa del sistema se mueve una distancia $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Use este hecho para expresar el intervalo de tiempo en términos de $v_{CM,prom}$:

$$\Delta t = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{v_{CM,prom}}$$

Ya que el centro de masa se modela como una partícula bajo aceleración constante, la velocidad promedio del centro de masa es el promedio de la velocidad inicial, que es cero, y la velocidad final v_{CM}:

$$\Delta t = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{\frac{1}{2}(0 + v_{CM})} = \frac{(x_1 + x_2)}{v_{CM}}$$

Sustituya esta expresión en la ecuación (1):

$$2mv_{CM} = F\,\frac{(x_1 + x_2)}{v_{CM}}$$

Resuelva para v_{CM}:

$$v_{CM} = \sqrt{F\,\frac{(x_1 + x_2)}{2m}}$$

(B) Encuentre la energía total del sistema asociada con la vibración relativa a su centro de masa después que se retira la fuerza F.

SOLUCIÓN

Analizar La energía de vibración es toda la energía del sistema, distinta de la energía cinética asociada con el movimiento traslacional del centro de masa. Para encontrar la energía vibratoria se aplica la ecuación de conservación de la energía. La energía cinética del sistema se puede expresar como $K = K_{CM} + K_{vib}$, donde K_{vib} es la energía cinética de los bloques relativa al centro de masa debida a su vibración. La energía potencial del sistema es U_{vib}, que es la energía potencial almacenada en el resorte cuando la separación de los bloques es algún valor distinto de L.

A partir del modelo de sistema no aislado (energía), exprese la ecuación 8.2 para este sistema:

$$(2) \quad \Delta K_{CM} + \Delta K_{vib} + \Delta U_{vib} = W$$

9.15 continuación

Exprese la ecuación (2) en una forma alternativa y note que $K_{vib} + U_{vib} = E_{vib}$:

$$\Delta K_{CM} + \Delta E_{vib} = W$$

Los valores iniciales de la energía cinética del centro de masa y la energía vibratoria del sistema son cero. Utilice este hecho y sustituya para el trabajo realizado sobre el sistema por la fuerza F:

$$K_{CM} + E_{vib} = W = Fx_1$$

Resuelva para la energía vibratoria y use el resultado de la parte (A):

$$E_{vib} = Fx_1 - K_{CM} = Fx_1 - \tfrac{1}{2}(2m)v_{CM}{}^2 = F\,\frac{(x_1 - x_2)}{2}$$

Finalizar Ninguna de las dos respuestas en este ejemplo depende de la longitud del resorte, la constante del resorte o el intervalo de tiempo. Note también que la magnitud x_1 del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza aplicada es diferente de la magnitud $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ del desplazamiento del centro de masa del sistema. Esta diferencia recuerda que el desplazamiento en la definición del trabajo (ecuación 7.1) es la del punto de aplicación de la fuerza.

9.9 Propulsión de cohetes

Cuando los vehículos ordinarios como los automóviles se impulsan, la fuerza impulsora para el movimiento es la fricción. En el caso del auto, la fuerza impulsora es la fuerza que ejerce el camino sobre el auto. El automóvil se puede modelar como un sistema no aislado en términos de cantidad de movimiento. El camino aplica un impulso al auto, y el resultado es un cambio en la cantidad de movimiento del automóvil, como se describe con la ecuación 9.40.

Sin embargo, un cohete que se mueve en el espacio no tiene camino contra el cual empujar. El cohete es un sistema aislado en términos de cantidad de movimiento. Por lo tanto, la fuente de la propulsión de un cohete debe ser algo distinto de una fuerza externa. La operación de un cohete depende de la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal como se aplica a un sistema aislado, donde el sistema es el cohete más su combustible expulsado.

La propulsión de cohetes es comprensible al considerar primero al arquero que está de pie sobre hielo sin fricción en el ejemplo 9.1. Imagine que el arquero dispara varias flechas horizontalmente. Por cada flecha disparada, el arquero recibe una cantidad de movimiento compensatoria en la dirección opuesta. Mientras dispare más flechas, el arquero se mueve cada vez más rápido a través del hielo. Además de este análisis en términos de cantidad de movimiento, este fenómeno también se puede entender en términos de la segunda y tercera leyes de Newton. Cada vez que el arco lanza una flecha, ésta empuja al arco (y al arquero) hacia atrás, y estas fuerzas originan la aceleración del arquero.

En forma similar, conforme un cohete se mueve en el espacio libre, su cantidad de movimiento lineal cambia cuando una parte de su masa se expulsa en la forma de gases de escape. Ya que a los gases se les da cantidad de movimiento cuando se expulsan del motor, el cohete recibe una cantidad de movimiento compensatoria en la dirección opuesta. Por lo tanto, el cohete se acelera como resultado del "empujón", o empuje, de los gases de escape. En el espacio libre, el centro de masa del sistema (cohete más gases expulsados) se mueve uniformemente, independiente del proceso de propulsión.[4]

Suponga que en algún tiempo t la magnitud de la cantidad de movimiento de un cohete más su combustible es $(M + \Delta m)v$, donde v es la rapidez del cohete en relación con la Tierra (figura 9.23a). En un intervalo de tiempo breve Δt, el cohete expulsa combustible de masa Δm. Al final de este intervalo la masa del cohete es M y



Courtesía de la NASA

La fuerza del dispositivo manual impulsado por nitrógeno permite a un astronauta moverse libremente en el espacio sin correas restrictivas con el uso de la fuerza de empuje proveniente del nitrógeno expulsado.

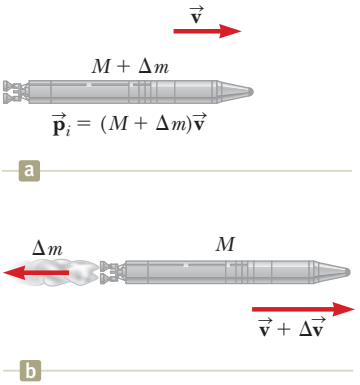


Figura 9.23 Propulsión de un cohete. (a) La masa inicial del cohete más todo su combustible es $M + \Delta m$ al tiempo t, y su rapidez es v. (b) Al tiempo $t + \Delta t$, la masa del cohete se redujo a M y se expulsó una cantidad de combustible Δm. La rapidez del cohete aumenta por una cantidad Δv.

[4] El cohete y el arquero representan casos del inverso de una colisión perfectamente inelástica: la cantidad de movimiento se conserva, pero la energía cinética del sistema cohete-gas expulsado aumenta (a costa de la energía potencial química en el combustible), como lo hace la energía cinética del sistema arquero-flecha (a costa de la energía potencial de los alimentos previos del arquero).

su rapidez es $v + \Delta v$, donde Δv es el cambio en rapidez del cohete (figura 9.23b). Si el combustible se expulsa con una rapidez v_e en relación con el cohete (el subíndice e representa *escape*, y v_e usualmente se llama *rapidez de escape*), la velocidad del combustible relativa a la Tierra es $v - v_e$. Como el sistema del cohete y el combustible expulsado es aislado, entonces se aplica el modelo de sistema aislado para la cantidad de movimiento y se obtiene

$$\Delta p = 0 \rightarrow p_i = p_f \rightarrow (M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

Al simplificar esta expresión resulta

$$M\,\Delta v = v_e\,\Delta m$$

Si ahora se toma el límite cuando Δt tiende a cero, se tiene $\Delta v \rightarrow dv$ y $\Delta m \rightarrow dm$. Además, el aumento en la masa de escape dm corresponde a una igual disminución en la masa del cohete, así $dm = -dM$. Note que dM es negativo, porque representa una disminución en masa, de modo que $-dM$ es un número positivo. Al usar este hecho se obtiene

$$M\,dv = v_e\,dm = -v_e\,dM \tag{9.43}$$

Ahora divida la ecuación entre M e integre, tomando la masa inicial del cohete más la del combustible como M_i y la masa final del cohete más su combustible restante como M_f. El resultado es

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

Expresión para propulsión de cohetes

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \tag{9.44}$$

que es la expresión básica para la propulsión de cohetes. Primero, la ecuación 9.44 indica que el aumento en la rapidez del cohete es proporcional a la rapidez de escape v_e de los gases expulsados. Por lo tanto, la rapidez de escape debe ser muy alta. Segundo, el aumento en la rapidez del cohete es proporcional al logaritmo natural de la razón M_i/M_f. En consecuencia, esta razón debe ser tan grande como sea posible, es decir, la masa del cohete sin combustible debe ser tan pequeña como se pueda y el cohete debe llevar bastante combustible.

El **empuje** en el cohete es la fuerza que ejercen sobre él los gases de escape expulsados. A partir de la segunda ley de Newton y de la ecuación 9.43 se obtiene la siguiente expresión para el empuje:

$$\text{Empuje} = M\frac{dv}{dt} = \left|v_e \frac{dM}{dt}\right| \tag{9.45}$$

Esta relación muestra que el empuje aumenta conforme crece la rapidez de escape y al incrementar la razón de cambio de masa (llamada *rapidez de consumo*).

Ejemplo 9.16 Combate de incendios

Dos bomberos deben aplicar una fuerza total de 600 N para estabilizar una manguera que descarga agua a una razón de 3 600 L/min. Estime la rapidez del agua conforme sale de la boquilla.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Conforme el agua sale de la boquilla, actúa de manera similar a los gases que se expulsan del motor de un cohete. Como resultado, una fuerza (empuje) actúa sobre los bomberos en una dirección opuesta a la dirección de movimiento del agua. En este caso se quiere que el extremo de la manguera sea una partícula en equilibrio, en lugar de que acelere, como en el caso del cohete. En consecuencia, los bomberos deben aplicar una fuerza de magnitud igual al empuje en la dirección opuesta para mantener fijo el extremo de la manguera.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución en donde se emplean valores dados en una ecuación deducida en esta sección. El agua sale a 3 600 L/min, que es 60 L/s. Al saber que 1 L de agua tiene una masa de 1 kg, se estima que aproximadamente 60 kg de agua salen de la boquilla cada segundo.

9.16 continuación

Use la ecuación 9.45 para el empuje: $\text{Empuje} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$

Resuelva para la rapidez de escape: $v_e = \frac{\text{Empuje}}{|dM/dt|}$

Sustituya valores numéricos: $v_e = \frac{600\ \text{N}}{60\ \text{kg/s}} = 10\ \text{m/s}$

Ejemplo 9.17 Un cohete en el espacio

Un cohete que se mueve en el espacio, lejos de todos los otros objetos, tiene una rapidez de 3.0×10^3 m/s en relación con la Tierra. Sus motores se encienden y el combustible se expulsa en una dirección opuesta al movimiento del cohete con una rapidez de 5.0×10^3 m/s relativa al cohete.

(A) ¿Cuál es la rapidez del cohete respecto a la Tierra una vez que la masa del cohete se reduce a la mitad de su masa antes de la ignición?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.23 muestra la situación en este problema. A partir de la discusión en esta sección y las escenas de las películas de ciencia ficción uno puede imaginar fácilmente el cohete acelerando a una mayor rapidez conforme el motor funciona.

Categorizar Éste es un problema de sustitución en el cual se utilizan los valores dados en las ecuaciones deducidas en esta sección.

Resuelva la ecuación 9.44 para la velocidad final y sustituya los valores conocidos:

$$\begin{aligned} v_f &= v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \\ &= 3.0 \times 10^3\ \text{m/s} + (5.0 \times 10^3\ \text{m/s}) \ln\left(\frac{M_i}{0.50 M_i}\right) \\ &= 6.5 \times 10^3\ \text{m/s} \end{aligned}$$

(B) ¿Cuál es el empuje sobre el cohete si quema combustible a razón de 50 kg/s?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 9.45, observando que $dM/dt = 50$ kg/s:

$$\text{Empuje} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| = (5.0 \times 10^3\ \text{m/s})(50\ \text{kg/s}) = 2.5 \times 10^5\ \text{N}$$

Resumen

Definiciones

La **cantidad de movimiento lineal** $\vec{\mathbf{p}}$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ es

$$\vec{\mathbf{p}} \equiv m\vec{\mathbf{v}} \qquad (9.2)$$

El **impulso** que se imparte a una partícula mediante una fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ es igual a la integral en el tiempo de la fuerza:

$$\vec{\mathbf{I}} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \qquad (9.9)$$

continúa

En una **colisión inelástica** no se conserva la energía cinética total del sistema de partículas en colisión. En una **colisión perfectamente inelástica** las partículas que colisionan quedan unidas después de la colisión. En una **colisión elástica** se conserva la energía cinética del sistema.

El vector de posición del **centro de masa** de un sistema de partículas se define como

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i \qquad (9.31)$$

donde $M = \Sigma_i\, m_i$ es la masa total del sistema y $\vec{\mathbf{r}}_i$ es el vector de posición de la i-ésima partícula.

Conceptos y principios

El vector de posición del centro de masa de un objeto extendido se obtiene a partir de la expresión integral

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\, dm \qquad (9.34)$$

La velocidad del centro de masa para un sistema de partículas es

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i \qquad (9.35)$$

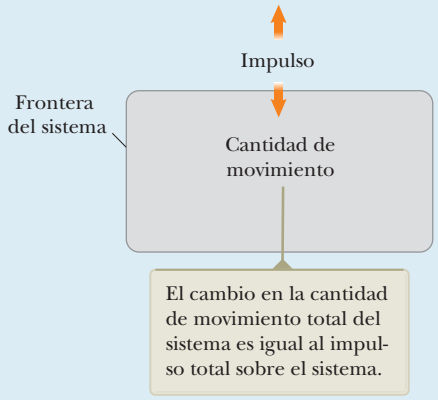
La cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.

La segunda ley de Newton aplicada a un sistema de partículas es

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = M\,\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} \qquad (9.39)$$

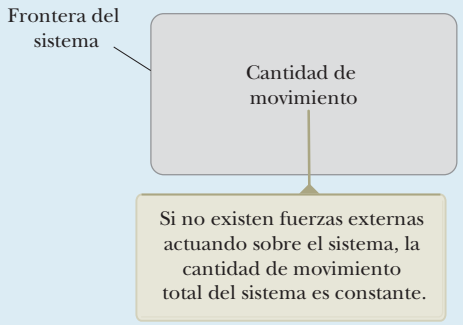
donde $\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}}$ es la aceleración del centro de masa y la suma es sobre todas las fuerzas externas. El centro de masa se mueve como una partícula imaginaria de masa M bajo la influencia de la fuerza externa resultante sobre el sistema.

Análisis de modelos para resolver problemas



Sistema no aislado (cantidad de movimiento). Si un sistema interactúa con su entorno en el sentido de que existe una fuerza externa sobre el sistema, el comportamiento de éste se describe mediante el **teorema impulso-cantidad de movimiento**:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{I}} \qquad (9.40)$$



Sistema aislado (cantidad de movimiento). La cantidad de movimiento total de un sistema aislado (sin fuerzas externas) se conserva sin importar la naturaleza de las fuerzas entre los integrantes del sistema:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = 0 \qquad (9.41)$$

El sistema puede ser aislado en términos de cantidad de movimiento, pero no aislado en términos de energía, como en el caso de colisiones inelásticas.

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Usted está de pie sobre un trineo con forma de platillo, en reposo, en medio de una pista de patinaje de hielo sin fricción. Su compañero de laboratorio le lanza un pesado frisbee. Usted realiza diferentes acciones en ensayos experimentales sucesivos. Clasifique las siguientes situaciones en orden de acuerdo con su rapidez final, de mayor a menor. Si su rapidez final es la misma en dos casos, déles igual clasificación. (a) Atrapa el frisbee y se queda con él. (b) Atrapa el frisbee y lo lanza de regreso a su compañero. (c) Falla la atrapada y apenas toca al frisbee, de modo que continúa en su dirección original más lentamente. (d) Atrapa el frisbee y lo lanza de modo que se mueve verticalmente hacia arriba sobre su cabeza. (e) Atrapa el frisbee y lo pone en reposo sobre el hielo.

2. Un vagón de mercancías se pone en movimiento en lo alto de un montecillo. El vagón rueda suavemente y sin fricción sobre una recta a nivel, donde se acopla con un vagón de plataforma de menor masa, originalmente en reposo, de modo que los dos vagones ruedan juntos sin fricción. Considere los dos vagones como un sistema desde el momento de liberación del vagón de mercancías hasta que ambos ruedan juntos. Conteste las siguientes preguntas con un sí o un no. (a) ¿Se conserva la energía mecánica del sistema? (b) ¿Se conserva la cantidad de movimiento del sistema? A continuación, sólo considere el proceso del vagón de mercancías que gana rapidez al bajar rodando del montecillo. Para el vagón de mercancías y la Tierra como un sistema, (c) ¿se conserva la energía mecánica? (d) ¿Se conserva la cantidad de movimiento? Finalmente, considere los dos vagones como un sistema a medida que el vagón de mercancías frena en el proceso de acoplamiento. (e) ¿Se conserva la energía mecánica de este sistema? (f) ¿Se conserva la cantidad de movimiento de este sistema?

3. Un tractor de gran masa rueda por un camino vecinal. En una colisión perfectamente inelástica, un pequeño auto deportivo choca con el tractor por detrás. **(i)** ¿Cuál vehículo experimenta un cambio en cantidad de movimiento de mayor magnitud? (a) El automóvil. (b) El tractor. (c) Los cambios de cantidad de movimiento son del mismo tamaño. (d) Podría ser cualquier vehículo. **(ii)** ¿Cuál vehículo experimenta un mayor cambio en energía cinética? (a) El auto. (b) El tractor. (c) Los cambios de energía cinética son del mismo tamaño. (d) Podría ser cualquier vehículo.

4. Un objeto de 2 kg se mueve hacia la derecha con una rapidez de 4 m/s, choca de frente elásticamente con un objeto de 1 kg que inicialmente está en reposo. Después de la colisión, la velocidad del objeto de 1 kg es (a) mayor que 4 m/s, (b) menor que 4 m/s, (c) igual a 4 m/s, (d) cero o (e) imposible de decir con la información disponible.

5. Un carrito de 5 kg se mueve hacia la derecha con una rapidez de 6 m/s y colisiona con una pared de cemento y rebota con una rapidez de 2 m/s. ¿Cuál es el cambio en cantidad de movimiento del carrito? (a) 0, (b) 40 kg · m/s, (c) −40 kg · m/s, (d) −30 kg · m/s, (e) −10 kg · m/s.

6. Una pelota de tenis de 57.0 g viaja en línea recta hacia un jugador a 21.0 m/s. El jugador golpea la bola de regreso, a 25.0 m/s. Si la pelota permanece en contacto con la raqueta durante 0.060 s, ¿qué fuerza promedio actúa sobre la bola? (a) 22.6 N, (b) 32.5 N, (c) 43.7 N, (d) 72.1 N, (e) 102 N.

7. La cantidad de movimiento de un objeto se hace cuatro veces más grande en magnitud. ¿En qué factor cambió su energía cinética? (a) 16, (b) 8, (c) 4, (d) 2, (e) 1.

8. La energía cinética de un objeto se hace cuatro veces mayor. ¿En qué factor cambió la magnitud de su cantidad de movimiento? (a) 16, (b) 8, (c) 4, (d) 2, (e) 1.

9. Si dos partículas tienen cantidades de movimiento iguales, ¿sus energías cinéticas son iguales? (a) Sí, siempre; (b) no, nunca; (c) no, excepto cuando ambas tienen la misma rapidez; (d) sí, si se mueven en líneas paralelas.

10. Si dos partículas tienen energías cinéticas iguales, ¿son iguales sus cantidades de movimiento? (a) Sí, siempre; (b), no, nunca; (c) sí, si sus masas son iguales; (d), sí, si son de igual masa y coinciden sus direcciones de movimiento; (e) sí, si se mueven en direcciones paralelas.

11. Una bala de 10.0 g se dispara contra un bloque de madera de 200 g que está en reposo sobre una superficie horizontal. Después del impacto, el bloque se desliza 8.00 m antes de retornar al reposo. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es 0.400, ¿cuál es la rapidez de la bala antes del impacto? (a) 106 m/s, (b) 166 m/s, (c) 226 m/s, (d) 286 m/s, (e) ninguna de estas respuestas es correcta.

12. Dos partículas con diferentes masas parten del reposo. La misma fuerza neta actúa sobre ambas mientras se mueven sobre distancias iguales. ¿Cómo se comparan sus energías cinéticas finales? (a) La partícula de mayor masa tiene mayor energía cinética. (b) La partícula de menor masa tiene más energía cinética. (c) Las partículas tienen iguales energías cinéticas. (d) Cualquier partícula puede tener más energía cinética.

13. Dos partículas con diferentes masas parten del reposo. La misma fuerza neta actúa sobre ambas mientras se mueven sobre distancias iguales. ¿Cómo se comparan las magnitudes de sus cantidades de movimiento finales? (a) La partícula de mayor masa tiene más cantidad de movimiento. (b) La partícula de menor masa tiene más cantidad de movimiento. (c) Ambas partículas tienen la misma cantidad de movimiento. (d) Cualquier partícula podría tener más cantidad de movimiento.

14. Un balón de basquetbol se lanza al aire, cae libremente y rebota en el suelo de madera. Desde el momento después que el jugador lo libera, hasta que la bola llega a la parte superior de su rebote, ¿cuál es el sistema más pequeño para el cual se conserva la cantidad de movimiento? (a) El balón, (b) el balón más el jugador, (c) el balón más el suelo, (d) el balón más la Tierra, (e) la cantidad de movimiento no se conserva para cualquier sistema.

15. Un objeto de 3 kg que se mueve hacia la derecha, sobre una superficie horizontal sin fricción, con una rapidez de 2 m/s, colisiona de frente y queda unido con un objeto de 2 kg que inicialmente se mueve hacia la izquierda con una rapidez de 4 m/s. Después de la colisión, ¿cuál enunciado es correcto? (a) La energía cinética del sistema es 20 J. (b) La cantidad de movimiento del sistema es 14 kg · m/s. (c) La energía cinética del sistema es mayor que 5 J

pero menor que 20 J. (d) La cantidad de movimiento del sistema es −2 kg · m/s. (e) La cantidad de movimiento del sistema es menor que la cantidad de movimiento del sistema antes de la colisión.

16. Una bola está suspendida mediante una cuerda que se une a un punto fijo sobre un bloque de madera que está vertical. La bola se jala hacia atrás, como se muestra en la figura PO9.16, y se libera. En el ensayo A, la bola rebota elásticamente desde el bloque. En el ensayo B, una cinta con adhesivo en ambos lados hace que la bola se pegue al bloque. ¿En cuál caso la bola tiene más probabilidad de derribar el bloque? (a) En el ensayo A. (b) En el ensayo B. (c) No hay diferencia. (d) Podría ser cualquier caso, dependiendo de otros factores.

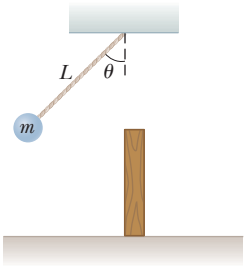


Figura PO9.16

17. Un auto de masa m viaja con rapidez v y choca en la parte trasera de una camioneta de masa $2m$ que está en reposo en una intersección. Si la colisión es perfectamente inelástica, ¿cuál es la rapidez del sistema auto-camioneta después de la colisión? (a) v, (b) $v/2$, (c) $v/3$, (d) $2v$, (e) ninguna de estas respuestas es correcta.

18. Una colisión elástica frontal ocurre entre dos bolas de billar de igual masa. Si una bola roja se mueve hacia la derecha con rapidez v y una bola azul se desplaza hacia la izquierda con rapidez $3v$ antes de la colisión, ¿qué enunciado es correcto respecto a las velocidades posteriores a la colisión? Desprecie efectos de espín. (a) La bola roja viaja hacia la izquierda con rapidez v, mientras que la bola azul se mueve hacia la derecha con rapidez $3v$. (b) La bola roja se desplaza hacia la izquierda con rapidez v, mientras que la bola azul continúa su movimiento hacia la izquierda con rapidez $2v$. (c) La bola roja viaja hacia la izquierda con rapidez $3v$, mientras la bola azul se mueve hacia la derecha con rapidez v. (d) No es posible determinar sus velocidades finales porque la cantidad de movimiento no se conserva en la colisión. (e) No se pueden determinar las velocidades sin conocer la masa de cada bola.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. La bolsa de aire en un automóvil se infla cuando ocurre una colisión, lo cual evita lesiones al pasajero (vea la fotografía en la página 254). ¿Por qué la bolsa de aire amortigua el golpe? Discuta la física involucrada en esta dramática fotografía.

2. En el golf, a los jugadores novatos se les aconseja "marcar el movimiento" con su golpe. ¿Por qué este consejo permite que la bola viaje mayor distancia? Si un golpe es cercano al campo, casi no se requiere marcar el movimiento, ¿por qué?

3. Una caja abierta se desliza sobre una superficie de hielo, sin fricción, de un lago congelado. ¿Qué ocurre con la rapidez de la caja conforme cae agua verticalmente dentro de la caja? Explique.

4. Mientras está en movimiento, una pelota de béisbol lanzada lleva energía cinética y cantidad de movimiento. (a) ¿Lleva una fuerza que puede ejercer sobre cualquier objeto que golpee? (b) ¿La pelota de béisbol entrega más energía cinética al bat y al bateador que golpea que la que llevaba inicialmente? (c) ¿La pelota de béisbol entrega al bat y al bateador que golpea más cantidad de movimiento que la que llevaba inicialmente? Explique sus respuestas.

5. Usted está de pie perfectamente quieto y enseguida da un paso hacia adelante. Antes del paso su cantidad de movimiento era cero, pero después tiene cierta cantidad de movimiento. ¿En este caso se viola el principio de conservación de cantidad de movimiento? Explique su respuesta.

6. Un tirador, de pie, dispara un rifle mientras tiene la culata del arma contra su hombro. Si la cantidad de movimiento hacia delante de una bala es la misma que la cantidad de movimiento hacia atrás del arma, ¿por qué no es igual de peligroso ser golpeado por el arma que por la bala?

7. Dos estudiantes sostienen verticalmente una gran sábana. Un tercer estudiante, que resulta ser el lanzador estrella del equipo de béisbol de la escuela, lanza un huevo a la sábana. Explique por qué el huevo no se rompe cuando golpea la sábana, sin importar su rapidez inicial.

8. Un malabarista lanza tres bolas en un ciclo continuo. Cualquier bola está en contacto con sus manos durante una quinta parte del tiempo. (a) Describa el movimiento del centro de masa de las tres bolas. (b) ¿Qué fuerza promedio ejerce el malabarista sobre una bola mientras la toca?

9. (a) ¿El centro de masa de un cohete en el espacio libre acelera? Explique. (b) ¿La rapidez de un cohete puede superar la rapidez de escape del combustible? Explique.

10. Sobre el tema de las siguientes posiciones, establezca su propia visión y argumente para apoyarla. (a) La mejor teoría de movimiento es que la fuerza causa aceleración. (b) La verdadera medida de la efectividad de una fuerza es el trabajo que realiza, y la mejor teoría de movimiento es que el trabajo efectuado sobre un objeto cambia su energía. (c) La verdadera medida del efecto de una fuerza es el impulso, y la mejor teoría de movimiento es que el impulso impartido a un objeto cambia su cantidad de movimiento.

11. ¿Una fuerza neta mayor ejercida sobre un objeto siempre produce un cambio mayor en la cantidad de movimiento del objeto en comparación con una fuerza neta más pequeña? Explique.

12. ¿Una fuerza neta mayor siempre produce un cambio mayor en energía cinética que una fuerza neta más pequeña? Explique.

13. Una bomba, inicialmente en reposo, explota en varios pedazos. (a) ¿Se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema (la bomba antes de la explosión, los pedazos después de la explosión)? Explique. (b) ¿Se conserva la energía cinética del sistema? Explique.

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 9.1 Cantidad de movimiento lineal

1. Una partícula de masa m se mueve con cantidad de movimiento de magnitud p. (a) Demuestre que la energía cinética de la partícula es $K = p^2/2m$. (b) Exprese la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula en términos de su energía cinética y masa.
2. Un objeto tiene una energía cinética de 275 J y una cantidad de movimiento de magnitud 25.0 kg · m/s. Encuentre la rapidez y la masa del objeto.
3. En un instante, un trineo de 17.5 kg se mueve sobre una superficie horizontal de nieve a 3.50 m/s. El trineo se detiene después de transcurrir 8.75 s. Utilice el método de cantidad de movimiento para encontrar la fuerza de fricción promedio que actúa sobre el trineo mientras se mueve.
4. Una partícula de 3.00 kg tiene una velocidad de $(3.00\hat{\mathbf{i}} - 4.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. (a) Encuentre las componentes x y y de su cantidad de movimiento. (b) Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento.
5. Una pelota de béisbol se aproxima a la placa de home con una rapidez de 45.0 m/s, moviéndose horizontalmente justo antes de ser golpeada por un bat. El jugador batea la pelota dándole una rapidez de 55.0 m/s. La pelota tiene una masa de 145 g y está en contacto con el bat durante 2.00 ms. ¿Cuál es el vector fuerza promedio que la bola ejerce sobre el bat durante su interacción?

Sección 9.2 Análisis de modelo: sistema aislado (cantidad de movimiento)

6. Una niña de 45.0 kg está de pie sobre una tabla de 150 kg. Ambas están originalmente en reposo sobre un lago congelado que constituye una superficie plana sin fricción. La niña comienza a caminar a lo largo de la tabla con una velocidad constante de $1.50\hat{\mathbf{i}}$ m/s en relación con la tabla. (a) ¿Cuál es la velocidad de la tabla respecto de la superficie de hielo? (b) ¿Cuál es la velocidad de la niña en relación con la superficie de hielo?
7. Una niña de masa m_g está parada sobre una tabla de masa m_p. Ambas están originalmente en reposo sobre un lago congelado que constituye una superficie plana sin fricción. La niña comienza a caminar a lo largo de la tabla con velocidad constante v_{gp} hacia la derecha relativa a la tabla. (El subíndice gp denota a la niña respecto de la tabla.) (a) ¿Cuál es la velocidad v_{pi} de la tabla en relación con la superficie del hielo? (b) ¿Cuál es la velocidad de la niña v_{gi} respecto de la superficie del hielo?
8. Un niño de 65.0 kg y su hermana de 40.0 kg, ambos con patines, están frente a frente en reposo. La niña empuja duro al niño y lo envía hacia atrás con velocidad de 2.90 m/s hacia el Oeste. Ignore la fricción. (a) Describa el movimiento posterior de la niña. (b) ¿Cuánta energía potencial del cuerpo de la niña se convierte en energía mecánica del sistema niño-niña? (c) ¿Se conserva la cantidad de movimiento del sistema niño-niña en el proceso de empujar? Si así es, explique cómo ello es posible considerando (d) que hay fuerzas grandes en acción y (e) que no existe movimiento anticipado y mucho movimiento posterior.
9. En investigación de cardiología y en fisiología práctica, con frecuencia es importante conocer la masa de la sangre bombeada por el corazón de una persona en un infarto. Esta información puede obtenerse mediante un *cardiograma balístico*. El instrumento trabaja como sigue. El sujeto yace sobre una paleta horizontal que flota en una película de aire. Es despreciable la fricción sobre la paleta. Inicialmente, la cantidad de movimiento del sistema es cero. Cuando el corazón late, expulsa una masa m de sangre en la aorta con rapidez v, y el cuerpo y la plataforma se mueven en la dirección opuesta con rapidez V. La velocidad de la sangre se puede determinar de manera independiente (por ejemplo, observando el corrimiento Doppler del ultrasonido). Suponga que $v = 50.0$ cm/s en un ensayo típico. La masa del sujeto más la paleta es 54.0 kg. La paleta se mueve 6.00×10^{-5} m en 0.160 s después de un latido. Calcule la masa de sangre expulsada por el corazón. Suponga que dicha masa es despreciable comparada con la masa total de la persona. (Este ejemplo simplificado ilustra el principio de la cardiografía balística, pero en la práctica es necesario emplear un modelo más sofisticado para el funcionamiento del corazón.)
10. Cuando usted salta recto hacia arriba tan alto como puede, ¿cuál es el orden de magnitud de la máxima rapidez de retroceso que le da a la Tierra? Modele la Tierra como un objeto perfectamente sólido. En su solución, establezca las cantidades físicas que toma como datos y los valores que mide o estima para ellos.
11. Dos bloques de masas m y $3m$ se colocan sobre una superficie horizontal sin fricción. Un resorte ligero se une al bloque más masivo, y los bloques se empujan juntos con el resorte entre ellos (figura P9.11). Una cuerda que inicialmente mantiene a los bloques juntos se quema; después de esto, el bloque de masa $3m$ se mueve hacia la derecha con una rapidez de 2.00 m/s. (a) ¿Cuál es la velocidad del bloque de masa m? (b) Encuentre la energía potencial elástica original del sistema, empleando $m = 0.350$ kg. (c) ¿La energía original está en el resorte o en la cuerda? (d) Explique su respuesta al inciso (c). (e) ¿La cantidad de movimiento del sistema se conserva en el proceso de rompimiento? Explique cómo eso es posible considerando (f) que hay fuerzas grandes en acción y (g) que no hay movimiento anticipado y mucho movimiento posterior.

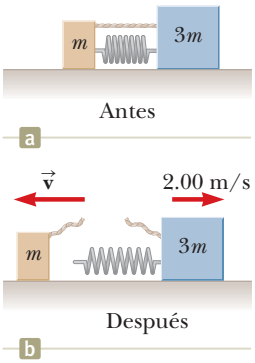


Figura P9.11

Sección 9.3 Análisis de modelo: sistema no aislado (cantidad de movimiento)

12. Un hombre afirma que en tanto tenga puesto su cinturón de seguridad puede sostener a un niño de 12.0 kg en una colisión frontal. Considere a este hombre en una colisión en la cual él está en uno de dos autos idénticos que se mueven uno hacia el otro a 60 mi/h respecto al suelo. El automóvil en el que viaja el hombre es llevado al reposo en 0.10 s. (a) Encuentre la magnitud de la fuerza promedio necesaria para sostener al niño. (b) Apoyándose en el resultado del inciso (a), ¿es cierta la afirmación del hombre? (c) ¿Qué dice la respuesta a este problema respecto de las leyes que requieren el uso de dispositivos de seguridad apropiados como cinturones o asientos especiales en los autos?

13. En la figura P9.13 se muestra una curva fuerza-tiempo estimada para una pelota de béisbol golpeada por un bat. A partir de esta curva, determine (a) la magnitud del impulso entregado a la pelota y (b) la fuerza promedio ejercida sobre la pelota.

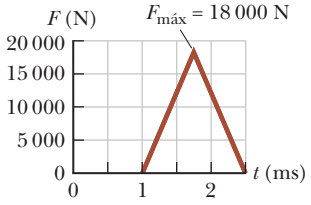


Figura P9.13

14. Problema de repaso. Una bola de hule de 0.300 kg se suelta desde una altura de 1.75 m, rebota en el piso de cemento y alcanza una altura de 1.50 m. (a) Determine la magnitud y dirección del impulso entregado a la bola por el piso. (b) Estime el tiempo que la bola está en contacto con el piso y utilice esta estimación para calcular la fuerza promedio que el piso ejerce sobre la bola.

15. Un deslizador de masa m es libre de deslizarse a lo largo de una pista de aire horizontal. Se empuja contra un lanzador en un extremo de la pista. Modele el lanzador como un resorte ligero con constante de fuerza k comprimido una distancia x. El deslizador se libera desde el reposo. (a) Muestre que el deslizador logra una rapidez de $v = x(k/m)^{1/2}$. (b) Pruebe que la magnitud del impulso impartido al deslizador está dada por la expresión $I = x(km)^{1/2}$. (c) ¿Se realiza más trabajo sobre un carrito con masa más grande o una más pequeña?

16. En un juego de pelota blanda (softbol), una bola de 0.200 kg cruza la base a 15.0 m/s a un ángulo de 45.0° bajo la horizontal. El bateador golpea la pelota hacia el jardinero central, dándole una velocidad de 40.0 m/s a 30.0° sobre la horizontal. (a) Determine el impulso entregado a la bola. (b) Si la fuerza sobre la pelota se incrementa linealmente durante 4.00 ms, se mantiene constante para 20.0 ms, y entonces disminuye linealmente a cero en otros 4.00 ms, ¿cuál es la fuerza máxima sobre la pelota?

17. El frente de 1.20 m de un auto de 1 400 kg está diseñado como una "zona de deformación" que colapsa para absorber el impacto de una colisión. Si un auto que viaja a 25.0 m/s se detiene uniformemente en 1.20 m, (a) ¿qué tanto dura la colisión?, (b) ¿cuál es la magnitud de la fuerza promedio sobre el auto, y (c) ¿cuál es la aceleración del auto? Exprese la aceleración como un múltiplo de la aceleración debida a la gravedad.

18. Un jugador de tenis recibe un tiro con la bola (0.060 0 kg) que viaja horizontalmente a 20.0 m/s y regresa el tiro con la bola viajando horizontalmente a 40.0 m/s en la dirección opuesta. (a) ¿Cuál es el impulso que la raqueta de tenis entrega a la bola? (b) Algún trabajo es efectuado sobre el sistema de la bola y alguna energía aparece en la bola como un incremento en la energía interna durante la colisión entre la bola y la raqueta. ¿Cuánto vale la suma $W - \Delta E_{\text{int}}$ para la bola?

19. La magnitud de la fuerza neta que se ejerce en la dirección x sobre una partícula de 2.50 kg varía en el tiempo, como se muestra en la figura P9.19. Encuentre: (a) el impulso de la fuerza en el intervalo de tiempo entre 0 y 5.00 s, (b) la velocidad final que logra la partícula si originalmente está en reposo, (c) su velocidad final si su velocidad original es $-2.00\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s y (d) la fuerza promedio ejercida sobre la partícula durante el intervalo de tiempo entre 0 y 5.00 s.

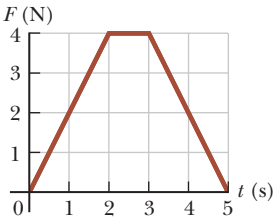


Figura P9.19

20. Problema de repaso. Una *plataforma de fuerza* es una herramienta que se usa para analizar el rendimiento de los atletas al medir la fuerza vertical que el atleta ejerce sobre el suelo como función del tiempo. Desde el reposo, una atleta de 65.0 kg salta hacia la plataforma desde una altura de 0.600 m. Mientras está en contacto con la plataforma durante el intervalo de tiempo $0 < t < 0.800$ s, la fuerza que ejerce sobre ella se describe mediante la función

$$F = 9\,200t - 11\,500t^2$$

donde F está en newtons y t está en segundos. (a) ¿Qué impulso recibió la atleta desde la plataforma? (b) ¿Con qué rapidez llegó a la plataforma? (c) ¿Con qué rapidez la dejó? (d) ¿A qué altura saltó al dejar la plataforma?

21. Cae agua sin salpicar con una rapidez de 0.250 L/s desde una altura de 2.60 m en una cubeta de 0.750 kg sobre una báscula. Si la cubeta originalmente está vacía, ¿qué lee la báscula 3.00 s después de que el agua comienza a acumularse en ella?

Sección 9.4 Colisiones en una dimensión

22. Un auto de 1 200 kg viaja inicialmente a $v_{\text{Ci}} = 25.0$ m/s hacia el Este y choca en la parte trasera de un camión de 9 000 kg que se mueve en la misma dirección a $v_{\text{Ti}} = 20.0$ m/s (figura P9.22). La velocidad del auto inmediatamente después de la colisión es $v_{\text{Cf}} = 18.0$ m/s hacia el Este. (a) ¿Cuál es la velocidad del camión inmediatamente después de la colisión? (b) ¿Cuál es el cambio en la energía mecánica del sistema auto-camión en la colisión? (c) Explique este cambio en la energía mecánica.

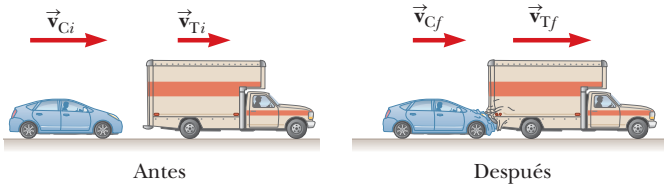


Figura P9.22

23. Una bala de 10.0 g se dispara en un bloque de madera fijo con masa $m = 5.00$ kg. La bala se incrusta en el bloque. La rapidez de la combinación bala más madera inmediatamente después de la colisión es 0.600 m/s. ¿Cuál fue la rapidez original de la bala?

24. Un carro de masa m que se mueve con rapidez v_1 colisiona y se acopla con la parte trasera de un camión de masa $2m$ que inicialmente viaja en la misma dirección que el carro pero a una menor rapidez v_2. (a) ¿Cuál es la rapidez v_f de los dos vehículos inmediatamente después de la colisión? (b) ¿Cuál es el cambio en energía cinética del sistema carro-camión en la colisión?

25. Un vagón de ferrocarril de 2.50×10^4 kg de masa se mueve con una rapidez de 4.00 m/s. Choca y se une con otros tres vagones acoplados, cada uno de la misma masa que el vagón solo y se mueven en la misma dirección con una rapidez inicial de 2.00 m/s. (a) ¿Cuál es la rapidez de los cuatro vagones después de la colisión? (b) ¿Cuánta energía mecánica se pierde en la colisión?

26. Cuatro vagones, cada uno de 2.50×10^4 kg de masa, se acoplan y avanzan a lo largo de pistas horizontales con rapidez v_i hacia el Sur. Un actor de cine muy fuerte, que viaja en el segundo vagón, desacopla el vagón frontal y le da un gran empujón, lo que aumenta su rapidez a 4.00 m/s hacia el Sur. Los tres vagones restantes continúan moviéndose hacia el Sur, ahora a 2.00 m/s. (a) Encuentre la rapidez inicial de los cuatro vagones. (b) ¿Qué tanto cambió la energía potencial en el cuerpo del actor? (c) Establezca la relación entre el proceso aquí descrito y el proceso del problema 25.

27. Un neutrón en un reactor nuclear hace una colisión frontal elástica con el núcleo de un átomo de carbono inicialmente en reposo. (a) ¿Qué fracción de la energía cinética del neutrón se transfiere al núcleo de carbono? (b) La energía cinética inicial del neutrón es 1.60×10^{-13} J. Encuentre su energía cinética final y la energía cinética del núcleo de carbono después de la colisión. (La masa del núcleo de carbono es casi 12.0 veces la masa del neutrón.)

28. Una bala de 7.00 g, cuando se dispara desde un arma en un bloque de madera de 1.00 kg sostenido en un tornillo de banco, penetra el bloque a una profundidad de 8.00 cm. Este bloque de madera se coloca sobre una superficie horizontal sin fricción, y una segunda bala de 7.00 g se dispara desde el arma en el bloque. En este caso, ¿a qué profundidad penetra la bala en el bloque?

29. Una pelota de tenis de 57.0 g de masa se sostiene justo arriba de un balón de basquetbol de 590 g de masa. Con sus centros verticalmente alineados, ambos se liberan desde el reposo en el mismo momento, para caer una distancia de 1.20 m, como se muestra en la figura P9.29. (a) Encuentre la magnitud de la velocidad hacia abajo con la que el balón llega al suelo. (b) Suponga que una colisión elástica con el suelo instantáneamente invierte la velocidad del balón mientras la pelota de tenis aún se mueve hacia abajo. A continuación, las dos bolas se encuentran en una colisión elástica. ¿A qué altura rebota la pelota de tenis?

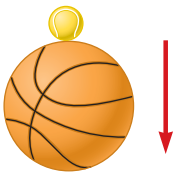


Figura P9.29

30. Como se muestra en la figura P9.30, una bala de masa m y rapidez v atraviesa la esfera de un péndulo de masa M. La bala sale con una rapidez de $v/2$. La esfera del péndulo está suspendida mediante una barra rígida de longitud l y masa despreciable. ¿Cuál es el valor mínimo de v tal que la esfera del péndulo apenas se balancee para describir un círculo vertical completo?

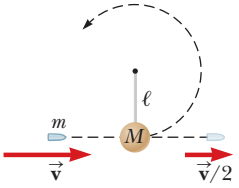


Figura P9.30

31. Una porción de arcilla pegajosa de 12.0 g es arrojada horizontalmente a un bloque de madera de 100 g al inicio en reposo sobre una superficie horizontal. La arcilla se pega al bloque. Después del impacto, el bloque se desliza 7.50 m antes de llegar al reposo. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es 0.650, ¿cuál fue la rapidez de la arcilla inmediatamente antes del impacto?

32. Una porción de arcilla de masa m es arrojada horizontalmente a un bloque de madera de masa M inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. La arcilla se pega al bloque. Después del impacto, el bloque se desliza una distancia d antes de llegar al reposo. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es μ, ¿cuál fue la rapidez de la arcilla inmediatamente antes del impacto?

33. Dos bloques son libres de deslizarse a lo largo de la pista de madera sin fricción, como se muestra en la figura P9.33. El bloque de masa $m_1 = 5.00$ kg se libera desde la posición indicada, a una altura $h = 5.00$ m sobre la parte plana de la pista. De su extremo frontal sobresale el polo norte de un poderoso imán, que repele el polo norte de un imán idéntico incrustado en el extremo posterior del bloque de masa $m_2 = 10.0$ kg, inicialmente en reposo. Los dos bloques nunca se tocan. Calcule la altura máxima a la que se eleva m_1 después de la colisión elástica.

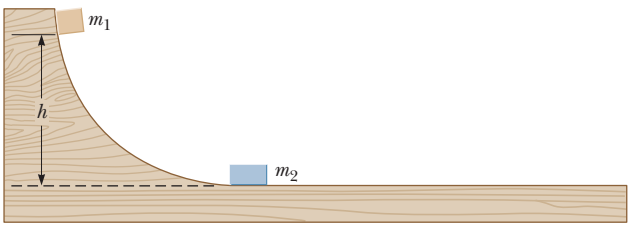


Figura P9.33

34. (a) Tres carros de masas $m_1 = 4.00$ kg, $m_2 = 10.0$ kg y $m_3 = 3.00$ kg se mueven sobre una pista horizontal sin fricción con magnitudes de velocidad de $v_1 = 5.00$ m/s hacia la derecha, $v_2 = 3.00$ m/s hacia la derecha y $v_3 = 4.00$ m/s hacia la izquierda, como se muestra en la figura P9.34. Acopladores de velcro hacen que los carros queden unidos después de chocar. Encuentre la velocidad final del tren de tres carros. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Su respuesta a la parte (a) requiere que todos los carros choquen y se unan en el mismo momento? ¿Qué sucedería si chocan en diferente orden?

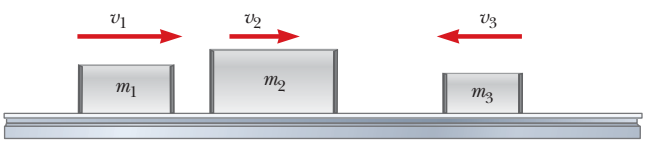


Figura P9.34

Sección 9.5 Colisiones en dos dimensiones

35. Un disco de 0.300 kg, inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, es golpeado por un disco de 0.200 kg que inicialmente se mueve a lo largo del eje x con una rapidez de 2.00 m/s. Después de la colisión, el disco de 0.200 kg tiene una rapidez de 1.00 m/s a un ángulo $\theta = 53.0^\circ$ respecto al eje x positivo (vea la figura 9.11). (a) Determine la velocidad del disco de 0.300 kg después de la colisión. (b) Encuentre la fracción de energía cinética transferida o transformada en otras formas de energía en la colisión.

36. Dos automóviles de igual masa se aproximan a una intersección. Un vehículo viaja con velocidad de 13.0 m/s hacia el Este y el otro se mueve al Norte con rapidez v_{2i}. Ningún conductor ve al otro. Los vehículos chocan en la intersección y quedan unidos, dejando marcas de derrape paralelas a un ángulo de 55.0° al noreste. La rapidez límite para ambos caminos es de 35 mi/h y el conductor del vehículo que se movía al Norte afirma que él estaba dentro del límite de rapidez cuando ocurrió la colisión. ¿Dice la verdad? Explique su razonamiento.

37. Un objeto de 3.00 kg de masa, que se mueve con una velocidad inicial de $5.00\hat{\mathbf{i}}$ m/s, choca y se une a un objeto de 2.00 kg de masa con una velocidad inicial de $-3.00\hat{\mathbf{j}}$ m/s. Encuentre la velocidad final del objeto compuesto.

38. Dos discos de juego de tejo, de igual masa, uno anaranjado y el otro amarillo, están involucrados en una colisión oblicua elástica. El disco amarillo inicialmente está en reposo y es golpeado por el disco anaranjado que se mueve con una rapidez de 5.00 m/s. Después de la colisión, el disco anaranjado se mueve a lo largo de una dirección que forma un ángulo de 37.0° con su dirección de movimiento inicial. Las velocidades de los dos discos son perpendiculares después de la colisión. Determine la rapidez final de cada disco.

39. Dos discos de juego de tejo, de igual masa, uno anaranjado y el otro amarillo, están involucrados en una colisión oblicua elástica. El disco amarillo inicialmente está en reposo y es golpeado por el disco anaranjado que se mueve con rapidez v_i. Después de la colisión, el disco anaranjado se mueve a lo largo de una dirección que forma un ángulo θ con su dirección de movimiento inicial. Las velocidades de los dos discos son perpendiculares después de la colisión. Determine la rapidez final de cada disco.

40. Un protón, que se mueve con una velocidad de $v_i\hat{\mathbf{i}}$, colisiona elásticamente con otro protón que inicialmente está en reposo. Suponiendo que ambos protones tienen la misma rapidez después de la colisión, encuentre (a) la rapidez de cada protón después de la colisión en términos de v_i y (b) la dirección de los vectores velocidad después de la colisión.

41. Una bola de billar que se mueve a 5.00 m/s golpea una bola fija de la misma masa. Después de la colisión, la primera bola se mueve a 4.33 m/s en un ángulo de 30.0° respecto de la línea de movimiento original. Si supone una colisión elástica (e ignora la fricción y el movimiento rotacional), encuentre la velocidad de la bola golpeada después de la colisión.

42. En un juego de futbol americano, un corredor de 90.0 kg que se mueve al Este con una rapidez de 5.00 m/s es detenido por un oponente de 95.0 kg que corre al Norte con una rapidez de 3.00 m/s. (a) Explique por qué la tacleada exitosa constituye una colisión perfectamente inelástica. (b) Calcule la velocidad de los jugadores inmediatamente después de la tacleada. (c) Determine la energía mecánica que desaparece como resultado de la colisión. Explique la energía perdida.

43. Un núcleo atómico inestable de 17.0×10^{-27} kg de masa, inicialmente en reposo, se desintegra en tres partículas. Una de éstas, de 5.00×10^{-27} kg de masa, se mueve en la dirección y con una rapidez de 6.00×10^6 m/s. Otra partícula, de 8.40×10^{-27} kg de masa, se desplaza en la dirección x con una rapidez de 4.00×10^6 m/s. Encuentre (a) la velocidad de la tercera partícula y (b) el aumento de la energía cinética total en el proceso.

44. La masa del disco azul en la figura P9.44 es 20.0% mayor que la masa del disco verde. Antes de chocar, los discos se aproximan mutuamente con cantidades de movimiento de igual magnitud y direcciones opuestas, y el disco verde tiene una rapidez inicial de 10.0 m/s. Encuentre la rapidez que tiene cada disco después de la colisión, si la mitad de la energía cinética del sistema se convierte en energía interna durante la colisión.

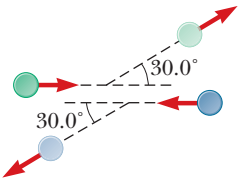


Figura P9.44

Sección 9.6 El centro de masa

45. Cuatro objetos se sitúan a lo largo del eje y del modo siguiente: un objeto de 2.00 kg se ubica a +3.00 m, un objeto de 3.00 kg está a +2.50 m, un objeto de 2.50 kg está en el origen y un objeto de 4.00 kg está en −0.500 m. ¿Dónde está el centro de masa de estos objetos?

46. La masa de la Tierra es 5.97×10^{24} kg, y la masa de la Luna es 7.35×10^{22} kg. La distancia de separación, medida entre sus centros, es 3.84×10^8 m. Localice el centro de masa del sistema Tierra-Luna, medido desde el centro de la Tierra.

47. En la selva, los exploradores encuentran un antiguo monumento en forma de triángulo isósceles, como se muestra en la figura P9.47. El monumento está hecho de decenas de miles de pequeños bloques de piedra de densidad 3 800 kg/m^3. La altura del monumento es de 15.7 m y un ancho de 64.8 m en su base y un grosor de 3.60 m desde el frente hasta la parte trasera. Antes de construir el monumento, todos los bloques de piedra yacían en el suelo. ¿Cuánto trabajo hicieron los constructores sobre los bloques para colocarlos en posición durante la edificación del monumento? *Nota*: La energía potencial gravitacional de un sistema objeto-Tierra está dada por $U_g = Mgy_{CM}$, donde M es la masa total del objeto y y_{CM} es la elevación de su centro de masa sobre el nivel de referencia seleccionado.

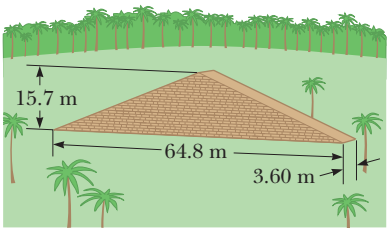


Figura P9.47

48. A una pieza uniforme de hoja de metal se le da la forma que se muestra en la figura P9.48. Calcule las coordenadas x y y del centro de masa de la pieza.

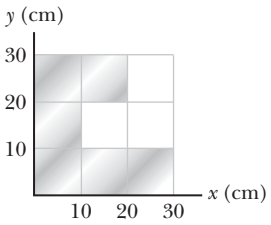


Figura P9.48

49. Una barra de 30.0 cm de longitud tiene densidad lineal (masa por longitud) dada por

$$\lambda = 50.0 + 20.0x$$

donde x es la distancia desde un extremo, medida en metros, y λ está en gramos/metro. (a) ¿Cuál es la masa de la barra? (b) ¿A qué distancia del extremo $x = 0$ está su centro de masa?

50. Una molécula de agua consiste de un átomo de oxígeno con dos átomos de hidrógeno unidos a él (figura P9.50). El ángulo entre los enlaces es 106°. Si los enlaces tienen 0.100 nm de largo, ¿dónde está el centro de masa de la molécula?

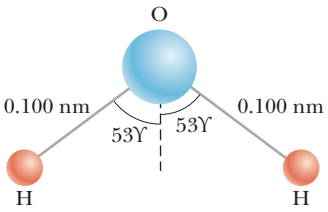


Figura P9.50

Sección 9.7 Sistemas de muchas partículas

51. Una partícula de 2.00 kg tiene una velocidad $(2.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s, y una partícula de 3.00 kg tiene una velocidad $(1.00\hat{\mathbf{i}} + 6.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Encuentre (a) la velocidad del centro de masa y (b) la cantidad de movimiento total del sistema.

52. Considere un sistema de dos partículas en el plano xy: $m_1 = 2.00$ kg está en la ubicación $\vec{\mathbf{r}}_1 = (1.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}})$ m y tiene una velocidad de $(3.00\hat{\mathbf{i}} + 0.500\hat{\mathbf{j}})$ m/s; $m_2 = 3.00$ kg está en $\vec{\mathbf{r}}_2 = (-4.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}})$ m y tiene velocidad $(3.00\hat{\mathbf{i}} - 2.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. (a) Grafique esas partículas en hoja cuadriculada. Dibuje sus vectores de posición y muestre sus velocidades. (b) Encuentre la posición del centro de masa del sistema y márquelo en la cuadrícula. (c) Determine la velocidad del centro de masa y también indíquelo en el diagrama. (d) ¿Cuál es la cantidad de movimiento lineal total del sistema?

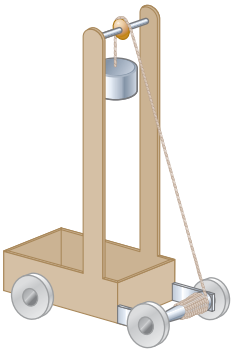
53. Romeo (77.0 kg) entretiene a Julieta (55.0 kg) al tocar su guitarra desde la parte trasera de su bote en reposo sobre agua en calma, a 2.70 m de Julieta, quien está en el frente del bote. Después de la serenata, Julieta se mueve con cuidado hacia la parte trasera del bote (alejándose de la playa) para plantar un beso en la mejilla de Romeo. ¿Cuánto se mueve el bote de 80.0 kg hacia la playa que está enfrente?

54. El vector de posición de una partícula de 3.50 g que se mueve en el plano xy varía en el tiempo de acuerdo con $\vec{\mathbf{r}}_1 = (3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})t + 2\hat{\mathbf{j}}t^2$, donde t está en segundos y $\vec{\mathbf{r}}$ está en centímetros. Al mismo tiempo, el vector de posición de una partícula de 5.50 g varía como $\vec{\mathbf{r}}_2 = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{i}}t^2 - 6\hat{\mathbf{j}}t$. En $t = 2.50$ s, determine (a) el vector de posición del centro de masa, (b) la cantidad de movimiento lineal del sistema, (c) la velocidad del centro de masa, (d) la aceleración del centro de masa y (e) la fuerza neta que se ejerce sobre el sistema de dos partículas.

55. Una bola de 0.200 kg de masa con una velocidad de $1.50\hat{\mathbf{i}}$ m/s encuentra de frente a una bola de 0.300 kg de masa con una velocidad de $-0.400\hat{\mathbf{i}}$ m/s y chocan elásticamente. (a) Halle sus velocidades después de la colisión. (b) Encuentre la velocidad de su centro de masa antes y después de la colisión.

Sección 9.8 Sistemas deformables

56. Para un proyecto de tecnología, un estudiante construyó un vehículo de 6.00 kg de masa total que se mueve por sí solo. Como se muestra en la figura P9.56, corre sobre dos orugas ligeras que pasan alrededor de cuatro ruedas ligeras. Un carrete se acopla a uno de los ejes y una cuerda originalmente enrollada sobre el carrete pasa sobre una polea unida al vehículo para soportar una carga elevada. Después que el vehículo se libera desde el reposo, la carga desciende lentamente, desenrolla la cuerda para girar el eje y hace que el vehículo se mueva hacia adelante (a la izquierda en la figura P9.56). La fricción es despreciable en la polea y los cojinetes del eje. La oruga no se desliza sobre las ruedas o el suelo. El carrete tiene una forma cónica de modo que la carga desciende a una rapidez baja constante mientras el vehículo se mueve horizontalmente a través del suelo con aceleración constante, y alcanza una velocidad final de $3.00\hat{\mathbf{i}}$ m/s. (a) ¿El suelo imparte impulso al vehículo? Si es así, ¿cuánto? (b) ¿El suelo realiza trabajo sobre el vehículo? Si así es, ¿cuánto? (c) ¿Tiene sentido decir que la cantidad de movimiento final del vehículo viene del suelo? Si no, ¿de dónde proviene? (d) ¿Tiene sentido decir que la energía cinética final del vehículo viene del suelo? Si no, ¿de dónde proviene? (e) ¿Se puede decir que una fuerza particular causa la aceleración hacia adelante del vehículo? ¿Qué la ocasiona?


Figura P9.56

57. Una partícula está suspendida de un poste en lo alto de un carro mediante una cuerda ligera de longitud L, como se muestra en la figura P9.57a. El carro y la partícula inicialmente se mueven hacia la derecha con rapidez constante v_i, con la cuerda vertical. Súbitamente, el carro llega al reposo cuando choca y se une a un amortiguador, como se ilustra en la figura P9.57b. La partícula suspendida se balancea a través de un ángulo θ. (a) Demuestre que la rapidez original del carro puede calcularse a partir de $v_i = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}$. (b) Si el amortiguador continúa ejerciendo una fuerza horizontal sobre el carro cuando la partícula colgante está en su ángulo máximo hacia *adelante* de la vertical, ¿en qué instante el amortiguador *deja* de ejercer una fuerza horizontal?

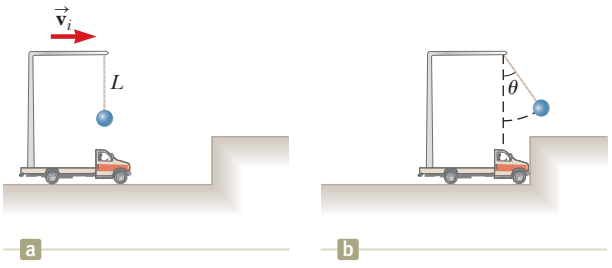


Figura P9.57

58. Una persona de 60.0 kg dobla sus rodillas y luego salta recto hacia arriba. Después que sus pies dejan el suelo, su movimiento no es afectado por la resistencia del aire y su centro de masa se eleva un máximo de 15.0 cm. Modele el suelo como completamente sólido y sin movimiento. (a) ¿El suelo imparte impulso a la persona? (b) ¿El suelo realiza trabajo sobre la persona? (c) ¿Con qué cantidad de movimiento deja el suelo la persona? (d) ¿Tiene sentido decir que esta cantidad de movimiento viene del suelo? Explique. (e) ¿Con qué energía cinética deja el suelo la persona? (f) ¿Tiene sentido decir que esta energía proviene del suelo? Explique.

59. La figura P9.59a muestra una vista superior de la configuración inicial de dos discos de masa m sobre hielo sin fricción. Los discos están unidos mediante una cuerda de longitud ℓ y masa despreciable. Al tiempo $t = 0$, una fuerza constante de magnitud F comienza a jalar hacia la derecha sobre el punto central de la cuerda. Al tiempo t, los discos en movimiento colisionan y quedan unidos. En este instante, la fuerza los ha movido una distancia d, y los discos han adquirido una rapidez v (figura P9.59b). (a) Determine v en términos de F, d, ℓ y m. (b) ¿Cuánto de la energía transferida al sistema por el trabajo realizado por la fuerza se ha transformado en energía interna?

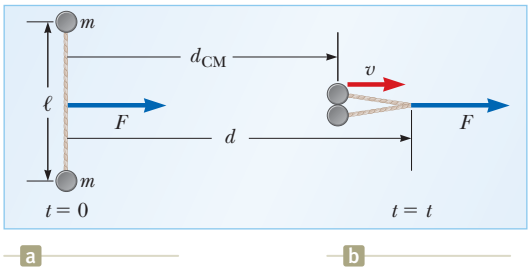


Figura P9.59

Sección 9.9 Propulsión de cohetes

60. Un motor de cohete tiene un empuje promedio de 5.26 N. Tiene una masa inicial de 25.5 g, que incluye una masa de combustible de 12.7 g. La duración de su combustión es 1.90 s. (a) ¿Cuál es la rapidez de escape promedio del motor? (b) Este motor se coloca en el cuerpo de un cohete de 53.5 g de masa. ¿Cuál es la velocidad final del cohete si es disparado en el espacio exterior a partir del reposo por un astronauta durante una caminata espacial? Suponga que el combustible se quema a razón constante.

61. Una manguera se sostiene como se muestra en la figura P9.61. Originalmente la manguera está llena con agua en reposo. ¿Qué fuerza adicional es necesaria para mantener fija la boquilla después de iniciar el flujo del agua si se descarga a razón de 0.600 kg/s con una rapidez de 25.0 m/s?



Figura P9.61

62. **Problema de repaso.** La primera etapa del vehículo espacial Saturno V consumió combustible y oxidante a razón de 1.50×10^4 kg/s, con una rapidez de escape de 2.60×10^3 m/s. (a) Calcule el empuje producido por este motor. (b) Encuentre la aceleración que tiene el vehículo justo cuando despega de la plataforma de lanzamiento sobre la Tierra, si toma la masa inicial del vehículo como 3.00×10^6 kg.

63. Un cohete en el espacio profundo será capaz de impulsar una carga total (carga más armazón del cohete y motor) de 3.00 toneladas métricas a una rapidez de 10 000 m/s. (a) Tiene un motor y combustible diseñados para producir una rapidez de escape de 2 000 m/s. ¿Cuánto combustible más oxidante se requiere? (b) Si un combustible y diseño de motor dieran una rapidez de escape de 5 000 m/s, ¿qué cantidad de combustible y oxidante se requeriría para la misma tarea? (c) Note que la rapidez de escape en el inciso (b) es 2.50 veces mayor que la del inciso (a), explique por qué la masa de combustible requerida no es más pequeña por un factor de 2.50.

64. Un cohete tiene masa total $M_i = 360$ kg, incluidos $M_f = 330$ kg de combustible y oxidante. En el espacio interestelar, parte del reposo en la posición $x = 0$, enciende su motor en el tiempo $t = 0$ y pone empuje con rapidez relativa $v_e = 1\,500$ m/s a razón constante $k = 2.50$ kg/s. El combustible durará un tiempo de quema dado por $T_b = M_f/k = 330$ kg/(2.5 kg/s) = 132 s. (a) Demuestre que, durante la quema, la velocidad del cohete como función del tiempo está dada por

$$v(t) = -v_e \ln\left(1 - \frac{kt}{M_i}\right)$$

(b) Haga una gráfica de la velocidad del cohete como función del tiempo para tiempos que van de 0 a 132 s. (c) Demuestre que la aceleración del cohete es

$$a(t) = \frac{kv_e}{M_i - kt}$$

(d) Grafique la aceleración como función del tiempo. (e) Demuestre que la posición del cohete es

$$x(t) = v_e\left(\frac{M_i}{k} - t\right)\ln\left(1 - \frac{kt}{M_i}\right) + v_e t$$

(f) Grafique la posición durante la quema como función del tiempo.

Problemas adicionales

65. Una bola de masa m es lanzada recto hacia arriba con una rapidez inicial v_i. Encuentre la cantidad de movimiento de la bola (a) en su altura máxima y (b) a la mitad de su altura máxima.

66. Una patinadora amateur de masa M está atrapada a la mitad de una pista de hielo y le es imposible retornar al extremo sin hielo. Ella resbala en cada movimiento que efectúa y permanece en el mismo sitio. Decide intentar regresar a la seguridad mediante el lanzamiento de sus guantes de masa m en dirección opuesta al lado seguro. (a) Lanza sus guantes lo más fuerte que puede, los cuales abandonan su mano con una velocidad horizontal $\vec{\mathbf{v}}_{\text{guantes}}$. Explique si ella se mueve. Si lo hace, calcule su velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{\text{patinadora}}$ respecto a la Tierra después de lanzar los guantes. (b) Discuta su movimiento desde el punto de vista de las fuerzas que actúan sobre ella.

67. Una bola de acero de 3.00 kg golpea una pared con una rapidez de 10.0 m/s en un ángulo de $\theta = 60.0°$ con la superficie. Rebota con la misma rapidez y ángulo (figura P9.67).

Si la bola está en contacto con la pared durante 0.200 s, ¿cuál es la fuerza promedio que la pared ejerce sobre la bola?

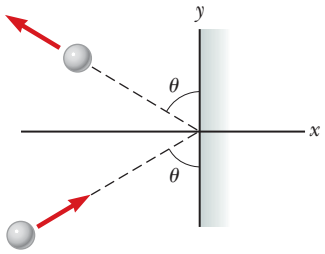


Figura P9.67

68. (a) La figura P9.68 exhibe tres etapas en la operación del péndulo balístico discutido en el ejemplo 9.6 (y que se muestra en la figura 9.9b). En la figura P9.68a el proyectil se aproxima al péndulo. La figura P9.68b indica la situación justo después que el proyectil es capturado por el péndulo. En la figura P9.68c, el brazo del péndulo se ha levantado y llega al reposo a una altura h sobre su posición inicial. Demuestre que la razón de la energía cinética del sistema proyectil-péndulo inmediatamente después de la colisión a la energía cinética inmediatamente antes es $m_1/(m_1+m_2)$. (b) ¿Cuál es la razón de la cantidad de movimiento del sistema inmediatamente después de la colisión a la cantidad de movimiento inmediatamente antes? (c) Un estudiante opina que esta fuerte disminución en la energía mecánica debe estar acompañada de al menos una disminución en la cantidad de movimiento. ¿Qué puede decir usted sobre esta opinión del estudiante?

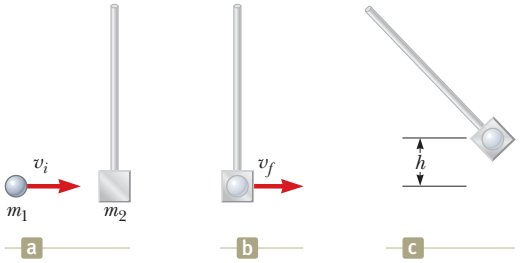


Figura P9.68 Problemas 68 y 86. (a) Una bola de metal se mueve hacia el péndulo. (b) La bola es capturada por el péndulo. (c) La combinación bola-péndulo oscila hasta una altura h antes de llegar al reposo.

69. Problema de repaso. Una persona de 60.0 kg corre con una rapidez inicial de 4.00 m/s y salta a un carro de 120 kg inicialmente en reposo (figura P9.69). La persona se desliza sobre la superficie superior del carro y finalmente llega al reposo respecto al carro. El coeficiente de fricción cinética entre la persona y el carro es 0.400. Puede ignorarse la fricción entre el carro y el suelo. (a) Encuentre la velocidad final de la persona y del carro relativas al suelo. (b) Obtenga la fuerza de fricción que actúa sobre la persona mientras se desliza sobre la parte superior del carro. (c) ¿Durante qué distancia actúa la fuerza de fricción sobre la persona? (d) Encuentre el cambio en la cantidad de movimiento de la persona y el cambio en la cantidad de movimiento del carro. (e) Determine el desplazamiento de la persona respecto del suelo mientras resbala sobre el carro. (f) Obtenga el desplazamiento del carro relativo al suelo mientras la persona se desliza. (g) Encuentre el cambio en la energía cinética de la persona. (h) Encuentre el cambio en la energía cinética del carro. (i) Explique por qué difieren las respuestas a (g) y (h). (¿Qué tipo de colisión es ésta y qué explica la pérdida de energía mecánica?)

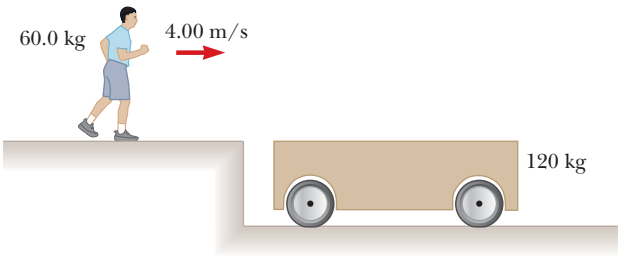


Figura P9.69

70. Un cañón está rígidamente instalado en una plataforma, la cual se puede mover en rieles horizontales pero está conectada a un poste mediante un largo resorte, inicialmente no deformado y con una constante de fuerza $k = 2.00 \times 10^4$ N/m, como se muestra en la figura P9.70. El cañón dispara un proyectil de 200 kg a una velocidad de 125 m/s a 45° sobre la horizontal. (a) Suponga que la masa del cañón y su plataforma es 5 000 kg, entonces encuentre la rapidez de retroceso del cañón. (b) Determine la máxima extensión del resorte. (c) Obtenga la fuerza máxima que el resorte ejerce sobre la plataforma. (d) Considere el sistema integrado por el cañón, la plataforma y el proyectil. ¿Se conserva la cantidad de movimiento de este sistema durante el disparo? ¿Por qué sí o por qué no?

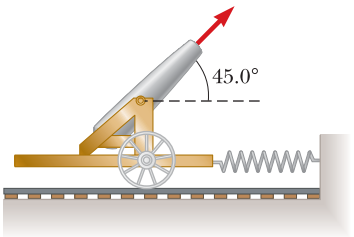


Figura P9.70

71. Un bloque de madera de 1.25 kg está sobre una mesa que tiene un hoyo, como se ilustra en la figura P9.71. Una bala de 5.00 g es disparada con una velocidad inicial v_i hacia arriba en el fondo del bloque y permanece en éste después de la colisión. El bloque y la bala se levantan una altura máxima de 22.0 cm. (a) Describa cómo encontraría la velocidad inicial de la bala empleando ideas que ha aprendido en este capítulo. (b) Calcule la velocidad inicial de la bala a partir de la información dada.

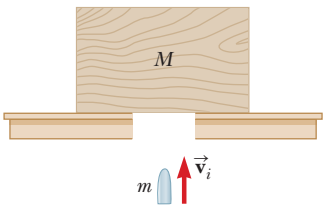


Figura P9.71
Problemas 71 y 72.

72. Un bloque de madera de masa M está sobre una mesa que tiene un hoyo, como se muestra en la figura P9.71. Una bala de masa m es disparada con una velocidad v_i hacia arriba en el fondo del bloque y permanece en éste después de la colisión. El bloque y la bala se levantan una altura máxima h. (a) Describa cómo encontraría la velocidad inicial de la bala utilizando ideas que aprendió en este capítulo. (b) Encuentre una expresión para la velocidad inicial de la bala.

73. Dos partículas con masas m y $3m$ se mueven una hacia la otra a lo largo del eje x con la misma rapidez inicial v_i. La partícula con masa m viaja hacia la izquierda, y la partícula con masa $3m$ se desplaza hacia la derecha. Ellas chocan frontalmente, de manera elástica, y cada una rebota sobre

la misma línea por la que se acercaron. Encuentre la rapidez final de cada partícula.

74. Perseguido por lobos feroces, usted está en un trineo sin caballos y se desliza sin fricción a través de un lago cubierto de hielo. Usted toma una acción descrita por las ecuaciones

$$(270\ \text{kg})(7.50\ \text{m/s})\hat{\mathbf{i}} = (15.0\ \text{kg})(-v_{1f}\hat{\mathbf{i}}) + (255\ \text{kg})(v_{2f}\hat{\mathbf{i}})$$
$$v_{1f} + v_{2f} = 8.00\ \text{m/s}$$

(a) Complete el enunciado del problema, proporcione los datos e identifique las incógnitas. (b) Encuentre los valores de v_{1f} y v_{2f}. (c) Obtenga la cantidad de energía que se transformó de energía potencial almacenada en su cuerpo a energía cinética del sistema.

75. Dos deslizadores se ponen en movimiento sobre un riel de aire. Un resorte con constante de fuerza k se une al extremo posterior del segundo deslizador. Como se muestra en la figura P9.75, el primer deslizador de masa m_1 se mueve hacia la derecha con rapidez v_1, y el segundo deslizador de masa m_2 se desplaza más despacio hacia la derecha con rapidez v_2. Cuando m_1 choca con el resorte unido a m_2, el resorte se comprime una distancia $x_{\text{máx}}$, y entonces los deslizadores se separan nuevamente. En términos de v_1, v_2, m_1, m_2 y k, encuentre (a) la rapidez v a máxima compresión, (b) la compresión máxima $x_{\text{máx}}$ y (c) la velocidad de cada deslizador después que m_1 pierde contacto con el resorte.

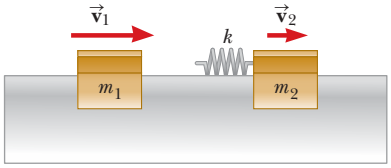


Figura P9.75

76. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un astronauta, junto con el equipo que lleva, tiene una masa de 150 kg. Él está realizando una caminata espacial afuera de su nave, la cual se mueve a velocidad constante. De manera accidental, el astronauta empuja la nave y comienza a retirarse a 2.00 m/s respecto de la nave, sin correa de sujeción. Para retornar, él toma equipo de su mochila y lo lanza en la dirección de alejamiento de la nave. Debido a su voluminoso traje espacial, puede lanzar equipo con rapidez máxima de 5.00 m/s respecto a sí mismo. Después de lanzar suficiente equipo, comienza a moverse de regreso a la nave y se puede agarrar a ella y entrar en la nave.

77. Dos bloques de masas $m_1 = 2.00$ kg y $m_2 = 4.00$ kg se liberan desde el reposo a una altura $h = 5.00$ m sobre una pista sin fricción, como se muestra en la figura P9.77. Cuando los bloques chocan en la porción a nivel de la pista experimentan una colisión elástica frontal. Determine las alturas máximas a que se elevan m_1 y m_2 sobre la porción curva de la pista después de la colisión.



Figura P9.77

78. **Problema de repaso.** Una bala de cañón de masa m está cerca de un árbol en el filo de un acantilado de 36.0 m sobre la superficie del océano. En un esfuerzo por golpear a la bola hacia el acantilado, algunos niños amarran un extremo de una cuerda alrededor de una piedra de masa 80.0 kg y el otro extremo a una rama del árbol justo arriba de la bala de cañón. Ellos aprietan la cuerda para que la piedra justo toque el suelo y cuelgue cerca de la bala. Los niños mueven la piedra de retorno hasta que esté en reposo a 1.80 m sobre el suelo. Después liberan la piedra, que abanica hacia abajo y hace una colisión elástica frontal con la bala, proyectándola horizontalmente por el acantilado. La bala de cañón aterriza en el océano a una distancia horizontal R de su posición inicial. (a) Encuentre la componente horizontal R del desplazamiento de la bala y cómo depende de m. (b) ¿Cuál es el máximo valor posible para R? y (c) ¿A qué valor de m corresponde? (d) ¿Se conserva la energía mecánica para el sistema piedra-bala de cañón-Tierra durante este proceso? ¿Este principio es suficiente para resolver completamente el problema? Explique. (e) **¿Qué pasaría si?** Demuestre que R no depende del valor de la aceleración gravitacional. ¿Es notable este resultado? Explique cómo esto podría tener sentido.

79. Una cuenta azul de 0.400 kg desliza sobre un alambre curvo sin fricción, partiendo del reposo en el punto Ⓐ de la figura P9.79, donde $h = 1.50$ m. En el punto Ⓑ, la cuenta azul colisiona elásticamente con una cuenta verde de 0.600 kg en reposo. Encuentre la máxima altura que alcanza la cuenta verde al moverse hacia arriba por el alambre.

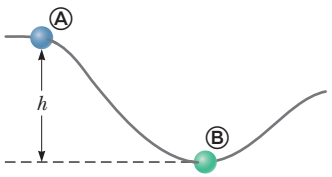


Figura P9.79

80. Un pequeño bloque de masa $m_1 = 0.500$ kg se libera desde el reposo en lo alto de una cuña sin fricción con forma curva, de masa $m_2 = 3.00$ kg, la cual se apoya sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P9.80a. Cuando el bloque deja la cuña se mide su velocidad de 4.00 m/s hacia la derecha, como se muestra en la figura P9.80b. (a) ¿Cuál es la velocidad de la cuña después que el bloque llega a la superficie horizontal? (b) ¿Cuál es la altura h de la cuña?

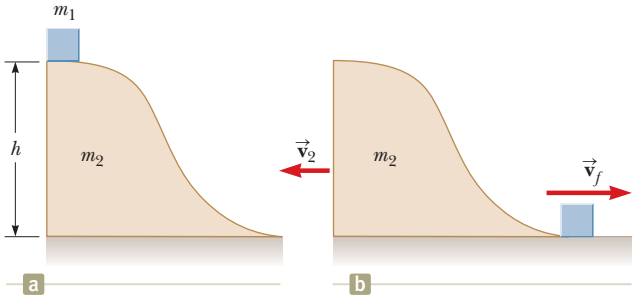


Figura P9.80

81. **Problema de repaso.** Una bala de masa $m = 8.00$ g se dispara contra un bloque de masa $M = 250$ g que inicial-

mente está en reposo en el borde de una mesa de altura $h = 1.00$ m (figura P9.81). La bala permanece en el bloque y después del impacto el bloque aterriza a una distancia $d = 2.00$ m del extremo de la mesa. Determine la rapidez inicial de la bala.

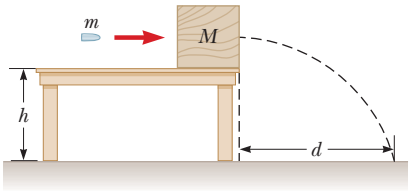


Figura P9.81 Problemas 81 y 82.

82. **Problema de repaso.** Una bala de masa m se dispara contra un bloque de masa M que inicialmente está en reposo en el borde de una mesa sin fricción de altura h (figura P9.81). La bala permanece en el bloque y después del impacto el bloque aterriza a una distancia d del extremo de la mesa. Determine la rapidez inicial de la bala.

83. Una esfera de 0.500 kg que se mueve con una velocidad dada por $(2.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}} + 1.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s golpea a otra esfera de masa 1.50 kg que se desplaza con una velocidad inicial de $(-1.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}} - 3.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s. (a) La velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión es $(-1.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}} - 8.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s. Encuentre la velocidad final de la esfera de 1.50 kg e identifique el tipo de colisión (elástica, inelástica o perfectamente inelástica). (b) Ahora suponga que la velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión es $(-0.250\hat{\mathbf{i}} + 0.750\hat{\mathbf{j}} - 2.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s. Encuentre la velocidad final de la esfera de 1.50 kg e identifique el tipo de colisión. (c) **¿Qué pasaría si?** Tome la velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión como $(-1.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}} + a\hat{\mathbf{k}})$ m/s. Encuentre el valor de a y la velocidad de la esfera de 1.50 kg después de una colisión elástica.

84. Un bombero de 75.0 kg se desliza hacia abajo en un poste mientras una fuerza de fricción constante de 300 N retarda su movimiento. Una plataforma horizontal de 20.0 kg está soportada por un resorte en la parte baja del poste para amortiguar la caída. El bombero parte del reposo 4.00 m arriba de la plataforma y la constante del resorte es 4 000 N/m. Encuentre (a) la rapidez del bombero inmediatamente antes de chocar con la plataforma y (b) la distancia máxima que se comprime el resorte. Suponga que la fuerza de fricción actúa durante todo el movimiento.

85. George de la Selva, con masa m, se balancea en una liana ligera que cuelga de la rama fija de un árbol. Una segunda liana de igual longitud cuelga del mismo punto y un gorila de mayor masa M se balancea en ella en la dirección opuesta. Ambas lianas están horizontales cuando los primates parten desde el reposo en el mismo momento. George y el gorila se encuentran en el punto más bajo de su balanceo. Cada uno tiene miedo de que una liana se rompa, así que se abrazan mutuamente y cuelgan. Se balancean juntos hacia arriba y llegan a un punto donde las lianas forman un ángulo de 35.0° con la vertical. Encuentre el valor de la razón m/M.

86. **Problema de repaso.** Una estudiante efectúa un experimento con el péndulo balístico empleando un aparato similar al discutido en el ejemplo 9.6 y que se muestra en la figura P9.68. Ella obtiene los siguientes datos promedio: $h = 8.68$ cm, masa del proyectil $m_1 = 68.8$ g y masa del péndulo $m_2 = 263$ g. (a) Determine la rapidez inicial v_{1A} del proyectil. (b) La segunda parte de su experimento es obtener v_{1A} disparando el mismo proyectil horizontalmente (con el péndulo retirado de la trayectoria) y medir su posición horizontal final x y distancia de caída y (figura P9.86). ¿Qué valor numérico obtiene ella si utiliza los valores medidos $x = 257$ cm y $y = 85.3$ cm? (c) ¿Qué factores podrían explicar la diferencia en este valor comparado con el obtenido en el inciso (a)?

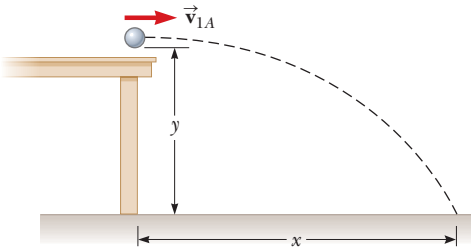


Figura P9.86

87. **Problema de repaso.** Un resorte ligero, con constante de fuerza 3.85 N/m, se comprime 8.00 cm y se mantiene entre un bloque de 0.250 kg a la izquierda y un bloque de 0.500 kg a la derecha. Ambos bloques están en reposo sobre una superficie horizontal. Los bloques se liberan simultáneamente de modo que el resorte tiende a separarlos. Encuentre la velocidad máxima que logra cada bloque si el coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie es (a) 0, (b) 0.100 y (c) 0.462. Suponga que el coeficiente de fricción estática es mayor que el coeficiente de fricción cinética en cada caso.

88. Considere como un sistema al Sol con la Tierra en una órbita circular alrededor de él. Encuentre la magnitud del cambio en la velocidad del Sol en relación con el centro de masa del sistema durante un periodo de seis meses. Ignore la influencia de otros objetos del espacio. Puede obtener los datos astronómicos necesarios en el apéndice al final del libro.

89. Una bala de 5.00 g que se mueve con una rapidez inicial $v_i = 400$ m/s se dispara y pasa a través de un bloque de 1.00 kg, como se muestra en la figura P9.89. El bloque, inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, se conecta a un resorte con constante de fuerza 900 N/m. El bloque se mueve $d = 5.00$ cm hacia la derecha después del impacto y es llevado al reposo por el resorte. Encuentre (a) la rapidez con que la bala sale del bloque y (b) la cantidad de energía cinética inicial de la bala que es convertida en energía interna en el sistema bala-bloque durante la colisión.

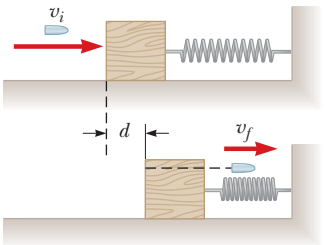


Figura P9.89

90. **Problema de repaso.** Existen (podría decirse) tres teorías recíprocas del movimiento: la segunda ley de Newton, que afirma que la fuerza total sobre una partícula causa su ace-

leración; el teorema trabajo-energía cinética, que afirma que el trabajo total sobre una partícula causa su cambio en energía cinética; y el teorema impulso-cantidad de movimiento, que establece que el impulso total sobre una partícula causa su cambio en cantidad de movimiento. En este problema, compare predicciones de las tres teorías en un caso particular. Un objeto de 3.00 kg tiene una velocidad $7.00\hat{\mathbf{j}}$ m/s. Después, una fuerza total de $12.0\hat{\mathbf{i}}$ N actúa sobre el objeto durante 5.00 s. (a) Calcule la velocidad final del objeto, con el teorema impulso-cantidad de movimiento. (b) Calcule su aceleración a partir de $\vec{\mathbf{a}} = (\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i)/\Delta t$. (c) Calcule su aceleración a partir de $\vec{\mathbf{a}} = \sum \vec{\mathbf{F}}/m$. (d) Encuentre el desplazamiento vectorial del objeto a partir de $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{v}}_i t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$. (e) Obtenga el trabajo realizado sobre el objeto a partir de $W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$. (f) Encuentre la energía cinética final a partir de $\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}m\vec{\mathbf{v}}_f \cdot \vec{\mathbf{v}}_f$. (g) Encuentre la energía cinética final a partir de $\frac{1}{2}mv_i^2 + W$. (h) Establezca el resultado de comparar las respuestas de los incisos (b) y (c), y las respuestas a los incisos (f) y (g).

91. Una partícula de 2.00 g se mueve a 8.00 m/s para efectuar una colisión elástica frontal con un objeto de 1.00 g en reposo. (a) Encuentre la rapidez de cada partícula después de la colisión. (b) Obtenga la rapidez de cada partícula después de la colisión si la partícula estacionaria tiene una masa de 10.0 g. (c) Encuentre la energía cinética final de la partícula incidente de 2.00 g en la situación descrita en los incisos (a) y (b). ¿En cuál caso la partícula incidente pierde más energía cinética?

Problemas de desafío

92. En los Juegos Olímpicos de verano de 1968, el saltador de altura de la Universidad de Oregon, Dick Fosbury, introdujo una nueva técnica de salto de altura llamada "salto Fosbury". Así elevó el récord mundial por casi 30 cm y actualmente lo usan casi todos los saltadores de clase mundial. En esta técnica, el saltador pasa sobre la barra con la cara hacia arriba mientras arquea su espalda tanto como sea posible, como se muestra en la figura P9.92a. Esta acción coloca su centro de masa fuera de su cuerpo, bajo su espalda. Conforme su cuerpo pasa sobre la barra, su centro de masa pasa por debajo de la barra. Ya que una entrada de energía dada implica cierta elevación para su centro de masa, la acción de arquear la espalda significa que su cuerpo está más alto que si su espalda estuviese recta. Como modelo, considere que el saltador es una barra delgada uniforme de longitud L. Cuando la barra está recta, su centro de masa está en su centro. Ahora doble la barra en un arco circular de modo que subtienda un ángulo de 90.0° en el centro del arco, como se muestra en la figura P9.92b. En esta configuración, ¿a qué distancia, afuera de la barra, está el centro de masa?

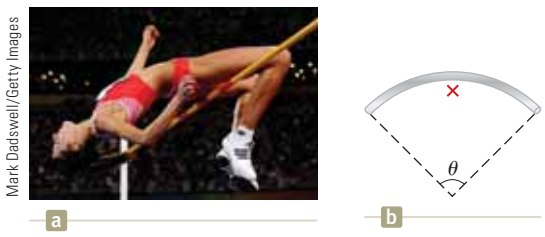


Figura P9.92

93. Dos partículas con masas m y $3m$ se mueven una hacia la otra a lo largo del eje x con la misma rapidez inicial v_i. La partícula m viaja hacia la izquierda y la partícula $3m$ se desplaza hacia la derecha. Se someten a una colisión oblicua elástica tal que la partícula m se mueve hacia abajo después de la colisión en ángulo recto desde su dirección inicial. (a) Encuentre las magnitudes de velocidad finales de las dos partículas. (b) ¿Cuál es el ángulo θ al que se dispersa la partícula $3m$?

94. Sobre una banda transportadora cae arena desde una tolva fija a razón de 5.00 kg/s, como se muestra en la figura P9.94. La banda transportadora está sostenida por rodillos sin fricción. Se mueve con una rapidez constante de 0.750 m/s bajo la acción de una fuerza horizontal externa constante $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$ que proporciona el motor que impulsa la banda. Encuentre: (a) la razón de cambio de la cantidad de movimiento de la arena en la dirección horizontal, (b) la fuerza de fricción ejercida por la banda sobre la arena, (c) la fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$, (d) el trabajo hecho por $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$ en 1 s y (e) la energía cinética adquirida por la arena que cae cada segundo debido al cambio en su movimiento horizontal. (f) ¿Por qué son diferentes las respuestas en (d) y (e)?

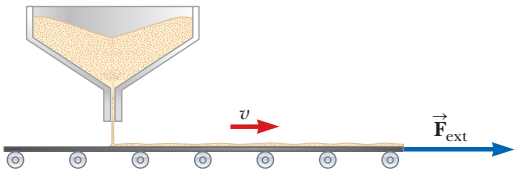


Figura P9.94

95. Sobre una pista de aire horizontal, un deslizador de masa m lleva un poste con forma de Γ. El poste soporta una pequeña esfera densa, también de masa m, que cuelga justo arriba de lo alto del deslizador en una cuerda de longitud L. El deslizador y la esfera inicialmente están en reposo con la cuerda vertical. (La figura P9.57 muestra un carro y una esfera igualmente conectados.) Una fuerza horizontal constante, de magnitud F, se aplica al deslizador y lo mueve un desplazamiento x_1; después se quita la fuerza. Durante el intervalo de tiempo cuando la fuerza se aplica, la esfera se mueve a través de un desplazamiento con componente horizontal x_2. (a) Encuentre la componente horizontal de la velocidad del centro de masa del sistema deslizador-esfera cuando la fuerza se retira. (b) Después de quitar la fuerza, el deslizador continúa moviéndose sobre la pista y la esfera se balancea atrás y adelante, ambos sin fricción. Encuentre una expresión para el mayor ángulo que la cuerda forma con la vertical.

96. **Problema de repaso.** Una cadena de longitud L y masa total M se libera desde el reposo con su extremo inferior apenas tocando lo alto de una mesa, como se muestra en la figura P9.96a. Encuentre la fuerza que ejerce la mesa sobre la cadena después que la cadena cae una distancia x, como se indica en la figura P9.96b. (Suponga que cada eslabón llega al reposo en el instante en que alcanza la mesa.

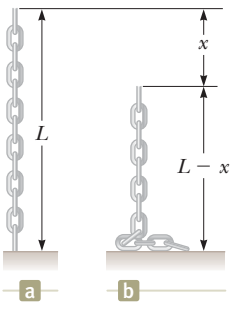


Figura P9.96

CAPÍTULO

10

Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo



10.1 Posición, velocidad y aceleración angular

10.2 Análisis de modelo: objeto rígido bajo aceleración angular constante

10.3 Cantidades angulares y traslacionales

10.4 Momento de torsión

10.5 Análisis de modelo: objeto rígido bajo un momento de torsión neto

10.6 Cálculo de momentos de inercia

10.7 Energía cinética rotacional

10.8 Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional

10.9 Movimiento de rodamiento de un objeto rígido

El pasatiempo malayo *gasing* es el giro de trompos que llegan a tener masas de hasta 5 kg. Los jugadores profesionales giran sus trompos de modo que puedan dar vueltas durante más de una hora antes de detenerse. En este capítulo se estudiará el movimiento rotacional de objetos como estos trompos. *(Cortesía Turismo Malasia)*

El movimiento de un objeto extendido, como una rueda que gira en torno a su eje, no se puede explicar al representar el objeto como una partícula: en cualquier momento diferentes partes del objeto tienen distintas velocidades y aceleraciones lineales. Sin embargo, el movimiento de un objeto extendido se analiza al representarlo como un conjunto de partículas, cada una con su propia velocidad y aceleración lineales, como se discutió en la sección 9.7.

Al tratar con un objeto en rotación la explicación se simplifica mucho al suponer que el objeto es rígido. Un **objeto rígido** no es deformable; es decir, las ubicaciones relativas de todas las partículas de que está compuesto permanecen constantes. Todos los objetos reales son deformables en cierta medida; no obstante, el modelo de objeto rígido es útil en muchas situaciones en que la deformación es despreciable. Hemos desarrollado análisis de modelos con base en partículas y sistemas. En este capítulo presentamos otra clase de análisis de modelos con base en el modelo de objetos rígidos.

10.1 Posición, velocidad y aceleración angular

Desarrollaremos nuestra comprensión del movimiento de rotación de una manera paralela a la utilizada para el movimiento de traslación en los capítulos anteriores. En el capítulo 2 comenzamos definiendo las variables cinemáticas: posición, velocidad y aceleración. Hacemos lo mismo aquí para el movimiento de rotación.

La figura 10.1 ilustra una vista desde arriba de un disco compacto, o CD, en rotación. El disco da vueltas en torno a un eje fijo perpendicular al plano de la figura

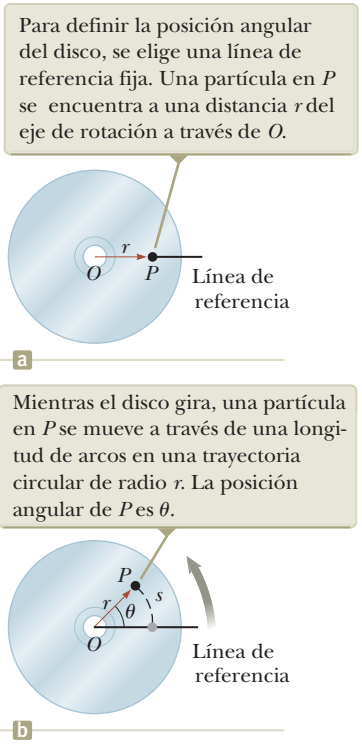


Figura 10.1 Disco compacto que gira en torno a un eje fijo a través de *O* perpendicular al plano de la figura.

Prevención de riesgos ocultos 10.1

Recuerde el radián En las ecuaciones rotacionales *debe* usar ángulos expresados en radianes. No caiga en la trampa de usar ángulos medidos en grados en las ecuaciones rotacionales.

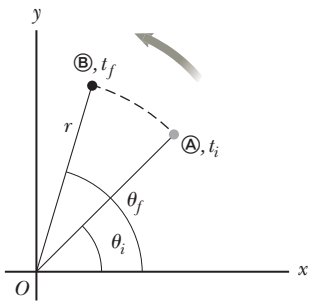


Figura 10.2 Una partícula sobre un objeto rígido en rotación se mueve de Ⓐ a Ⓑ a lo largo de un arco de una circunferencia. En el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, la línea radial de longitud r se mueve a través de un desplazamiento angular $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$.

Rapidez angular promedio ▶

que pasa a través del centro del disco en *O*. Un pequeño elemento del disco modelado como partícula en *P* está a una distancia fija *r* desde el origen y gira en torno a él en un círculo de radio *r*. (De hecho, *cada* partícula en el disco experimenta movimiento circular en torno a *O*.) Es conveniente representar la posición de *P* con sus coordenadas polares (r, θ), donde *r* es la distancia desde el origen a *P* y θ se mide *contra las manecillas del reloj* desde cierta línea de referencia fija en el espacio, como se muestra en la figura 10.1a. En esta representación el ángulo θ cambia en el tiempo mientras *r* permanece constante. A medida que la partícula se mueve a lo largo del círculo desde la línea de referencia, que está a un ángulo $\theta = 0$, se mueve a través de una longitud de arco *s*, como en la figura 10.1b. La longitud de arco *s* se relaciona con el ángulo θ mediante la relación

$$s = r\theta \tag{10.1a}$$

$$\theta = \frac{s}{r} \tag{10.1b}$$

Ya que θ es la razón de una longitud de arco al radio del círculo, es un número puro. Sin embargo, por lo general a θ se le da la unidad artificial **radián** (rad), donde un radián es el ángulo subtendido por una longitud de arco igual al radio del arco. Ya que la circunferencia de un círculo es $2\pi r$, se sigue de la ecuación 10.1b que 360° corresponde a un ángulo de $(2\pi r/r)$ rad $= 2\pi$ rad. Por tanto, 1 rad $= 360°/2\pi \approx 57.3°$. Para convertir un ángulo en grados a un ángulo en radianes se usa π rad $= 180°$, de modo que

$$\theta(\text{rad}) = \frac{\pi}{180°}\,\theta(\text{deg})$$

Por ejemplo, 60° es igual a $\pi/3$ rad y 45° es igual a $\pi/4$ rad.

Ya que el disco en la figura 10.1 es un objeto rígido, a medida que la partícula se mueve a través de un ángulo θ desde la línea de referencia, cualquier otra partícula sobre el objeto da vueltas a través del mismo ángulo θ. En consecuencia, se puede asociar el ángulo θ con todo el objeto rígido, así como con una partícula individual que permite definir la posición angular de un objeto rígido en su movimiento rotacional. Se elige una línea de referencia sobre el objeto, tal como una línea que conecte a *O* con una partícula elegida sobre el objeto. La **posición angular** del objeto rígido es el ángulo θ entre esta línea de referencia sobre el objeto y la línea de referencia fija en el espacio, que con frecuencia se elige como el eje *x*. Tal identificación es similar a la forma en que se define la posición de un objeto en movimiento traslacional como la distancia *x* entre el objeto y la posición de referencia, que es el origen, $x = 0$. Por lo tanto, el ángulo θ desempeña el mismo papel en el movimiento de rotación que la posición *x* hace en el movimiento traslacional.

Conforme la partícula en cuestión sobre el objeto rígido viaja de la posición Ⓐ a la posición Ⓑ en un intervalo de tiempo Δt, como en la figura 10.2, la línea de referencia fija al objeto recorre un ángulo $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$. Esta cantidad $\Delta\theta$ se define como el **desplazamiento angular** del objeto rígido:

$$\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$$

La rapidez a la que se presenta este desplazamiento angular puede variar. Si el objeto rígido gira rápidamente, este desplazamiento puede ocurrir en un intervalo breve de tiempo. Si da vueltas lentamente este desplazamiento se presenta en un intervalo de tiempo más largo. Estas diferentes razones de rotación se cuantifican al definir la **rapidez angular promedio** ω_{prom} (letra griega omega) como la razón del desplazamiento angular de un objeto rígido al intervalo de tiempo Δt durante el que se presenta el desplazamiento:

$$\omega_{\text{prom}} \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{10.2}$$

En analogía con la rapidez lineal, la **rapidez angular instantánea** ω se define como el límite de la rapidez angular promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{10.3}$$

◀ Rapidez angular instantánea

La rapidez angular tiene unidades de radianes por segundo (rad/s), que se pueden escribir como s^{-1} porque los radianes son adimensionales. ω se considera positiva cuando θ aumenta (movimiento contra las manecillas del reloj en la figura 10.2) y negativa cuando θ disminuye (en sentido de las manecillas del reloj en la figura 10.2).

Examen rápido 10.1 Un objeto rígido da vueltas en un sentido contrario a las manecillas del reloj en torno a un eje fijo. Cada uno de los siguientes pares de cantidades representa una posición angular inicial y una posición angular final del objeto rígido. **(i)** ¿Cuál de los conjuntos *sólo* puede ocurrir si el objeto rígido rota más de 180°? (a) 3 rad, 6 rad, (b) −1 rad, 1 rad, (c) 1 rad, 5 rad. **(ii)** Suponga que el cambio en posición angular para cada uno de estos pares de valores se presenta en 1 s. ¿Cuál opción representa la rapidez angular promedio más baja?

Si la rapidez angular instantánea de un objeto cambia de ω_i a ω_f en el intervalo de tiempo Δt, el objeto tiene una aceleración angular. La **aceleración angular promedio** α_{prom} (letra griega alfa) de un objeto rígido en rotación se define como la razón de cambio de la rapidez angular respecto al intervalo de tiempo Δt durante el que se presenta el cambio en la rapidez angular:

$$\alpha_{\text{prom}} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{10.4}$$

◀ Aceleración angular promedio

En analogía con la aceleración lineal, la **aceleración angular instantánea** se define como el límite de la aceleración angular promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{10.5}$$

◀ Aceleración angular instantánea

La aceleración angular tiene unidades de radianes por segundo al cuadrado (rad/s^2), o simplemente s^{-2}. Observe que α es positivo cuando un objeto rígido que gira contra las manecillas del reloj aumenta su rapidez o cuando un objeto rígido que gira en sentido de las manecillas del reloj disminuye su rapidez durante cierto intervalo de tiempo.

Cuando un objeto rígido rota respecto de un eje *fijo*, cada partícula sobre el objeto da vueltas a través del mismo ángulo en un intervalo de tiempo determinado y tiene la misma rapidez angular y la misma aceleración angular. Es decir, como la posición angular θ, las cantidades ω y α caracterizan el movimiento rotacional de todo el objeto rígido, así como de las partículas individuales en el objeto.

La posición angular (θ), la rapidez angular (ω) y la aceleración angular (α) son análogas a la posición traslacional (x), la rapidez traslacional (v) y la aceleración traslacional (a). Las variables θ, ω y α difieren dimensionalmente de las variables x, v y a sólo por un factor que tiene la unidad de longitud. (Vea la sección 10.3.)

No se especificó dirección alguna para la rapidez angular y la aceleración angular. Estrictamente hablando, ω y α son las magnitudes de los vectores velocidad angular y aceleración angular[1] $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$, respectivamente, y siempre deben ser positivas. No obstante, ya que se considera rotación respecto a un eje fijo, se puede usar notación no vectorial e indicar las direcciones de los vectores al asignar un signo positivo o negativo a ω y α, como se explicó anteriormente respecto de las ecuaciones 10.3 y 10.5. Para rotación respecto a un eje fijo, la única dirección que especifica el movimiento rotacional es la dirección a lo largo del eje de rotación. Por lo tanto, las direcciones de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ son a lo largo de este eje. Si una partícula da vueltas en el plano xy, como en la figura 10.2, la dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ para la partícula es afuera del plano del diagrama cuando la rotación es contraria a las manecillas del reloj y hacia el plano del diagrama cuando

Prevención de riesgos ocultos 10.2

Especifique su eje Al resolver problemas de rotación debe especificar un eje de rotación. Esta nueva característica no existe en el estudio del movimiento traslacional. La elección es arbitraria, pero una vez que la hace debe mantener dicha elección consistentemente en todo el problema. En algunos problemas la situación física sugiere un eje natural, como el centro de la rueda de un automóvil. En otros problemas puede no haber una opción obvia y debe ejercer su juicio.

[1] Aunque no se verificó en este caso, la velocidad angular instantánea y la aceleración angular instantánea son cantidades vectoriales, pero los correspondientes valores promedio no lo son porque los desplazamientos no se suman como cantidades vectoriales para rotaciones finitas.

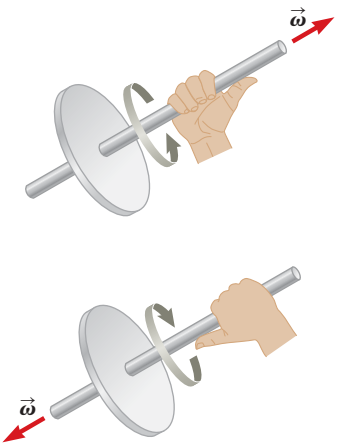


Figura 10.3 Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector velocidad angular.

la rotación es en sentido de las manecillas del reloj.Para ilustrar esta convención es adecuado usar la *regla de la mano derecha* que se muestra en la figura 10.3. Cuando los cuatro dedos de la mano derecha se doblan en la dirección de rotación, el pulgar derecho extendido apunta en la dirección de $\vec{\omega}$. La dirección de $\vec{\alpha}$ se sigue de su definición $\vec{\alpha} \equiv d\vec{\omega}/dt$. Está en la misma dirección de $\vec{\omega}$ si la rapidez angular aumenta en el tiempo, y es antiparalela a $\vec{\omega}$ si la rapidez angular disminuye en el tiempo.

10.2 Análisis de modelo: objeto rígido bajo aceleración angular constante

En nuestro estudio del movimiento traslacional, después de introducir las variables cinemáticas consideramos el caso especial de una partícula bajo aceleración constante. Ahora seguimos el mismo procedimiento para un objeto rígido bajo aceleración angular constante.

Imagine que un objeto rígido, como el CD en la figura 10.1, gira sobre un eje fijo y tiene una aceleración angular constante. En paralelo con nuestro análisis de modelo de la partícula bajo aceleración constante, generamos un nuevo análisis de modelo para el movimiento rotacional llamado el **objeto rígido bajo aceleración angular constante**. En esta sección desarrollamos las relaciones cinemáticas para este modelo. Al escribir la ecuación 10.5 en la forma $d\omega = \alpha\, dt$ e integrando desde $t_i = 0$ hasta $t_f = t$ se obtiene

Ecuaciones cinemáticas rotacionales ▶

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}) \tag{10.6}$$

donde ω_i es la rapidez angular del objeto rígido en el tiempo $t = 0$. La ecuación 10.6 permite encontrar la rapidez angular ω_f del objeto en cualquier tiempo posterior t. Al sustituir la ecuación 10.6 en la ecuación 10.3 e integrar una vez más, se obtiene

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}) \tag{10.7}$$

donde θ_i es la posición angular del objeto rígido en el tiempo $t = 0$. La ecuación 10.7 permite encontrar la posición angular θ_f del objeto en cualquier tiempo posterior t. Al eliminar t de las ecuaciones 10.6 y 10.7 se obtiene

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}) \tag{10.8}$$

Esta ecuación permite encontrar la rapidez angular ω_f del objeto rígido para cualquier valor de su posición angular θ_f. Si se elimina α entre las ecuaciones 10.6 y 10.7, se obtiene

$$\theta_f = \theta_i + \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}) \tag{10.9}$$

Advierta que estas expresiones cinemáticas para el objeto rígido bajo aceleración angular constante tienen la misma forma matemática que para una partícula bajo aceleración constante (capítulo 2). Se generan a partir de las ecuaciones para movimiento traslacional al hacer las sustituciones $x \to \theta$, $v \to \omega$ y $a \to \alpha$. La tabla 10.1 compara las ecuaciones cinemáticas de los modelos para el objeto rígido bajo aceleración constante y las de la partícula bajo aceleración constante.

Prevención de riesgos ocultos 10.3

¿Tal como la traslación? Las ecuaciones 10.6 a 10.9 y la tabla 10.1 sugieren que la cinemática rotacional es tal como la cinemática traslacional. Esto es casi cierto, con dos diferencias clave. (1) En la cinemática rotacional debe especificar un eje de rotación (vea Prevención de riesgos ocultos 10.2). (2) En el movimiento rotacional el objeto regresa a su orientación original; por lo tanto, se le puede preguntar el número de revoluciones hecho por un objeto rígido. Este concepto no tiene significado en el movimiento traslacional.

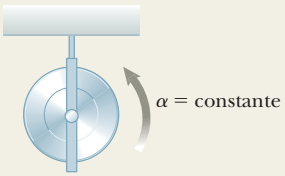
Examen rápido 10.2 Considere de nuevo los pares de posiciones angulares para el objeto rígido del Examen rápido 10.1. Si el objeto parte del reposo en la posición angular inicial, se mueve contra las manecillas del reloj con aceleración angular constante y llega a la posición angular final con la misma rapidez angular en los tres casos, ¿para cuál opción la aceleración angular es la más alta?

Tabla 10.1 Ecuaciones cinemáticas para movimiento rotacional y traslacional

Objeto rígido bajo aceleración angular constante		Partícula bajo aceleración constante	
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	(10.6)	$v_f = v_i + at$	(2.13)
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10.7)	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$	(2.16)
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	(10.8)	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$	(2.17)
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	(10.9)	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$	(2.15)

Análisis de modelo — Objeto rígido bajo aceleración angular constante

Imagine un objeto que se somete a un movimiento de giro tal que su aceleración angular es constante. Las ecuaciones que describen su posición angular y rapidez angular son análogas a las de la partícula bajo el modelo de aceleración constante:



$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \qquad (10.6)$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (10.7)$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \qquad (10.8)$$

$$\theta_f = \theta_i + \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \qquad (10.9)$$

Ejemplos:

- durante su ciclo de centrifugado, la tina de la lavadora comienza a partir del reposo y acelera hasta su rapidez de centrifugado final
- se apaga una rueda de molino y alcanza el reposo bajo la acción de una fuerza de fricción constante en los cojinetes de la rueda
- se enciende un giroscopio y alcanza su rapidez de funcionamiento (capítulo 11)
- el cigüeñal de un motor diesel cambia a una rapidez angular más alta (capítulo 22)

Ejemplo 10.1 Rueda en rotación AM

Una rueda da vueltas con una aceleración angular constante de 3.50 rad/s^2.

(A) Si la rapidez angular de la rueda es 2.00 rad/s en $t_i = 0$, ¿a través de qué desplazamiento angular da vueltas la rueda en 2.00 s?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe de nuevo la figura 10.1. Imagine que el disco compacto se mueve con su rapidez angular que crece con una razón constante. El cronómetro se inicia cuando el disco está girando a 2.00 rad/s. Esta imagen mental es un modelo para el movimiento de la rueda en este ejemplo.

Categorizar La frase "con aceleración angular constante" dice que se aplique el modelo de *objeto rígido bajo aceleración angular constante* a la rueda.

Analizar Del modelo de objeto rígido bajo aceleración angular constante, elija y ordene la ecuación 10.7 de modo que exprese el desplazamiento angular del objeto:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

Sustituya los valores conocidos para encontrar el desplazamiento angular en $t = 2.00$ s:

$$\Delta\theta = (2.00\ \text{rad/s})(2.00\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(3.50\ \text{rad/s}^2)(2.00\ \text{s})^2$$
$$= 11.0\ \text{rad} = (11.0\ \text{rad})(180°/\pi\ \text{rad}) = 630°$$

(B) ¿Cuántas revoluciones dio la rueda durante este intervalo de tiempo?

SOLUCIÓN

Multiplique el desplazamiento que encontró en la parte (A) por un factor de conversión para encontrar el número de revoluciones:

$$\Delta\theta = 630°\left(\frac{1\ \text{rev}}{360°}\right) = 1.75\ \text{rev}$$

(C) ¿Cuál es la rapidez angular de la rueda en $t = 2.00$ s?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 10.6 de un objeto rígido con aceleración angular constante para encontrar la rapidez angular en $t = 2.00$ s:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t = 2.00\ \text{rad/s} + (3.50\ \text{rad/s}^2)(2.00\ \text{s})$$
$$= 9.00\ \text{rad/s}$$

Finalizar También se podría obtener este resultado con la ecuación 10.8 y los resultados de la parte (A). (¡Inténtelo!)

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración constante de 3.50 m/s^2. Si la velocidad de la partícula es 2.00 m/s en $t_i = 0$, ¿a través de qué desplazamiento se mueve la partícula en 2.00 s? ¿Cuál es la velocidad de la partícula en $t = 2.00$ s?

continúa

10.1 continuación

Respuesta Advierta que estas preguntas son análogos traslacionales a las partes (A) y (C) del problema original. La solución matemática sigue exactamente la misma forma. Para el desplazamiento del modelo de partícula bajo aceleración constante,

$$\Delta x = x_f - x_i = v_i t + \tfrac{1}{2}at^2$$
$$= (2.00\ \text{m/s})(2.00\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(3.50\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{s})^2 = 11.0\ \text{m}$$

y para la velocidad

$$v_f = v_i + at = 2.00\ \text{m/s} + (3.50\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{s}) = 9.00\ \text{m/s}$$

No hay análogo traslacional a la parte (B) porque el movimiento traslacional bajo aceleración constante no es repetitivo.

10.3 Cantidades angulares y traslacionales

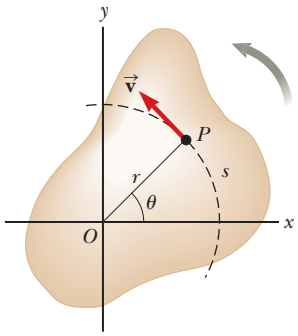


Figura 10.4 A medida que un objeto rígido da vueltas en torno al eje fijo a través de *O*, el punto *P* tiene una velocidad tangencial $\vec{\mathbf{v}}$ que siempre es tangente a la trayectoria circular de radio *r*.

En esta sección se deducen algunas relaciones útiles entre la rapidez y la aceleración angulares de un objeto rígido en rotación y la rapidez y la aceleración traslacionales de un punto en el objeto. Para hacerlo, debe tener en mente que cuando un objeto rígido da vueltas respecto a un eje fijo, como en la figura 10.4, cada partícula del objeto se mueve en un círculo cuyo centro está en el eje de rotación.

Ya que el punto *P* en la figura 10.4 se mueve en un círculo, el vector velocidad traslacional $\vec{\mathbf{v}}$ siempre es tangente a la trayectoria circular y, por ende, se llama *velocidad tangencial*. La magnitud de la velocidad tangencial del punto *P* es por definición la rapidez tangencial $v = ds/dt$, donde *s* es la distancia que recorre este punto medida a lo largo de la trayectoria circular. Al recordar que $s = r\theta$ (ecuación 10.1a) y notar que *r* es constante, se obtiene

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

Ya que $d\theta/dt = \omega$ (vea la ecuación 10.3), se sigue que

Relación entre velocidad tangencial y velocidad angular

$$v = r\omega \tag{10.10}$$

Como vimos en la ecuación 4.17, la rapidez tangencial de un punto sobre un objeto rígido en rotación es igual a la distancia perpendicular de dicho punto desde el eje de rotación multiplicada por la rapidez angular. En consecuencia, aunque cada punto sobre el objeto rígido tiene la misma rapidez angular, no todo punto tiene la misma rapidez tangencial porque *r* no es el mismo para todos los puntos sobre el objeto. La ecuación 10.10 muestra que la rapidez tangencial de un punto sobre el objeto en rotación aumenta a medida que uno se mueve alejándose del centro de rotación, como se esperaría por intuición. Por ejemplo, el extremo exterior de un palo de golf que se balancea se mueve mucho más rápido que el mango.

Podemos relacionar la aceleración angular del objeto rígido en rotación con la aceleración tangencial del punto *P* al tomar la derivada en el tiempo de *v*:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

Relación entre aceleración tangencial y aceleración angular

$$a_t = r\alpha \tag{10.11}$$

Es decir, la componente tangencial de la aceleración traslacional de un punto sobre un objeto rígido en rotación es igual a la distancia perpendicular del punto desde el eje de rotación multiplicada por la aceleración angular.

En la sección 4.4 se encontró que un punto que se mueve en una trayectoria circular experimenta una aceleración radial a_r dirigida hacia el centro de rotación y cuya magnitud es la de la aceleración centrípeta v^2/r (figura 10.5). Ya que $v = r\omega$ para un punto *P* en un objeto en rotación, la aceleración centrípeta en dicho punto se puede expresar en términos de rapidez angular, como hicimos en la ecuación 4.18:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \qquad (10.12)$$

El vector aceleración total en el punto es $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_t + \vec{\mathbf{a}}_r$, donde la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}_r$ es la aceleración centrípeta a_c. Ya que $\vec{\mathbf{a}}$ es un vector que tiene una componente radial y una componente tangencial, la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}$ en el punto P sobre el objeto rígido en rotación es

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \qquad (10.13)$$

Examen rápido 10.3 Ethan y Joseph viajan en un carrusel. Ethan viaja en un caballo en el borde exterior de la plataforma circular al doble de distancia del centro de la plataforma circular que Joseph, quien viaja en un caballo interior. **(i)** Cuando el carrusel está en rotación a una rapidez angular constante, ¿cuál es la rapidez angular de Ethan? (a) El doble de la de Joseph, (b) la misma que la de Joseph, (c) la mitad de la de Joseph, (d) imposible de determinar. **(ii)** Cuando el carrusel está en rotación con una rapidez angular constante, describa la rapidez tangencial de Ethan con la misma lista de opciones

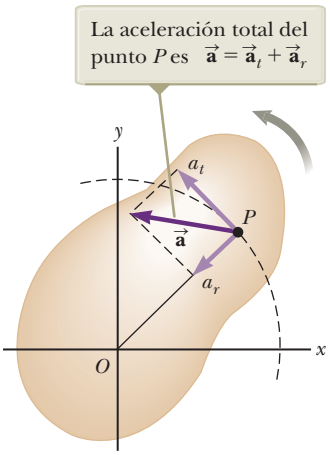


Figura 10.5 A medida que un objeto rígido gira respecto a un eje fijo a través de O, el punto P experimenta una componente tangencial de aceleración traslacional a_t y una componente radial de aceleración traslacional a_r.

Ejemplo 10.2 Reproductor de CD AM

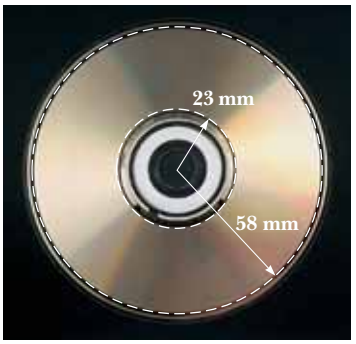
En un disco compacto (figura 10.6) la información de audio se almacena digitalmente en una serie de depresiones (pits) y áreas planas en la superficie del disco. Las alternaciones entre depresiones y áreas planas sobre la superficie representan unos y ceros binarios a leer por el reproductor de CD y convertir de regreso en ondas sonoras. Las depresiones y áreas planas se detectan mediante un sistema que consiste de un láser y lentes. La longitud de una cadena de unos y ceros que representa una porción de información es la misma en cualquier parte del disco, ya sea que la información esté cerca del centro del disco o cerca de su borde exterior. De modo que para que esta longitud de unos y ceros siempre pase por el sistema láser-lente en el mismo intervalo de tiempo, la rapidez tangencial de la superficie del disco en la posición del lente debe ser constante. De acuerdo con la ecuación 10.10, la rapidez angular debe variar a medida que el sistema láser-lente se mueve radialmente a lo largo del disco. En un reproductor de CD común la rapidez constante de la superficie en el punto del sistema láser-lente es 1.3 m/s.

(A) Encuentre la rapidez angular del disco en revoluciones por minuto cuando la información se lee desde la primera pista más interna ($r = 23$ mm) y la pista final más externa ($r = 58$ mm).

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 10.6 muestra una fotografía de un disco compacto. Recorra con su dedo el círculo marcado "23 mm" y mentalmente calcule el intervalo de tiempo para ir una vez alrededor del círculo. Ahora trace con su dedo alrededor del círculo marcado "58 mm" moviendo el dedo por toda la superficie de la página a la misma rapidez que como lo hizo cuando seguía el círculo más pequeño. Advierta cuán rápido se mueve su dedo en relación con la página alrededor del círculo más grande. Si su dedo representa el láser que lee el disco, se mueve sobre la superficie del disco mucho más lento en el círculo exterior que en el círculo interior. Por lo tanto, el disco debe girar más lentamente cuando el láser está leyendo la información de esta parte del disco.

Categorizar Esta parte del ejemplo se clasifica como un simple problema de sustitución. En partes posteriores se necesitará identificar análisis de modelos.



© Cengage Learning/George Semple

Figura 10.6 (Ejemplo 10.2) Disco compacto.

Aplique la ecuación 10.10 para encontrar la rapidez angular que da la rapidez tangencial requerida en la posición de la pista interna:

$$\omega_i = \frac{v}{r_i} = \frac{1.3\ \text{m/s}}{2.3 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 57\ \text{rad/s}$$

$$= (57\ \text{rad/s})\left(\frac{1\ \text{rev}}{2\pi\ \text{rad}}\right)\left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}}\right) = 5.4 \times 10^2\ \text{rev/min}$$

Haga lo mismo para la pista exterior:

$$\omega_f = \frac{v}{r_f} = \frac{1.3\ \text{m/s}}{5.8 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 22\ \text{rad/s} = 2.1 \times 10^2\ \text{rev/min}$$

continúa

10.2 continuación

El reproductor de CD ajusta la rapidez angular ω del disco dentro de este rango de modo que la información se mueve por el lente objetivo a una razón constante.

(B) El máximo tiempo de reproducción de un disco de música estándar es 74 min y 33 s. ¿Cuántas revoluciones realiza el disco durante dicho tiempo?

SOLUCIÓN

Categorizar De la parte (A) la rapidez angular disminuye a medida que el disco se reproduce. Suponga que disminuye de manera estable, con α constante. Por lo tanto, se puede aplicar el modelo de *objeto rígido bajo aceleración angular constante* al disco.

Analizar Si $t = 0$ es el instante cuando el disco comienza su rotación, con rapidez angular de 57 rad/s, el valor final del tiempo t es (74 min)(60 s/min) + 33 s = 4 473 s. Se busca el desplazamiento angular $\Delta\theta$ durante este intervalo de tiempo.

Aplique la ecuación 10.9 para encontrar el desplazamiento angular del disco en $t = 4\,473$ s:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$$
$$= \tfrac{1}{2}(57 \text{ rad/s} + 22 \text{ rad/s})(4\,473 \text{ s}) = 1.8 \times 10^5 \text{ rad}$$

Convierta este desplazamiento angular a revoluciones:

$$\Delta\theta = (1.8 \times 10^5 \text{ rad})\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 2.8 \times 10^4 \text{ rev}$$

(C) ¿Cuál es la aceleración angular del disco compacto sobre el intervalo de tiempo de 4 473 s?

SOLUCIÓN

Categorizar De nuevo modele el disco como un *objeto rígido bajo aceleración angular constante*. En este caso la ecuación 10.6 da el valor de la aceleración angular constante. Otro método es usar la ecuación 10.4 para encontrar la aceleración angular promedio. En este caso no se supone que la aceleración angular sea constante. La respuesta es la misma con ambas ecuaciones, sólo la interpretación del resultado es diferente.

Analizar Use la ecuación 10.6 para encontrar la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{22 \text{ rad/s} - 57 \text{ rad/s}}{4\,473 \text{ s}} = -7.6 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2$$

Finalizar El disco experimenta una disminución muy gradual en su rapidez de rotación, como se espera del largo intervalo de tiempo requerido para que la rapidez angular cambie del valor inicial al valor final. En realidad la aceleración angular del disco no es constante. El problema 90 le permite explorar el comportamiento en tiempo real de la aceleración angular.

10.4 Momento de torsión

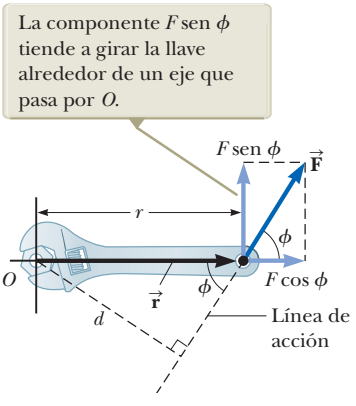


Figura 10.7 La fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ tiene una mayor tendencia a girar alrededor de un eje que pasa por O conforme F aumenta y a medida que aumenta el brazo de momento d.

En nuestro estudio del movimiento traslacional, después de haber investigado la descripción del movimiento se estudió la causa de los cambios en el movimiento: la fuerza. Aquí seguiremos el mismo plan: ¿cuál es la causa de los cambios en el movimiento de rotación?

Imagine que intenta dar vuelta a una puerta y aplica una fuerza de magnitud F perpendicular a la superficie de la puerta cerca de las bisagras y luego en diferentes distancias desde las bisagras. Usted logrará una mayor rapidez de rotación para la puerta al aplicar la fuerza cerca de la perilla que al aplicarla cerca de las bisagras.

Cuando se ejerce una fuerza en un objeto rígido que se pivotea en torno a un eje, el objeto tiende a dar vuelta en torno a dicho eje. La tendencia de una fuerza a dar vuelta a un objeto en torno a cierto eje se mide mediante una cantidad llamada **momento de torsión** $\vec{\tau}$ (letra griega tau). El momento de torsión es un vector, pero aquí sólo se considerará su magnitud y en el capítulo 11 se explorará su naturaleza vectorial.

Considere la llave de la figura 10.7 que se quiere girar en torno a un eje perpendicular a la página y a través del centro del tornillo. La fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ actúa a un ángulo ϕ con la horizontal. Se define la magnitud del momento de torsión asociada con la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ alrededor del eje que pasa por O mediante la expresión

$$\tau \equiv rF \operatorname{sen} \phi = Fd \qquad (10.14)$$

donde r es la distancia entre el eje de rotación y el punto de aplicación de $\vec{\mathbf{F}}$ y d es la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea de acción de $\vec{\mathbf{F}}$. (La *línea de acción* de una fuerza es una línea imaginaria que se extiende hacia ambos extremos del vector que representa la fuerza. La línea discontinua que se extiende desde la cola de $\vec{\mathbf{F}}$ en la figura 10.7 es parte de la línea de acción de $\vec{\mathbf{F}}$.) A partir del triángulo rectángulo de la figura 10.7 que tiene la llave como su hipotenusa se ve que $d = r \operatorname{sen} \phi$. La cantidad d se llama **brazo de momento** (o *brazo de palanca*) de $\vec{\mathbf{F}}$.

En la figura 10.7 la única componente de $\vec{\mathbf{F}}$ que tiende a causar rotación de la llave en torno a un eje a través de O es $F \operatorname{sen} \phi$, la componente perpendicular a la línea dibujada desde el eje de rotación hacia el punto de aplicación de la fuerza. La componente horizontal $F \cos \phi$, dado que su línea de acción pasa a través de O, no tiene tendencia a producir rotación en torno a un eje que pase a través de O. De la definición de momento de torsión, la tendencia a la rotación aumenta a medida que F aumenta y a medida que d aumenta, lo que explica por qué es más fácil dar vuelta a una puerta si se empuja por la perilla en lugar de hacerlo en un punto cerca de las bisagras. También podemos aplicar un empujón casi perpendicular a la puerta, tanto como sea posible, de tal modo que ϕ esté cerca de 90°. Empujar de manera lateral en la perilla de la puerta ($\phi = 0$) no causará que ésta dé vuelta.

Si dos o más fuerzas actúan sobre un objeto rígido, como en la figura 10.8, cada una tiende a producir rotación en torno al eje en O. En este ejemplo, $\vec{\mathbf{F}}_2$ tiende a rotar el objeto en sentido de las manecillas del reloj y $\vec{\mathbf{F}}_1$ tiende a rotar contra las manecillas del reloj. Se usa la convención de que el signo del momento de torsión que resulta de una fuerza es positivo si la tendencia a girar de la fuerza es contra las manecillas del reloj y negativo si la tendencia a girar es en sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, en la figura 10.8 el momento de torsión resultante de $\vec{\mathbf{F}}_1$, que tiene un brazo de momento d_1, es positivo e igual a $+F_1 d_1$; el momento de torsión de F_2 es negativo e igual a $-F_2 d_2$. En consecuencia, el momento de torsión *neto* en torno a un eje a través de O es

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

No se debe confundir el momento de torsión con la fuerza. Las fuerzas pueden causar un cambio en el movimiento traslacional, como se describió mediante la segunda ley de Newton. Las fuerzas también pueden causar un cambio en el movimiento rotacional, pero la efectividad de las fuerzas en causar este cambio depende tanto de las magnitudes de las fuerzas como de los brazos de momento de las fuerzas, en la combinación que se llama *momento de torsión*. El momento de torsión tiene unidades de fuerza por longitud (newton metros, N · m, en unidades del SI) y se debe reportar en estas unidades. No confunda momento de torsión y trabajo, aunque tienen las mismas unidades son conceptos muy diferentes.

Examen rápido 10.4 **(i)** Si usted intenta aflojar un obstinado tornillo de una pieza de madera con un destornillador y fracasa, ¿debe encontrar un destornillador con un mango (a) más largo, o (b) más gordo? **(ii)** Si intenta aflojar un tornillo terco de una pieza de metal con una llave y fracasa, ¿debe encontrar una llave con un mango (a) más largo o (b) más gordo?

Prevención de riesgos ocultos 10.4

El momento de torsión depende de su elección del eje No existe un valor único para el momento de torsión en un objeto. Su valor depende de la elección del eje de rotación.

◀ **Brazo de momento**

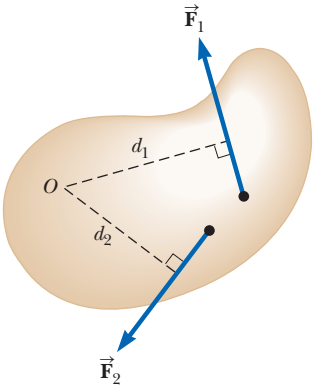


Figura 10.8 La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ tiende a rotar el objeto contra las manecillas del reloj en torno a un eje a través de O, y $\vec{\mathbf{F}}_2$ tiende a rotar en sentido de las manecillas del reloj.

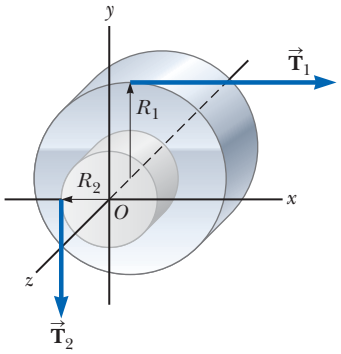


Figura 10.9 (Ejemplo 10.3) Un cilindro sólido pivoteado en torno al eje z a través de O. El brazo de momento de $\vec{\mathbf{T}}_1$ es R_1 y el brazo de momento de $\vec{\mathbf{T}}_2$ es R_2.

Ejemplo 10.3 El momento de torsión neto sobre un cilindro

A un cilindro de una pieza se le da la forma que se muestra en la figura 10.9, con una sección central que sobresale desde el cilindro más grande. El cilindro es libre de dar vuelta en torno al eje central que se muestra en el dibujo. Una cuerda enrollada en torno al tambor, que tiene radio R_1, ejerce una fuerza T_1 hacia la derecha sobre el cilindro.

(A) ¿Cuál es el momento de torsión neto que actúa sobre el cilindro en torno al eje de rotación (es el eje z en la figura 10.9)?

continúa

10.3 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el cilindro en la figura 10.9 es un eje en una máquina. La fuerza $\vec{\mathbf{T}}_1$ podría aplicarse mediante una banda transportadora enrollada en torno al tambor. La fuerza $\vec{\mathbf{T}}_2$ podría aplicarse mediante un freno de fricción a la superficie de la parte central.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución en el que se evalúa el momento de torsión neto con el uso de la ecuación 10.14.

El momento de torsión debido a $\vec{\mathbf{T}}_1$ en torno al eje de rotación es $-R_1T_1$. (El signo es negativo porque el momento de torsión tiende a producir rotación en el sentido de las manecillas del reloj.) El momento de torsión debido a $\vec{\mathbf{T}}_2$ es $+R_2T_2$. (El signo es positivo porque el momento de torsión tiende a producir rotación contra las manecillas del reloj del cilindro.)

Evalúe el momento de torsión neto en torno al eje de rotación: $\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = R_2T_2 - R_1T_1$

Como una verificación rápida, observe que si las dos fuerzas son de igual magnitud el momento de torsión neto es negativo porque $R_1 > R_2$. Si parte del reposo con ambas fuerzas de igual magnitud actuando sobre él, el cilindro daría vuelta en sentido de las manecillas del reloj porque $\vec{\mathbf{T}}_1$ sería más efectivo para girarlo de lo que sería $\vec{\mathbf{T}}_2$.

(B) Suponga $T_1 = 5.0$ N, $R_1 = 1.0$ m, $T_2 = 15.0$ N y $R_2 = 0.50$ m. ¿Cuál es el momento de torsión neto en torno al eje de rotación y de qué forma da vuelta el cilindro si parte desde el reposo?

SOLUCIÓN

Sustituya los valores conocidos: $\sum \tau = (0.50\text{ m})(15\text{ N}) - (1.0\text{ m})(5.0\text{ N}) = 2.5\text{ N}\cdot\text{m}$

Ya que este momento de torsión neto es positivo, el cilindro comienza a dar vuelta en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

10.5 Análisis de modelo: objeto rígido bajo un momento de torsión neto

En el capítulo 5 aprendió que una fuerza neta sobre un objeto ocasiona una aceleración del objeto y que la aceleración es proporcional a la fuerza neta. Estos hechos son la base del modelo de partícula bajo una fuerza neta cuya representación matemática es la segunda ley de Newton. En esta sección se muestra el análogo rotacional de la segunda ley de Newton: la aceleración angular de un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo es proporcional al momento de torsión neto que actúa en torno a dicho eje. Sin embargo, antes de explicar el caso más complejo de rotación de un objeto rígido, es instructivo discutir primero el caso de una partícula que se mueve en una trayectoria circular en torno de algún punto fijo bajo la influencia de una fuerza externa.

La fuerza tangencial sobre la partícula resulta en un momento de torsión sobre la partícula alrededor de un eje que atraviesa el centro del círculo.

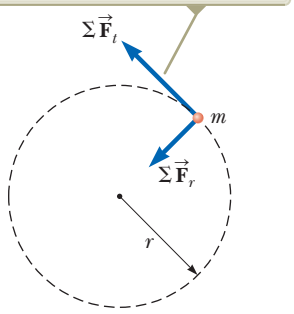


Figura 10.10 Una partícula que da vueltas en un círculo bajo la influencia de una fuerza tangencial neta $\Sigma \vec{\mathbf{F}}_t$. También debe estar presente una fuerza neta $\Sigma \vec{\mathbf{F}}_r$ en la dirección radial para mantener el movimiento circular.

Considere una partícula de masa m que gira en un círculo de radio r bajo la influencia de una fuerza neta tangencial $\Sigma \vec{\mathbf{F}}_t$ y una fuerza neta radial $\Sigma \vec{\mathbf{F}}_r$, como se muestra en la figura 10.10. La fuerza neta radial hace que la partícula se mueva en la trayectoria circular con una aceleración centrípeta. La fuerza tangencial proporciona una aceleración tangencial $\vec{\mathbf{a}}_t$, y

$$\sum F_t = ma_t$$

La magnitud del momento de torsión neto debida $\Sigma \vec{\mathbf{F}}_t$ en la partícula en torno a un eje perpendicular a la página que pasa a través del centro del círculo es

$$\sum \tau = \sum F_t r = (ma_t)r$$

Ya que la aceleración tangencial se relaciona con la aceleración angular a través de la relación $a_t = r\alpha$ (ecuación 10.11), el momento de torsión neto se expresa como

$$\sum \tau = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha \qquad (10.15)$$

Por el momento denotaremos a la cantidad mr^2 con el símbolo I. Diremos más acerca de esta cantidad un poco más adelante. Usando esta notación la ecuación 10.15 se puede escribir como

$$\sum \tau = I\alpha \qquad (10.16)$$

Es decir, el momento de torsión neto que actúa sobre la partícula es proporcional a su aceleración angular. Observe que $\Sigma \tau = I\alpha$ tiene la misma forma matemática que la segunda ley de movimiento de Newton, $\Sigma F = ma$.

Ahora la explicación se extenderá a un objeto rígido de forma arbitraria que gira en torno a un eje fijo que pasa por un punto O, como en la figura 10.11. El objeto puede considerarse como un conjunto de partículas de masa m_i de tamaño infinitesimal. Si sobre el objeto se impone un sistema coordenado cartesiano, cada elemento de masa da vueltas en un círculo en torno al origen y cada uno tiene una aceleración tangencial a_i producida por una fuerza tangencial externa F_i. Para cualquier partícula dada, se sabe de la segunda ley de Newton que

$$F_i = m_i a_i$$

El momento de torsión externo $\vec{\boldsymbol{\tau}}_i$ asociado con la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_i$ actúa en torno al origen y su magnitud está dada por

$$\tau_i = r_i F_i = r_i m_i a_i$$

Ya que $a_i = r_i\alpha$, la expresión para τ_i se convierte en

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

Aunque cada partícula en el objeto rígido debe tener una diferente aceleración traslacional a_i, todas ellas tienen la *misma* aceleración angular α. Con esto en mente se pueden sumar todos los momentos de torsión de la expresión anterior para obtener el momento de torsión neto en torno a un eje a través de O debido a las fuerzas externas:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \sum_i \tau_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha \qquad (10.17)$$

donde α se puede sacar del operador suma porque es común a todas las partículas. Llamando la cantidad entre paréntesis I, la expresión para $\Sigma \tau_{\text{ext}}$ se convierte en

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha \qquad (10.18)$$

Esta ecuación para un objeto rígido es la misma que para una partícula moviéndose en una trayectoria circular (ecuación 10.16). El momento de torsión neto en torno al eje de rotación es proporcional a la aceleración angular del objeto, con un factor de proporcionalidad I, una cantidad que depende del eje de rotación y del tamaño y la forma del objeto. La ecuación 10.18 es la representación matemática del análisis de modelo de un **objeto rígido bajo un momento de torsión neto**, el análogo rotacional a la partícula bajo una fuerza neta.

Ahora trataremos a la cantidad I, que se define como sigue:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad (10.19)$$

Esta cantidad se llama **momento de inercia** del objeto y depende de las masas de las partículas que componen el objeto y de sus distancias desde el eje de rotación. Observe que la ecuación 10.19 se reduce a $I = mr^2$ para una sola partícula, consistente con nuestro uso de la notación I que hemos usado para ir de la ecuación 10.15 a la 10.16. Observe que el momento de inercia tiene unidades de kg · m^2 en unidades SI.

La ecuación 10.18 tiene la misma forma que la segunda ley de Newton para un sistema de partículas, expresada en la ecuación 9.39:

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = M \vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}}$$

En consecuencia, el momento de inercia I debe jugar el mismo papel en el movimiento de rotación que el que juega la masa en el movimiento de traslación: el momento de inercia es la resistencia a los cambios en el movimiento de rotación. Esta resistencia depende no sólo de la masa del objeto, sino también en cómo se distribuye la masa alrededor del eje de rotación. La tabla 10.2 en la página 304 da los momentos de inercia[2] para varios objetos sobre ejes específicos. Los momentos

La partícula de masa m_i del objeto rígido experimenta un momento de torsión de la misma manera que la partícula de la figura 10.10.

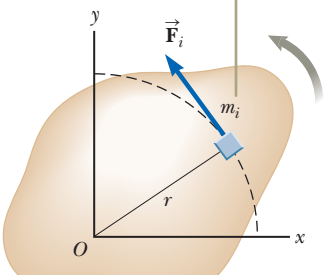


Figura 10.11 Un objeto rígido girando en torno a un eje a través de O. Cada elemento de masa m_i da vueltas en torno al eje con la misma aceleración angular α.

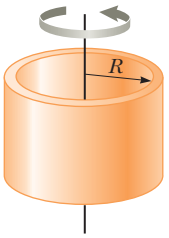
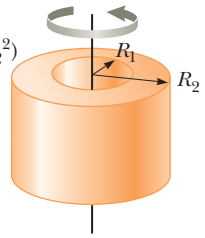
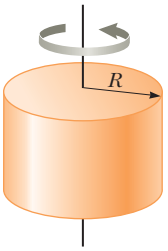
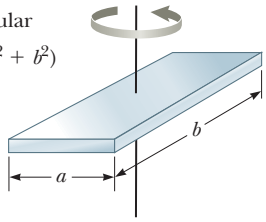
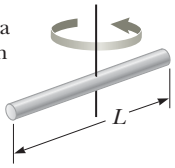
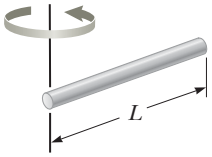
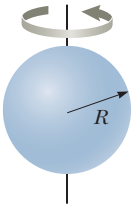
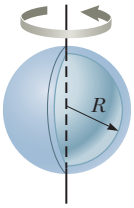
◀ **El momento de torsión en un objeto rígido es proporcional a la aceleración angular**

Prevención de riesgos ocultos 10.5

No hay un solo momento de inercia Existe una gran diferencia entre masa y momento de inercia. La masa es una propiedad inherente de un objeto. El momento de inercia de un objeto depende de su elección del eje de rotación. Por lo tanto, no hay un solo valor del momento de inercia para un objeto. Existe un valor *mínimo* del momento de inercia, que es el calculado en torno a un eje que pasa por el centro de masa del objeto.

[2]Los ingenieros civiles usan el momento de inercia para caracterizar las propiedades elásticas (rigidez) de estructuras tales como las vigas de carga. En consecuencia, con frecuencia es útil incluso en un contexto no rotacional.

Tabla 10.2 **Momentos de inercia de objetos rígidos homogéneos con diferentes geometrías**

Aro o cascarón cilíndrico delgado $I_{CM} = MR^2$	Cilindro hueco $I_{CM} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$	Cilindro sólido o disco $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$
		
Placa rectangular $I_{CM} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$	Barra larga delgada con eje de rotación a través del centro $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$	Barra larga delgada con eje de rotación a través de un extremo $I = \frac{1}{3}ML^2$
		
Esfera sólida $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$	Cascarón esférico delgado $I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$	
		

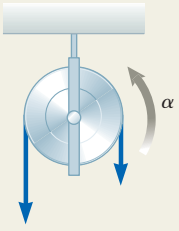
de inercia de objetos rígidos con geometría simple (alta simetría) son relativamente fáciles de calcular siempre que el eje de rotación coincide con un eje de simetría, como se muestra en la siguiente sección.

Examen rápido 10.5 Enciende su taladro eléctrico y descubre que el intervalo de tiempo para que la broca giratoria llegue al reposo debido al momento de torsión de fricción en el taladro es Δt. Sustituye la broca con una más grande que resulta en la duplicación del momento de inercia de todo el mecanismo giratorio del taladro. Cuando esta broca más grande da vueltas a la misma rapidez angular que la primera y el taladro se apaga, el momento de torsión de fricción permanece igual que para la situación previa. ¿Cuál es el intervalo de tiempo para que esta segunda broca llegue al reposo? **(a)** $4\Delta t$, **(b)** $2\Delta t$, **(c)** Δt, **(d)** $0.5\Delta t$, **(e)** $0.25\Delta t$, **(f)** imposible de determinar.

Análisis de modelo — Objeto rígido bajo momento de torsión neto

Imagine que está analizando el movimiento de un objeto que es libre de girar con respecto a un eje fijo. La causa de los cambios en el movimiento de rotación de este objeto es el momento de torsión aplicado al objeto y, en paralelo con la segunda ley de Newton para el movimiento de traslación, el momento de torsión es igual al producto del momento de inercia del objeto y de la aceleración angular:

$$\sum \tau_{ext} = I\alpha \qquad (10.18)$$



El momento de torsión, el momento de inercia y la aceleración angular se deben evaluar alrededor del mismo eje de rotación.

Análisis de modelo **Objeto rígido bajo momento de torsión neto *(continúa)***

Ejemplos:

- una cadena alrededor de la rueda dentada de la bicicleta hace que gire la rueda trasera de la bicicleta
- un momento de dipolo eléctrico en un campo eléctrico gira debido a la fuerza eléctrica del campo (capítulo 23)
- un momento de dipolo magnético en un campo magnético gira debido a la fuerza magnética del campo (capítulo 30)
- la armadura de un motor gira debido al momento de torsión ejercido por un campo magnético circundante (capítulo 31)

Ejemplo 10.4 Barra giratoria AM

Una barra uniforme de longitud L y masa M unida en un extremo a un pivote sin fricción es libre de dar vueltas en torno al pivote en el plano vertical, como en la figura 10.12. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal. ¿Cuáles son la aceleración angular inicial de la barra y la aceleración traslacional inicial de su extremo derecho?

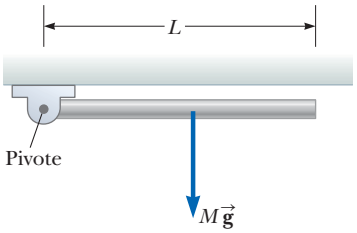


Figura 10.17 (Ejemplo 10.4) Una barra es libre de dar vuelta en torno a un pivote en el extremo izquierdo. La fuerza gravitacional sobre la barra actúa en su centro de masa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en lo que le sucede a la barra de la figura 10.12 cuando se libera. Da vueltas en sentido de las manecillas del reloj en torno al pivote en el extremo izquierdo.

Categorizar La barra se clasifica como un *objeto rígido bajo un momento de torsión neto*. El momento de torsión se debe sólo a la fuerza gravitacional sobre la barra si se elige que el eje de rotación pase a través del pivote en la figura 10.12. *No se puede* clasificar la barra como un objeto rígido bajo aceleración angular constante porque el momento de torsión ejercido sobre la barra y, por lo tanto, la aceleración angular de la barra varían con su posición angular.

Analizar La única fuerza que contribuye al momento de torsión en torno a un eje a través del pivote es la fuerza gravitacional $M\vec{\mathbf{g}}$ que se ejerce sobre la barra. (La fuerza que ejerce el pivote sobre la barra tiene momento de torsión cero en torno al pivote porque su brazo de momento es cero.) Para calcular el momento de torsión sobre la barra se supone que la fuerza gravitacional actúa en el centro de masa de la barra, como se muestra en la figura 10.12.

Escriba una expresión para la magnitud del momento de torsión externo neto debido a la fuerza gravitacional en torno a un eje a través del pivote:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = Mg\left(\frac{L}{2}\right)$$

Aplique la ecuación 10.18 para obtener la aceleración angular de la barra usando el momento de inercia de la barra de la tabla 10.2:

$$(1)\quad \alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{Mg(L/2)}{\frac{1}{3}ML^2} = \boxed{\frac{3g}{2L}}$$

Use la ecuación 10.11 con $r = L$ para encontrar la aceleración traslacional inicial del extremo derecho de la barra:

$$a_t = L\alpha = \boxed{\tfrac{3}{2}g}$$

Finalizar Estos valores son los valores *iniciales* de las aceleraciones angular y traslacional. Una vez que la barra comienza a dar vuelta la fuerza gravitacional ya no es perpendicular a la barra y los valores de las dos aceleraciones disminuyen y cambian a cero en el momento que la barra pasa a través de la orientación vertical.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si se coloca una moneda en el extremo de la barra y después se libera la barra? ¿La moneda permanecerá en contacto con la barra?

Respuesta El resultado para la aceleración inicial de un punto sobre el extremo de la barra muestra que $a_t > g$. Una moneda sin apoyo cae con aceleración g. De este modo, si se coloca una moneda en el extremo de la barra y luego se libera la barra, ¡el extremo de la barra cae más rápido que la moneda! La moneda no permanece en contacto con la barra. (¡Intente esto con una moneda y una regleta!)

La cuestión ahora es encontrar la ubicación sobre la barra a la que se puede colocar una moneda que *permanecerá* en contacto en cuanto ambas comiencen a caer. Para encontrar la aceleración traslacional de un punto arbitrario sobre la barra a una distancia $r < L$ desde el punto del pivote, se combina la ecuación (1) con la ecuación 10.11:

$$a_t = r\alpha = \frac{3g}{2L}r$$

continúa

10.4 continuación

Para que la moneda permanezca en contacto con la barra, el caso límite es que la aceleración traslacional sea igual a la que se espera de la gravedad:

$$a_t = g = \frac{3g}{2L}\, r$$

$$r = \tfrac{2}{3}L$$

Debido a eso, una moneda colocada más cerca del pivote a menos de dos tercios de la longitud de la barra permanece en contacto con la barra que cae, pero una moneda más lejos de este punto pierde contacto.

Ejemplo conceptual 10.5 Chimeneas que caen y bloques tambaleantes

Cuando cae una chimenea alta con frecuencia se rompe en alguna parte a lo largo de su longitud antes de golpear el suelo, como se muestra en la figura 10.13. ¿Por qué?



Kevin Spreekmeester/AGE fotostock

Figura 10.13 (Ejemplo conceptual 10.5) Una chimenea que cae se rompe en algún punto a lo largo de su longitud.

SOLUCIÓN

Cuando la chimenea da vuelta en torno a su base cada porción más alta de la chimenea cae con una aceleración tangencial más grande que la porción debajo de ella, de acuerdo con la ecuación 10.11. La aceleración angular aumenta a medida que la chimenea se inclina más. Al final, las porciones más altas de la chimenea experimentan una aceleración mayor que la aceleración que podría resultar sólo de la gravedad; esta situación es similar a la que se describió en el ejemplo 10.4. Sólo puede ocurrir si dichas porciones se jalan hacia abajo por otra fuerza además de la fuerza gravitacional. La fuerza que lo ocasiona es la fuerza de corte de las porciones más bajas de la chimenea. Al final, la fuerza de corte que proporciona esta aceleración es mayor a lo que puede soportar la chimenea, y la chimenea se rompe. Lo mismo sucede con una torre alta de bloques de juguete de los niños. Pida prestados algunos bloques a un niño y construya tal torre. Empújela y observe cómo se separa en algún punto antes de golpear el suelo.

Ejemplo 10.6 Aceleración angular de una rueda AM

Una rueda de radio R, masa M y momento de inercia I se monta sobre un eje horizontal sin fricción, como en la figura 10.14. Una cuerda ligera enrollada alrededor de la rueda sostiene un objeto de masa m. Cuando la rueda se libera el objeto acelera hacia abajo, la cuerda se desenrolla en la rueda y ésta gira con una aceleración angular. Encuentre una expresión para la aceleración angular de la rueda, la aceleración traslacional del objeto y la tensión en la cuerda.

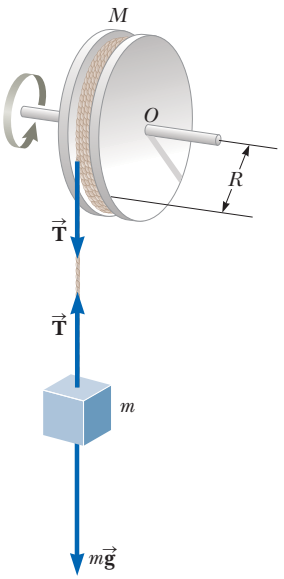


Figura 10.14 (Ejemplo 10.6) Un objeto cuelga de una cuerda enrollada alrededor de una rueda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el objeto es una cubeta en un antiguo pozo de los deseos. Está amarrada a una cuerda que pasa alrededor de un cilindro equipado con una manivela para elevar la cubeta. Después de elevar la cubeta el sistema se libera y la cubeta acelera hacia abajo mientras la cuerda se desenrolla del cilindro.

Categorizar Aquí se aplican dos análisis de modelos. El objeto se modela como una *partícula bajo una fuerza neta*. La rueda se modela como un *objeto rígido bajo un momento de torsión neto*.

Analizar La magnitud del momento de torsión que actúa sobre la rueda en torno a su eje de rotación es $\tau = TR$, donde T es la

10.6 continuación

fuerza que ejerce la cuerda sobre el borde de la rueda. (La fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre la rueda y la fuerza normal que ejerce el eje sobre la rueda, ambas, pasan a través del eje de rotación y no producen momento de torsión.)

Del objeto rígido bajo un modelo de momento de torsión neto escriba la ecuación 10.18:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$$

Resuelva para α y sustituya el momento de torsión neto:

$$(1)\quad \alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{TR}{I}$$

Del modelo de partícula bajo una fuerza neta aplique la segunda ley de Newton al movimiento del objeto tomando la dirección hacia abajo como positiva:

$$\sum F_y = mg - T = ma$$

Resuelva para la aceleración a:

$$(2)\quad a = \frac{mg - T}{m}$$

Las ecuaciones (1) y (2) tienen tres incógnitas: α, a y T. Ya que el objeto y la rueda están conectados mediante una cuerda que no desliza, la aceleración traslacional del objeto suspendido es igual a la aceleración tangencial de un punto sobre el borde de la rueda. Debido a eso la aceleración angular α de la rueda y la aceleración traslacional del objeto se relacionan mediante $a = R\alpha$.

Use este hecho junto con las ecuaciones (1) y (2):

$$(3)\quad a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m}$$

Resuelva para la tensión T:

$$(4)\quad T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)}$$

Sustituya la ecuación (4) en la ecuación (2) y resuelva para a:

$$(5)\quad a = \frac{g}{1 + (I/mR^2)}$$

Use $a = R\alpha$ y la ecuación (5) para resolver para α:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + (I/mR)}$$

Finalizar Este problema se concluye al imaginar el comportamiento del sistema en algunos límites extremos.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la rueda se volviese tan pesada que I se volviera muy grande? ¿Qué sucede con la aceleración a del objeto y la tensión T?

Respuesta Si la rueda se vuelve infinitamente pesada, se puede imaginar que el objeto de masa m simplemente colgará de la cuerda sin causar el giro de la rueda.

Esto se puede demostrar matemáticamente al tomar el límite $I \to \infty$. Entonces la ecuación (5) se convierte en

$$a = \frac{g}{1 + (I/mR^2)} \to 0$$

lo que concuerda con la conclusión conceptual de que el objeto colgará en reposo. Además, la ecuación (4) se convierte en

$$T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)} \to mg$$

que es consistente porque el objeto simplemente cuelga en reposo en equilibrio entre la fuerza gravitacional y la tensión en la cuerda.

10.6 Cálculo de momentos de inercia

El momento de inercia de un sistema de partículas discretas se puede calcular en forma directa con la ecuación 10.19. Se puede evaluar el momento de inercia de un objeto rígido continuo imaginándonos al objeto dividido en muchos elementos pequeños, cada uno de los cuales tiene masa Δm_i. Se usa la definición $I = \Sigma_i\, r_i^2\, \Delta m_i$

y se toma el límite de esta suma a medida que $\Delta m_i \to 0$. En este límite la suma se convierte en una integral sobre el volumen del objeto:

Momento de inercia de un objeto rígido ▶

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \, \Delta m_i = \int r^2 \, dm \tag{10.20}$$

Por lo común es más fácil calcular momentos de inercia en términos del volumen de los elementos en lugar de su masa, y es fácil hacer dicho cambio al usar la ecuación 1.1, $\rho \equiv m/V$, donde ρ es la densidad del objeto y V su volumen. De esta ecuación, la masa de un pequeño elemento es $dm = \rho \, dV$. Al sustituir este resultado en la ecuación 10.20 se obtiene

$$I = \int \rho r^2 \, dV \tag{10.21}$$

Si el objeto es homogéneo, ρ es constante y la integral se puede evaluar para una geometría conocida. Si ρ no es constante se debe conocer su variación con la posición para completar la integración.

La densidad dada por $\rho = m/V$ a veces se conoce como *densidad de masa volumétrica* porque representa masa por unidad de volumen. Con frecuencia se usan otras formas de expresar la densidad. Por ejemplo, cuando se trata con una hoja de grosor uniforme t, se puede definir una *densidad de masa superficial* $\sigma = \rho t$, que representa *masa por unidad de área*. Por último, cuando la masa se distribuye a lo largo de una barra de área de sección transversal uniforme A, a veces se usa la *densidad de masa lineal* $\lambda = M/L = \rho A$, que es la *masa por unidad de longitud*.

Ejemplo 10.7 Barra rígida uniforme

Calcule el momento de inercia de una barra rígida uniforme de longitud L y masa M (figura 10.15) en torno a un eje perpendicular a la barra (el eje y') y que pasa a través de su centro de masa.

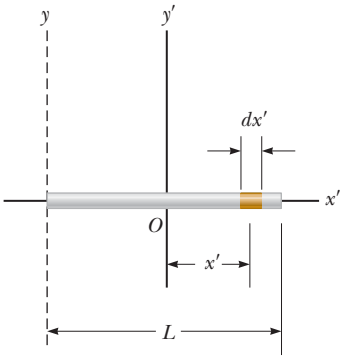


Figura 10.15 (Ejemplo 10.7) Una barra rígida uniforme de longitud L. El momento de inercia en torno al eje y' es menor que en el eje y. Este último eje se examina en el ejemplo 10.9.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que con sus dedos hace girar la barra de la figura 10.15 en torno a su punto medio. Si tiene una regleta a la mano, úsela para simular el giro de una barra delgada y sienta la resistencia que ofrece para ser girada.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución que usa la definición de momento de inercia en la ecuación 10.20. Como con cualquier problema de integración, la solución supone reducir el integrando a una sola variable.

El elemento de longitud sombreado dx' en la figura 10.15 tiene una masa dm igual a la masa por unidad de longitud λ multiplicada por dx'.

Exprese dm en términos de dx':

$$dm = \lambda \, dx' = \frac{M}{L} \, dx'$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 10.20 con $r^2 = (x')^2$

$$I_{y'} = \int r^2 \, dm = \int_{-L/2}^{L/2} (x')^2 \frac{M}{L} \, dx' = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} (x')^2 \, dx'$$

$$= \frac{M}{L} \left[\frac{(x')^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \boxed{\tfrac{1}{12} ML^2}$$

Compruebe este resultado en la tabla 10.2.

Ejemplo 10.8 Cilindro sólido uniforme

Un cilindro sólido uniforme tiene radio R, masa M y longitud L. Calcule su momento de inercia en torno a su eje central (el eje z en la figura 10.16).

10.8 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Para simular esta situación imagine que hace girar una lata de jugo congelado en torno a su eje central. No agite una lata no congelada de sopa de verduras, no es un objeto rígido. El líquido se puede mover en relación con la lata de metal.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución, con el uso de la definición de momento de inercia. Como con el ejemplo 10.7, se debe reducir el integrando a una sola variable.

Es conveniente dividir el cilindro en muchos cascarones cilíndricos, cada uno con radio r, grosor dr y longitud L, como se muestra en la figura 10.16. La densidad del cilindro es ρ. El volumen dV de cada cascarón es su área de sección transversal multiplicada por su longitud: $dV = L\,dA = L(2\pi r)\,dr$.

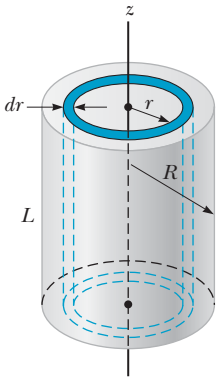


Figura 10.16 (Ejemplo 10.8) Cálculo de I en torno al eje z para un cilindro sólido uniforme.

Exprese dm en términos de dr: $$dm = \rho\,dV = \rho L(2\pi r)\,dr$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 10.20: $$I_z = \int r^2\,dm = \int r^2[\rho L(2\pi r)\,dr] = 2\pi\rho L\int_0^R r^3\,dr = \tfrac{1}{2}\pi\rho L R^4$$

Use el volumen total $\pi R^2 L$ del cilindro para expresar su densidad: $$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

Sustituya este valor en la expresión para I_z: $$I_z = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{M}{\pi R^2 L}\right)LR^4 = \tfrac{1}{2}MR^2$$

Compruebe este resultado en la tabla 10.2.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Qué pasa si la longitud del cilindro en la figura 10.16 aumenta a $2L$, mientras la masa M y el radio R se mantienen fijos? ¿Cómo cambia el momento de inercia del cilindro?

Respuesta Observe que el resultado para el momento de inercia de un cilindro no depende de L, la longitud del cilindro. Se aplica igualmente bien a un largo cilindro y a un disco plano que tengan los mismos masa M y radio R. Debido a eso el momento de inercia del cilindro no sería afectado por como está distribuida la masa a lo largo de su longitud.

El cálculo de momentos de inercia de un objeto en torno a un eje arbitrario puede ser complicado, incluso para un objeto considerablemente simétrico. Por fortuna, el uso de un importante teorema, llamado **teorema de ejes paralelos**, con frecuencia simplifica el cálculo.

Para generar el teorema de ejes paralelos suponga que un objeto da vueltas en torno al eje z, como se muestra en la figura 10.17a en la página 310. El momento de inercia no depende de cómo se distribuye la masa a lo largo del eje z; como se encontró en el ejemplo 10.8, el momento de inercia de un cilindro es independiente de su longitud. Imagine colapsar el objeto tridimensional en un objeto plano, como en la figura 10.17b. En este proceso imaginario toda la masa se mueve paralela al eje z hasta que se encuentra en el plano xy. Las coordenadas del centro de masa del objeto ahora son x_{CM}, y_{CM} y $z_{CM} = 0$. Sea el elemento de masa dm que tiene coordenadas $(x, y, 0)$ como se muestra en la figura 10.17c visto hacia abajo desde el eje z. Ya que este elemento está a una distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ del eje z, el momento de inercia en torno al eje z es

$$I = \int r^2\,dm = \int (x^2 + y^2)\,dm$$

Se pueden relacionar las coordenadas x, y del elemento de masa dm con las coordenadas de este mismo elemento ubicadas en un sistema coordenado que tenga el centro de masa del objeto como su origen. Si las coordenadas del centro de masa son x_{CM}, y_{CM} y $z_{CM} = 0$ en el sistema coordenado original con centro en O, se ve en la figura 10.17c que las relaciones entre las coordenadas no primas y primas son $x = x' + x_{CM}$, $y = y' + y_{CM}$, y $z = z' = 0$. Por lo tanto,

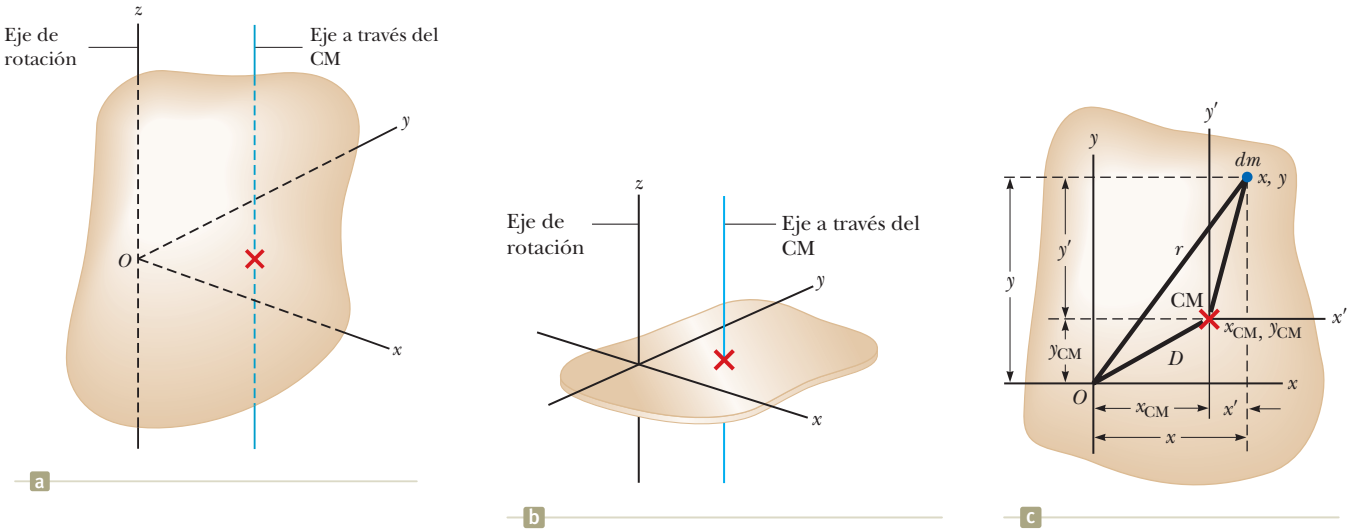


Figura 10.17 (a) Un objeto rígido de forma arbitraria. El origen del sistema de coordenadas no está en el centro de la masa del objeto. Imagine que el objeto gira alrededor del eje z. (b) Todos los elementos de masa del objeto están colapsados de manera paralela al eje z para formar un objeto plano. (c) Un elemento arbitrario de masa dm indicado en azul en esta vista hacia abajo desde el eje z. Se puede usar el teorema de los ejes paralelos con la geometría que se muestra para determinar el momento de inercia del objeto original en torno del eje z.

$$I = \int [(x' + x_{CM})^2 + (y' + y_{CM})^2] \, dm$$
$$= \int [(x')^2 + (y')^2] \, dm + 2x_{CM} \int x' \, dm + 2y_{CM} \int y' dm + (x_{CM}{}^2 + y_{CM}{}^2) \int dm$$

La primera integral es, por definición, el momento de inercia I_{CM} en torno a un eje que es paralelo al eje z y pasa a través del centro de masa. Las segundas dos integrales son cero porque, por definición del centro de masa, $\int x' \, dm = \int y' \, dm = 0$. La última integral es simplemente MD^2, porque $\int dm = M$ y $D^2 = x_{CM}{}^2 + y_{CM}{}^2$. En consecuencia, se concluye que

Teorema de ejes paralelos ▶

$$I = I_{CM} + MD^2 \tag{10.22}$$

Ejemplo 10.9 Aplicación del teorema de ejes paralelos

Considere una vez más la barra rígida uniforme de masa M y longitud L que se muestra en la figura 10.15. Encuentre el momento de inercia de la barra en torno a un eje perpendicular a la barra a través de un extremo (el eje y en la figura 10.15).

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que hace girar la barra en torno al punto final en lugar de hacerlo en el punto medio. Si tiene una regleta a la mano, inténtelo y note el grado de dificultad al girarlo alrededor del extremo en comparación con girarlo alrededor del centro.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución que supone el teorema de ejes paralelos.

Por intuición, se espera que el momento de inercia sea mayor que el resultado $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$ del ejemplo 10.7 porque hay masa hasta una distancia L del eje de rotación, mientras que la distancia más lejana en el ejemplo 10.7 fue sólo $L/2$. La distancia entre el eje del centro de masa y el eje y es $D = L/2$.

10.9 continuación

Use el teorema de ejes paralelos:

$$I = I_{CM} + MD^2 = \tfrac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{3}ML^2$$

Compruebe este resultado en la tabla 10.2.

10.7 Energía cinética rotacional

Después de investigar el papel de las fuerzas en nuestro estudio de movimiento traslacional, volvimos nuestra atención a los métodos que implican energía. Hacemos lo mismo en nuestro estudio actual del movimiento de rotación.

En el capítulo 7 se definió la energía cinética de un objeto como la energía asociada con su movimiento a través del espacio. Un objeto rotatorio en torno a un eje fijo permanece estacionario en el espacio, así que no hay energía cinética asociada con el movimiento traslacional. No obstante, las partículas individuales que conforman el objeto en rotación se mueven a través del espacio; siguen trayectorias circulares. En consecuencia, con el movimiento rotacional hay energía cinética asociada.

Considere un objeto como un sistema de partículas y suponga que da vueltas en torno a un eje fijo z con una rapidez angular ω. La figura 10.18 muestra al objeto en rotación e identifica una partícula sobre el objeto ubicada a una distancia r_i del eje de rotación. Si la masa de la i-ésima partícula es m_i y su rapidez tangencial es v_i, su energía cinética es

$$K_i = \tfrac{1}{2}m_i v_i^2$$

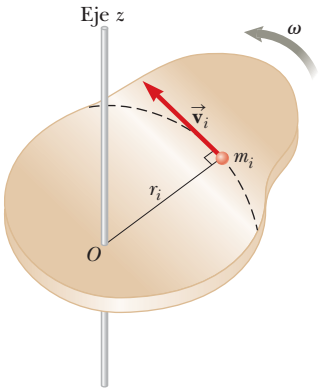


Figura 10.18 Un objeto rígido gira alrededor del eje z con velocidad angular w. La energía cinética de las partículas de masa m_i es $\frac{1}{2}m_i v_i^2$. La energía cinética total del objeto se llama energía cinética rotacional.

Para continuar, recuerde que aunque cada partícula en el objeto rígido tiene la misma rapidez angular ω, las magnitudes de velocidad tangenciales individuales dependen de la distancia r_i desde el eje de rotación de acuerdo con la ecuación 10.10. La energía cinética *total* del objeto rígido en rotación es la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales**:**

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

Esta expresión se puede escribir en la forma

$$K_R = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 \qquad \textbf{(10.23)}$$

donde ω^2 se factorizó de la suma porque es común a toda partícula. Reconocemos la cantidad entre paréntesis como el momento de inercia del objeto que se introdujo en la sección 10.5.

Por lo tanto, la ecuación 10.23 se puede escribir

$$K_R = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad \textbf{(10.24)}$$

◀ **Energía cinética rotacional**

Aunque comúnmente la cantidad $\frac{1}{2}I\omega^2$ se refiere como **energía cinética rotacional**, no es una forma nueva de energía. Es energía cinética ordinaria porque se deduce de una suma de energías cinéticas individuales de las partículas contenidas en el objeto rígido. La forma matemática de la energía cinética dada por la ecuación 10.24 es conveniente cuando se trata con movimiento rotacional, siempre que se sepa cómo calcular I.

Examen rápido 10.6 Una sección de tubería hueca y un cilindro sólido tienen el mismo radio, masa y longitud. Ambos giran sobre sus ejes largos con la misma rapidez angular. ¿Qué objeto tiene la mayor energía cinética rotacional? **(a)** El tubo hueco. **(b)** El cilindro sólido. **(c)** Tienen la misma energía cinética rotacional. **(d)** Es imposible de determinar.

Ejemplo 10.10 Un bastón inusual

Cuatro esferas pequeñas se amarran a los extremos de dos barras con masa despreciable que yacen en el plano *xy* para formar un inusual bastón (figura 10.8). Se supondrá que los radios de las esferas son pequeños en comparación con las dimensiones de las barras.

(a) Si el sistema da vueltas en torno al eje *y* (figura 10.19a) con una rapidez angular ω, encuentre el momento de inercia y la energía cinética rotacional del sistema en torno a este eje.

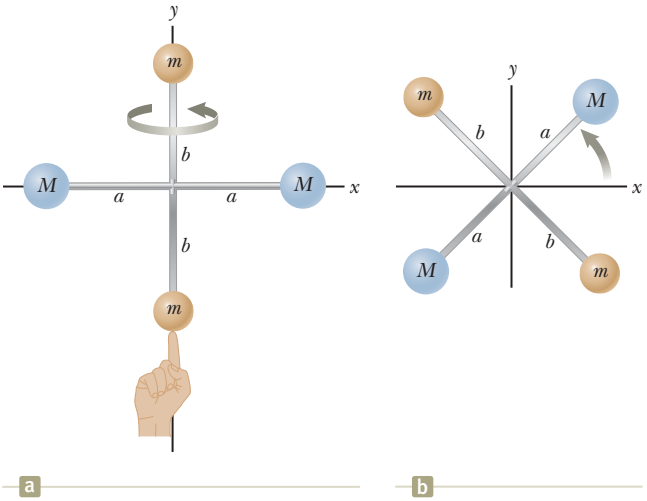


Figura 10.19 (Ejemplo 10.10) Cuatro esferas forman un bastón inusual. (a) El bastón rota en torno al eje *y*. (b) El bastón rota en torno al eje *z*.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 10.19 es una representación gráfica que ayuda a formar ideas del sistema de esferas y cómo gira. Modele a las esferas como partículas.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución porque es una aplicación directa de las definiciones analizadas en esta sección.

Aplique la ecuación 10.19 al sistema:

$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

Evalúe la energía cinética rotacional con la ecuación 10.24:

$$K_R = \tfrac{1}{2} I_y \omega^2 = \tfrac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2 = Ma^2\omega^2$$

Que las dos esferas de masa *m* no entren en este resultado tiene sentido, porque no tienen movimiento en torno al eje de rotación; por tanto, no tienen energía cinética rotacional. Por lógica similitud, se espera que el momento de inercia en torno al eje *x* sea $I_x = 2mb^2$ con una energía cinética rotacional en torno a dicho eje de $K_R = mb^2\omega^2$.

(b) Suponga que el sistema da vueltas en el plano *xy* en torno a un eje (el eje *z*) a través del *centro del bastón* (figura 10.19b). Calcule el momento de inercia y la energía cinética rotacional en torno a este eje.

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 10.19 a este nuevo eje de rotación:

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

Evalúe la energía cinética rotacional con la ecuación 10.24:

$$K_R = \tfrac{1}{2} I_z \omega^2 = \tfrac{1}{2}(2Ma^2 + 2mb^2)\omega^2 = (Ma^2 + mb^2)\omega^2$$

Al comparar los resultados de los incisos (A) y (B), se concluye que el momento de inercia y, por lo tanto, la energía cinética rotacional asociada con una rapidez angular dada depende del eje de rotación. En el inciso (B) se espera que el resultado incluya las cuatro esferas y distancias porque las cuatro esferas están girando en el plano *xy*. Apoyados en el teorema trabajo-energía cinética, el que la energía cinética rotacional del inciso (A) sea menor que la del inciso (B) indica que requeriría menos trabajo poner el sistema en rotación en torno al eje *y* que en torno al eje *z*.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la masa *M* es mucho mayor que *m*? ¿Cómo se comparan las respuestas a los incisos (A) y (B)?

Respuesta Si $M >> m$, entonces *m* se puede despreciar y el momento de inercia y la energía cinética rotacional en el inciso (b) se vuelven

$$I_z = 2Ma^2 \quad \text{Y} \quad K_R = Ma^2\omega^2$$

que son iguales a las respuestas en el inciso (A). Si las masas *m* de las dos esferas anaranjadas en la figura 10.19 son despreciables, dichas esferas se pueden retirar de la figura y las rotaciones en torno a los ejes *y* y *z* son equivalentes.

10.8 Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional

En la sección 10.7 se explicó la energía cinética rotacional de un objeto rígido. Ahora se extiende la explicación inicial de dicha energía y se verá cómo un método energético es útil para resolver problemas rotacionales. Comience por considerar la relación entre el momento de torsión que actúa en un objeto rígido y su movimiento rotacio-

nal resultante a fin de generar expresiones para la potencia y un análogo rotacional del teorema trabajo-energía cinética. Observe el objeto rígido pivoteado en O en la figura 10.20. Suponga que una sola fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica en P, donde $\vec{\mathbf{F}}$ yace en el plano de la página. El trabajo hecho sobre el objeto por $\vec{\mathbf{F}}$ a medida que su punto de aplicación da vueltas a través de una distancia infinitesimal $ds = r\,d\theta$ es

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = (F \operatorname{sen} \phi) r\,d\theta$$

donde $F \operatorname{sen} \theta$ es la componente tangencial de $\vec{\mathbf{F}}$ o, en otras palabras, la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento. Note que el vector componente radial de $\vec{\mathbf{F}}$ no hace trabajo sobre el objeto porque es perpendicular al desplazamiento del punto de aplicación de $\vec{\mathbf{F}}$.

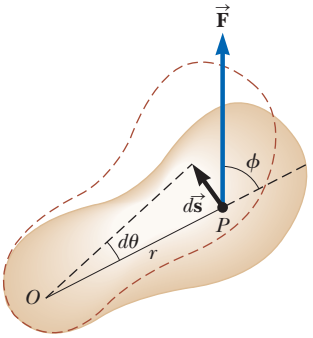


Figura 10.20 Un objeto rígido rota en torno a un eje a través de O bajo la acción de una fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada en P.

Ya que la magnitud del momento de torsión debida a $\vec{\mathbf{F}}$ en torno a un eje a través de O es definida como rF sen ϕ, por la ecuación 10.14, el trabajo hecho por la rotación infinitesimal se puede escribir como

$$dW = \tau\,d\theta \tag{10.25}$$

La rapidez a la que $\vec{\mathbf{F}}$ realiza trabajo a medida que el objeto rota en torno al eje fijo a través del ángulo $d\theta$ en un intervalo de tiempo dt es

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Ya que dW/dt es la potencia instantánea P (vea la sección 8.5) entregada por la fuerza y $d\theta/dt = \omega$, esta expresión se reduce a

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \tag{10.26}$$

◀ **Potencia entregada a un objeto rígido en rotación**

Esta ecuación es análoga a $P = Fv$ en el caso del movimiento traslacional, y la ecuación 10.25 es análoga a $dW = F_x\,dx$.

Al estudiar el movimiento traslacional los modelos de acuerdo con el enfoque energético pueden ser extremadamente útiles para describir el comportamiento de un sistema. De lo aprendido del movimiento traslacional se espera que, cuando un objeto simétrico dé vueltas en torno a un eje fijo, el trabajo efectuado por fuerzas externas sea igual al cambio en la energía rotacional del objeto.

Para probar este hecho comience con el modelo de objeto rígido bajo un momento de torsión neto, cuya representación matemática es $\Sigma\,\tau_{\text{ext}} = I\alpha$. Al usar la regla de la cadena del cálculo es posible expresar el momento de torsión neto como

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega$$

Al reordenar esta expresión y notar que $\Sigma\,\tau_{\text{ext}}\,d\theta = dW$ se obtiene

$$\sum \tau_{\text{ext}}\,d\theta = dW = I\omega\,d\omega$$

Al integrar la expresión se obtiene el trabajo total W hecho por la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema en rotación

$$W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega\,d\omega = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 \tag{10.27}$$

◀ **Teorema trabajo-energía cinética para movimiento rotacional**

donde la rapidez angular cambia de ω_i a ω_f. La ecuación 10.27 es el **teorema trabajo-energía cinética para movimiento rotacional**. Similar al teorema trabajo-energía cinética en el movimiento traslacional (sección 7.5), este teorema afirma que el trabajo neto hecho por fuerzas externas en un objeto rígido simétrico en rotación en torno a un eje fijo es igual al cambio en la energía rotacional del objeto.

Este teorema es una forma del modelo de sistema no aislado (energía) explicado en el capítulo 8. En el sistema del objeto rígido se hace trabajo, que representa una transferencia de energía a través de la frontera del sistema que aparece como un aumento en la energía cinética rotacional del objeto.

En general, es posible combinar este teorema con la forma traslacional del teorema trabajo-energía cinética del capítulo 7. Por lo tanto, el trabajo neto hecho por

Tabla 10.3 Ecuaciones útiles en movimiento rotacional y traslacional

Movimiento rotacional en torno a un eje fijo	Movimiento traslacional
Rapidez angular $\omega = d\theta/dt$	Rapidez traslacional $v = dx/dt$
Aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$	Aceleración traslacional $a = dv/dt$
Momento de torsión neto $\Sigma\tau_{ext} = I\alpha$	Fuerza neta $\Sigma F = ma$
Si α = constante $\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$	Si a = constante $\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$
Trabajo $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta$	Trabajo $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx$
Energía cinética rotacional $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	Energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$
Potencia $P = \tau\omega$	Potencia $P = Fv$
Cantidad de movimiento angular $L = I\omega$	Cantidad de movimiento lineal $p = mv$
Momento de torsión neto $\Sigma\tau = dL/dt$	Fuerza neta $\Sigma F = dp/dt$

fuerzas externas sobre un objeto es el cambio en su energía cinética *total*, que es la suma de las energías cinéticas traslacional y rotacional. Por ejemplo, cuando un pitcher lanza una pelota de béisbol, el trabajo hecho por la mano del pitcher aparece como energía cinética asociada con la pelota móvil a través del espacio, así como energía cinética rotacional asociada con el giro de la bola.

Además del teorema trabajo-energía cinética, también se aplican otros principios de energía a situaciones rotacionales. Por ejemplo, si un sistema que involucra objetos rotativos se aísla y dentro del sistema no actúan fuerzas no conservativas, se puede usar el modelo de sistema aislado y el principio de conservación de la energía mecánica para analizar el sistema, como en el ejemplo 10.11 siguiente. En general, la ecuación 8.2 (la ecuación de conservación de la energía) se aplica a situaciones de rotación, con el reconocimiento de que el cambio en la energía cinética ΔK incluirá cambios en energías cinéticas tanto traslacionales como rotacionales.

Por último, en algunas situaciones una aproximación energética no proporciona suficiente información para resolver el problema y se debe combinar con un planteamiento de cantidad de movimiento. Tal caso se ilustra en el ejemplo 10.14 de la sección 10.9.

La tabla 10.3 enlista las diversas ecuaciones que se han estudiado y la relación entre las expresiones del movimiento rotacional con las expresiones análogas para movimiento traslacional. Observe la similitud entre las formas matemáticas de las ecuaciones. Las últimas dos ecuaciones de la tabla 10.3, que involucran cantidad de movimiento angular L, se explican en el capítulo 11 y se incluyen aquí sólo por motivos complementarios.

Ejemplo 10.11 Un nuevo vistazo a la barra giratoria AM

Una barra uniforme de longitud L y masa M tiene libertad de dar vuelta sobre un pivote sin fricción que pasa a través de un extremo (figura 10.21). La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal.

(A) ¿Cuál es su rapidez angular cuando la barra llega a su posición más baja?

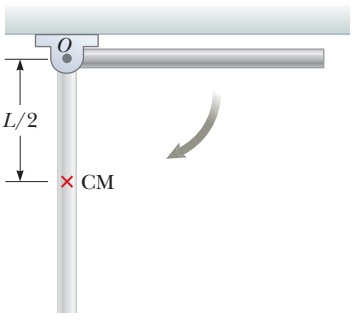


Figura 10.21 (Ejemplo 10.11) Una barra rígida uniforme con centro de giro en O da vueltas en un plano vertical bajo la acción de la fuerza gravitacional.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere la figura 10.21 e imagine que la barra gira hacia abajo un cuarto de vuelta en torno al pivote en el extremo izquierdo. Regrese a ver el ejemplo 10.8 en el que la situación física es la misma.

Categorizar Como se mencionó en el ejemplo 10.8 la aceleración angular de la barra no es constante. Por lo tanto, las ecuaciones cinemáticas para rotación (sección 10.2) no se pueden usar para resolver este ejemplo. Categorizamos el sistema de la varilla y la Tierra

10.11 continuación

como un *sistema aislado* en términos de *energía* sin fuerzas no conservativas actuando y se utiliza el principio de conservación de energía mecánica.

Analizar Elija la configuración en que la barra cuelga recta hacia abajo, como la configuración de referencia para energía potencial gravitacional, y asigne un valor de cero para esta configuración. Cuando la barra está en la posición horizontal no tiene energía cinética rotacional. La energía potencial del sistema en esta configuración respecto a la configuración de referencia es $MgL/2$ porque el centro de masa de la barra está a una altura $L/2$ más alto que su posición en la configuración de referencia. Cuando la barra llega a su posición más baja la energía del sistema es enteramente energía rotacional $\frac{1}{2}I\omega^2$, donde I es el momento de inercia de la barra en torno a un eje que pasa a través del pivote.

Usando el modelo de sistema aislado (energía), escriba una reducción adecuada de la ecuación 8.2:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Sustituya para cada una de las energías:

$$(\tfrac{1}{2}I\omega^2 - 0) + (0 - \tfrac{1}{2}MgL) = 0$$

Resuelva para ω y use $I = ML^2$ (vea la tabla 10.2) para la barra:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

(B) Determine la rapidez tangencial del centro de masa y la rapidez tangencial del punto más bajo en la barra cuando esté en la posición vertical.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 10.10 y el resultado del inciso (A):

$$v_{CM} = r\omega = \frac{L}{2}\omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

Ya que r para el punto más bajo en la barra es el doble de lo que es para el centro de masa, el punto más bajo tiene el doble de rapidez tangencial que el centro de masa:

$$v = 2v_{CM} = \sqrt{3gL}$$

Finalizar La configuración inicial en este ejemplo es la misma que en el ejemplo 10.4. Sin embargo, en el ejemplo 10.4 sólo se podría encontrar la aceleración angular inicial de la barra. Aplicar un método de energía en el ejemplo actual permite encontrar información adicional, la rapidez angular de la barra en otro instante de tiempo. Convénzase de que podría encontrar la rapidez angular de la barra en cualquier posición angular conociendo la ubicación del centro de masa en esa posición.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Qué pasa si queremos encontrar la rapidez angular de la barra cuando el ángulo que hace con la horizontal es 45.0°? Ya que este ángulo es la mitad de 90.0°, para el cual hemos resuelto el problema anterior, ¿es la rapidez angular en esta configuración la mitad de la respuesta del cálculo anterior, es decir, $\frac{1}{2}\sqrt{3g/L}$?

Respuesta Imagine la varilla de la figura 10.21 en la posición 45.0°. Utilice un lápiz o una regla para representar la varilla en esta posición. Observe que el centro de masa ha caído a más de la mitad de la distancia $L/2$ en esta configuración. Por lo tanto, más de la mitad de la energía potencial gravitatoria inicial se ha transformado en energía cinética rotacional. Entonces, no deberíamos esperar que el valor de la rapidez angular sea tan simple como se propuso antes.

Observe que el centro de masa de la barra cae una distancia de $0.500L$ conforme la barra alcanza la configuración vertical. Cuando la barra está a 45.0° con la horizontal podemos demostrar que el centro de masa de la barra cae a través de una distancia de $0.354L$. Continuando con el cálculo, se encuentra que la rapidez angular de la varilla en esta configuración es $\sqrt{3g/L}$, (no $\frac{1}{2}\sqrt{3g/L}$).

Ejemplo 10.12 Energía y la máquina de Atwood AM

Dos bloques de masas diferentes m_1 y m_2 están conectados por una cuerda que pasa sobre una polea, como se muestra en la figura 10.22 en la página 316. La polea tiene un radio R y momento de inercia I en torno a su eje de rotación. La cuerda no se desliza en la polea y el sistema se libera a partir del reposo. Encuentre las rapideces de traslación de los bloques después que el bloque 2 desciende a través de una distancia h y la rapidez angular de la polea en este momento.

continúa

10.12 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya hemos visto ejemplos que involucran la máquina de Atwood, así que el movimiento de los objetos en la figura 10.22 debe ser fácil de visualizar.

Categorizar Ya que la cuerda no se desliza, la polea da vueltas en torno al eje. Se puede despreciar la fricción en el eje porque el radio del eje es pequeño en relación con el de la polea. Por tanto, el momento de torsión de fricción es mucho menor que el momento de torsión neto aplicado por los dos cilindros siempre que sus masas sean significativamente diferentes. En consecuencia, el sistema que consiste en los dos bloques, la polea y la Tierra, es un sistema aislado sin fuerzas no conservativas actuando; debido a eso, la energía mecánica del sistema se conserva.

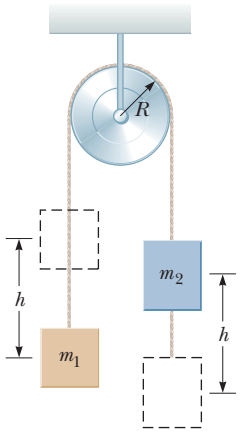


Figura 10.22 (Ejemplo 10.22) Una máquina de Atwood con una polea pesada.

Analizar La configuración cero para energía potencial gravitacional se define como la que existe cuando el sistema se libera desde el reposo. De la figura 10.22 se ve que el descenso del bloque 2 se asocia con una disminución en la energía potencial del sistema y que la elevación del bloque 1 representa un aumento en energía potencial.

Usando el modelo de sistema aislado (energía), escriba una reducción adecuada de la ecuación de la conservación de la energía:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Sustituya para cada una de las energías:

$$[(\tfrac{1}{2}m_1v_f^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_f^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_f^2) - 0] + [(m_1gh - m_2gh) - 0] = 0$$

Use $v_f = R\omega_f$ para sustituir por ω_f:

$$\tfrac{1}{2}m_1v_f^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_f^2 + \tfrac{1}{2}I\frac{v_f^2}{R^2} = m_2gh - m_1gh$$

$$\tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v_f^2 = (m_2 - m_1)gh$$

Resuelva para v_f:

$$(1)\quad v_f = \left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2}\right]^{1/2}$$

Use $v_f = R\omega_f$ para despejar ω_f

$$\omega_f = \frac{v_f}{R} = \frac{1}{R}\left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2}\right]^{1/2}$$

Finalizar Cada uno de los bloques se modela como una *partícula bajo aceleración constante* porque experimenta una fuerza neta constante. Piense qué necesitaría hacer para usar la ecuación (1) para encontrar la aceleración de uno de los bloques. Después imagine que la polea no tiene masa y encuentre la aceleración de uno de los bloques. ¿Cómo se compara este resultado con el del ejemplo 5.9?

10.9 Movimiento de rodamiento de un objeto rígido

En esta sección se trata el movimiento de un objeto rígido que rueda a lo largo de una superficie plana. En general, tal movimiento es complejo. Por ejemplo, suponga que un cilindro rueda sobre una trayectoria recta tal que el eje de rotación permanece paralelo a su orientación inicial en el espacio. Como muestra la figura 10.23, un punto sobre el borde del cilindro se mueve en una trayectoria compleja llamada *cicloide*. Sin embargo, se puede simplificar el tema al concentrarse en el centro de masa en lugar de hacerlo en un punto en el borde del objeto rodante. Como se muestra en la figura 10.23, el centro de masa se mueve en línea recta. Si un objeto como un cilindro rueda sin deslizarse sobre la superficie (llamado *movimiento de rodamiento puro*), existe una relación simple entre sus movimientos rotacional y traslacional.

Considere un cilindro uniforme de radio R que rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal (figura 10.24). Conforme el cilindro da vueltas a través de un ángulo θ, su centro de masa se mueve una distancia lineal $s = R\theta$ (vea la ecuación

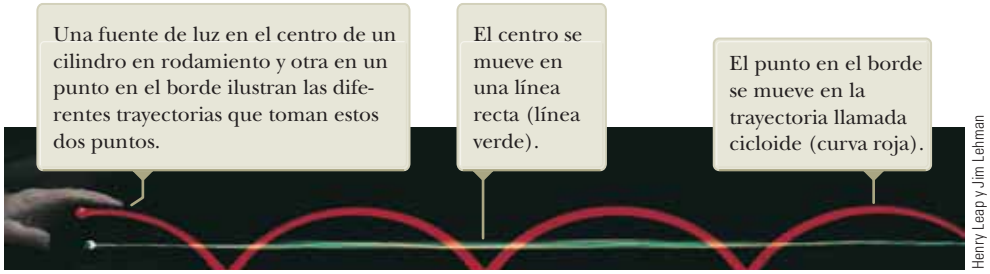


Figura 10.23 Dos puntos sobre un objeto que rueda toman caminos diferentes a través del espacio.

10.1a). Por lo tanto, la rapidez traslacional del centro de masa para movimiento de rodamiento puro está dado por

$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \tag{10.28}$$

donde ω es la rapidez angular del cilindro. La ecuación 10.28 se cumple siempre que un cilindro o esfera rueda sin deslizarse y es la **condición para movimiento de rodamiento puro**. La magnitud de la aceleración lineal del centro de masa para movimiento de rodamiento puro es

$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \tag{10.29}$$

donde α es la aceleración angular del cilindro.

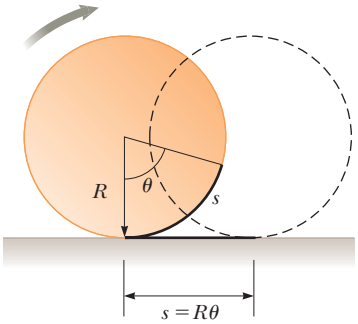


Figura 10.24 Para movimiento de rodamiento puro, a medida que el cilindro da vueltas a través de un ángulo θ su centro se traslada una distancia lineal $s = R\theta$.

Imagine que está moviéndose junto con un objeto que rueda con rapidez v_{CM} y permanece en un marco de referencia en reposo respecto al centro de masa del objeto. Mientras observa el objeto, lo verá en rotación pura alrededor de su centro de masa. La figura 10.25a muestra las velocidades de puntos a la cabeza, en el centro y en la parte baja del objeto, según se observa. Además de estas velocidades, cada punto sobre el objeto se mueve en la misma dirección con rapidez v_{CM} respecto de la superficie sobre la que rueda. La figura 10.25b muestra estas velocidades para un objeto que no gira. En el marco de referencia en reposo respecto de la superficie, la velocidad de un punto determinado sobre el objeto es la suma de las velocidades que se muestran en las figuras 10.25a y 10.25b. La figura 10.25c muestra los resultados de sumar estas velocidades.

Observe que el punto de contacto entre la superficie y el cilindro en la figura 10.25c tiene una rapidez traslacional cero. En este instante el objeto que rueda es móvil en exactamente la misma forma que si la superficie se retirara y el objeto fuera pivoteado en el punto P y girara en torno a un eje que pasa a través de P. Podemos expresar la energía cinética total de este objeto que se piensa está girando como

$$K = \tfrac{1}{2}I_P\omega^2 \tag{10.30}$$

donde I_P es el momento de inercia en torno a un eje de rotación a través de P.

Prevención de riesgos ocultos 10.6

La ecuación 10.28 parece familiar La ecuación 10.28 parece muy similar a la ecuación 10.10, así que asegúrese de ser claro con la diferencia. La ecuación 10.10 da la *rapidez tangencial* de un punto en un objeto *giratorio* ubicado a una distancia r de un eje de rotación fijo si el objeto está girando con rapidez angular ω. La ecuación 10.28 da la rapidez traslacional del centro de masa de un objeto en rodamiento de radio R rodando con rapidez angular ω.

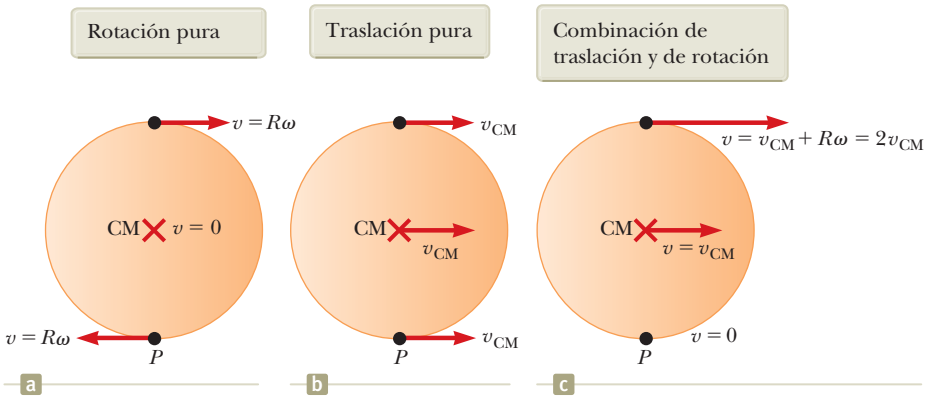


Figura 10.25 El movimiento de un objeto rodando se puede modelar como una combinación de traslación pura y de rotación pura.

Ya que el movimiento del objeto que se piensa está girando es el mismo en este instante que el del verdadero objeto en rodamiento, la ecuación 10.30 también da la energía cinética del objeto en rodamiento. Al aplicar el teorema de ejes paralelos se puede sustituir $I_P = I_{CM} + MR^2$ en la ecuación 10.30 para obtener

$$K = \tfrac{1}{2} I_{\mathrm{CM}} \omega^2 + \tfrac{1}{2} M R^2 \omega^2$$

Al usar $v_{\mathrm{CM}} = R\omega$ esta ecuación se puede expresar como

Energía cinética total de un objeto en rodamiento

$$K = \tfrac{1}{2} I_{\mathrm{CM}} \omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}^2 \qquad (10.31)$$

El término $\frac{1}{2} I_{\mathrm{CM}} \omega^2$ representa la energía cinética rotacional del cilindro en torno a su centro de masa, y el término $\frac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}^2$ representa la energía cinética que tendría el cilindro si sólo se trasladara a través del espacio sin girar. En consecuencia, la energía cinética total de un objeto en rodamiento es la suma de la energía cinética rotacional *en torno* al centro de masa y la energía cinética traslacional *del* centro de masa. Este enunciado es consistente con la situación que se ilustra en la figura 10.25, que muestra que la velocidad de un punto en el objeto es la suma de la velocidad del centro de masa y la velocidad tangencial en torno al centro de masa.

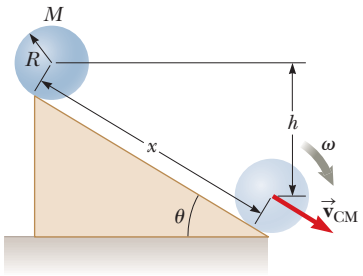


Figura 10.26 Una esfera rueda por un plano inclinado. La energía mecánica del sistema esfera-Tierra se conserva si no se presenta deslizamiento.

Se pueden usar métodos de energía para tratar una clase de problemas concernientes con el movimiento de rodamiento de un objeto sobre un plano inclinado rugoso. Por ejemplo, considere la figura 10.26, que muestra una esfera que rueda sin deslizarse después de liberarla desde el reposo en la parte superior del plano. El movimiento de rodamiento acelerado sólo es posible si una fuerza de fricción está presente entre la esfera y el plano para producir un momento de torsión neto en torno al centro de masa. A pesar de la presencia de fricción, no se presenta pérdida de energía mecánica porque el punto de contacto está en reposo en relación con la superficie en cualquier instante. (Por otra parte, si la esfera se deslizara, la energía mecánica del sistema esfera-plano inclinado-Tierra se perdería debido a la fuerza no conservativa de la fricción cinética.)

En realidad, la *fricción de rodamiento* hace que la energía mecánica se transforme en energía interna. La fricción de rodamiento se debe a deformaciones de la superficie y el objeto que rueda. Por ejemplo, las llantas de los automóviles se flexionan conforme ruedan sobre una autopista, lo que representa una transformación de energía mecánica en energía interna. La autopista también se deforma una pequeña cantidad, lo que representa una fricción de rodamiento adicional. En los modelos de resolución de problemas se ignora la fricción de rodamiento a menos que se establezca de otro modo.

Al usar $v_{\mathrm{CM}} = R\omega$ para movimiento de rodamiento puro, la ecuación 10.31 se puede expresar como

$$K = \tfrac{1}{2} I_{\mathrm{CM}} \left(\frac{v_{\mathrm{CM}}}{R} \right)^2 + \tfrac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}^2$$

$$K = \tfrac{1}{2} \left(\frac{I_{\mathrm{CM}}}{R^2} + M \right) v_{\mathrm{CM}}^2 \qquad (10.32)$$

Para el sistema esfera-Tierra de la figura 10.26 la configuración cero de energía potencial gravitacional se define cuando la esfera está en la parte baja del plano inclinado. Por lo tanto, la ecuación 8.2 da

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$\left[\tfrac{1}{2} \left(\frac{I_{\mathrm{CM}}}{R^2} + M \right) v_{\mathrm{CM}}^2 - 0 \right] + (0 - Mgh) = 0$$

$$v_{\mathrm{CM}} = \left[\frac{2gh}{1 + (I_{\mathrm{CM}} / MR^2)} \right]^{1/2} \qquad (10.33)$$

Examen rápido 10.7 Una bola rueda sin deslizarse por un plano inclinado A, partiendo del reposo. Al mismo tiempo, una caja parte del reposo y se desliza por el plano inclinado B, que es idéntico al plano A excepto que no tiene fricción. ¿Cuál llega primero al fondo? **(a)** La bola. **(b)** La caja. **(c)** Ambas. **(d)** Imposible de determinar.

Ejemplo 10.13 Esfera que rueda hacia abajo por un plano inclinado AM

Para la esfera sólida que se muestra en la figura 10.26, calcule la rapidez traslacional del centro de masa en la parte baja del plano inclinado y la magnitud de la aceleración traslacional del centro de masa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que rueda la esfera por el plano inclinado. En su mente, compárela con un libro que se desliza hacia abajo por un plano inclinado sin fricción. Quizá ha experimentado con objetos rodando hacia abajo por planos y es posible que esté tentado a pensar que la esfera se movería más rápido en el plano que el libro. No obstante, ¡no ha experimentado con objetos que se deslizan hacia abajo por planos inclinados sin fricción! Así que, ¿cuál objeto llegará primero a la parte baja? (Vea el examen rápido 10.7.)

Categorizar La esfera y la Tierra se modelan como un *sistema aislado* en términos de *energía*, sin que actúen fuerzas no conservativas. Este modelo es el que condujo a la ecuación 10.33, así que se puede usar dicho resultado.

Analizar Evalúe la rapidez del centro de masa de la esfera a partir de la ecuación 10.33:

$$(1)\quad v_{CM} = \left[\frac{2gh}{1 + (\frac{2}{5}MR^2/MR^2)}\right]^{1/2} = (\tfrac{10}{7}gh)^{1/2}$$

Este resultado es menor que $\sqrt{2gh}$, que es la rapidez que tendría un objeto si simplemente se deslizara por el plano sin girar. (Elimine la rotación al hacer $I_{CM} = 0$ en la ecuación 10.33.)

Para calcular la aceleración traslacional del centro de masa, note que el desplazamiento vertical de la esfera se relaciona con la distancia x que se mueve a lo largo del plano inclinado mediante la relación $h = x \operatorname{sen} \theta$.

Aplique esta relación para escribir la ecuación (1): $v_{CM}^2 = \frac{10}{7}gx \operatorname{sen} \theta$

Escriba la ecuación 2.17 para un objeto que parte del reposo y se mueve una distancia x: $v_{CM}^2 = 2a_{CM}x$

Iguale las dos expresiones anteriores para encontrar a_{CM}: $a_{CM} = \frac{5}{7}g \operatorname{sen} \theta$

Finalizar Tanto la rapidez como la aceleración del centro de masa son independientes de la masa y el radio de la esfera. Es decir: todas las esferas homogéneas sólidas experimentan la misma rapidez y aceleración en un plano inclinado determinado. Intente verificar esta afirmación experimentalmente con bolas de diferentes tamaños, como una canica y una bola de croquet.

Si tuviera que repetir el cálculo de la aceleración para una esfera hueca, un cilindro sólido o un aro, obtendría resultados similares que sólo diferirían en el factor enfrente de $g \operatorname{sen} \theta$. Los factores constantes que aparecen en las expresiones para v_{CM} y a_{CM} sólo dependen del momento de inercia en torno al centro de masa para el objeto específico. En todos los casos, la aceleración del centro de masa es *menor* que $g \operatorname{sen} \theta$, el valor que tendría la aceleración si el plano inclinado no tuviera fricción y no ocurriera rodamiento.

Ejemplo 10.14 Jalando sobre un carrete[3] AM

Un carrete simétrico de masa m y radio R está en reposo sobre una mesa horizontal con fricción (figura 10.27). Con su mano en una cuerda sin masa enrollada alrededor del eje de radio r, jala del carrete con una fuerza horizontal constante de magnitud T hacia la derecha. Como resultado, el carrete rueda sin deslizarse una distancia L a lo largo de la mesa sin fricción de rodamiento.

(A) Encuentre la rapidez traslacional final del centro de masa del carrete.

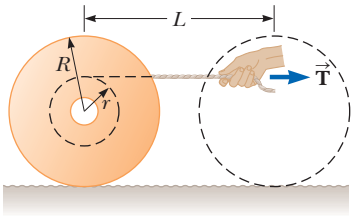


Figura 10.27 (Ejemplo 10.14) Un carrete en reposo sobre una mesa horizontal. Una cuerda está enrollada alrededor del eje y una mano lo jala hacia la derecha.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Use la figura 10.27 para visualizar el movimiento del carrete cuando jala la cuerda. Para que el carrete ruede una distancia L, note que su mano en la cuerda debe jalar una distancia *diferente* de L.

continúa

[3]El ejemplo 10.14 lo inspiró en parte C. E. Mungan, "A primer on work-energy relationships for introductory physics", *The Physics Teacher*, **43**, p. 10, 2005.

10.14 continuación

Categorizar El carrete es *un objeto rígido bajo un momento de torsión neto*, pero el momento de torsión incluye la fuerza de fricción, acerca de la que no sabe nada. Por lo tanto, un planteamiento en función del modelo de objeto rígido bajo momento de torsión neto no será exitoso. Su mano realiza trabajo en el carrete y la cuerda, que forman un sistema no aislado. Vea si un método respecto al modelo de *sistema no aislado* (*energía*) es fructífero.

Analizar El único tipo de energía que cambia en el sistema es la energía cinética del carrete. No hay fricción de rodamiento, de modo que no hay cambio en la energía interna. La única forma en que la energía cruza la frontera del sistema es mediante el trabajo realizado por su mano en la cuerda. La fuerza de fricción estática no invierte trabajo en la parte baja del carrete (a la izquierda en la figura 10.27), porque el punto de aplicación de la fuerza se mueve a través de ningún desplazamiento.

Escriba la reducción apropiada de la ecuación de conservación de la energía, ecuación 8.2:

$$(1)\quad W = \Delta K = \Delta K_{\text{trans}} + \Delta K_{\text{rot}}$$

donde W es el trabajo invertido en la cuerda por su mano. Para hallar este trabajo, necesita encontrar el desplazamiento de su mano durante el proceso.

Primero encuentre la longitud de la cuerda que se desenrolla del carrete. Si el carrete rueda una distancia L, el ángulo total que da vuelta es $\theta = L/R$. El eje también da vueltas a través de este ángulo.

Use la ecuación 10.1a para encontrar la longitud de arco total que gira el eje:

$$\ell = r\theta = \frac{r}{R}L$$

Este resultado también da la longitud de la cuerda que se jala del eje. Su mano se moverá esta distancia *más* la distancia L a través de la que se mueve el carrete. Por lo tanto, la magnitud del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza aplicada por su mano es $\ell + L = L(1 + r/R)$.

Evalúe el trabajo realizado por su mano sobre la cuerda:

$$(2)\quad W = TL\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

Sustituya la ecuación (2) en la ecuación (1):

$$TL\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \tfrac{1}{2}mv_{\text{CM}}^{\,2} + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

donde I es el momento de inercia del carrete en torno a su centro de masa, y v_{CM} y ω son los valores finales después de la rueda recorre una distancia L.

Aplique la condición de rodamiento sin deslizamiento $\omega = v_{\text{CM}}/R$:

$$TL\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \tfrac{1}{2}mv_{\text{CM}}^{\,2} + \tfrac{1}{2}I\frac{v_{\text{CM}}^{\,2}}{R^2}$$

Resuelva para v_{CM}:

$$(3)\quad v_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{2TL(1 + r/R)}{m(1 + I/mR^2)}}$$

(B) Encuentre el valor de la fuerza de fricción f.

SOLUCIÓN

Categorizar Ya que la fuerza de fricción no realiza trabajo, no se le puede evaluar a partir de un método de energía. El carrete se modela como un *sistema no aislado*, pero esta vez en términos de *cantidad de movimiento*. La cuerda aplica una fuerza a través de la frontera del sistema, lo que resulta en un impulso en el sistema. Ya que las fuerzas en el carrete son constantes, el centro de masa del carrete se modela como una *partícula bajo aceleración constante*.

Analizar Escriba el teorema impulso-cantidad de movimiento (ecuación 9.40) para el carrete:

$$m(v_{\text{CM}} - 0) = (T - f)\Delta t$$

$$(4)\quad mv_{\text{CM}} = (T - f)\Delta t$$

Para una partícula bajo aceleración constante que parte del reposo, la ecuación 2.14 dice que la velocidad promedio del centro de masa es la mitad de la velocidad final.

Use la ecuación 2.2 para encontrar el intervalo de tiempo para el centro de masa del carrete para que se mueva una distancia L desde el reposo a una rapidez final v_{CM}:

$$(5)\quad \Delta t = \frac{L}{v_{\text{CM,prom}}} = \frac{2L}{v_{\text{CM}}}$$

10.14 continuación

Sustituya la ecuación (5) en la ecuación (4):

$$mv_{CM} = (T - f)\frac{2L}{v_{CM}}$$

Resuelva para la fuerza de fricción f:

$$f = T - \frac{mv_{CM}^2}{2L}$$

Sustituya v_{CM} de la ecuación (3):

$$f = T - \frac{m}{2L}\left[\frac{2TL(1 + r/R)}{m(1 + I/mR^2)}\right]$$

$$= T - T\frac{(1 + r/R)}{(1 + I/mR^2)} = T\left[\frac{I - mrR}{I + mR^2}\right]$$

Finalizar ¡Observe que podría usar el teorema impulso-cantidad de movimiento para el movimiento traslacional del carrete mientras ignora que el carrete está girando! Este hecho demuestra el poder de la creciente lista de métodos para resolver problemas.

Resumen

Definiciones

La **posición angular** de un objeto rígido se define como el ángulo θ entre una línea de referencia unida al objeto y una línea de referencia fija en el espacio. El **desplazamiento angular** de una partícula moviéndose en una trayectoria circular o un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$.

La **rapidez angular instantánea** de una partícula moviéndose en una trayectoria circular o de un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} \qquad (10.3)$$

La **aceleración angular instantánea** de una partícula moviéndose en una trayectoria circular o de un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es

$$\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} \qquad (10.5)$$

Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo, cada parte del objeto tiene la misma rapidez angular y la misma aceleración angular.

La magnitud del **momento de torsión** asociado con una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre un objeto a una distancia r desde el eje de rotación es

$$\tau = rF\,\text{sen}\,\phi = Fd \qquad (10.14)$$

donde ϕ es el ángulo entre el vector de posición del punto de aplicación de la fuerza y el vector fuerza, y d es el brazo de momento de la fuerza, que es la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea de acción de la fuerza.

El **momento de inercia de un sistema de partículas** se define como

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 \qquad (10.19)$$

donde m_i es la masa de la i-ésima partícula y r_i es su distancia desde el eje de rotación.

Conceptos y principios

Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo, la posición angular, la rapidez angular y la aceleración angular se relacionan con la posición, la rapidez y la aceleración traslacionales mediante las relaciones

$$s = r\theta \qquad (10.1a)$$

$$v = r\omega \qquad (10.10)$$

$$a_t = r\alpha \qquad (10.11)$$

Si un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo con rapidez angular ω, su **energía cinética rotacional** se puede escribir

$$K_R = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad (10.24)$$

donde I es el momento de inercia del objeto en torno al eje de rotación.

El **momento de inercia de un objeto rígido** es

$$I = \int r^2\,dm \qquad (10.20)$$

donde r es la distancia desde el elemento de masa dm al eje de rotación.

continúa

La rapidez con que una fuerza externa realiza trabajo para girar un objeto rígido en torno a un eje fijo, o la potencia entregada, es

$$P = \tau\omega \qquad (10.26)$$

Si sobre un objeto rígido se hace trabajo y el único resultado del trabajo es rotación en torno a un eje fijo, el trabajo neto hecho por las fuerzas externas para hacer girar el objeto es igual al cambio en la energía cinética rotacional del objeto:

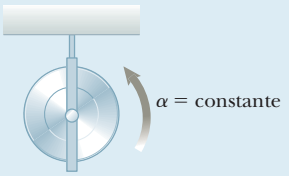
$$W = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 \qquad (10.27)$$

La **energía cinética** total de un objeto rígido que rueda sobre una superficie rugosa sin deslizamiento es igual a la energía cinética rotacional en torno a su centro de masa más la energía cinética traslacional del centro de masa:

$$K = \tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2 \qquad (10.31)$$

Análisis de modelos para resolver problemas

Objeto rígido bajo aceleración angular constante. Si un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo bajo aceleración angular constante, uno puede aplicar las ecuaciones de la cinemática que son análogas a las del movimiento traslacional de una partícula bajo aceleración constante:



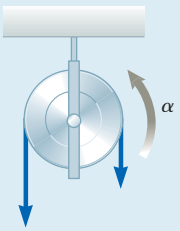
$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \qquad (10.6)$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (10.7)$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \qquad (10.8)$$

$$\theta_f = \theta_i + \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \qquad (10.9)$$

Objeto rígido bajo momento de torsión neto. Si sobre un objeto rígido libre que da vueltas en torno a un eje fijo actúa un momento de torsión externo neto, el objeto experimenta una aceleración angular α, donde



$$\sum \tau_{ext} = I\alpha \qquad (10.18)$$

Esta ecuación es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton en el modelo de partícula bajo una fuerza neta.

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Una ciclista monta una bicicleta con un radio de rueda de 0.500 m a través del campus. Un pedazo de plástico en el borde delantero hace un sonido de clic cada vez que pasa a través de la horquilla. Si la ciclista cuenta 320 clics entre su departamento y la cafetería, ¿qué distancia ha viajado? (a) 0.50 km (b) 0.80 km (c) 1.0 km (d) 1.5 km (e) 1.8 km

2. Considere que un objeto sobre un disco giratorio a distancia r de su centro se mantiene en su lugar sobre el disco por la fricción estática. ¿Cuál de los siguientes enunciados *no* es verdadero con respecto a este objeto? (a) Si la rapidez angular es constante, el objeto debe tener rapidez tangencial constante. (b) Si la rapidez angular es constante, el objeto no se acelera. (c) El objeto tiene aceleración tangencial solamente si el disco tiene una aceleración angular. (d) Si el disco tiene una aceleración angular, el objeto tiene tanto una aceleración centrípeta como una aceleración tangencial. (e) El objeto siempre tiene una aceleración centrípeta, excepto cuando la rapidez angular es cero.

3. Una rueda gira alrededor de un eje fijo con aceleración angular constante de 3 rad/s^2. En diferentes momentos su rapidez angular es −2 rad/s, 0 y +2 rad/s. En estos momentos, analice la magnitud de la componente tangencial de la aceleración y la magnitud de la componente radial de aceleración para un punto sobre el borde de la rueda. Clasifique los siguientes cinco elementos de mayor a menor: (a) $|a_t|$ cuando $\omega = -2$ rad/s, (b) $|a_r|$ cuando $\omega = -2$ rad/s, (c) $|a_r|$ cuando $\omega = 0$, (d) $|a_t|$ cuando $\omega = 2$ rad/s, (e) $|a_r|$ cuando $\omega = 2$ rad/s. Si dos elementos son iguales, muéstrelos como iguales en su clasificación. Si una cantidad es igual a cero, muéstrelo en su clasificación.

4. Una piedra de afilar aumenta de rapidez angular de 4.00 rad/s a 12.00 rad/s en 4.00 s. ¿A través de qué ángulo girará durante ese intervalo de tiempo si la aceleración angular es constante? (a) 8.00 rad (b) 12.0 rad (c) 16.0 rad (d) 32.0 rad (e) 64.0 rad

5. Suponga que las llantas estándar de un automóvil se sustituyen con llantas 1.30 veces mayores en diámetro. **(i)** ¿cuál será la lectura del velocímetro? (a) 1.69 veces mayor, (b) 1.30 veces mayor, (c) exacta, (d) 1.30 veces menor, (e) 1.69 veces menor, (d) inexacta por un factor impredecible. **(ii)** ¿Cuál será la economía de combustible del automóvil en millas por galón o km/L? (a) 1.69 veces mejor, (b) 1.30 veces mejor, (c) esencialmente la misma, (d) 1.30 veces peor, (e) 1.69 veces peor.

6. La figura PO10.6 muestra un sistema de cuatro partículas unidas mediante barras rígidas ligeras. Suponga $a = b$ y M es un poco mayor que m. **(i)** ¿Respecto a cuál de los ejes coordenados el sistema tiene el menor momento de inercia y **(ii)** el mayor momento de inercia? (a) El eje x. (b) El eje y. (c) El eje z. (d) El momento de inercia tiene el mismo valor pequeño para dos ejes. (e) El momento de inercia es el mismo para todos los tres ejes.

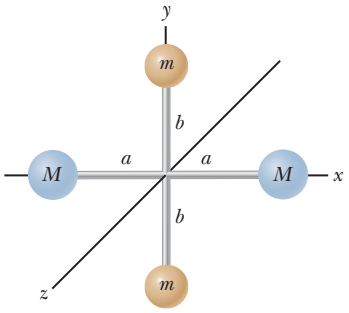


Figura PO10.6

7. Como se muestra en la figura PO10.7, una cuerda está enrollada en una bobina cilíndrica montada sobre un eje fijo, sin fricción, horizontal. ¿Cuándo el carrete tiene una magnitud mayor de aceleración angular? (a) Cuando la cuerda se jala hacia abajo con una fuerza constante de 50 N. (b) Cuando un objeto de peso 50 N está colgado de la cuerda y se libera. (c) Las aceleraciones angulares en los incisos (a) y (b) son iguales. (d) Es imposible de determinar.

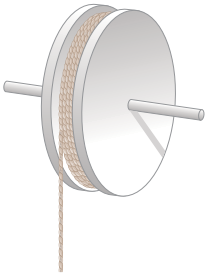


Figura PO10.7 Pregunta objetiva 7 y pregunta conceptual 4.

8. Sobre un objeto se ejerce un momento de torsión neto constante. ¿Cuál de las siguientes cantidades no puede ser constante? Elija todas las que apliquen. (a) Posición angular, (b) velocidad angular, (c) aceleración angular, (d) momento de inercia, (e) energía cinética.

9. Un balón de basquetbol rueda sobre un suelo sin deslizar, y su centro de masa se mueve a cierta rapidez. Un bloque de hielo de la misma masa se pone a deslizarse a través del suelo con la misma rapidez a lo largo de una línea paralela. ¿Cuál objeto tiene más **(i)** energía cinética y **(ii)** momentum? (a) El balón. (b) El hielo. (c) Las dos cantidades son iguales. **(iii)** Los dos objetos se encuentran una rampa que se eleva hacia arriba. (a) El balón viajará mayor distancia sobre la rampa. (b) El hielo viajará mayor distancia sobre la rampa. (c) Ambos viajarán la misma distancia hacia arriba sobre la rampa.

10. Un avión de juguete cuelga del techo de su habitación en el extremo inferior de una cuerda. Gira el avión en sentido de las manecillas del reloj varias veces para enrollar la cuerda, y cuando lo libera, comienza a girar contra las manecillas del reloj, lentamente al principio y después cada vez más rápido. Considere la dirección contra las manecillas del reloj como positiva y suponga que la fricción es despreciable. Cuando la cuerda está completamente desenrollada, el avión tiene su máxima rapidez de rotación. **(i)** En este momento, ¿su aceleración angular es (a) positiva, (b) negativa o (c) cero? **(ii)** El avión continúa girando y enrolla la cuerda contra las manecillas del reloj mientras frena. En el momento, cuando finalmente se detiene, ¿su aceleración angular es (a) positiva, (b) negativa o (c) cero?

11. Una esfera sólida de aluminio de radio R tiene momento de inercia I alrededor de un eje a través de su centro. ¿El momento de inercia alrededor de un eje central de una esfera de aluminio de radio $2R$ es: (a) $2I$, (b) $4I$, (c) $8I$, (d) $16I$ o (e) $32I$?

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. ¿Es posible cambiar la energía cinética traslacional de un objeto sin cambiar su energía rotacional?
2. ¿Un objeto debe estar girando para tener un momento de inercia distinto de cero?
3. Suponga que sólo dos fuerzas externas actúan sobre un objeto rígido en reposo y las dos fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en dirección. ¿Bajo qué condiciones el objeto comienza a girar?
4. Explique cómo puede usar el aparato descrito en la figura PO10.7 para determinar el momento de inercia de la rueda. *Nota:* Si la rueda no tiene una densidad de masa uniforme, el momento de inercia no necesariamente es igual a $\frac{1}{2}MR^2$.
5. Con los resultados del ejemplo 10.6, ¿cómo calcularía la rapidez angular de la rueda y la rapidez lineal del contrapeso suspendido en $t = 2$ s, si supone que el sistema se libera desde el reposo en $t = 0$?
6. Explique por qué al cambiar el eje de rotación de un objeto cambia su momento de inercia.
7. Suponga que saca dos huevos del refrigerador, uno cocido y el otro crudo. Quiere determinar cuál es el huevo cocido sin romper los huevos. Esta determinación se puede hacer al girar los dos huevos sobre el suelo y comparar los movimientos rotacionales. (a) ¿Cuál huevo gira más rápido? (b) ¿Cuál huevo da vueltas de manera más uniforme? (c) ¿Qué huevo comienza a girar otra vez después de que se detiene y luego se libera inmediatamente? Explique sus respuestas a los incisos (a), (b) y (c).
8. Suponga que pone su libro de texto a deslizar sobre el suelo de un gimnasio con cierta rapidez inicial. Rápidamente deja de moverse debido a una fuerza de fricción que el suelo ejerce sobre él. A continuación, pone a rodar un balón de basquetbol con la misma rapidez inicial. Sigue rodando de un extremo del gimnasio al otro. (a) ¿Por qué el balón rueda tan lejos? (b) ¿La fricción afecta significativamente el movimiento del balón?
9. (a) ¿Cuál es la rapidez angular del segundero de un reloj? (b) ¿Cuál es la dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ cuando ve un reloj que cuelga de una pared vertical? (c) ¿Cuál es la magnitud del vector aceleración angular $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ del segundero?
10. Una hoja de un par de tijeras da vueltas contra las manecillas del reloj en el plano xy. ¿Cuál es la dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ para la hoja? ¿Cuál es la dirección de $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ si la magnitud de la velocidad angular disminuye con el tiempo?

11. Si ve un objeto giratorio, ¿necesariamente existe un momento de torsión neto actuando sobre él?

12. Si una pequeña esfera de masa M se coloca al final de la barra en la figura 10.21, ¿el resultado para ω sería mayor, menor o igual que el valor obtenido en el ejemplo 10.11?

13. Tres objetos de densidad uniforme, una esfera sólida, un cilindro sólido y un cilindro hueco, se colocan en lo alto de un plano inclinado (figura PC10.13). Todos se liberan desde el reposo en la misma elevación y ruedan sin deslizarse. (a) ¿Cuál objeto llega primero a la parte baja? (b) ¿Cuál llega al último? *Nota*: el resultado es independiente de las masas y de los radios de los objetos (¡Intente hacer este experimento en casa!).

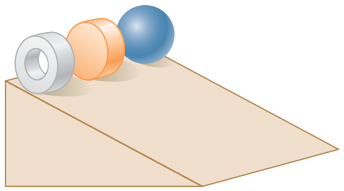


Figura PC10.13

14. ¿Cuál de las entradas de la tabla 10.2 se aplica para encontrar el momento de inercia (a) de una larga tubería de desagüe recta giratoria en torno a su eje de simetría? (b) ¿De un aro de bordado giratorio en torno a un eje a través de su centro y que es perpendicular a su plano? (c) ¿De una puerta uniforme que gira en sus bisagras? (d) ¿De una moneda que gira en torno a un eje a través de su centro y es perpendicular a sus caras?

15. La figura PC10.15 muestra una vista lateral de un triciclo infantil con llantas de caucho sobre una acera horizontal de concreto. Si una cuerda se une al pedal superior del extremo lejano y se jala hacia adelante horizontalmente, el triciclo rueda hacia adelante. (a) En vez de ello, suponga que una cuerda se une al pedal inferior en el lado cercano y se jala hacia adelante horizontalmente, como se muestra en A. ¿El triciclo comienza a rodar? Si es así, ¿en qué dirección? Responda las mismas preguntas si (b) la cuerda se jala hacia adelante y arriba, como se muestra en B, (c) la cuerda se jala recto hacia abajo, como se muestra en C, y (d) la cuerda se jala hacia adelante y abajo, como se muestra en D. (e) **¿Qué pasaría si?** La cuerda se amarra al borde de la rueda frontal y se jala arriba y atrás, como se muestra en E? ¿De qué modo rueda el triciclo? (f) Explique un patrón de razonamiento, con base en el diagrama, que facilite el responder estas preguntas. ¿Qué cantidad física debe evaluar?

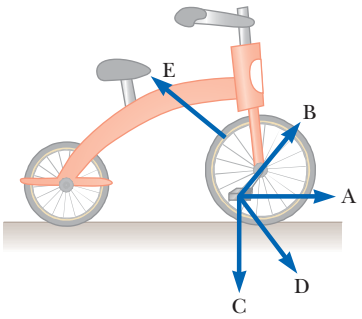


Figura PC10.15

16. Una persona equilibra una regla en posición horizontal con los dedos índice extendidos de la mano derecha e izquierda. Lentamente junta los dos dedos. La regla se mantiene equilibrada, y los dos dedos siempre se encuentran en la marca de 50 centímetros, independientemente de sus posiciones originales. (¡Pruébelo!) Explique por qué ocurre eso.

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 10.1 Posición, velocidad y aceleración angular

1. (a) Encuentre la velocidad angular de rotación de la Tierra sobre su eje. (b) ¿Cómo afecta esta rotación la forma de la Tierra?

2. Una rueda de alfarero se mueve uniformemente a partir del reposo con una velocidad angular de 1.00 rev/s en 30.0 s. (a) Encuentre su aceleración angular promedio en radianes por segundo por segundo. (b) ¿Al duplicar la aceleración angular durante el periodo dado se duplicará la velocidad angular final?

3. Durante cierto periodo, la posición angular de una puerta que se balancea se describe mediante $\theta = 5.00 + 10.0t + 2.00t^2$, donde θ está en radianes y t en segundos. Determine la posición, velocidad y aceleración angulares de la puerta (a) en $t = 0$ y (b) en $t = 3.00$ s.

4. Una barra sobre una bisagra parte del reposo y da vueltas con una aceleración angular $\alpha = (10 + 6t)$ rad/s^2, donde t está en segundos. Determine el ángulo en radianes que recorre la barra en los primeros 4.00 s.

Sección 10.2 Análisis de modelo: objeto rígido bajo aceleración angular constante

5. Una rueda parte del reposo y da vueltas con aceleración angular constante para alcanzar una rapidez angular de 12.0 rad/s en 3.00 s. Encuentre (a) la magnitud de la aceleración angular de la rueda y (b) el ángulo en radianes que rota en este intervalo de tiempo.

6. Una centrífuga en un laboratorio médico da vueltas a una rapidez angular de 3 600 rev/min. Cuando se apaga gira 50.0 revoluciones antes de llegar al reposo. Encuentre la aceleración angular constante de la centrífuga.

7. Un motor eléctrico que hace girar una rueda de molino a 1.00×10^2 rev/min se apaga. Después la rueda se mueve con aceleración angular negativa constante de 2.00 rad/s^2

de magnitud. (a) ¿Durante qué intervalo de tiempo la rueda llega al reposo? (b) ¿Cuántos radianes gira mientras va frenando durante el intervalo de tiempo que se encontró en el inciso (a)?

8. Una pieza de una máquina gira a una rapidez angular de 0.060 rad/s; luego se incrementa su rapidez a 2.2 rad/s con una aceleración angular de 0.70 rad/s^2. (a) Encuentre el ángulo a través del cual la pieza rota antes de alcanzar esta rapidez final. (b) Si tanto la rapidez angular inicial como la final se duplican y la aceleración angular sigue siendo la misma, ¿en qué factor cambia el desplazamiento angular? ¿Por qué?

9. El taladro de un dentista empieza a partir del reposo. Después de 3.20 s de aceleración angular constante, gira a razón de 2.51×10^4 rev/min. (a) Encuentre la aceleración angular de la broca. (b) Determine el ángulo (en radianes) a través del cual el taladro gira durante este periodo.

10. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Comenzando a partir del reposo, un disco gira alrededor de un eje fijo un ángulo de 50.0 rad en un intervalo de tiempo de 10.0 s. La aceleración angular del disco es constante durante todo el movimiento, y su rapidez angular final es 8.00 rad/s.

11. Una rueda giratoria requiere 3.00 s para rotar 37.0 revoluciones. Su rapidez angular al final del intervalo de 3.00 s es 98.0 rad/s. ¿Cuál es la aceleración angular constante de la rueda?

12. La tina de una lavadora comienza su ciclo de giro, parte del reposo y gana rapidez angular de manera estable durante 8.00 s, momento en que gira a 5.00 rev/s. En este punto, la persona que lava abre la tapa y un interruptor de seguridad apaga la máquina. La tina frena lentamente hasta el reposo en 12.0 s. ¿Cuántas revoluciones realiza la tina mientras está en movimiento?

13. Una rueda es detenida por un freno, dándole una aceleración angular constante de -5.60 rad/s^2. Durante un intervalo de tiempo de 4.20 s, la rueda gira 62.4 rad. ¿Cuál es la rapidez angular de la rueda al final del intervalo de 4.20 s?

14. **Problema de repaso.** Un alto edificio se ubica en el Ecuador de la Tierra. Mientras la Tierra da vueltas, una persona en el piso superior del edificio se mueve más rápido que alguien en el suelo en relación con un marco de referencia inercial porque la última persona está más cerca del eje de la Tierra. En consecuencia, si un objeto se deja caer desde el piso superior al suelo, que está a una distancia h por abajo, aterriza al Este del punto verticalmente abajo de donde se dejó caer. (a) ¿A qué distancia al Este aterrizará el objeto? Exprese su respuesta en términos de h, g y la rapidez angular ω de la Tierra. Ignore la resistencia del aire y suponga que la aceleración en caída libre es constante en este intervalo de alturas. (b) Evalúe el desplazamiento hacia el Este para $h = 50.0$ m. (c) A su juicio, ¿está justificado ignorar este aspecto del *efecto Coriolis* en el estudio previo de la caída libre? (d) Suponga que la velocidad angular de la Tierra disminuye debido a la fricción de las mareas con aceleración angular constante. ¿Aumentaría o disminuiría el desplazamiento hacia el Este del objeto que cae comparado con el resultado del inciso (b)?

Sección 10.3 Cantidades angulares y traslacionales

15. Un automóvil de carreras viaja en una pista circular de 250 m de radio. Si supone que el automóvil se mueve con una rapidez constante de 45.0 m/s, encuentre (a) su rapidez angular y (b) la magnitud y dirección de su aceleración.

16. Haga una estimación de un orden de magnitud del número de revoluciones que da en un año la llanta de un automóvil común. Establezca las cantidades que mida o estime sus valores.

17. Un lanzador de disco (figura P4.33, página 104) acelera un disco desde el reposo a una rapidez de 25.0 m/s al girarlo 1.25 rev. Suponga que el disco se mueve en un arco de circunferencia de 1.00 m de radio. (a) Calcule la rapidez angular final del disco. (b) Determine la magnitud de la aceleración angular del disco, si supone que es constante. (c) Calcule el intervalo de tiempo requerido para que el disco acelere desde el reposo hasta 25.0 m/s.

18. La figura P10.18 muestra el mecanismo impulsor de una bicicleta que tiene ruedas de 67.3 cm de diámetro y manivela de pedal de 17.5 cm de largo. El ciclista pedalea a una cadencia estable de 76.0 rev/min. La cadena se engancha con un piñón frontal de 15.2 cm de diámetro y una cuerda de cadena trasera de 7.00 cm de diámetro. (a) Calcule la rapidez de un eslabón de la cadena en relación con el cuadro de la bicicleta. (b) Calcule la rapidez angular de las ruedas de la bicicleta. (c) Calcule la rapidez de la bicicleta en relación con el camino. (d) ¿Qué parte de la información no es necesaria para los cálculos?

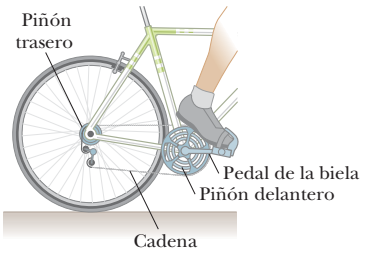


Figura P10.18

19. Una rueda de 2.00 m de diámetro se encuentra en un plano vertical y da vueltas con una aceleración angular constante de 4.00 rad/s^2. La rueda parte del reposo en $t = 0$ y el radio vector de cierto punto P sobre el borde forma un ángulo de 57.3° con la horizontal en este tiempo. En $t = 2.00$ s, encuentre (a) la rapidez angular de la rueda y para el punto P, (b) la rapidez tangencial, (c) la aceleración total y (d) la posición angular.

20. Un automóvil acelera uniformemente desde el reposo y alcanza una rapidez de 22.0 m/s en 9.00 s. Las llantas tienen 58.0 cm de diámetro y no se deslizan sobre el pavimento. (a) Encuentre el número de revoluciones que hace cada llanta durante este movimiento. (b) ¿Cuál es la rapidez angular final de una llanta en revoluciones por segundo?

21. Un disco de 8.00 cm de radio da vueltas con una rapidez constante de 1 200 rev/min en torno a su eje central. Deter-

mine (a) su rapidez angular en radianes por segundo, (b) la rapidez tangencial en un punto a 3.00 cm de su centro, (c) la aceleración radial de un punto sobre el borde y (d) la distancia total que recorre un punto en el borde en 2.00 s.

22. Una escalera recta se apoya contra la pared de una casa. La escalera tiene rieles de 4.90 m de largo, unidos mediante peldaños de 0.410 m de largo. Su extremo inferior está sobre suelo sólido pero inclinado, de modo que la parte superior de la escalera está 0.690 m a la izquierda de donde debe estar, y es inseguro ascender por la escalera. Usted quiere poner una roca bajo un pie de la escalera para compensar la pendiente del terreno. (a) ¿Cuál debe ser el grosor de la roca? (b) ¿Usar las ideas de este capítulo hace más fácil explicar la solución al inciso (a)? Explique su respuesta.

23. Un automóvil que viaja sobre una pista circular plana (sin peralte) acelera uniformemente desde el reposo con una aceleración tangencial de 1.70 m/s^2. El automóvil recorre un cuarto del camino alrededor del círculo antes de derrapar de la pista. Determine el coeficiente de fricción estática entre el automóvil y la pista a partir de estos datos.

24. Un automóvil que viaja sobre una pista circular plana (sin peralte) acelera uniformemente desde el reposo con una aceleración tangencial de a. El automóvil recorre un cuarto del camino alrededor del círculo antes de derrapar de la pista. Determine el coeficiente de fricción estática entre el automóvil y la pista a partir de estos datos.

25. En un proceso de fabricación se utiliza un rodillo cilíndrico grande para aplanar el material alimentado debajo de éste. El diámetro del rodillo es de 1.00 m, y cuando está en rotación alrededor de un eje fijo, su posición angular se expresa como

$$\theta = 2.50t^2 - 0.600t^3$$

donde θ está en radianes y t está en segundos. (a) Encuentre la rapidez angular máxima del rodillo. (b) ¿Cuál es la rapidez tangencial máxima de un punto en el borde de la rueda? (c) ¿En qué momento t debe la fuerza impulsora quitarse del rodillo para que el rodillo no invierta su sentido de rotación? (d) Cuántas vueltas ha dado el rodillo entre $t = 0$ y el tiempo que encontró en el inciso (c).

26. **Problema de repaso.** Un objeto pequeño con 4.00 kg de masa se mueve contra las manecillas del reloj con rapidez angular constante de 1.50 rad/s en un círculo de 3.00 m de radio con centro en el origen. Comienza en el punto con vector de posición 3.00 $\hat{\mathbf{i}}$ m. Después se somete a un desplazamiento angular de 9.00 rad. (a) ¿Cuál es su vector de posición? Use notación de vector unitario para todas las respuestas vectoriales. (b) ¿En qué cuadrante se ubica la partícula y qué ángulo forma su vector de posición con el eje positivo x? (c) ¿Cuál es su velocidad? (d) ¿En qué dirección se mueve? (e) ¿Cuál es su aceleración? (f) Bosqueje sus vectores de posición, velocidad y aceleración. (g) ¿Qué fuerza total se ejerce sobre el objeto?

Sección 10.4 Momento de torsión

27. Encuentre el momento de torsión neto sobre la rueda de la figura P10.27 en torno al eje a través de O, considerando $a = 10.0$ cm y $b = 25.0$ cm.

28. La caña de pescar en la figura P10.28 forma un ángulo de 20.0° con la horizontal. ¿Cuál es el momento de torsión que ejerce el pez en torno a un eje perpendicular a la página y que pasa a través de las manos del pescador, si el pez jala en la línea de pesca con una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = 100$ N a un ángulo de 37.0° debajo de la horizontal? La fuerza se aplica en un punto que está a 2.00 m de las manos del pescador.

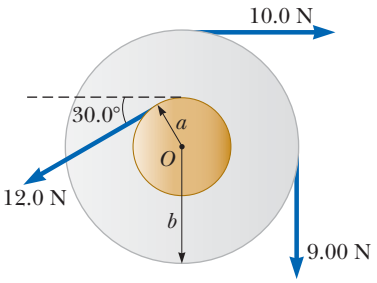


Figura P10.27

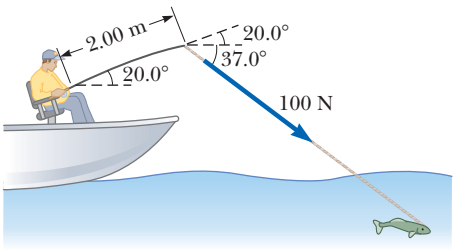


Figura P10.28

Sección 10.5 Análisis de modelo: objeto rígido bajo un momento de torsión neto

29. Un motor eléctrico hace girar un volante mediante una banda transportadora que acopla una polea en el motor y una polea que está rígidamente unida al volante, como se muestra en la figura P10.29. El volante es un disco sólido con una masa de 80.0 kg y un diámetro de $R = 0.625$ m. Da vuelta sobre un eje sin fricción. Su polea tiene masa mucho más pequeña y un radio de 0.230 m. La tensión T_u en el segmento superior (tenso) de la banda es 135 N, y el volante tiene una aceleración angular en sentido de las manecillas del reloj de 1.67 rad/s^2. Encuentre la tensión en el segmento inferior (flojo) de la banda.

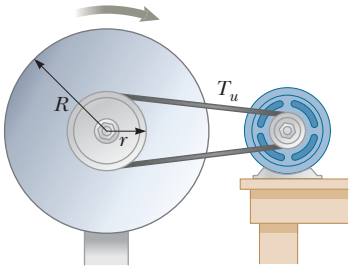


Figura P10.29

30. Una rueda de molino tiene la forma de un disco sólido uniforme de 7.00 cm de radio y 2.00 kg de masa. Parte del reposo y acelera uniformemente bajo la acción del momento de torsión constante de 0.600 N · m que el motor ejerce sobre la rueda. (a) ¿Cuánto tarda la rueda en alcanzar su rapidez operativa final de 1 200 rev/min? (b) ¿Cuántas revoluciones da mientras acelera?

31. Un carrusel de 150 kg en forma de un disco sólido uniforme horizontal de 1.50 m de radio se pone en movimiento al enrollar una cuerda sobre el borde del disco y tirar de la cuerda. ¿Qué fuerza constante se debe ejercer sobre la cuerda para llevar al carrusel del reposo hasta una rapidez angular de 0.500 rev/s en 2.00 s?

32. **Problema de repaso.** Un bloque de masa $m_1 = 2.00$ kg y un bloque de masa $m_2 = 6.00$ kg están conectados mediante una cuerda sin masa sobre una polea en la forma de un disco sólido que tiene radio $R = 0.250$ m y masa $M = 10.0$ kg. A estos bloques se les permite moverse sobre una cuña fija de ángulo $\theta = 30.0°$, como se muestra en la figura P10.32. El coeficiente de fricción cinética es 0.360 para ambos bloques. (a) Dibuje diagramas de cuerpo libre de ambos bloques y de la polea. Determine (b) la aceleración de los dos bloques y (c) las tensiones en la cuerda en ambos lados de la polea.

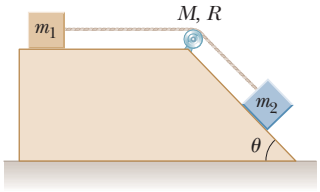


Figura P10.32

33. Un avión a escala con 0.750 kg de masa está amarrado al suelo con un alambre de modo que vuela en un círculo de 30.0 m de radio. El motor del avión proporciona un empuje neto de 0.800 N perpendicular al alambre de unión. (a) Encuentre el momento de torsión que produce el empuje neto en torno al centro del círculo. (b) Encuentre la aceleración angular del avión. (c) Encuentre la aceleración traslacional del avión tangente a su trayectoria de vuelo.

34. Un disco que tiene 100 kg · m^2 de momento de inercia es libre de dar vuelta sin fricción, partiendo del reposo, en torno a un eje fijo a través de su centro. Una fuerza tangencial cuya magnitud puede variar de $F = 0$ a $F = 50.0$ N se aplica a cualquier distancia que varíe de $R = 0$ a $R = 3.00$ m del eje de rotación. (a) Encuentre un par de valores de F y R que hagan que el disco complete 2.00 revoluciones en 10.0 s. (b) ¿Es su respuesta del inciso (a) una respuesta única? ¿Cuántas respuestas existen?

35. La combinación de una fuerza aplicada y una fuerza de fricción produce un momento de torsión total constante de 36.0 N · m sobre una rueda giratoria en torno a un eje fijo. La fuerza aplicada actúa durante 6.00 s. Durante este tiempo, la rapidez angular de la rueda aumenta de 0 a 10.0 rad/s. Después se retira la fuerza aplicada y la rueda llega al reposo en 60.0 s. Encuentre (a) el momento de inercia de la rueda, (b) la magnitud del momento de torsión debida a la fricción y (c) el número total de revoluciones de la rueda durante el intervalo de 66.0 s.

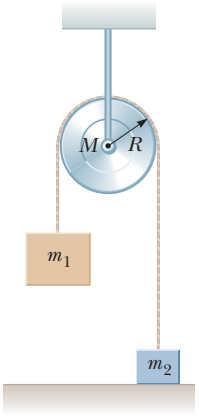


Figura P10.36

36. **Problema de repaso.** Considere el sistema que se muestra en la figura P10.36 con $m_1 = 20.0$ kg, $m_2 = 12.5$ kg, $R = 0.200$ m y la masa de la polea $M = 5.00$ kg. El objeto m_2 descansa sobre el suelo y el objeto m_1 está 4.00 m sobre el suelo cuando se libera del reposo. El eje de la polea no tiene fricción. La cuerda es ligera, no se estira y no se desliza sobre la polea. (a) Calcule el intervalo de tiempo requerido para que m_1 golpee el suelo. (b) ¿Cómo cambiaría su respuesta si la polea no tuviera masa?

37. Una rueda de alfarero, un disco de piedra grueso de 0.500 m de radio y 100 kg de masa, gira libremente a 50.0 rev/min. El alfarero puede detener la rueda en 6.00 s al presionar un trapo húmedo contra el borde y ejercer una fuerza radialmente hacia adentro de 70.0 N. Encuentre el coeficiente efectivo de fricción cinética entre la rueda y el trapo.

Sección 10.6 Cálculo de momentos de inercia

38. Estime un orden de magnitud para el momento de inercia de su cuerpo mientras está de pie y gira en torno a un eje vertical a través de lo alto de su cabeza y el punto a la mitad entre sus tobillos. En su solución establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.

39. Una puerta delgada sólida uniforme tiene 2.20 m de altura, 0.870 m de ancho y 23.0 kg de masa. (a) Encuentre su momento de inercia para rotación en sus bisagras. (b) ¿Alguna parte de la información es innecesaria?

40. Dos bolas con masas M y m se conectan mediante una barra rígida de longitud L y masa despreciable, como se muestra en la figura P10.40. Para un eje perpendicular a la barra, (a) muestre que el sistema tiene el momento de inercia mínimo cuando el eje pasa a través del centro de masa. (b) Demuestre que este momento de inercia es $I = \mu L^2$, donde $\mu = mM/(m + M)$.

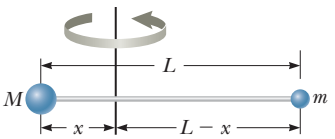


Figura P10.40

41. La figura P10.41 muestra una vista lateral de la llanta de un automóvil antes de ser montada. Haga un modelo que tenga dos paredes laterales de grosor uniforme de 0.635 cm y una pared de huella de 2.50 cm de grosor uniforme y 20.0 cm de ancho. Suponga que el caucho tiene densidad uniforme igual a 1.10×10^3 kg/m^3. Encuentre su momento de inercia en torno a un eje a través de su centro.

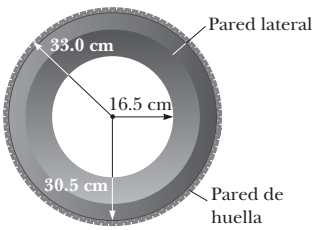


Figura P10.41

42. Con el procedimiento del ejemplo 10.7, demuestre que el momento de inercia en torno al eje y de la barra rígida en la figura 10.15 es $\frac{1}{3}ML^2$.

43. Tres delgadas barras idénticas, cada una de longitud L y masa m, se sueldan mutuamente perpendiculares, como se muestra en la figura P10.43. El ensamble da vueltas en torno a un eje que pasa por el extremo de una barra

y es paralelo a la otra. Determine el momento de inercia de esta estructura alrededor de este eje.

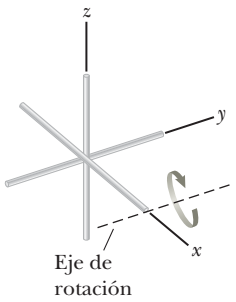


Figura P10.43

Sección 10.7 Energía cinética rotacional

44. Barras rígidas de masa despreciable yacen a lo largo del eje y y conectan tres partículas (figura P10.44). El sistema da vueltas en torno al eje x con una rapidez angular de 2.00 rad/s. Encuentre (a) el momento de inercia en torno al eje x, (b) la energía cinética rotacional total evaluada a partir de $\frac{1}{2}I\omega^2$, (c) la rapidez tangencial de cada partícula y (d) la energía cinética total evaluada a partir de $\sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$. (e) Compare las respuestas para energía cinética en los incisos (a) y (b).

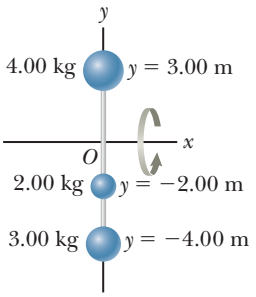


Figura P10.44

45. Las cuatro partículas de la figura P10.44 están conectadas mediante barras rígidas de masa despreciable. El origen está en el centro del rectángulo. El sistema da vueltas en el plano xy en torno al eje z con una rapidez angular de 6.00 rad/s. Calcule (a) el momento de inercia del sistema en torno al eje z y (b) la energía cinética rotacional del sistema.

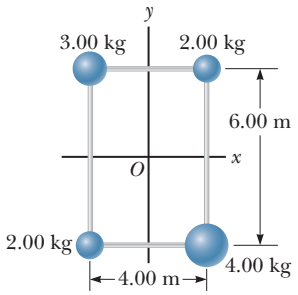


Figura P10.45

46. Muchas máquinas emplean levas para varios propósitos, como abrir y cerrar válvulas. En la figura P10.46, la leva es un disco circular de radio r con un agujero de diámetro R que lo corta. Como se ve en la figura, el agujero no pasa por el centro del disco. La leva perforada tiene masa M y está montada sobre una flecha cilíndrica uniforme sólida de diámetro R y también masa M. ¿Cuál es la energía cinética de la combinación flecha-leva cuando gira con rapidez angular ω en torno al eje de la flecha?

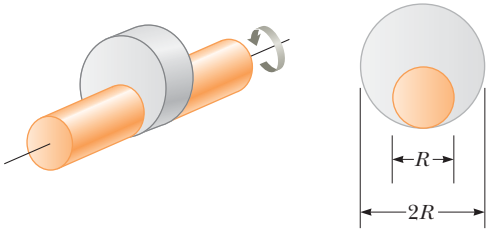


Figura P10.46

47. Una *war-wolf* o *trebuchet* (catapulta) es un dispositivo que se usó durante la Edad Media para lanzar rocas a los castillos, y ahora a veces se usa para arrojar grandes vegetales y pianos como deporte. En la figura P10.47 se muestra un trebuchet simple. Modélelo como una barra rígida de masa despreciable de 3.00 m de largo que une partículas de masa $m_1 = 0.120$ kg y $m_2 = 60.0$ kg en sus extremos. Puede dar vuelta sobre un eje horizontal sin fricción perpendicular a la barra y a 14.0 cm de la partícula con mayor masa. La barra se libera desde el reposo en una orientación horizontal. (a) Encuentre la rapidez máxima que logra el objeto más pequeño. (b) Mientras el objeto más pequeño gana rapidez, ¿se mueve con aceleración constante? (c) ¿Se mueve con aceleración tangencial constante? (d) ¿El trebuchet se mueve con aceleración angular constante? (e) ¿Tiene cantidad de movimiento constante? (f) ¿El sistema trebuchet-Tierra tiene energía mecánica constante?

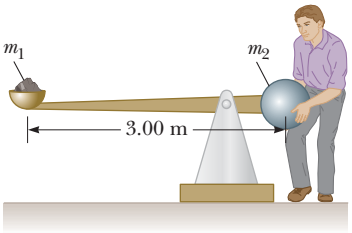


Figura P10.47

Sección 10.8 Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional

48. Un carrusel horizontal de 800 N es un disco sólido de 1.50 m de radio, que parte del reposo mediante una fuerza horizontal constante de 50.0 N aplicada tangencialmente al borde del disco. Encuentre la energía cinética del disco después de 3.00 s.

49. El Big Ben, el sobrenombre del reloj en la torre Elizabeth (nombre de la reina en 2012) en Londres, tiene una manecilla horaria de 2.70 m de largo con una masa de 60.0 kg y un minutero de 4.50 m de largo con una masa de 100 kg (figura P10.49). Calcule la energía cinética rotacional total de las dos manecillas en torno al eje de rotación. (Puede modelar las manecillas como largas barras delgadas que giran en torno a un extremo. Suponga que la manecilla horaria y el minutero giran a una razón constante de una revolución por 12 horas y 60 minutos, respectivamente).



Travelpix Ltd/Stone/Getty Images

Figura P10.49 Problemas 49 y 72.

50. Considere dos objetos con $m_1 > m_2$ conectados por una cuerda ligera que pasa sobre una polea teniendo un momento de inercia alrededor de su eje de rotación, como se muestra en la figura P10.50. La cuerda no se desliza sobre la polea ni se estira. La polea gira sin fricción. Los dos objetos se liberan a partir del reposo separados por una distancia vertical $2h$. (a) Utilice el principio de conservación de la energía para encontrar las rapideces de traslación de los objetos cuando se pasa uno al otro. (b) Encuentre la rapidez angular de la polea en este momento.

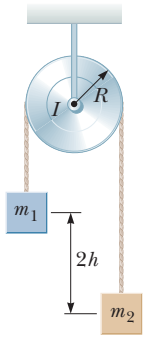


Figura P10.50

51. El trompo de la figura P10.51 tiene un momento de inercia igual a 4.00×10^{-4} kg · m^2 e inicialmente está en reposo. Es libre de dar vueltas en torno al eje estable AA'. Una cuerda, enrollada alrededor de una espiga a lo largo del eje del trompo, se jala en tal forma que mantiene una tensión constante de 5.57 N. Si la cuerda no se desliza mientras se desenrolla de la espiga, ¿cuál es la rapidez angular del trompo después de jalar 80.0 cm de cuerda de la espiga?

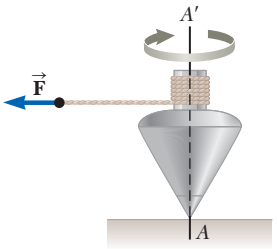


Figura P10.51

52. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* En una ciudad con un problema de contaminación de aire un autobús no tiene motor de combustión. Corre con la energía que extrae de un gran volante que gira rápidamente bajo el suelo del autobús. En la terminal de autobuses el volante se pone a girar a su máxima rapidez de rotación de 3 000 rev/min mediante un motor eléctrico. Cada vez que el autobús aumenta rapidez, el volante frena ligeramente. El autobús está equipado con frenos regenerativos, de modo que el volante aumenta rapidez cuando el autobús frena. El volante es un cilindro sólido uniforme con 1 200 kg de masa y 0.500 m de radio. El cuerpo del autobús realiza trabajo contra la resistencia del aire y la resistencia de rodamiento a la relación promedio de 25.0 hp mientras viaja con una rapidez promedio de 35.0 km/h.

53. En la figura P10.53, el objeto colgante tiene una masa de $m_1 = 0.420$ kg; el bloque deslizante tiene una masa de $m_2 = 0.850$ kg, y la polea es un cilindro hueco con una masa $M = 0.350$ kg, un radio interior $R_1 = 0.020\ 0$ m y un radio exterior $R_2 = 0.030\ 0$ m. Suponga que la masa de los rayos es insignificante. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie horizontal es $\mu_k = 0.250$. La polea gira sin fricción sobre su eje. El cable ligero no se estira y no se desliza en la polea. El bloque tiene una velocidad de $v_i = 0.820$ m/s hacia la polea cuando pasa un punto de referencia sobre la mesa. (a) Utilice métodos energéticos para predecir su velocidad después que ha pasado a un segundo punto, que está a 0.700 m. (b) Encuentre la rapidez angular de la polea en el mismo momento.

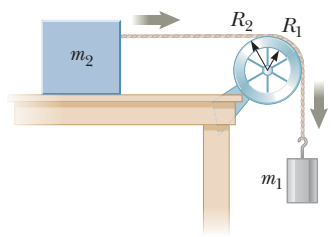


Figura P10.53

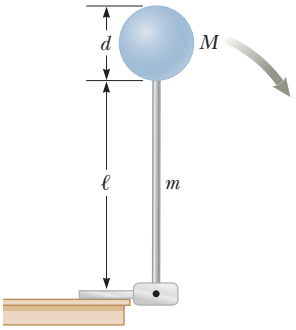


Figura P10.54

54. **Problema de repaso.** Una varilla cilíndrica, delgada, con $\ell = 24.0$ cm de largo con masa $m = 1.20$ kg tiene una bola de diámetro $d = 8.00$ cm y masa $M = 2.00$ kg unida a un extremo. El arreglo es originalmente vertical e inmóvil, con la pelota en la parte superior, como se muestra en la figura P10.54. La combinación es libre de girar con respecto al extremo inferior de la varilla después de haber recibido un leve empujón. (a) Después que la combinación gira en 90 grados, ¿cuál es su energía cinética rotacional? (b) ¿Cuál es la rapidez angular de la varilla y la bola? (c) ¿Cuál es la rapidez lineal del centro de masa de la bola? (d) ¿Cómo se compara con la rapidez de la pelota cuando ha caído libremente a través de la misma distancia de 28 cm?

55. **Problema de repaso.** Un objeto con una masa de $m = 5.10$ kg se une al extremo libre de una cadena ligera enrollada alrededor de un carrete de radio $R = 0.250$ y masa $M = 3.00$ kg. El carrete es un disco sólido, libre para girar en un plano vertical sobre el eje horizontal que pasa por su centro, como se muestra en la figura P10.55. El objeto suspendido se suelta a partir del reposo a 6.00 m por encima del piso. Determine (a) la tensión en la cuerda, (b) la aceleración del objeto y (c) la rapidez con la cual el objeto llega al piso. (d) Compruebe su respuesta al inciso (c) utilizando el modelo de sistema aislado (energía).

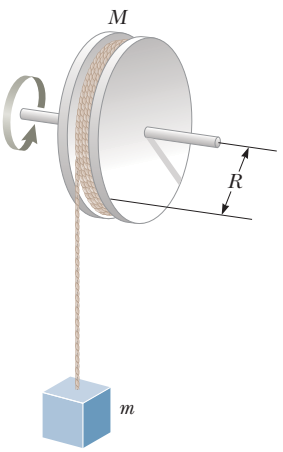


Figura P10.55

56. Este problema describe un método experimental para determinar el momento de inercia de un objeto con forma irregular, tal como la carga para un satélite. La figura P10.56 muestra un contrapeso de masa m suspendido mediante una cuerda enrollada alrededor de un carrete de radio r, que forma parte de una tornamesa que sostiene al objeto. La tornamesa puede dar vuelta sin fricción. Cuando el contrapeso se libera desde el reposo, desciende una distancia h y adquiere una rapidez v. Demuestre que el momento de inercia I del aparato giratorio (incluida la tornamesa) es $mr^2(2gh/v^2 - 1)$.

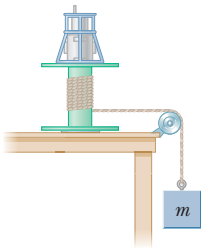


Figura P10.56

57. (a) Un disco sólido uniforme de radio R y masa M es libre de dar vuelta sobre un pivote sin fricción a través de un punto sobre su borde (figura P10.57). Si el disco se libera desde el reposo en la posición que se muestra por el círculo naranja, (a) ¿cuál es la rapidez de su centro de masa cuando el disco llega a la posición indicada por el círculo punteado? (b) ¿Cuál es la rapidez del punto más bajo en el disco en la posición punteada? (c) **¿Qué pasaría si?** Repita el inciso (a) con un aro uniforme.

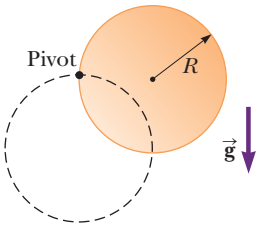


Figura P10.57

58. La cabeza de una cortadora de pasto tiene 100 g de cuerda devanados en un carrete cilíndrico ligero con diámetro interior de 3.00 cm y diámetro exterior de 18.0 cm, como se muestra en la figura P10.58. La cuerda tiene una densidad lineal de 10.0 g/m. Una sola hebra de la cuerda se extiende 16.0 cm desde el borde exterior del carrete. (a) Cuando se enciende, la cortadora aumenta su velocidad de 0 a 2 500 rev/min en 0.215 s. ¿Qué potencia promedio entrega el motor de la cortadora a la cabeza mientras acelera? (b) Cuando la cortadora corta pasto, gira a 2 000 rev/min y el pasto ejerce una fuerza tangencial promedio de 7.65 N sobre el extremo exterior de la cuerda, que todavía está a una distancia radial de 16.0 cm desde el borde exterior del carrete, ¿cuál es la potencia entregada a la cabeza bajo carga?

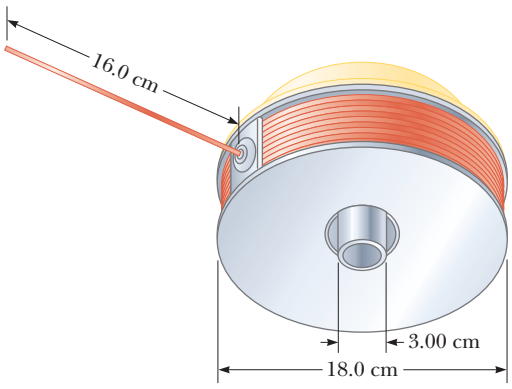


Figura P10.58

Sección 10.9 Movimiento de rodamiento de un objeto rígido

59. Un cilindro de 10.0 kg de masa rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal. En cierto instante su centro de masa tiene una rapidez de 10.0 m/s. Determine (a) la energía cinética traslacional de su centro de masa, (b) la energía cinética rotacional en torno a su centro de masa y (c) su energía total.

60. Una esfera sólida se libera de una altura h desde lo alto de un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Calcule la rapidez de la esfera cuando llega a la parte baja del plano inclinado (a) en el caso en que rueda sin deslizarse y (b) en el caso que se desliza sin fricción sin rodar. (c) Compare los intervalos de tiempo requeridos para llegar al fondo en los casos (a) y (b).

61. (a) Determine la aceleración del centro de masa de un disco sólido uniforme que rueda hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. (b) Compare esta aceleración con la que se encontró en el inciso (a) con la de un aro uniforme. (c) ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo que se requiere para mantener movimiento de rodamiento puro para el disco?

62. Un cubo liso de masa m y longitud de lado r se desliza con rapidez v sobre una superficie horizontal con fricción despreciable. Después el cubo se mueve sobre un plano inclinado uniforme que forma un ángulo θ con la horizontal. Un cilindro de masa m y radio r rueda sin deslizarse con su centro de masa moviéndose con rapidez v y encuentra un plano inclinado del mismo ángulo de inclinación pero con suficiente fricción que el cilindro continúa rodando sin deslizarse. (a) ¿Cuál objeto recorrerá mayor distancia arriba del plano inclinado? (b) Encuentre la diferencia entre las distancias máximas que los objetos viajan por el plano inclinado. (c) ¿Cuál es la explicación para esta diferencia en las distancias recorridas?

63. Un disco sólido uniforme y un aro uniforme se colocan lado a lado en lo alto de un plano inclinado de altura h. (a) Si se liberan desde el reposo al mismo tiempo y ruedan sin deslizarse, ¿cuál objeto alcanza primero la parte baja? (b) Verifique su respuesta al calcular sus magnitudes de velocidad cuando llegan a la parte baja en términos de h.

64. Una pelota de tenis es una esfera hueca con una pared delgada. Se pone a rodar sin deslizarse a 4.03 m/s sobre una sección horizontal de una pista, como se muestra en la figura P10.64. Rueda alrededor del interior de un bucle circular vertical de 90.0 cm de diámetro y finalmente deja la pista en un punto $h = 20.0$ cm abajo de la sección horizontal. (a) Encuentre la rapidez de la pelota en lo alto del bucle. (b) Demuestre que la pelota no caerá de la pista en la parte superior del bucle. (c) Encuentre su rapidez mientras deja la pista en el fondo. (d) **¿Qué pasaría si?** Suponga que la fricción estática entre la pelota y la pista es despre-

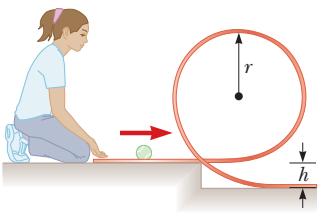


Figura P10.64

ciable, de modo que la pelota se desliza en lugar de rodar. ¿Su rapidez, por lo tanto, sería mayor, menor o igual en lo alto del bucle? (e) Explique su respuesta en el inciso (d).

65. Una lata metálica que contiene sopa de hongos condensada tiene 215 g de masa, 10.8 cm de alto y 6.38 cm de diámetro. Se coloca en reposo sobre su lado en lo alto de un plano inclinado de 3.00 m de largo que está a 25.0° con la horizontal y luego se libera para rodar recto hacia abajo. Llega a la parte baja del plano después de 1.50 s. (a) Si supone conservación de energía mecánica, calcule el momento de inercia de la lata. (b) ¿Qué parte de la información, si hay alguna, es innecesaria para calcular la solución? (c) ¿Por qué no puede calcularse el momento de inercia a partir de $I = \frac{1}{2}mr^2$ para la lata cilíndrica?

Problemas adicionales

66. Como se muestra en la figura P10.13 de la página 306, las chimeneas que se derrumban con frecuencia se rompen a la mitad de la caída porque el mortero entre los ladrillos no puede soportar mucho esfuerzo de corte. Conforme la chimenea comienza a caer, las fuerzas de corte deben actuar sobre las secciones superiores para acelerarlas tangencialmente, de modo que puedan mantener la rotación de la parte más baja de la pila. Por simplicidad, modele la chimenea como una barra uniforme de longitud ℓ articulada en el extremo inferior. La barra parte del reposo en una posición vertical (con el eje sin fricción en la parte baja) y cae bajo la influencia de la gravedad. ¿Qué fracción de la longitud de la barra tiene una aceleración tangencial mayor que g sen θ, donde θ es el ángulo que la chimenea forma con el eje vertical?

67. **Problema de repaso.** Una cuerda de nylon ligero de 4.00 m de largo se devana alrededor de un carrete cilíndrico uniforme de 0.500 m de radio y 1.00 kg de masa. El carrete se monta sobre un eje sin fricción e inicialmente está en reposo. La cuerda se jala del carrete con una aceleración constante de 2.50 m/s^2 de magnitud. (a) ¿Cuánto trabajo se hace sobre el carrete cuando éste llega a una rapidez angular de 8.00 rad/s? (b) ¿Cuánto tiempo tarda el carrete en alcanzar esta rapidez angular? (c) ¿Cuánta cuerda queda en el carrete cuando alcanza esta rapidez angular?

68. Un sistema de elevador en un edificio alto consiste en un carro de 800 kg y un contrapeso de 950 kg, unido mediante un cable que pasa sobre una polea de 280 kg de masa. La polea, llamada roldana, es un cilindro sólido de 0.700 m de radio que gira sobre un eje horizontal. El cable no se desliza sobre la roldana. Un número n de personas, cada una de 80.0 kg de masa, viajan en el carro del elevador móvil hacia arriba a 3.00 m/s y se aproximan al piso donde debe detenerse el carro. Como una medida de conservación de energía, una computadora desconecta el motor eléctrico del elevador justo en el momento correcto, de modo que el sistema roldana-carro-contrapeso se desliza libremente sin fricción y llega al reposo en el piso deseado. Ahí es atrapado por un simple cerrojo, en lugar de un freno pesado. (a) Determine la distancia d que el carro se desliza hacia arriba como función de n. Evalúe la distancia para (b) $n = 2$, (c) $n = 12$ y (d) $n = 0$. (e) ¿La expresión en el inciso (a) se aplica a todos los valores enteros de n? (f) Explique su respuesta al inciso (e). (g) Si un infinito de personas caben en el ascensor, ¿cuál es el valor de d?

69. Un eje gira a 65.0 rad/s en el tiempo $t = 0$. De ahí en adelante, su aceleración angular está dada por

$$\alpha = -10.0 - 5.00t$$

donde α está en rad/s^2 y t está en segundos. (a) Encuentre la rapidez angular del eje en $t = 3.00$ s. (b) ¿Qué ángulo describe cuando ha girado entre $t = 0$ y $t = 3$ s?

70. Un eje gira con una rapidez angular ω en el tiempo $t = 0$. De ahí en adelante su aceleración angular está dada por

$$\alpha = A + Bt$$

(a) Encuentre la rapidez angular del eje al tiempo t. (b) ¿Qué ángulo hace cuando ha girado entre $t = 0$ y t?

71. **Problema de repaso.** Una batidora consiste en tres delgadas barras, cada una de 10.0 cm de longitud. Las barras divergen de un eje central, separadas unas de otras en 120°, y todas giran en el mismo plano. Una bola se une al final de cada barra. Cada bola tiene área de sección transversal de 4.00 cm^2 y está tan moldeada que tiene un coeficiente de arrastre de 0.600. Calcule la potencia de entrada que se requiere para girar la batidora a 1 000 rev/min (a) en aire y (b) en agua.

72. La manecilla horaria y el minutero del Big Ben, el reloj de la torre Elizabeth en Londres, miden 2.70 m y 4.50 m de largo y tienen masas de 60.0 kg y 100 kg, respectivamente (vea la figura P10.49). (a) Determine el momento de torsión total debido al peso de estas manecillas en torno al eje de rotación cuando la hora es (i) 3:00, (ii) 5:15, (iii) 6:00, (iv) 8:20 y (v) 9:45. (Modele las manecillas como largas barras delgadas uniformes.) (b) Determine todas las horas cuando el momento de torsión total en torno al eje de rotación sea cero. Determine las horas al segundo más cercano y resuelva numéricamente una ecuación trascendental.

73. Una barra larga uniforme de longitud L y masa M gira en torno a un eje horizontal sin fricción a través de un extremo. La barra se libera del reposo en una posición vertical, como se muestra en la figura P10.73. En el instante cuando la barra está horizontal, encuentre: (a) su rapidez angular, (b) la magnitud de su aceleración angular, (c) las componentes x y y de la aceleración de su centro de masa y (d) las componentes de la fuerza de reacción en el pivote.

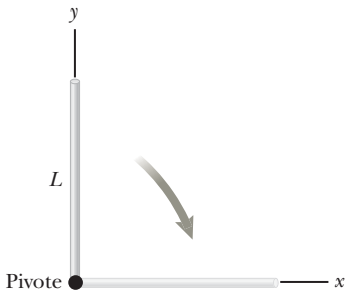


Figura P10.73

74. Una bicicleta se pone de cabeza mientras su propietario repara una llanta ponchada. Una amiga gira la otra rueda, de 0.381 m de radio, y observa que gotas de agua vuelan tangencialmente. Ella mide la altura que alcanzan las gotas que se mueven verticalmente (figura P10.74 de la página 332). Una gota que salta de la llanta en una vuelta

alcanza $h = 54.0$ cm sobre el punto tangente. Una gota que sale en la siguiente vuelta se eleva 51.0 cm sobre el punto tangente. La altura a la que se elevan las gotas disminuye debido a que disminuye la rapidez angular de la rueda. A partir de esta información, determine la magnitud de la aceleración angular promedio de la rueda.

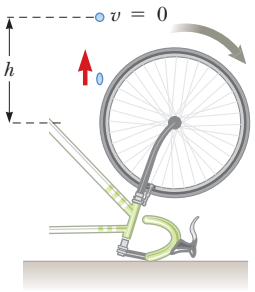


Figura P10.74 Problemas 74 y 75.

75. Una bicicleta se pone de cabeza mientras su propietario repara una llanta ponchada. Una amiga gira la otra rueda, de radio R, y observa que gotas de agua vuelan tangencialmente. Ella mide la altura que alcanzan las gotas que se mueven verticalmente (figura P10.74). Una gota que salta de la llanta en una vuelta se eleva una distancia h_1 sobre el punto tangente. Una gota que sale en la siguiente vuelta se eleva una distancia $h_2 < h_1$ sobre el punto tangente. La altura a la que se elevan las gotas disminuye debido a que disminuye la rapidez angular de la rueda. A partir de esta información, determine la magnitud de la aceleración angular promedio de la rueda.

76. (a) ¿Cuál es la energía cinética rotacional de la Tierra en torno a su eje de giro? Modele la Tierra como una esfera uniforme y use datos de las páginas finales del texto. (b) La energía cinética rotacional de la Tierra disminuye de manera estable debido a la fricción de las mareas. Encuentre el cambio en un día si supone que el periodo rotacional aumenta 10.0 μs cada año.

77. **Problema de repaso.** Dos bloques, como se muestra en la figura P10.77, están conectados mediante una cuerda de masa despreciable que pasa sobre una polea de radio $r = 0.250$ m y momento de inercia I. El bloque sobre el plano inclinado sin fricción se mueve hacia arriba con una aceleración constante $a = 2.00$ m/s^2. Con esta información, encontramos el momento de inercia de la polea. (a) ¿Qué análisis de modelo es adecuado para los bloques? (b) ¿Qué análisis de modelo es adecuado para la polea? (c) A partir del análisis de modelo en el inciso (a), encuentre la tensión T_1. (d) En forma similar, encuentre la tensión T_2. (e) A partir del análisis de modelo del inciso (b), encuentre una expresión simbólica para el momento de inercia de la polea en términos de las tensiones T_1 y T_2, del radio r de la polea y de la aceleración a. (f) Encuentre el valor numérico del momento de inercia de la polea.

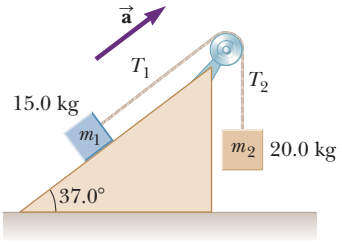


Figura P10.77

78. **Problema de repaso.** Una cuerda se enrolla alrededor de un disco uniforme de radio R y masa M. El disco se libera desde el reposo con la cuerda vertical y su extremo superior amarrado a una barra fija (figura P10.78). Demuestre que (a) la tensión en la cuerda es un tercio del peso del disco, (b) la magnitud de la aceleración del centro de masa es $2g/3$ y (c) la rapidez del centro de masa es $(4gh/3)^{1/2}$ después que el disco descendió una distancia h. (d) Verifique su respuesta al inciso (c) usando un método de energía.

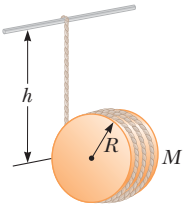


Figura P10.78

79. El carrete que se muestra en la figura P10.79 tiene radio R y momento de inercia I. Un extremo del bloque de masa m se conecta a un resorte con constante de fuerza k, y el otro extremo se amarra a una cuerda enrollada alrededor del carrete. El eje del carrete y el plano inclinado no tienen fricción. El carrete se enrolla contra las manecillas del reloj, de modo que el resorte se estira una distancia d desde su posición no estirada y luego el carrete se libera desde el reposo. Encuentre la rapidez angular del carrete cuando el resorte nuevamente está en su posición no estirada.

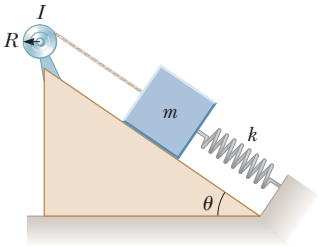


Figura P10.79

80. Una demostración común, que se ilustra en la figura P10.80, consiste en una bola que descansa en un extremo de una tabla uniforme de longitud ℓ, con bisagras en el otro extremo y elevada a un ángulo θ. Una taza ligera se une a la tabla en r_c de modo que atrapará la bola cuando la barra de soporte se retire súbitamente. (a) Demuestre que la bola retrasará su caída respecto a la de la tabla que cae cuando θ sea menor que 35.3°.

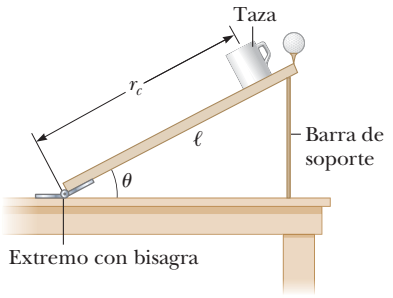


Figura P10.80

(b) Si supone que la tabla tiene 1.00 m de largo y se sostiene a este ángulo límite, demuestre que la taza debe estar a 18.4 cm del extremo que se mueve.

81. Una esfera sólida uniforme de radio r se coloca en la superficie interior de un tazón hemisférico con radio R mucho mayor. La esfera se libera desde el reposo a un ángulo θ con la vertical y rueda sin deslizarse (figura P10.81). Determine la rapidez angular de la esfera cuando llega al fondo del tazón.

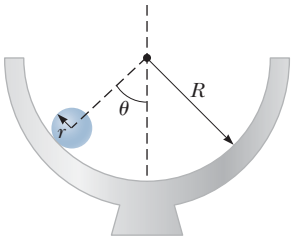


Figura P10.81

82. **Problema de repaso.** Un carrete de alambre de masa M y radio R se desenrolla bajo una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$ (figura P10.82). Si supone que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no se desliza, demuestre que (a) la aceleración del centro de masa es $4\vec{\mathbf{F}}/3M$ y (b) la fuerza de fricción es hacia la *derecha* e igual en magnitud a $F/3$. (c) Si el cilindro parte del reposo y rueda sin deslizarse, ¿cuál es la rapidez de su centro de masa después que rodó una distancia d?

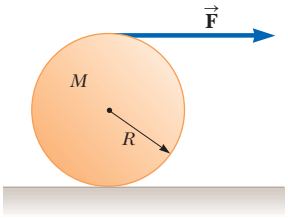


Figura P10.82

83. Una esfera sólida de masa m y radio r rueda sin deslizarse a lo largo de la pista que se muestra en la figura P10.83. Parte del reposo con el punto más bajo de la esfera a una altura h sobre la parte baja del bucle de radio R, mucho mayor que r. (a) ¿Cuál es el valor mínimo de h (en términos de R) tal que la esfera complete el bucle? (b) ¿Cuáles son las componentes de la fuerza neta sobre la esfera en el punto P si $h = 3R$?

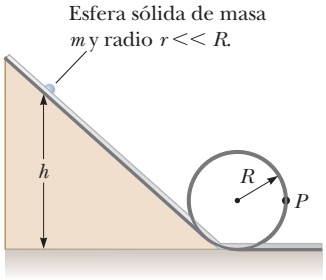


Figura P10.83

84. Una barra delgada de 0.630 kg de masa y 1.24 m de longitud está en reposo, colgando verticalmente de una bisagra fuerte fija en su extremo superior. Súbitamente se le aplica una fuerza impulsiva horizontal $14.7\hat{\mathbf{i}}$ N. (a) Suponga que la fuerza actúa en el extremo inferior de la barra. Encuentre la aceleración de su centro de masa y (b) la fuerza horizontal que ejerce la bisagra. (c) Suponga que la fuerza actúa en el punto medio de la barra. Encuentre la aceleración de este punto y (d) la reacción horizontal de la bisagra. (e) ¿Dónde se puede aplicar el impulso de modo que la bisagra no ejerza fuerza horizontal? Este punto se llama *centro de percusión*.

85. Una delgada barra de longitud h y masa M se mantiene verticalmente con su extremo inferior descansando sobre una superficie horizontal sin fricción. Luego la barra se libera para caer libremente. (a) Determine la rapidez de su centro de masa justo antes de golpear la superficie horizontal. (b) **¿Qué pasaría si?** Ahora suponga que la barra tiene un eje fijo en su extremo inferior. Determine la rapidez del centro de masa de la barra justo antes de golpear la superficie.

86. **Problema de repaso.** Un payaso equilibra una pequeña uva esférica en la parte superior de su cabeza calva, que también tiene la forma de una esfera. Después de ganar suficientes aplausos, la uva empieza a caer a partir del reposo y rueda sin deslizarse hacia abajo. La uva dejará de tener contacto con el cuero cabelludo del payaso cuando la línea radial que la une al centro de curvatura haga un determinado ángulo con la vertical, ¿qué ángulo es?

Problemas de desafío

87. Un tablón con masa $M = 6.00$ kg descansa sobre lo alto de dos rodillos cilíndricos sólidos idénticos que tienen $R = 5.00$ cm y $m = 2.00$ kg (figura P10.87). Al tablón lo jala una fuerza horizontal constante $\vec{\mathbf{F}}$ de 6.00 N de magnitud aplicada al extremo del tablón y perpendicular a los ejes de los cilindros (que son paralelos). Los cilindros ruedan sin deslizarse sobre una superficie plana. Tampoco hay deslizamiento entre los cilindros y el tablón. (a) Encuentre la aceleración inicial de la tabla en el momento que los rodillos están equidistantes de los extremos de la tabla. (b) Encuentre la aceleración de los rodillos en este momento. (c) ¿Qué fuerzas de fricción están actuando en este momento?

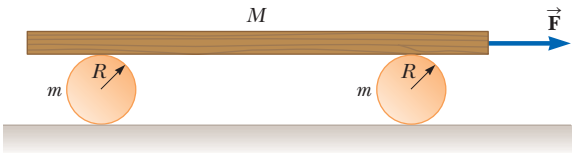


Figura P10.87

88. Mientras funciona un motor de gasolina, un volante que da vuelta con el cigüeñal almacena energía después de cada explosión de combustible para proporcionar la energía requerida para comprimir la siguiente carga de combustible y aire. En el motor de cierto tractor de pasto, suponga que un volante debe tener no más de 18.0 cm de diámetro. Su grosor, medido a lo largo de su eje de rotación, no debe ser mayor a 8.00 cm. El volante debe liberar 60.0 J de energía cuando su rapidez angular cae de 800 rev/min a 600 rev/min. Diseñe un volante de acero robusto (densidad 7.85×10^3 kg/m^3) para satisfacer estos

requisitos con la masa más pequeña que pueda alcanzar razonablemente. Especifique la forma y masa del volante.

89. Como resultado de la fricción, la rapidez angular de una rueda cambia con el tiempo de acuerdo con

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 e^{-\sigma t}$$

donde ω_0 y σ son constantes. La rapidez angular cambia de 3.50 rad/s en $t = 0$ a 2.00 rad/s en $t = 9.30$ s. (a) Use esta información para determinar σ y ω_0. Luego determine (b) la magnitud de la aceleración angular en $t = 3.00$ s, (c) el número de revoluciones que da la rueda en los primeros 2.50 s y (d) el número de revoluciones que da antes de llegar al reposo.

90. En el inciso (B) del ejemplo 10.2, el disco compacto se modeló como un objeto rígido bajo aceleración angular constante para encontrar el desplazamiento angular total durante el tiempo de reproducción del disco. En realidad, la aceleración angular de un disco no es constante. En este problema, explore el tiempo real dependiente de la aceleración angular. (a) Suponga que la pista en el disco es una espiral tal que bucles adyacentes de la pista están separados por una distancia pequeña h. Demuestre que el radio r de una porción conocida de la pista está dado por

$$r = r_i + \frac{h\theta}{2\pi}$$

donde r_i es el radio de la porción más interna de la pista y θ es el ángulo que el disco recorre para llegar a la posición de la pista de radio r. (b) Demuestre que la rapidez de cambio del ángulo θ está dado por

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r_i + (h\theta/2\pi)}$$

donde v es la rapidez constante con que la superficie del disco pasa el láser. (c) A partir del resultado del inciso (b), utilice integración para encontrar una expresión para el ángulo θ como función del tiempo. (d) A partir del resultado del inciso (c), derive para encontrar la aceleración angular del disco como función del tiempo.

91. Un carrete de hilo consiste en un cilindro de radio R_1 con tapas laterales de radio R_2, como se muestra en la vista lateral que se ilustra en la figura P10.91. La masa del carrete, incluido el hilo, es m, y su momento de inercia en torno a un eje a través de su centro es I. El carrete se coloca sobre una superficie horizontal rugosa, de modo que rueda sin deslizarse cuando una fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que actúa hacia la derecha se aplica al extremo libre del hilo. (a) Demuestre que la magnitud de la fuerza de fricción que ejerce la superficie sobre el carrete está dada por

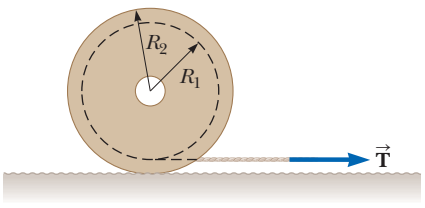


Figura P10.91

$$f = \left(\frac{I + mR_1R_2}{I + mR_2^2}\right)T$$

(b) Determine la dirección de la fuerza de fricción.

92. Un cordón se enrolla alrededor de una polea de masa m y radio r. El extremo libre del cordón está conectado a un bloque de masa M. El bloque parte del reposo y luego se desliza por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal, como se ve en la figura P10.92. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es μ. (a) Use métodos energéticos para mostrar que la rapidez del bloque como función de la posición d abajo del plano inclinado es

$$v = \sqrt{\frac{4Mgd(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta)}{m + 2M}}$$

(b) Encuentre la magnitud de la aceleración del bloque en términos de μ, m, M, g y θ.

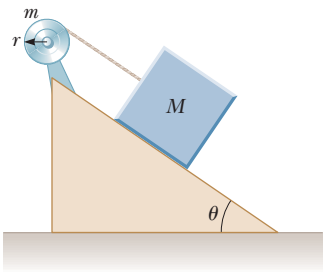


Figura P10.92

93. Un carrusel está en reposo. Un perro corre sobre el suelo justo afuera de la circunferencia del carrusel, y se mueve con una rapidez angular constante de 0.750 rad/s. El perro no cambia su ritmo cuando ve lo que ha estado buscando: un hueso que descansa en el borde del carrusel a un tercio de revolución enfrente de él. En el instante en que el perro ve el hueso ($t = 0$), el carrusel comienza a moverse en la dirección en que corre el animal, con una aceleración angular constante igual a 0.015 0 rad/s^2. (a) ¿En qué tiempo el perro alcanzará el hueso? (b) El confundido perro sigue corriendo y pasa el hueso. ¿Cuánto tiempo después que el carrusel comienza a girar el perro y el hueso se emparejan por segunda vez?

94. Un carrete uniforme hueco tiene radio interior $R/2$, radio exterior R y masa M (figura P10.94). Está montado de modo que da vueltas sobre un eje horizontal fijo. Un contrapeso de masa m se conecta al extremo de una cuerda enrollada alrededor del carrete. El contrapeso cae desde el reposo en $t = 0$ a una posición y en el tiempo t. Demuestre que el momento de torsión debido a las fuerzas de fricción entre carrete y eje es

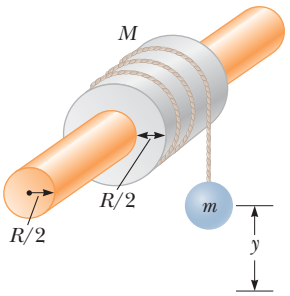


Figura P10.94

$$\tau_f = R\left[m\left(g - \frac{2y}{t^2}\right) - M\frac{5y}{4t^2}\right]$$

Cantidad de movimiento angular

CAPÍTULO

11



11.1 Producto vectorial y momento de torsión

11.2 Análisis de modelo: sistema no aislado (cantidad de movimiento angular)

11.3 Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido rotatorio

11.4 Análisis de modelo: sistema aislado (cantidad de movimiento angular)

11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

Dos motociclistas se inclinan precariamente en una curva de una pista de carreras. El análisis de esa inclinación en la curva se apoya en principios asociados con la cantidad de movimiento angular. *(Stuart Westmorland/The Image Bank/Getty Images)*

El tema central de este capítulo es la cantidad de movimiento angular, una cantidad que tiene un papel clave en la dinámica rotacional. En analogía con el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal, también se tiene un principio de conservación de la cantidad de movimiento angular. La cantidad de movimiento angular de un sistema aislado es constante. Para la cantidad de movimiento angular, un sistema es aislado si sobre él no actúan momentos de torsión externos. Un sistema es no aislado si sobre él actúa un momento de torsión externo neto. Al igual que la ley de conservación de cantidad de movimiento lineal, la ley de conservación de cantidad de movimiento angular es una ley fundamental de la física, también válida para sistemas relativistas y cuánticos.

11.1 Producto vectorial y momento de torsión

Una importante consideración al definir la cantidad de movimiento angular es el proceso de multiplicar dos vectores mediante la operación llamada *producto vectorial*. El producto vectorial se introducirá al considerar la naturaleza vectorial del momento de torsión.

Considere una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre una partícula ubicada en el punto P y descrita por el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$ (figura 11.1, página 336). Como se vio en la sección 10.6, la *magnitud* del momento de torsión debida a esta fuerza en torno a un eje a través del origen es rF sen ϕ, donde ϕ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$. El eje en torno al que $\vec{\mathbf{F}}$ tiende a producir rotación es perpendicular al plano formado por $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$.

El vector momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se relaciona con los dos vectores $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$. Es posible establecer una relación matemática entre $\vec{\boldsymbol{\tau}}$, $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ al emplear una operación matemática llamada **producto vectorial**:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \qquad (11.1)$$

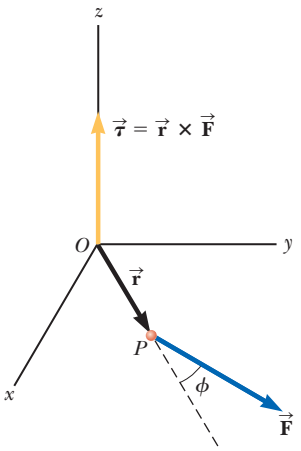


Figura 11.1 El vector momento de torsión $\vec{\tau}$ se encuentra en una dirección perpendicular al plano formado por el vector de posición $\vec{r}$ y el vector fuerza aplicada $\vec{F}$. En la situación mostrada, $\vec{r}$ y $\vec{F}$ están en el plano *xy*, así el momento de torsión está a lo largo del eje *z*.

Propiedades del producto vectorial

Ahora se dará una definición formal del producto vectorial. Dados dos vectores cualesquiera $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ se define como un tercer vector $\vec{C}$, que tiene una magnitud de $AB \operatorname{sen} \theta$, donde θ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Es decir, si $\vec{C}$ está dado por

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \tag{11.2}$$

su magnitud es

$$C = AB \operatorname{sen} \theta \tag{11.3}$$

La cantidad $AB \operatorname{sen} \theta$ es igual al área del paralelogramo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$, como se muestra en la figura 11.2. La *dirección* de $\vec{C}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y la mejor forma de determinar esta dirección es aplicar la regla de la mano derecha, que se ilustra en la figura 11.2. Los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de $\vec{A}$ y luego se doblan en la dirección que giraría $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$ a través del ángulo θ. La dirección del pulgar recto hacia arriba es la dirección de $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$. Debido a la notación, $\vec{A} \times \vec{B}$ con frecuencia se lee "$\vec{A}$ cruz $\vec{B}$", por esto el producto vectorial también se llama **producto cruz**.

Algunas propiedades del producto vectorial que se siguen de su definición son:

1. A diferencia del producto escalar, el producto vectorial *no* es conmutativo. En vez de ello, el orden en que los dos vectores se multiplican en un producto cruz es importante:
$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \tag{11.4}$$
Por lo tanto, si cambia el orden de los vectores en un producto cruz, debe cambiar el signo. Esta propiedad se verifica fácilmente con la regla de la mano derecha.
2. Si $\vec{A}$ es paralelo a $\vec{B}$ ($\theta = 0$ o 180°), entonces $\vec{A} \times \vec{B} = 0$; en consecuencia, se sigue que $\vec{A} \times \vec{A} = 0$.
3. Si $\vec{A}$ es perpendicular a $\vec{B}$, entonces $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$.
4. El producto vectorial obedece la ley distributiva:
$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \tag{11.5}$$
5. La derivada del producto cruz respecto de alguna variable como *t* es
$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} \tag{11.6}$$
donde es importante mantener el orden multiplicativo de los términos en el lado derecho en vista de la ecuación 11.4.

La dirección de $\vec{C}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y su dirección es determinada mediante la regla de la mano derecha.

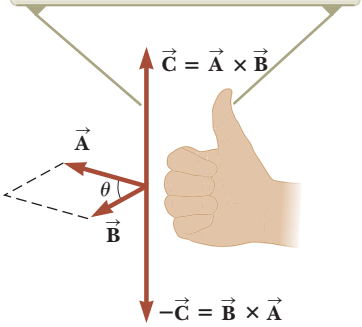


Figura 11.2 El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ es un tercer vector $\vec{C}$ que tiene una magnitud $AB \operatorname{sen} \theta$ igual al área del paralelogramo que se muestra.

Productos cruz de vectores unitarios

Se deja como ejercicio (problema 4) demostrar a partir de las ecuaciones 11.3 y 11.4, y de la definición de vectores unitarios, que los productos cruz de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ obedecen las siguientes reglas:

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \tag{11.7a}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k} \tag{11.7b}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i} \tag{11.7c}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j} \tag{11.7d}$$

Los signos son intercambiables en los productos cruz. Por ejemplo, $\vec{A} \times (-\vec{B}) = -\vec{A} \times \vec{B}$ e $\hat{i} \times (-\hat{j}) = -\hat{i} \times \hat{j}$

El producto cruz de dos vectores cualesquiera $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se puede expresar en términos de determinantes:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{i} + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

Prevención de riesgos ocultos 11.1

El producto cruz es un vector Recuerde que el resultado de tomar un producto cruz entre dos vectores es *un tercer vector*. La ecuación 11.3 sólo da la magnitud de este vector.

Al expandir estos determinantes se obtiene el resultado:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{\mathbf{i}} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\hat{\mathbf{j}} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (11.8)$$

Dada la definición del producto cruz, ahora se puede asignar una dirección al vector momento de torsión. Si la fuerza se encuentra en el plano *xy*, como en la figura 11.1, el momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se representa por un vector paralelo al eje *z*. La fuerza en la figura 11.1 crea un momento de torsión que tiende a girar a la partícula contra las manecillas del reloj en torno al eje *z*; la dirección de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ es hacia *z* creciente, y por lo tanto $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ está en la dirección *z* positiva. Si en la figura 11.1 se invierte la dirección de $\vec{\mathbf{F}}$, entonces $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ estaría en la dirección *z* negativa.

Examen rápido 11.1 ¿Cuál de los siguientes enunciados sobre la relación entre la magnitud del producto cruz de dos vectores y el producto de las magnitudes de los vectores es verdadero? **(a)** $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ es mayor que AB. **(b)** $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ es menor que AB. **(c)** $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ podría ser mayor o menor que AB, dependiendo del ángulo entre los vectores. **(d)** $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ podría ser igual a AB.

Ejemplo 11.1 El producto vectorial

Dos vectores que se encuentran en el plano *xy* están dados por las ecuaciones $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$. Encuentre $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y compruebe que $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Dadas las notaciones en vectores unitarios de los vectores, piense en qué direcciones apuntan los vectores en el espacio. Dibújelos en un papel e imagine el paralelogramo que se muestra en la figura 11.2 para estos vectores.

Categorizar Como se utiliza la definición del producto cruz explicada en esta sección, entonces este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Escriba el producto cruz de los dos vectores:
$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$

Realice la multiplicación:
$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 2\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 2\hat{\mathbf{i}} \times 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 3\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{j}}$$

Aplique las ecuaciones de la 11.7a a la 11.7d para evaluar los diversos términos:
$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0 + 4\hat{\mathbf{k}} + 3\hat{\mathbf{k}} + 0 = 7\hat{\mathbf{k}}$$

Para comprobar que $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$, evalúe $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$:
$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \times (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$$

Efectúe la multiplicación:
$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = (-\hat{\mathbf{i}}) \times 2\hat{\mathbf{i}} + (-\hat{\mathbf{i}}) \times 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} \times 3\hat{\mathbf{j}}$$

Aplique las ecuaciones de la 11.7a a la 11.7d para evaluar los diversos términos:
$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0 - 3\hat{\mathbf{k}} - 4\hat{\mathbf{k}} + 0 = -7\hat{\mathbf{k}}$$

Por lo tanto, $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$. Como un método alternativo para encontrar $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$, podría usar la ecuación 11.8. ¡Inténtelo!

Ejemplo 11.2 El vector momento de torsión

Una fuerza de $\vec{\mathbf{F}} = (2.00\,\hat{\mathbf{i}} + 3.00\,\hat{\mathbf{j}})$ N se aplica a un objeto que está pivoteado a un eje fijo alineado a lo largo del eje coordenado *z*. La fuerza se aplica a un punto ubicado en $\vec{\mathbf{r}} = (4.00\,\hat{\mathbf{i}} + 5.00\,\hat{\mathbf{j}})$ m. Encuentre el vector momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ aplicado al objeto.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Dadas las notaciones en vectores unitarios, piense en las direcciones de los vectores fuerza y de posición. Si esta fuerza se aplicara en esta posición, ¿en qué dirección giraría un objeto pivoteado en el origen?

continúa

11.2 continuación

Categorizar Ya que se utiliza la definición del producto cruz explicado en esta sección, entonces este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Configure el vector momento de torsión empleando la ecuación 11.1:
$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = [(4.00\,\hat{\mathbf{i}} + 5.00\,\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}] \times [(2.00\,\hat{\mathbf{i}} + 3.00\,\hat{\mathbf{j}})\ \text{N}]$$

Realice la multiplicación:
$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = [(4.00)(2.00)\,\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + (4.00)(3.00)\,\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} + (5.00)(2.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} + (5.00)(3.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}]\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Use las ecuaciones de la 11.7a a la 11.7d para evaluar los diversos términos:
$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = [0 + 12.0\hat{\mathbf{k}} - 10.0\hat{\mathbf{k}} + 0]\ \text{N} \cdot \text{m} = 2.0\hat{\mathbf{k}}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Note que tanto $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ están en el plano *xy*. Como se esperaba, el vector momento de torsión es perpendicular a este plano, y tiene sólo una componente *z*. Si se siguen las reglas para cifras significativas explicadas en la sección 1.6, conducen a una respuesta con dos cifras significativas. Se perdió algo de precisión porque se terminó restando dos números muy cercanos entre sí.

11.2 Análisis de modelo: sistema no aislado (cantidad de movimiento angular)

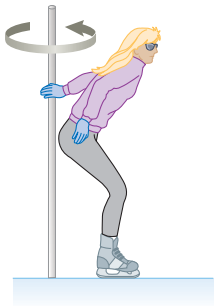


Figura 11.3 Mientras la patinadora pasa al lado del poste, se sujeta de él, lo que la hace girar rápidamente alrededor del poste en una trayectoria circular.

Imagine un poste recto, rígido y vertical a través del hielo en un lago helado (figura 11.3). Una patinadora se desliza rápidamente hacia el poste, sin chocar con él. Conforme se acerca al poste, estira su mano y lo sujeta, una acción que la hace moverse en una trayectoria circular alrededor del poste. Así como la idea de la cantidad de movimiento lineal ayuda a estudiar el movimiento traslacional, un análogo rotacional, la *cantidad de movimiento angular*, auxilia a analizar el movimiento de esta patinadora y otros objetos que experimentan movimiento rotacional.

En el capítulo 9 se desarrolló la forma matemática de la cantidad de movimiento lineal y después se procedió a mostrar cómo esta nueva cantidad era valiosa en la resolución de problemas. Para la cantidad de movimiento angular se seguirá un procedimiento similar.

Considere una partícula de masa m ubicada en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}}$ y moviéndose con cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}}$, como en la figura 11.4. Al describir el movimiento traslacional se encontró que la fuerza neta sobre la partícula es igual a la razón de cambio en el tiempo de su cantidad de movimiento lineal, $\sum \vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$ (vea la ecuación 9.3). Tome el producto cruz de cada lado de la ecuación 9.3 con $\vec{\mathbf{r}}$, lo que da el momento de torsión neto sobre la partícula en el lado izquierdo de la ecuación:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \sum \vec{\mathbf{F}} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

Ahora agregue al lado derecho el término $(d\vec{\mathbf{r}}/dt) \times \vec{\mathbf{p}}$ que es cero porque $d\vec{\mathbf{r}}/dt = \vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$ son paralelos. Por lo tanto,

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}}$$

El lado derecho de esta ecuación se reconoce como la derivada de $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ (véase la ecuación 11.6). Entonces,

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}})}{dt} \qquad (11.9)$$

que es muy similar en forma a la ecuación 9.3, $\sum \vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$. El momento de torsión desempeña el mismo papel en el movimiento rotacional que la fuerza en el movimiento traslacional, este resultado sugiere que la combinación $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ debería desempeñar el mismo papel en el movimiento rotacional que $\vec{\mathbf{p}}$ en el movimiento

traslacional. A esta combinación se le conoce como *cantidad de movimiento angular* de la partícula.

La **cantidad de movimiento angular** instantánea $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula relativa a un eje a través del origen O se define mediante el producto cruz del vector de posición instantáneo de la partícula $\vec{\mathbf{r}}$ y su cantidad de movimiento lineal instantánea $\vec{\mathbf{p}}$:

$$\vec{\mathbf{L}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} \tag{11.10}$$

◀ **Cantidad de movimiento angular de una partícula**

Ahora la ecuación 11.9 se puede escribir como

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} \tag{11.11}$$

que es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton, $\sum \vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$. El momento de torsión hace que la cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ cambie, tal como la fuerza causa que cambie la cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}}$.

Advierta que la ecuación 11.11 sólo es válida si $\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}$ y $\vec{\mathbf{L}}$ se miden en torno al mismo eje. Además, la expresión es válida para cualquier eje fijo en un marco inercial.

La unidad del SI de la cantidad de movimiento angular es kg · m^2/s. Advierta también que tanto la magnitud como la dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ dependen de la elección del eje. Al seguir la regla de la mano derecha, se ve que la dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$. En la figura 11.4, $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$ están en el plano xy, así que $\vec{\mathbf{L}}$ apunta en la dirección z. Ya que $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$, la magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$ es

$$L = mvr \operatorname{sen} \phi \tag{11.12}$$

donde ϕ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$. Se sigue que L es cero cuando $\vec{\mathbf{r}}$ es paralelo a $\vec{\mathbf{p}}$ ($\phi = 0$ o 180°). En otras palabras, cuando la velocidad traslacional de la partícula es a lo largo de una recta que pasa a través del eje, la partícula tiene cantidad de movimiento angular cero respecto al eje. Por otra parte, si $\vec{\mathbf{r}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{p}}$ ($\phi = 90°$), entonces $L = mvr$. En dicho instante, la partícula se mueve exactamente como si estuviera en el borde de una rueda giratoria en torno al eje en un plano definido por $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$.

La cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula respecto a un eje es un vector perpendicular a la posición de la partícula $\vec{\mathbf{r}}$ relativa al eje y también es ortogonal a su cantidad de movimiento $\vec{\mathbf{p}}$.

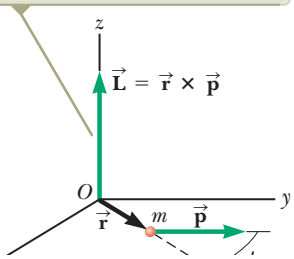


Figura 11.4 La cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula es un vector dado por $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$.

Examen rápido 11.2 Recuerde a la patinadora descrita al inicio de esta sección. Considere que su masa es m. **(i)** ¿Cuál sería su cantidad de movimiento angular respecto al poste en el instante en que está a una distancia d del poste si ella patinara directamente hacia él con rapidez v? (a) Cero, (b) mvd, (c) imposible de determinar. **(ii)** ¿Cuál sería su cantidad de movimiento angular respecto al poste en el instante en que está a una distancia perpendicular a del poste? (a) Cero, (b) mvd, (c) mva, (d) imposible de determinar.

Prevención de riesgos ocultos 11.2

¿La rotación es necesaria para la cantidad de movimiento angular? Se puede definir cantidad de movimiento angular incluso si la partícula no se mueve en una trayectoria circular. Una partícula moviéndose en una línea recta tiene cantidad de movimiento angular en torno a cualquier eje desplazado de la trayectoria de la partícula.

Ejemplo 11.3 Cantidad de movimiento angular de una partícula en movimiento circular

Una partícula se mueve en el plano xy en una trayectoria circular de radio r, como se muestra en la figura 11.5. Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento angular en relación con un eje a través de O cuando su velocidad es $\vec{\mathbf{v}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La cantidad de movimiento lineal de la partícula siempre cambia en dirección (pero no en magnitud). Por lo tanto, puede estar tentado a concluir que la cantidad de movimiento angular de la partícula siempre cambia. Sin embargo, en esta situación, éste no es el caso. Vea por qué.

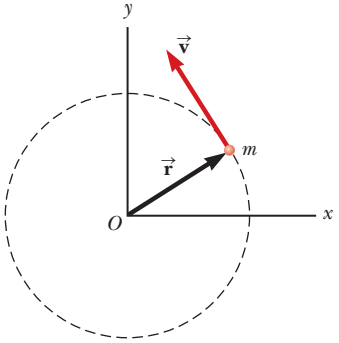


Figura 11.5 (Ejemplo 11.3) Una partícula moviéndose en un círculo de radio r tiene una cantidad de movimiento angular en torno a un eje a través de O que tiene magnitud mvr. El vector $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ apunta hacia *fuera* de la página.

continúa

11.3 continuación

Categorizar Use la definición de la cantidad de movimiento angular de una partícula explicada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 11.2 para evaluar la magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$: $L = mvr \operatorname{sen} 90° = mvr$

Este valor de L es constante porque los tres factores a la derecha son constantes. La dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ también es constante, aun cuando la dirección de $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ siga cambiando. Para comprobar esta afirmación, aplique la regla de la mano derecha para encontrar la dirección de $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}$ en la figura 11.5. Su pulgar apunta hacia arriba y se aleja de la página, así que ésta es la dirección de $\vec{\mathbf{L}}$. En consecuencia, se puede escribir la expresión vectorial $\vec{\mathbf{L}} = (mvr)\hat{\mathbf{k}}$. Si la partícula se moviera en sentido de las manecillas del reloj, $\vec{\mathbf{L}}$ apuntaría hacia abajo y adentro de la página y $\vec{\mathbf{L}} = -(mvr)\hat{\mathbf{k}}$. Una partícula en movimiento circular uniforme tiene una cantidad de movimiento angular constante en torno a un eje que pasa a través del centro de su trayectoria.

Cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas

Empleando las técnicas de la sección 9.7, se puede demostrar que la segunda ley de Newton para un sistema de partículas es

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}}{dt}$$

Esta ecuación establece que la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es igual a la razón de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento lineal total del sistema. Vea si es posible hacer un enunciado similar para movimiento rotacional. La cantidad de movimiento angular total de un sistema de partículas en torno a algún eje se define como la suma vectorial de las cantidades de movimiento angulares de las partículas individuales:

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{L}}_n = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i$$

donde la suma vectorial es sobre todas las n partículas en el sistema.

La derivación de esta ecuación respecto al tiempo da

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i$$

donde se usó la ecuación 11.11 para sustituir la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular de cada partícula con el momento de torsión neto sobre la partícula.

Los momentos de torsión que actúan sobre las partículas del sistema son aquellos asociados con fuerzas internas entre las partículas y aquellos relacionados con fuerzas externas. Sin embargo, el momento de torsión neto asociado con todas las fuerzas internas es cero. Recuerde que la tercera ley de Newton dice que las fuerzas internas entre las partículas del sistema son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Si supone que estas fuerzas se encuentran a lo largo de la línea de separación de cada par de partículas, el momento de torsión total alrededor de algún eje que pasa a través de un origen O debido a cada par de fuerza acción-reacción es cero (es decir, el brazo de momento d, desde O hasta la línea de acción de las fuerzas, es igual para ambas partículas y las fuerzas están en direcciones opuestas). Por lo tanto, en la suma el momento de torsión interno neto es cero. Se concluye que la cantidad de movimiento angular total de un sistema varía con el tiempo sólo si un momento de torsión externo neto actúa sobre el sistema:

El momento de torsión externo neto sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular del sistema

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} \qquad (11.13)$$

De hecho, esta ecuación es el análogo rotacional de $\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = d\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}/dt$ para un sistema de partículas. La ecuación 11.13 es la representación matemática de la **versión de cantidad de movimiento angular del modelo de sistema no aislado**. Si un sistema es no aislado en el sentido que existe un momento de torsión neto sobre él, el momento de torsión es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular.

Aunque no se prueba aquí, este enunciado es verdadero sin importar el movimiento del centro de masa. Incluso se aplica si el centro de masa acelera, siempre que el momento de torsión y la cantidad de movimiento angular se evalúen respecto a un eje a través del centro de masa.

Se puede reacomodar e integrar la ecuación 11.13 para obtener

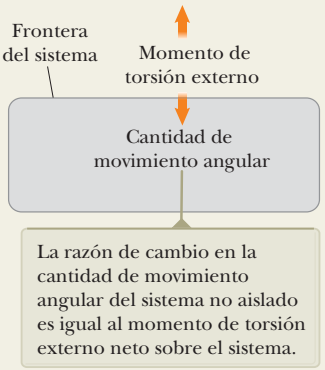
$$\Delta \vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \int \left(\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} \right) dt$$

Esta ecuación representa el *teorema impulso angular-cantidad de momento angular*. Compare esta ecuación con la versión traslacional, ecuación 9.40.

Análisis de modelos — Sistema no aislado (cantidad de movimiento angular)

Imagine un sistema que rota respecto a un eje. Si existe un momento de torsión externo neto actuando sobre el sistema, la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular del sistema es igual al momento de torsión externo neto

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} \qquad (11.13)$$



Ejemplos:

- un volante en un motor de automóvil incrementa su cantidad de movimiento angular cuando el motor aplica momento de torsión sobre él.
- la tina de una lavadora disminuye su cantidad de movimiento angular debido al momento de torsión friccional después de apagar la lavadora.
- el eje de la Tierra experimenta un movimiento de precesión debido al momento de torsión ejercido sobre la Tierra por la fuerza gravitacional del Sol.
- la armadura de un motor aumenta su cantidad de movimiento angular debido al momento de torsión ejercido por un campo magnético del entorno (capítulo 31).

Ejemplo 11.4 — Un sistema de objetos AM

Una esfera de masa m_1 y un bloque de masa m_2 están conectados mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea, como se muestra en la figura 11.6. El radio de la polea es R, y la masa de su borde delgado es M. Los rayos de la polea tienen masa despreciable. El bloque se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. Encuentre una expresión para la aceleración lineal de los dos objetos, utilice los conceptos de cantidad de movimiento angular y momento de torsión.

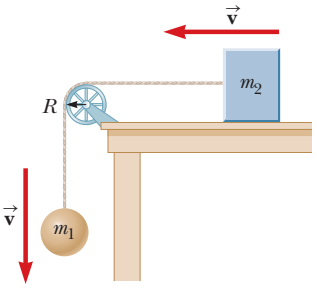


Figura 11.6 (Ejemplo 11.4) Cuando el sistema se libera, la esfera se mueve hacia abajo y el bloque se mueve hacia la izquierda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Cuando el sistema se libera, el bloque se desliza hacia la izquierda, la esfera cae y la polea rota contra las manecillas del reloj. Esta situación es similar a problemas que se han resuelto con anterioridad, excepto que ahora se quiere utilizar un enfoque de cantidad de movimiento angular.

Categorizar El bloque, la polea y la esfera se identifican como un *sistema no aislado* para *cantidad de movimiento angular* sujeto al momento de torsión externo debido a la fuerza gravitacional sobre la esfera. Calcule la cantidad de movimiento angular en torno a un eje que coincida con el eje de la polea. La cantidad de movimiento angular del sistema incluye la de dos objetos con desplazamiento traslacional (la esfera y el bloque) y un objeto (la polea) experimentando rotación pura.

Analizar En cualquier instante de tiempo, la esfera y el bloque tienen una rapidez común v, así que la cantidad de movimiento angular de la esfera es m_1vR y la del bloque es m_2vR. Al mismo instante, todos los puntos sobre el borde de la polea también se mueven con rapidez v, de modo que la cantidad de movimiento angular de la polea es MvR.

Ahora considere el momento de torsión externo total que actúa sobre el sistema en torno al eje de la polea. Ya que tiene un brazo de momento cero, la fuerza que ejerce el eje sobre la polea no contribuye al momento de torsión. Además, la fuerza nor-

continúa

11.4 continuación

mal que actúa sobre el bloque se equilibra con la fuerza gravitacional $m_2\vec{\mathbf{g}}$, así que dichas fuerzas no contribuyen al momento de torsión. La fuerza gravitacional $m_1\vec{\mathbf{g}}$ que actúa sobre la esfera produce un momento de torsión en torno al eje, igual en magnitud a m_1gR, donde R es el brazo de momento de la fuerza respecto al eje. Este resultado es el momento de torsión externo total en torno al eje de la polea; es decir, $\sum \tau_{\text{ext}} = m_1gR$.

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento angular total del sistema:

$$(1)\quad L = m_1vR + m_2vR + MvR = (m_1 + m_2 + M)vR$$

Sustituya esta expresión y el momento de torsión externo total en la ecuación 11.13, la representación matemática del modelo de sistema no aislado para cantidad de movimiento angular:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt}$$

$$m_1gR = \frac{d}{dt}[(m_1 + m_2 + M)vR]$$

$$(2)\quad m_1gR = (m_1 + m_2 + M)R\frac{dv}{dt}$$

Observando que $dv/dt = a$, resuelva la ecuación (2) para a:

$$(3)\quad a = \frac{m_1g}{m_1 + m_2 + M}$$

Finalizar Al evaluar el momento de torsión neto respecto al eje, no se incluyeron las fuerzas que la cuerda ejerce sobre los objetos porque dichas fuerzas son internas al sistema en consideración. En vez de ello, el sistema se analizó como un todo. Sólo los momentos de torsión *externos* contribuyen al cambio en la cantidad de movimiento angular del sistema. Si $M \to 0$ en la ecuación (3) resulta una ecuación que se llama A. Si $\theta \to 0$ en la ecuación (5) del ejemplo 5.10 se obtiene una ecuación denotada por B. ¿Concuerdan las ecuaciones A y B? En estos límites observe las figuras 5.15 y 11.6, ¿las dos ecuaciones *deberían* concordar?

11.3 Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido rotatorio

En el ejemplo 11.4 se consideró la cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas deformable. Ahora la atención se restringe a un sistema no deformable, un objeto rígido. Considere un objeto rígido rotatorio en torno a un eje fijo que coincide con el eje z de un sistema coordenado, como se muestra en la figura 11.7. Determine la cantidad de movimiento angular de este objeto. Cada *partícula* del objeto da vueltas en el plano xy alrededor del eje z con una rapidez angular ω. La magnitud de la cantidad de movimiento angular de una partícula de masa m_i en torno al eje z es $m_iv_ir_i$. Ya que $v_i = r_i\omega$ (ecuación 10.10), la magnitud de la cantidad de movimiento angular de esta partícula se expresa como

$$L_i = m_ir_i^2\omega$$

El vector $\vec{\mathbf{L}}_i$ para esta partícula se dirige a lo largo del eje z, como el vector $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

Ahora se puede encontrar la cantidad de movimiento angular (que en esta situación sólo tiene una componente z) de todo el objeto al tomar la suma de L_i sobre todas las partículas:

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_ir_i^2\omega = \left(\sum_i m_ir_i^2\right)\omega$$

$$L_z = I\omega \qquad (11.14)$$

donde $\Sigma_i\, m_ir_i^2$ se ha identificado como el momento de inercia I del objeto respecto al eje z (ecuación 10.19). Observe que la ecuación 11.14 es matemáticamente similar, en forma, a la ecuación 9.2 para la cantidad de movimiento lineal: $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$.

Ahora derive la ecuación 11.14 respecto al tiempo, y note que I es constante para un objeto rígido:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \qquad (11.15)$$

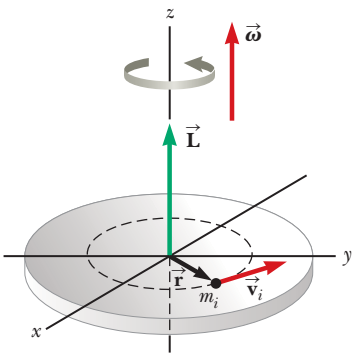


Figura 11.7 Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje, la cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ está en la misma dirección que la velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, de acuerdo con la expresión $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

donde α es la aceleración angular relativa al eje de rotación. Como dL_z/dt es igual al momento de torsión externo neto (véase la ecuación 11.13), la ecuación 11.15 adquiere la forma

$$\sum \tau_{ext} = I\alpha \qquad (11.16)$$

◀ **Forma rotacional de la segunda ley de Newton**

Es decir, el momento de torsión externo neto que actúa sobre un objeto rígido rotatorio en torno a un eje fijo es igual al momento de inercia respecto al eje de rotación multiplicado por la aceleración angular del objeto relativa a dicho eje. Este resultado es el mismo que en la ecuación 10.18, que fue deducido con el método de fuerza, pero la ecuación 11.16 se obtuvo mediante el concepto de cantidad de movimiento angular. Como se vio en la sección 10.7, la ecuación 11.16 es la representación matemática del objeto rígido bajo un análisis de modelo de momento de torsión neto. Esta ecuación también es válida para un objeto rígido rotatorio alrededor de un eje móvil, siempre que el eje en movimiento (1) pase a través del centro de masa y (2) sea un eje de simetría.

Si un objeto simétrico rota en torno a un eje fijo que pasa por su centro de masa, puede escribir la ecuación 11.14 en forma vectorial como $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}$, donde $\vec{\mathbf{L}}$ es la cantidad de movimiento angular total del objeto medida respecto al eje de rotación. Además, la expresión es válida para cualquier objeto, sin importar su simetría, si $\vec{\mathbf{L}}$ representa la componente de cantidad de movimiento angular a lo largo del eje de rotación.[1]

Examen rápido 11.3 Una esfera sólida y una esfera hueca tienen la misma masa y radio. Ambas giran con la misma rapidez angular. ¿Cuál tiene la mayor cantidad de movimiento angular? **(a)** La esfera sólida, **(b)** la esfera hueca, **(c)** ambas tienen la misma cantidad de movimiento angular, **(d)** imposible de determinar.

Ejemplo 11.5 Bola de boliche

Estime la magnitud de la cantidad de movimiento angular de una bola de boliche que gira a 10 rev/s, como se muestra en la figura 11.8.

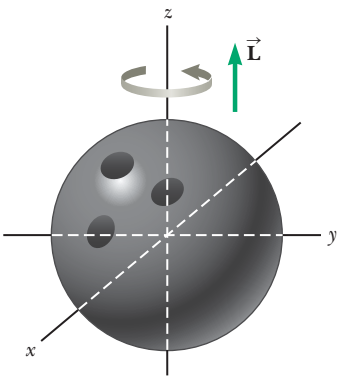


Figura 11.8 (Ejemplo 11.5) Una bola de boliche que rota en torno al eje z, en la dirección mostrada, tiene una cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ en la dirección z positiva. Si la dirección de rotación se invierte, entonces $\vec{\mathbf{L}}$ apunta en la dirección z negativa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine girar una bola de boliche sobre el suelo uniforme de un boliche. Como la bola es relativamente pesada, entonces la cantidad de movimiento angular debería ser relativamente grande.

Categorizar La cantidad de movimiento angular se evalúa con la ecuación 11.14, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Comience por hacer algunas estimaciones de los parámetros físicos relevantes y modele la bola como una esfera sólida uniforme. Una típica bola de boliche puede tener una masa de 7.0 kg y un radio de 12 cm.

A partir de la tabla 10.2, evalúe el momento de inercia de la bola en torno a un eje a través de su centro:

$$I = \tfrac{2}{5}MR^2 = \tfrac{2}{5}(7.0\ \text{kg})(0.12\ \text{m})^2 = 0.040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Con la ecuación 11.14 determine la magnitud de la cantidad de movimiento angular:

$$L_z = I\omega = (0.040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(10\ \text{rev/s})(2\pi\ \text{rad/rev}) = 2.53\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

Debido a lo burdo de las estimaciones, sólo se debe conservar una cifra significativa, así que $L_z = 3\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

[1] En general, la expresión $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}$ no siempre es válida. Si un objeto rígido rota en torno a un eje *arbitrario*, entonces $\vec{\mathbf{L}}$ y $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ pueden apuntar en distintas direcciones. En este caso, el momento de inercia no se trata como un escalar. En un sentido estricto, $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}$ sólo se aplica a objetos rígidos de cualquier forma que rotan respecto a uno de tres ejes mutuamente perpendiculares (llamados *ejes principales*) a través del centro de masa. Este concepto se explica en textos de mecánica más avanzados.

Ejemplo 11.6 El sube y baja AM

Un padre de masa m_f y su hija de masa m_d se sientan en extremos opuestos de un sube y baja a iguales distancias desde el eje en el centro (figura 11.9). El sube y baja se modela como una barra rígida de masa M y longitud ℓ, y se pivotea sin fricción. En cierto momento, la combinación rota en un plano vertical con una rapidez angular ω.

(A) Encuentre una expresión para la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema.

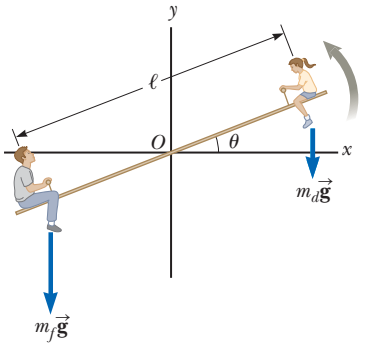


Figura 11.9 (Ejemplo 11.6) Un padre y su hija muestran la cantidad de movimiento angular sobre un sube y baja.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 11.9 identifique el eje z a través de O como el eje de rotación. El sistema rotatorio tiene cantidad de movimiento angular en torno a dicho eje.

Categorizar Ignore cualquier movimiento de los brazos o piernas del padre y la hija, y represéntelos como partículas. Por lo tanto, el sistema se modela como un objeto rígido. Esta primera parte del ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

El momento de inercia del sistema es igual a la suma de los momentos de inercia de las tres componentes: el sube y baja y las dos personas. Se puede remitir a la tabla 10.2 para obtener la expresión para el momento de inercia de la barra y usar la expresión de partícula $I = mr^2$ para cada persona.

Encuentre el momento de inercia total del sistema en torno al eje z a través de O:

$$I = \tfrac{1}{12}M\ell^2 + m_f\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_d\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)$$

Obtenga la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema:

$$L = I\omega = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)\omega$$

(B) Encuentre una expresión para la magnitud de la aceleración angular del sistema cuando el sube y baja forma un ángulo θ con la horizontal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Por lo general, los padres son más pesados que las hijas, así que el sistema no está en equilibrio y tiene una aceleración angular. Se espera que la aceleración angular sea positiva en la figura 11.9.

Categorizar La combinación de la tabla, el padre y la hija es un *objeto rígido sometido a un momento de torsión neto* debido al momento de torsión externo asociado con las fuerzas gravitacionales sobre el padre y la hija. De nuevo se identifica el eje de rotación como el eje z en la figura 11.9.

Analizar Para encontrar la aceleración angular del sistema en cualquier ángulo θ, primero calcule el momento de torsión neto sobre el sistema y luego use $\Sigma\,\tau_{ext} = I\alpha$ del modelo de objeto rígido sometido a un momento de torsión neto, para deducir una expresión para α.

Evalúe el momento de torsión debido a la fuerza gravitacional sobre el padre:

$$\tau_f = m_f g\,\frac{\ell}{2}\cos\theta \quad (\vec{\tau}_f \text{ afuera de la página})$$

Obtenga el momento de torsión debido a la fuerza gravitacional sobre la hija:

$$\tau_d = -m_d g\,\frac{\ell}{2}\cos\theta \quad (\vec{\tau}_d \text{ hacia la página})$$

Evalúe el momento de torsión externo neto ejercido sobre el sistema:

$$\sum\tau_{ext} = \tau_f + \tau_d = \tfrac{1}{2}(m_f - m_d)g\ell\cos\theta$$

Use la ecuación 11.16 e I del inciso (A) para encontrar α:

$$\alpha = \frac{\sum\tau_{ext}}{I} = \frac{2(m_f - m_d)g\cos\theta}{\ell\,[(M/3) + m_f + m_d]}$$

Finalizar Para un padre más pesado que su hija, la aceleración angular es positiva, como se esperaba. Si el sube y baja comienza con una orientación horizontal ($\theta = 0$) y se libera, la rotación es contra las manecillas del reloj en la figura 11.9 y el extremo del sube y baja del padre cae, lo que es consistente con la experiencia cotidiana.

¿QUÉ PASARÍA SI? Imagine que el padre se mueve hacia dentro del sube y baja a una distancia d desde el eje para intentar equilibrar los dos lados. ¿Cuál es la aceleración angular del sistema en este caso cuando se libera desde un ángulo arbitrario θ?

11.6 continuación

Respuesta La aceleración angular del sistema debe disminuir si el sistema está más equilibrado.

Encuentre el momento de inercia total respecto al eje z a través de O para el sistema modificado:

$$I = \tfrac{1}{12}M\ell^2 + m_f d^2 + m_d\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_d\right) + m_f d^2$$

Obtenga el momento de torsión neto ejercido sobre el sistema en torno a un eje a través de O:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \tau_f + \tau_d = m_f g d \cos\theta - \tfrac{1}{2}m_d g \ell \cos\theta$$

Encuentre la nueva aceleración angular del sistema:

$$\alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{(m_f d - \frac{1}{2}m_d \ell) g \cos\theta}{(\ell^2/4)\,[(M/3) + m_d] + m_f d^2}$$

El sube y baja se equilibra cuando la aceleración angular es cero. En esta situación, tanto padre como hija pueden empujar desde el suelo y elevarse al punto más alto posible.

Encuentre la posición requerida del padre al hacer $\alpha = 0$:

$$\alpha = \frac{(m_f d - \frac{1}{2}m_d \ell) g \cos\theta}{(\ell^2/4)[(M/3) + m_d] + m_f d^2} = 0$$

$$m_f d - \tfrac{1}{2}m_d \ell = 0 \quad \rightarrow \quad d = \left(\frac{m_d}{m_f}\right)\frac{\ell}{2}$$

En el raro caso en que el padre y la hija tengan la misma masa, el padre se ubica en el final del sube y baja, $d = \ell/2$.

11.4 Análisis de modelo: sistema aislado (cantidad de movimiento angular)

En el capítulo 9 se encontró que la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas permanece constante si el sistema está aislado; es decir, si la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es cero. Se tiene una ley de conservación análoga en el movimiento rotacional:

Conservación de cantidad de movimiento angular

> La cantidad de movimiento angular total de un sistema es constante tanto en magnitud como en dirección si el momento de torsión externo neto que actúa sobre el sistema es cero, es decir, si el sistema está aislado.

Con frecuencia, a este enunciado se le llama[2] el principio de **conservación de cantidad de movimiento angular** y es la base de la **versión de cantidad de movimiento angular del modelo de sistema aislado**. Este principio se sigue directamente de la ecuación 11.13, que indica que si

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \qquad (11.17)$$

entonces

$$\Delta \vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = 0 \qquad (11.18)$$

La ecuación 11.18 puede escribirse como

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \text{constante} \quad \text{o} \quad \vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f$$

Para un sistema aislado que consiste de pocas partículas, esta ley de conservación se escribe como $\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \sum \vec{\mathbf{L}}_n = \text{constante}$, donde el índice n denota la n-ésima partícula en el sistema.

Si un sistema rotatorio aislado es deformable, de modo que su masa se somete a redistribución en alguna forma, el momento de inercia del sistema cambia. Ya que la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema es $L = I\omega$ (ecuación

[2]La ecuación más general de conservación de la cantidad de movimiento angular es la ecuación 11.13, que describe cómo el sistema interactúa con su entorno.

Cuando sus brazos y piernas están cerca de su cuerpo, es pequeño el momento de inercia del patinador y su rapidez angular es grande.



Clive Rose/Getty Images

Para frenar al final de su giro, mueve brazos y piernas hacia fuera, lo que aumenta su momento de inercia.



Al Bello/Getty Images

Figura 11.10 La cantidad de movimiento angular se conserva mientras el patinador artístico ruso, medallista de oro, Evgeni Plushenko, participa en los Juegos Olímpicos de Invierno, Turín 2006.

11.14), la conservación de la cantidad de movimiento angular requiere que el producto de I y ω permanezca constante. Por lo tanto, un cambio en I para un sistema aislado requiere un cambio en ω. En este caso, el principio de conservación de cantidad de movimiento angular se expresa como

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{constante} \qquad (11.19)$$

Esta expresión es válida tanto para rotación en torno a un eje fijo, como para rotación alrededor de un eje a través del centro de masa de un sistema móvil en tanto dicho eje permanezca fijo en dirección. Sólo se necesita que el momento de torsión externo neto sea cero.

Muchos ejemplos demuestran la conservación de cantidad de movimiento angular para un sistema deformable. Usted ha observado a un patinador artístico girar al final de un programa (figura 11.10). La rapidez angular del patinador es grande cuando sus manos y pies están cerca del tronco de su cuerpo. Si se ignora la fricción entre el patinador y el hielo, no existen momentos de torsión externos sobre el patinador. El momento de inercia de su cuerpo aumenta mientras sus manos y pies se mueven alejándose de su cuerpo al final del giro. De acuerdo con el modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento angular, su rapidez angular debe disminuir. En forma similar, cuando los clavadistas o acróbatas quieren hacer piruetas, jalan manos y pies cerca de su cuerpo para rotar con mayor rapidez. En estos casos, la fuerza externa debida a la gravedad actúa a través del centro de masa y, por tanto, no ejerce momento de torsión en torno a un eje a través de este punto. En consecuencia, debe conservarse la cantidad de movimiento angular respecto del centro de masa; es decir, $I_i\omega_i = I_f\omega_f$. Por ejemplo, cuando los clavadistas quieren duplicar su rapidez angular, deben reducir su momento de inercia a la mitad de su valor inicial.

En la ecuación 11.18 se tiene una tercera versión del modelo de sistema aislado. Ahora se puede afirmar que la energía, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular de un sistema aislado se conservan:

$\Delta E_{\text{sistema}} = 0$ (si no hay transferencia de energía a través de la frontera del sistema)

$\Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = 0$ (si es cero la fuerza externa neta sobre el sistema)

$\Delta\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = 0$ (si es cero el momento de torsión externo neto sobre el sistema)

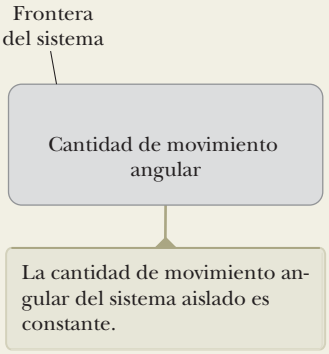
Un sistema puede estar aislado en términos de una de estas cantidades, pero no en términos de otras. Si un sistema es no aislado en términos de cantidad de movimiento lineal o angular, entonces frecuentemente también será no aislado en términos de energía, porque el sistema tiene una fuerza neta o momento de torsión sobre él y la fuerza neta o momento de torsión realizará trabajo sobre el sistema. Sin embargo, se pueden identificar sistemas que son no aislados en términos de energía pero aislados en términos de cantidad de movimiento. Por ejemplo, imagine apretando un balón (el sistema) entre sus manos. Se efectúa trabajo al comprimir el balón, así el sistema es no aislado en términos de energía, pero es nula la fuerza neta sobre el sistema, entonces el sistema es aislado en términos de cantidad de movimiento. Un enunciado similar podría hacerse respecto a torcer los extremos de una larga pieza de metal elástica con ambas manos. Se realiza trabajo sobre el metal (el sistema), así que la energía se almacena en el sistema no aislado como energía potencial elástica, pero es cero el momento de torsión neto sobre el sistema. Por lo tanto, el sistema es aislado en términos de cantidad de movimiento angular. Otros ejemplos son colisiones de objetos macroscópicos, los cuales representan sistemas aislados en términos de cantidad de movimiento, pero sistemas no aislados en términos de energía debido a la fuga de energía del sistema mediante ondas mecánicas (sonido).

Examen rápido 11.4 Una clavadista salta del trampolín y cae hacia el agua con el cuerpo recto y en rotación lenta. Jala sus brazos y piernas hacia una apretada posición plegada. ¿Qué le ocurre a su energía cinética rotacional? **(a)** Aumenta. **(b)** Disminuye. **(c)** Permanece igual. **(d)** Es imposible de determinar.

Análisis de modelo — Sistema aislado (cantidad de movimiento angular)

Imagine un sistema que rota en torno a un eje. Si no existe un momento de torsión externo neto sobre el sistema, entonces no hay cambio en la cantidad de movimiento angular del sistema:

$$\Delta \vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = 0 \qquad (11.18)$$



Al aplicar esta ley de conservación de cantidad de movimiento angular a un sistema cuyo momento de inercia cambia, se obtiene

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{constante} \qquad (11.19)$$

Ejemplos:

- después de la explosión de una supernova, el núcleo de una estrella colapsa a un pequeño radio y gira con mayor rapidez
- el cuadrado del periodo orbital de un planeta es proporcional al cubo de su semieje mayor; tercera ley de Kepler (capítulo 13)
- en transiciones atómicas se deben obedecer las reglas de selección sobre los números cuánticos para así conservar la cantidad de movimiento angular (capítulo 42)
- en el decaimiento beta de un núcleo radiactivo se debe emitir un neutrino para así conservar la cantidad de movimiento angular (capítulo 44)

Ejemplo 11.7 — Formación de una estrella de neutrones AM

Una estrella rota con un periodo de 30 días en torno a un eje a través de su centro. El periodo es el intervalo de tiempo necesario para que un punto sobre el ecuador de la estrella realice una revolución completa alrededor del eje de rotación. Después que la estrella experimente una explosión supernova, el núcleo estelar, que tiene un radio de 1.0×10^4 km, colapsa en una estrella de neutrones de radio 3.0 km. Determine el periodo de rotación de la estrella de neutrones.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El cambio en el movimiento de la estrella de neutrones es similar al del patinador descrito anteriormente, pero en dirección inversa. Conforme la masa de la estrella se acerca al eje de rotación, se espera que la estrella gire más rápido.

Categorizar Suponga que durante el colapso del núcleo estelar, (1) no actúa momento de torsión externo sobre él, (2) permanece esférico con la misma distribución de masa relativa y (3) su masa permanece constante. La estrella se clasifica como un *sistema aislado* en términos de *cantidad de movimiento angular*. No se conoce la distribución de masa de la estrella, pero se supuso que la distribución es simétrica, así que el momento de inercia se expresa como kMR^2, donde k es alguna constante numérica. (De la tabla 10.2, por ejemplo, se ve que $k = \frac{2}{5}$ para una esfera sólida y $k = \frac{2}{3}$ para un cascarón esférico.)

Analizar Use el símbolo T para el periodo, con T_i como el periodo inicial de la estrella y T_f para el periodo de la estrella de neutrones. La rapidez angular de la estrella está dada por $\omega = 2\pi/T$.

Del modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento angular, escriba la ecuación 11.19 para la estrella:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

Use $\omega = 2\pi/T$ para reescribir esta ecuación en términos de los periodos inicial y final:

$$I_i\left(\frac{2\pi}{T_i}\right) = I_f\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)$$

Sustituya los momentos de inercia en la ecuación precedente:

$$kMR_i^2\left(\frac{2\pi}{T_i}\right) = kMR_f^2\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)$$

Resuelva para el periodo final de la estrella:

$$T_f = \left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2 T_i$$

Sustituya valores numéricos:

$$T_f = \left(\frac{3.0\text{ km}}{1.0 \times 10^4\text{ km}}\right)^2 (30\text{ días}) = 2.7 \times 10^{-6}\text{ días} = 0.23\text{ s}$$

Finalizar Como se esperaba, la estrella de neutrones rota más rápido después del colapso. Se mueve muy rápido, de hecho, ¡gira aproximadamente cuatro veces cada segundo!

Ejemplo 11.8 El carrusel AM

Una plataforma horizontal con la forma de un disco circular rota libremente en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin fricción (figura 11.11). La plataforma tiene una masa $M = 100$ kg y un radio $R = 2.0$ m. Una estudiante cuya masa es $m = 60$ kg camina lentamente desde el borde del disco hacia su centro. Si la rapidez angular del sistema es 2.0 rad/s cuando la estudiante está en el borde, ¿cuál es la rapidez angular cuando alcanza un punto $r = 0.50$ m desde el centro?

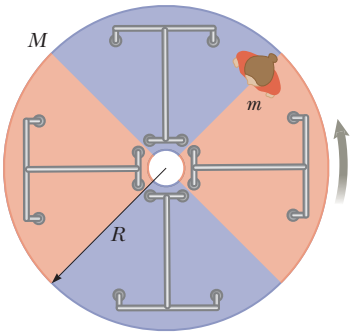


Figura 11.11 (Ejemplo 11.8) Conforme la estudiante camina hacia el centro de la plataforma giratoria, la rapidez angular del sistema aumenta porque la cantidad de movimiento angular del sistema permanece constante.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El cambio de rapidez en este caso es similar al del patinador que gira y a la estrella de neutrones en los ejemplos precedentes. Este problema es distinto porque parte del momento de inercia del sistema cambia (el de la estudiante) mientras la otra parte permanece fija (el de la plataforma).

Categorizar Ya que la plataforma da vueltas sobre un eje sin fricción, el sistema de la estudiante y la plataforma se identifica como un *sistema aislado* en términos de *cantidad de movimiento angular*.

Analizar Denote el momento de inercia de la plataforma como I_p y el de la estudiante como I_s. La estudiante se modela como una partícula.

Encuentre el momento de inercia inicial I_i del sistema (estudiante más plataforma) en torno al eje de rotación:

$$I_i = I_{pi} + I_{si} = \tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

Obtenga el momento de inercia del sistema cuando la estudiante camina a la posición $r < R$:

$$I_f = I_{pf} + I_{sf} = \tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

Escriba la ecuación 11.19 para el sistema:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

Sustituya los momentos de inercia:

$$(\tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2)\omega_i = (\tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2)\omega_f$$

Resuelva para la rapidez angular final:

$$\omega_f = \left(\frac{\tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2}\right)\omega_i$$

Sustituya valores numéricos:

$$\omega_f = \left[\frac{\tfrac{1}{2}(100\text{ kg})(2.0\text{ m})^2 + (60\text{ kg})(2.0\text{ m})^2}{\tfrac{1}{2}(100\text{ kg})(2.0\text{ m})^2 + (60\text{ kg})(0.50\text{ m})^2}\right](2.0\text{ rad/s}) = 4.1\text{ rad/s}$$

Finalizar Como se esperaba, la rapidez angular aumenta. Lo más rápido que este sistema podría girar sería cuando la estudiante se mueve al centro de la plataforma. Haga este cálculo para demostrar que esta rapidez angular máxima es 4.4 rad/s. Observe que la actividad descrita en este problema es peligrosa, como se explicó en relación con la fuerza de Coriolis en la sección 6.3.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si usted mide la energía cinética del sistema antes y después que la estudiante camine hacia dentro? ¿La energía cinética inicial y la energía cinética final son iguales?

Respuesta Es posible que esté tentado a decir que sí, porque el sistema está aislado. Sin embargo, recuerde que la energía se puede transformar de varias maneras, así que debe tener cuidado ante una pregunta de energía.

Encuentre la energía cinética inicial:

$$K_i = \tfrac{1}{2}I_i\omega_i^2 = \tfrac{1}{2}(440\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(2.0\text{ rad/s})^2 = 880\text{ J}$$

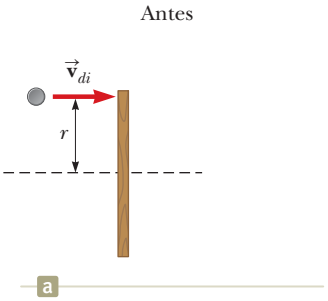
Encuentre la energía cinética final:

$$K_f = \tfrac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \tfrac{1}{2}(215\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(4.1\text{ rad/s})^2 = 1.80\times10^3\text{ J}$$

Por lo tanto, la energía cinética del sistema *aumenta*. La estudiante debe efectuar actividad muscular para moverse más cerca al centro de rotación, así que esta energía cinética extra viene de la energía potencial almacenada en el cuerpo de la estudiante de comidas previas. El sistema es aislado en términos de energía, pero un proceso de transformación dentro del sistema cambia la energía potencial a energía cinética.

Ejemplo 11.9 Colisión de disco y bastón AM

Un disco de 2.0 kg que viaja a 3.0 m/s golpea un bastón de 1.0 kg y 4.0 m de longitud que se encuentra plano sobre hielo casi sin fricción, como se muestra en la vista superior de la figura 11.12a. El disco golpea el extremo del bastón, a una distancia $r = 2.0$ m del centro del bastón. Suponga que la colisión es elástica y que el disco no se desvía de su línea de movimiento original. Encuentre la rapidez traslacional del disco, la rapidez traslacional del bastón y la rapidez angular del bastón después de la colisión. El momento de inercia del bastón en torno a su centro de masa es 1.33 kg · m^2.



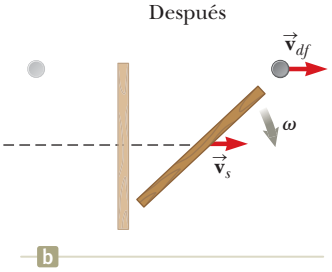


Figura 11.12 (Ejemplo 11.9) Vista superior de un disco que golpea un bastón en una colisión elástica. (a) Antes de la colisión el disco se mueve hacia el bastón. (b) La colisión hace que el bastón gire y se mueva hacia la derecha.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Examine la figura 11.12a e imagine lo que sucede después que el disco golpea el bastón. La figura 11.12b muestra lo que puede esperar: el disco continúa moviéndose con una rapidez más lenta y el bastón está tanto en movimiento traslacional como rotacional. Suponga que el disco no se desvía de su línea de movimiento original porque la fuerza que ejerce el bastón sobre el disco es paralela a la trayectoria original del disco.

Categorizar Ya que el hielo no tiene fricción, el disco y el bastón forman un *sistema aislado* en términos de *cantidad de movimiento lineal* y *cantidad de movimiento angular*. Ignore el sonido de la colisión y modele el sistema como un *sistema aislado* en términos de *energía*. Además, como la colisión se supuso elástica, la energía cinética del sistema es constante.

Analizar Note primero que se tienen tres incógnitas, así que se requieren tres ecuaciones para resolver simultáneamente.

Aplique el modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento lineal al sistema y reacomode el resultado:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = 0 \rightarrow (m_d v_{df} + m_s v_s) - m_d v_{di} = 0$$
$$(1)\quad m_d(v_{di} - v_{df}) = m_s v_s$$

Aplique el modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento angular al sistema y reacomode el resultado. Use un eje que pase por el centro de masa del bastón como el eje de rotación, tal que la trayectoria del disco esté a una distancia $r = 2.0$ m del eje de rotación:

$$\Delta\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = 0 \rightarrow (-rm_d v_{df} + I\omega) - (-rm_d v_{di}) = 0$$
$$(2)\quad -rm_d(v_{di} - v_{df}) = I\omega$$

Aplique el modelo de sistema aislado para energía al sistema, reacomode la ecuación y factorice la combinación de términos relativos al disco:

$$\Delta K = 0 \rightarrow \left(\tfrac{1}{2}m_d v_{df}^2 + \tfrac{1}{2}m_s v_s^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2\right) - \tfrac{1}{2}m_d v_{di}^2 = 0$$
$$(3)\quad m_d(v_{di} - v_{df})(v_{di} + v_{df}) = m_s v_s^2 + I\omega^2$$

Multiplique la ecuación (1) por r y sume a la ecuación (2):

$$rm_d(v_{di} - v_{df}) = rm_s v_s$$
$$-rm_d(v_{di} - v_{df}) = I\omega$$
$$0 = rm_s v_s + I\omega$$

Resuelva para ω:

$$(4)\quad \omega = -\frac{rm_s v_s}{I}$$

Divida la ecuación (3) entre la ecuación (1):

$$\frac{m_d(v_{di} - v_{df})(v_{di} + v_{df})}{m_d(v_{di} - v_{df})} = \frac{m_s v_s^2 + I\omega^2}{m_s v_s}$$
$$(5)\quad v_{di} + v_{df} = v_s + \frac{I\omega^2}{m_s v_s}$$

Sustituya la ecuación (4) en la ecuación (5):

$$(6)\quad v_{di} + v_{df} = v_s\left(1 + \frac{r^2 m_s}{I}\right)$$

Sustituya v_{df}, de la ecuación (1), en la ecuación (6):

$$v_{di} + \left(v_{di} - \frac{m_s}{m_d}v_s\right) = v_s\left(1 + \frac{r^2 m_s}{I}\right)$$

continúa

11.9 continuación

Resuelva para v_s y sustituya valores numéricos:

$$v_s = \frac{2v_{di}}{1 + (m_s/m_d) + (r^2 m_s/I)}$$

$$= \frac{2(3.0\ \text{m/s})}{1 + (1.0\ \text{kg}/2.0\ \text{kg}) + [(2.0\ \text{m})^2(1.0\ \text{kg})/1.33\ \text{kg}\cdot\text{m}^2]} = 1.3\ \text{m/s}$$

Sustituya valores numéricos en la ecuación (4):

$$\omega = -\frac{(2.0\ \text{m})(1.0\ \text{kg})(1.3\ \text{m/s})}{1.33\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} = -2.0\ \text{rad/s}$$

Resuelva la ecuación (1) para v_{df} y sustituya valores numéricos:

$$v_{df} = v_{di} - \frac{m_s}{m_d} v_s = 3.0\ \text{m/s} - \frac{1.0\ \text{kg}}{2.0\ \text{kg}}(1.3\ \text{m/s}) = 2.3\ \text{m/s}$$

Finalizar Estos valores parecen razonables. El disco se mueve más lentamente, después de la colisión, de lo que se movía antes del choque, y el bastón tiene una pequeña rapidez traslacional. La tabla 11.1 resume los valores inicial y final de las variables para el disco y el bastón, y comprueba la conservación de cantidad de movimiento lineal, cantidad de movimiento angular y energía cinética del sistema.

Tabla 11.1 **Comparación de valores en el ejemplo 11.9 antes y después de la colisión**

	v (m/s)	ω (rad/s)	p (kg · m/s)	L (kg · m²/s)	K_{trans} (J)	K_{rot} (J)
Antes						
Disco	3.0	—	6.0	−12	9.0	—
Bastón	0	0	0	0	0	0
Total para el sistema	—	—	6.0	−12	9.0	0
Después						
Disco	2.3	—	4.7	−9.3	5.4	—
Bastón	1.3	−2.0	1.3	−2.7	0.9	2.7
Total para el sistema	—	—	6.0	−12	6.3	2.7

Nota: Se conservan la cantidad de movimiento lineal, la cantidad de movimiento angular y la energía cinética total del sistema.

11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

Una clase de movimiento insólito y fascinante que probablemente ha observado es el de un trompo que gira en torno a su eje de simetría, como se muestra en la figura 11.13a. Si el trompo gira rápidamente, el eje de simetría rota en torno al eje z, barriendo un cono (véase la figura 11.13b). El movimiento del eje de simetría en torno a la vertical, conocido como **movimiento de precesión**, por lo general es lento en relación con el movimiento de giro del trompo.

Es muy natural preguntar por qué el trompo no cae. Ya que el centro de masa no está directamente arriba del punto pivote O, en el trompo actúa un momento de torsión neto en torno a un eje que pasa por O, un momento de torsión que resulta de la fuerza gravitacional $M\vec{\mathbf{g}}$. El trompo ciertamente caerá si no está girando. Sin embargo, como gira, tiene una cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ que se dirige a lo largo de su eje de simetría. Se demostrará que este eje de simetría se mueve alrededor del eje z (ocurre movimiento de precesión) porque el momento de torsión produce un cambio en la *dirección* del eje de simetría. Esta ilustración es un excelente ejemplo de la importancia de la naturaleza vectorial de la cantidad de movimiento angular.

Las características esenciales del movimiento de precesión se ilustran al considerar el giroscopio simple que se muestra en la figura 11.14a. En la figura 11.14b se indican las dos fuerzas que actúan sobre el giroscopio: la fuerza gravitacional hacia abajo $M\vec{\mathbf{g}}$ y la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ que actúa hacia arriba en el punto pivote O. La fuerza normal no produce momento de torsión en torno a un eje que pasa por el pivote porque su brazo de momento a través de ese punto es cero. Sin embargo, la fuerza gravitacional produce un momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times M\vec{\mathbf{g}}$ respecto al eje que pasa por O, donde la dirección de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{\mathbf{r}}$ y $M\vec{\mathbf{g}}$. Por necesidad, el vector $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se encuentra en un plano horizontal xy perpendicular al vector cantidad de

movimiento angular. El momento de torsión neto y la cantidad de movimiento angular del giroscopio se relacionan mediante la ecuación 11.13:

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

Esta expresión muestra que, en el intervalo de tiempo infinitesimal dt, el momento de torsión distinto de cero produce un cambio en la cantidad de movimiento angular $d\vec{\mathbf{L}}$, un cambio que está en la misma dirección que $\vec{\boldsymbol{\tau}}$. Por lo tanto, al igual que el vector momento de torsión, $d\vec{\mathbf{L}}$ también debe ser perpendicular a $\vec{\mathbf{L}}$. La figura 11.14c ilustra el movimiento de precesión resultante del eje de simetría del giroscopio. En un intervalo de tiempo dt, el cambio en cantidad de movimiento angular es $\vec{\mathbf{L}}_f - \vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\boldsymbol{\tau}}\, dt$. Ya que $d\vec{\mathbf{L}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{L}}$, la magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$ no cambia ($|\vec{\mathbf{L}}_i| = |\vec{\mathbf{L}}_f|$). En vez de ello, lo que cambia es la *dirección* de $\vec{\mathbf{L}}$. Como el cambio en la cantidad de movimiento angular $d\vec{\mathbf{L}}$ es en la dirección de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$, que se encuentra en el plano xy, entonces el giroscopio experimenta un movimiento de precesión.

Para simplificar la descripción del sistema, se supone que la cantidad de movimiento angular total de la rueda en precesión es la suma de la cantidad de movimiento angular $I\vec{\boldsymbol{\omega}}$ debida al giro y la cantidad de movimiento angular debida al movimiento del centro de masa respecto al pivote. En este tratamiento se despreciará la contribución del movimiento del centro de masa y la cantidad de movimiento angular total se tomará simplemente como $I\vec{\boldsymbol{\omega}}$. En la práctica, esta aproximación es buena si $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ se hace muy grande.

El diagrama vectorial de la figura 11.14c muestra que en el intervalo de tiempo dt el vector cantidad de movimiento angular rota un ángulo $d\phi$, que también es el ángulo que gira el eje del giroscopio. A partir del triángulo vectorial formado por los vectores $\vec{\mathbf{L}}_i$, $\vec{\mathbf{L}}_f$, y $d\vec{\mathbf{L}}$, se ve que

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}\, dt}{L} = \frac{(Mgr_{\text{CM}})\, dt}{L}$$

Al dividir entre dt y usar la relación $L = I\omega$, se encuentra que la rapidez a la que rota el eje respecto del eje vertical es

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgr_{\text{CM}}}{I\omega} \qquad (11.20)$$

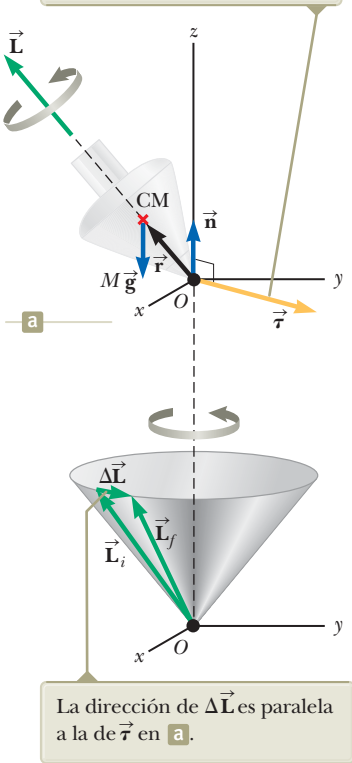


Figura 11.13 Movimiento de precesión de un trompo que gira en torno a su eje de simetría. (a) Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el trompo son la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza gravitacional $M\vec{\mathbf{g}}$. La dirección de la cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ es a lo largo del eje de simetría. (b) Ya que $\vec{\mathbf{L}}_f = \Delta\vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{L}}_i$, el trompo realiza precesión en torno al eje z.

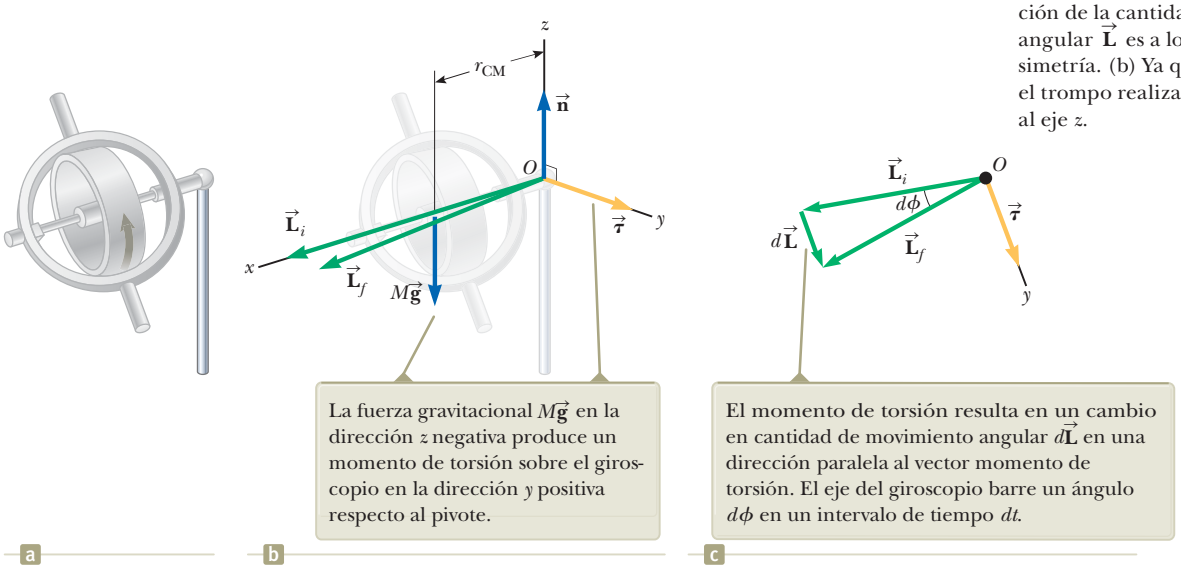


Figura 11.14 (a) Un giroscopio giratorio se coloca sobre un pivote en el extremo derecho. (b) Diagrama para el giroscopio girando mostrando fuerzas, momento de torsión y cantidad de movimiento angular. (c) Vista superior (mirando hacia abajo del eje z) de los vectores cantidad de movimiento angular inicial y final del giroscopio para un intervalo de tiempo infinitesimal dt.

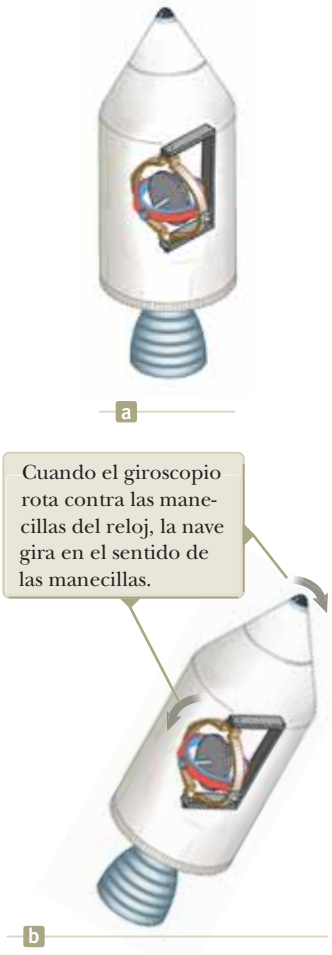


Figura 11.15 (a) Una nave espacial porta un giroscopio que no gira. (b) El giroscopio se pone en rotación.

La rapidez angular ω_p se llama **frecuencia de precesión**. Este resultado sólo es válido cuando $\omega_p << \omega$. De otro modo, está involucrado un movimiento mucho más complicado. Como puede ver de la ecuación 11.20, la condición $\omega_p << \omega$ se satisface cuando ω es grande, o sea cuando la rueda gira rápidamente. Además, note que la frecuencia de precesión disminuye conforme ω aumenta, es decir, a medida que la rueda rota más rápido en torno a su eje de simetría.

Como un ejemplo de la utilidad de los giroscopios, suponga que usted está en una nave en el espacio profundo y necesita alterar su trayectoria. Para encender los motores en la dirección correcta, debe girar la nave. Sin embargo, ¿cómo rotar una nave espacial en el espacio vacío? Una forma es tener pequeños motores cohete que encienden perpendicular al lado de la nave, lo que proporciona un momento de torsión en torno a su centro de masa. Tal configuración es deseable, y muchas naves tienen tales cohetes.

Sin embargo, considere otro método, que se relaciona con la cantidad de movimiento angular y no requiere el consumo de combustible. Suponga que la nave espacial lleva un giroscopio que no gira, como en la figura 11.15a. En este caso, la cantidad de movimiento angular de la nave en torno a su centro de masa es cero. Suponga que el giroscopio se pone en rotación, lo que da al giroscopio una cantidad de movimiento angular distinta de cero. No hay momento de torsión externo sobre el sistema aislado (nave espacial y giroscopio), así la cantidad de movimiento angular de este sistema debe permanecer igual a cero de acuerdo con el modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento angular). Este principio se satisface si la nave rota en la dirección opuesta a la del giroscopio, de modo que se cancelan los vectores cantidad de movimiento angular del giroscopio y la nave, lo que implica una ausencia de cantidad de movimiento angular del sistema. El resultado de girar el giroscopio, como en la figura 11.15b, ¡es que la nave da la vuelta! Al incluir tres giroscopios con ejes mutuamente perpendiculares, se logra cualquier rotación deseada en el espacio.

Este efecto creó una situación indeseable con la nave espacial *Voyager 2* durante su vuelo. La nave llevaba una grabadora cuyos carretes giraban a grandes magnitudes de velocidad. Cada vez que la grabadora se encendía, los carretes actuaban como giroscopios y la nave comenzaba una rotación indeseable en la dirección opuesta. ¡El mando de control de la misión tuvo que contrarrestar esta rotación al activar los cohetes de disparo lateral para *detener* la rotación!

Resumen

Definiciones

Dados dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, el **producto vectorial** $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ es un vector $\vec{\mathbf{C}}$ que tiene una magnitud

$$C = AB \operatorname{sen} \theta \qquad (11.3)$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. La dirección del vector $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, y esta dirección está determinada por la regla de la mano derecha.

El momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ debido a una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ en torno a un eje a través del origen en un marco inercial se define como

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \qquad (11.1)$$

La cantidad de **movimiento angular** $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula que tiene cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ en torno a un eje que pasa a través del origen es

$$\vec{\mathbf{L}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} \qquad (11.10)$$

donde $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector de posición de la partícula relativo al origen.

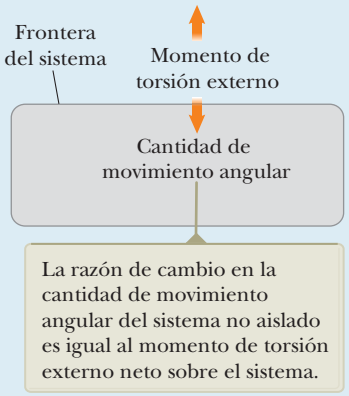
Conceptos y principios

La componente z de la cantidad de movimiento angular de un objeto rígido rotatorio en torno a un eje z fijo es

$$L_z = I\omega \tag{11.14}$$

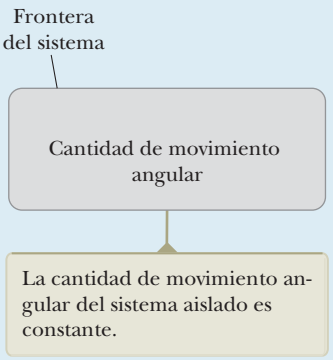
donde I es el momento de inercia del objeto en torno al eje de rotación y ω es su rapidez angular.

Análisis de modelos para resolver problemas



Sistema no aislado (cantidad de movimiento angular). Si un sistema interactúa con su entorno en el sentido de que sobre el sistema existe un momento de torsión externo, el momento de torsión externo neto que actúa sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de su cantidad de movimiento angular:

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} \tag{11.13}$$



Sistema aislado (cantidad de movimiento angular). Si un sistema no experimenta momento de torsión externo desde el ambiente, la cantidad de movimiento angular total del sistema se conserva:

$$\Delta \vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = 0 \tag{11.18}$$

Al aplicar esta ley de conservación de la cantidad de movimiento angular a un sistema cuyo momento de inercia cambia da

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{constante} \tag{11.19}$$

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Una patinadora de hielo comienza a girar con sus brazos estirados a los lados. Se equilibra sobre la punta de un patín para girar sin fricción. Luego jala sus brazos en tal forma que su momento de inercia disminuye en un factor de 2. En el proceso de hacer esto, ¿qué sucede con su energía cinética? (a) Aumenta en un factor de 4. (b) Aumenta en un factor de 2. (c) Permanece constante. (d) Disminuye en un factor de 2. (e) Disminuye en un factor de 4.

2. Un ratón mascota duerme cerca del borde Este de una tornamesa horizontal estable que se apoya en un eje vertical sin fricción a través de su centro. El ratón despierta y comienza a caminar al Norte sobre la tornamesa. **(i)** Conforme da sus primeros pasos, ¿cuál es el desplazamiento del ratón en relación con el suelo fijo de abajo? (a) Norte, (b) Sur, (c) ninguno. **(ii)** En este proceso, el punto sobre la tornamesa donde dormitaba el ratón experimenta un desplazamiento, ¿en qué dirección en relación con el suelo de abajo? (a) Norte, (b) Sur, (c) ninguno. Responda sí o no a las siguientes preguntas. **(iii)** En este proceso, para el sistema ratón-tornamesa, ¿la energía mecánica es constante? **(iv)** ¿Es la cantidad de movimiento lineal constante? **(v)** ¿La cantidad de movimiento angular es constante?

3. Mencione tres direcciones perpendiculares, como derecha, arriba y hacia usted, como puede nombrarlas cuando está frente a una pantalla de televisión que se encuentra en un plano vertical. Los vectores unitarios para estas direcciones son $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{u}}$, y $\hat{\mathbf{t}}$, respectivamente. Considere la cantidad $(-3\hat{\mathbf{u}} \times 2\hat{\mathbf{t}})$. **(i)** ¿Cuál es la magnitud de este vector? (a) 6, (b) 3, (c) 2 o (d) 0? **(ii)** ¿Cuál es la dirección de este vector? (a) Abajo, (b) hacia usted, (c) arriba, (d) alejándose de usted o (e) izquierda.

4. Sean las cuatro direcciones horizontales de la brújula Norte, Este, Sur y Oeste que se representan por los vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{e}}$, $\hat{\mathbf{s}}$, y $\hat{\mathbf{w}}$, respectivamente. En forma vertical hacia arriba y abajo se representan como $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{d}}$. También identifique los vectores unitarios que están a la mitad entre dichas direcciones, como $\widehat{\mathbf{ne}}$ para noreste. Clasifique las magnitudes de los siguientes productos cruz de mayor a menor. Si algunas son iguales en magnitud, o iguales a cero, muéstrelo en su clasificación. (a) $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}}$ (b) $\hat{\mathbf{w}} \times \widehat{\mathbf{ne}}$ (c) $\hat{\mathbf{u}} \times \widehat{\mathbf{ne}}$ (d) $\hat{\mathbf{n}} \times \widehat{\mathbf{nw}}$ (e) $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{e}}$

5. Responda sí o no a las siguientes preguntas. (a) ¿Es posible calcular el momento de torsión que actúa sobre un objeto rígido sin especificar un eje de rotación? (b) ¿El momento de torsión es independiente de la ubicación del eje de rotación?
6. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ está en la dirección y negativa, y el vector $\vec{\mathbf{B}}$ está en la dirección x negativa. **(i)** ¿Cuál es la dirección de $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$? (a) No hay dirección porque es un escalar, (b) x, (c) $-y$, (d) z y (e) $-z$. **(ii)** ¿Cuál es la dirección de $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$? Elija entre las mismas posibilidades de la (a) a la (e).
7. Se tiene una tornamesa horizontal que gira libremente sobre un eje vertical sin fricción a través de su centro. Dos ponis de igual masa están inicialmente en puntos diametralmente opuestos del borde de la tornamesa. De manera simultánea, los ponis comienzan a caminar uno hacia el otro. **(i)** Mientras caminan, ¿qué sucede con la rapidez angular de la tornamesa? (a) Aumenta. (b) Disminuye. (c) Permanece constante. Considere el sistema ponis-tornamesa en este proceso y responda sí o no a las siguientes preguntas. **(ii)** ¿Se conserva la energía mecánica del sistema? **(iii)** ¿Se conserva la cantidad de movimiento del sistema? **(iv)** ¿Se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema?
8. Considere un sistema aislado moviéndose en el espacio vacío. El sistema consiste de objetos que interactúan entre sí y pueden cambiar su mutua ubicación. ¿Cuál de las siguientes cantidades puede cambiar en el tiempo? (a) La cantidad de movimiento angular del sistema. (b) La cantidad de movimiento lineal del sistema. (c) Ambas cantidades de movimiento, lineal y angular, del sistema. (d) Ninguna de las dos cantidades de movimiento, lineal y angular, del sistema.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Las estrellas se originan como grandes cuerpos de gas en lenta rotación. Debido a la gravedad, tales grupos de gases lentamente reducen su tamaño. ¿Qué le ocurre a la rapidez angular de una estrella cuando se contrae? Explique.
2. Un científico que llega a un hotel pide a un botones que lleve una pesada maleta. Cuando el botones rodea una esquina, la maleta se balancea súbitamente alejándose de él por alguna razón desconocida. El alarmado botones suelta la maleta y sale corriendo. ¿Qué podría haber en la maleta?
3. ¿Por qué un poste largo ayuda a alguien que camina en la cuerda floja a mantener el equilibrio?
4. Dos niños juegan con un rollo de toallas de papel. Un niño sostiene el rollo entre los dedos índice de sus manos, tal que el rollo puede rotar libremente, y el segundo niño jala con rapidez constante sobre el extremo libre de las toallas. Conforme el niño jala las toallas disminuye el radio del rollo con las restantes toallas. (a) ¿Cómo cambia en el tiempo el momento de torsión sobre el rollo? (b) ¿Cómo cambia en el tiempo la rapidez angular del rollo? (c) Si el niño repentinamente da un tirón con gran fuerza al extremo de la toalla de papel, ¿la toalla tiene más probabilidad de romperse que cuando se le jala con el rollo casi lleno o cuando prácticamente está vacío?
5. El trabajo y el momento de torsión son productos de fuerzas y desplazamientos. ¿En qué son diferentes? ¿Ambos tienen las mismas unidades?
6. En alguna competencia de motocicletas, los conductores pasan sobre pequeñas colinas y la motocicleta se convierte en aérea durante un corto intervalo de tiempo. Si el corredor de motocicleta mantiene el acelerador abierto mientras deja la colina y va al aire, la motocicleta tiende a dirigirse hacia arriba. ¿Por qué?
7. Si el momento de torsión que actúa sobre una partícula respecto a un eje a través de un cierto origen es cero, ¿qué puede decir acerca de su cantidad de movimiento angular respecto a dicho eje?
8. Una bola se lanza en tal forma que no gira en torno a su propio eje. ¿Este enunciado implica que la cantidad de movimiento angular es cero respecto a un eje arbitrario? Explique.
9. Si el calentamiento global continúa durante los próximos cien años, es probable que algo de hielo polar se funda y el agua escurra hacia el Ecuador. (a) ¿Cómo cambiaría eso el momento de inercia de la Tierra? (b) ¿La duración del día (una revolución) aumentaría o disminuiría?
10. Es usual que un gato aterrice de pie, sin importar en qué posición se le deje caer. Una película a cámara lenta muestra que la mitad superior de su cuerpo se tuerce en una dirección y la mitad inferior lo hace en la dirección opuesta. (Véase la figura PC11.10) ¿Por qué ocurre este tipo de rotación?



Agence Nature/Photo Researchers, Inc.

Figura PC11.10

11. En los capítulos 7 y 8 se utilizaron gráficas de barras de energía para analizar situaciones físicas. ¿Por qué en este capítulo no se emplearon barras de cantidad de movimiento angular?

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 11.1 Producto vectorial y momento de torsión

1. Dado $\vec{\mathbf{M}} = 2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{N}} = 4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$, calcule el producto vectorial $\vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{N}}$.

2. Los vectores desplazamiento 42.0 cm a 15.0° y 23.0 cm a 65.0° parten del origen y forman los lados de un paralelogramo. Ambos ángulos se miden en contra de las manecillas del reloj a partir del eje *x*. (a) Encuentre el área del paralelogramo. (b) Obtenga la longitud de su diagonal mayor.

3. Dos vectores están dados por $\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$. Encuentre (a) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y (b) el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

4. Use la definición del producto vectorial y las definiciones de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$ para demostrar las ecuaciones 11.7. Suponga que el eje *x* apunta hacia la derecha, el eje *y* hacia arriba y el eje *z* es horizontal hacia usted (no alejándose de usted). Se dice que esta elección hace al sistema coordenado un *sistema de mano derecha*.

5. Calcule el momento de torsión neto (magnitud y dirección), sobre la viga en la figura P11.5, respecto (a) a un eje a través de *O* perpendicular a la página y (b) a un eje a través de *O* perpendicular a la página.

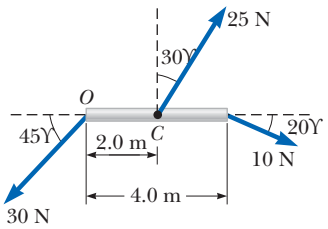


Figura P11.5

6. Dos vectores están dados por las expresiones: $\vec{\mathbf{A}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 6\hat{\mathbf{i}} - 10\hat{\mathbf{j}} + 9\hat{\mathbf{k}}$. Evalúe las cantidades (a) $\cos^{-1}[\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}/AB]$ y (b) $\text{sen}^{-1}[|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|/AB]$. (c) ¿Cuál da el ángulo entre los vectores?

7. Si $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$, ¿cuál es el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$?

8. Una partícula se ubica en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}} = (4.00\hat{\mathbf{i}} + 6.00\hat{\mathbf{j}})$ m, y sobre ella se ejerce una fuerza dada por $\vec{\mathbf{F}} = (3.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\,\hat{\mathbf{j}})$ N. (a) ¿Cuál es el momento de torsión que actúa sobre la partícula respecto al origen? (b) ¿Hay otro punto respecto al cual el momento de torsión causado por esta fuerza sobre la partícula esto en la dirección opuesta con la mitad de la magnitud? (c) ¿Puede haber más de uno de tales puntos? (d) ¿Dicho punto puede encontrarse sobre el eje *y*? (e) ¿Puede haber más de uno de tales puntos sobre el eje *y*? (f) Determine el vector de posición de tal punto.

9. Dos fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ actúan a lo largo de los dos lados de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura P11.9. El punto *O* es la intersección de las alturas del triángulo. (a) Encuentre una tercera fuerza $\vec{\mathbf{F}}_3$ a aplicar en *B* y a lo largo de *BC* tal que el momento de torsión total sea cero en torno al punto *O*. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cambiará el momento de torsión total si $\vec{\mathbf{F}}_3$ se aplica no en *B* sino en cualquier otro punto a lo largo de *BC*?

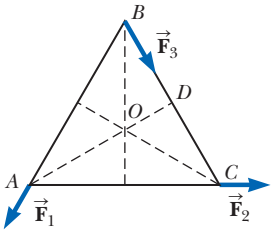


Figura P11.9

10. Un estudiante afirma que encontró un vector $\vec{\mathbf{A}}$ tal que $(2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}) \times \vec{\mathbf{A}} = (4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$. (a) ¿Usted cree esta afirmación? (b) Explique por qué sí o por qué no.

Sección 11.2 Análisis de modelo: sistema no aislado (cantidad de movimiento angular)

11. Una barra rígida ligera de longitud $\ell = 1.00$ m se une a dos partículas, con masas $m_1 = 4.00$ kg y $m_2 = 3.00$ kg, en sus extremos. La combinación rota en el plano *xy* respecto a un eje a través del centro de la barra (figura P11.11). Determine la cantidad de movimiento angular del sistema en torno al origen cuando la rapidez de cada partícula es 5.00 m/s.

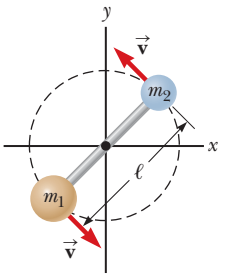


Figura P11.11

12. Una partícula de 1.50 kg se mueve en el plano *xy* con una velocidad de $\vec{\mathbf{v}} = (4.20\hat{\mathbf{i}} - 3.60\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto al origen cuando su vector de posición es $\vec{\mathbf{r}} = (1.50\hat{\mathbf{i}} + 2.20\hat{\mathbf{j}})$ m.

13. Una partícula de masa *m* se mueve en el plano *xy* con una velocidad de $\vec{\mathbf{v}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}$. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto al origen cuando su vector de posición es $\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$.

14. Con dirección justo hacia la cima del pico Pike, un avión de 12 000 kg de masa vuela sobre las planicies de Kansas a una altitud casi constante de 4.30 km con velocidad fija de 175 m/s. (a) ¿Cuál es el vector cantidad de movimiento angular del avión en relación con una granja de trigo sobre el suelo directamente bajo el avión? (b) ¿Este valor cambia a medida que el avión continúa su movimiento a lo largo de una línea recta? (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es su cantidad de movimiento angular respecto a la cima del pico Pike?

15. **Problema de repaso.** Un proyectil de masa m se dispara con una velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_i$ que forma un ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la figura P11.15. El proyectil se mueve en el campo gravitacional de la Tierra. Encuentre la cantidad de movimiento angular del proyectil en torno al origen (a) cuando el proyectil está en el origen, (b) cuando se ubica en el punto más alto de su trayectoria y (c) justo antes de golpear el suelo. (d) ¿Qué momento de torsión hace que cambie su cantidad de movimiento angular?

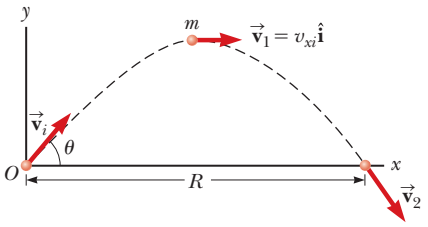


Figura P11.15

16. **Problema de repaso.** Un péndulo cónico consiste de una plomada de masa m en movimiento en una trayectoria circular en un plano horizontal, como se muestra en la figura P11.16. Durante el movimiento, el alambre de soporte, de longitud ℓ, mantiene el ángulo constante θ con la vertical. Demuestre que la magnitud de la cantidad de movimiento angular de la plomada en torno al centro de la circunferencia punteada es

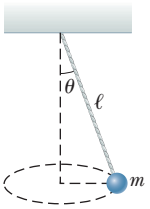


Figura P11.16

$$L = \left(\frac{m^2 g \ell^3 \operatorname{sen}^4 \theta}{\cos \theta} \right)^{1/2}$$

17. Una partícula de masa m se mueve en una circunferencia de radio R con una rapidez constante v, como se muestra en la figura P11.17. El movimiento comienza en el punto Q en el tiempo $t = 0$. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto al eje perpendicular a la página a través del punto P como una función del tiempo.

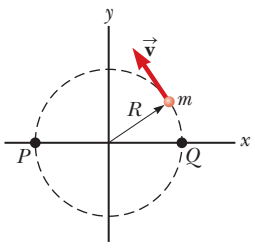


Figura P11.17 Problemas 17 y 32.

18. Un contrapeso de masa $m = 4.00$ kg se une a una cuerda ligera que se enreda alrededor de una polea, como en la figura P11.18. La polea es un aro delgado de radio $R = 8.00$ cm y masa $M = 2.00$ kg. Los rayos tienen masa despreciable. (a) ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión neto sobre el sistema respecto al eje de la polea? (b) Cuando el contrapeso tiene una velocidad v, la polea tiene una rapidez angular $\omega = v/R$. Determine la magnitud de la cantidad de movimiento angular total del sistema respecto al eje de la polea. (c) Utilice su resultado del inciso (b) y $\vec{\boldsymbol{\tau}} = d\vec{\mathbf{L}}/dt$, para calcular la aceleración del contrapeso.

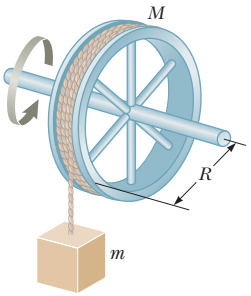


Figura P11.18

19. El vector de posición de una partícula de masa 2.00 kg como función del tiempo está dado por $\vec{\mathbf{r}} = (6.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00t\hat{\mathbf{j}})\ (6.00\,\hat{\mathbf{i}} + 5.00t\,\hat{\mathbf{j}})$, donde $\vec{\mathbf{r}}$ está en metros y t está en segundos. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto al origen como función del tiempo.

20. Una partícula de 5.00 kg parte del origen al tiempo cero. Su velocidad como función del tiempo está dada por

$$\vec{\mathbf{v}} = 6t^2\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}}$$

donde $\vec{\mathbf{v}}$ está en metros y t está en segundos. (a) Encuentre su posición como función del tiempo. (b) Describa su movimiento cualitativamente. Encuentre: (c) su aceleración como función del tiempo, (d) la fuerza neta ejercida sobre la partícula como función del tiempo, (e) el momento de torsión neto respecto al origen ejercido sobre la partícula como función del tiempo, (f) la cantidad de movimiento angular de la partícula como función del tiempo, (g) la energía cinética de la partícula como función del tiempo y (h) la potencia inyectada en el sistema de la partícula como función del tiempo.

21. Una bola que tiene masa m está amarrada al extremo de un asta que está conectada al lado de un alto edificio en el punto P, como se muestra en la figura P11.21. La longitud del asta es ℓ y forma un ángulo θ con el eje x. La bola se afloja y comienza a caer con aceleración $-g\hat{\mathbf{j}}$. (a) Determine la cantidad de movimiento angular de la bola en torno al punto P como función del tiempo. (b) ¿Por qué razón física cambia la cantidad de movimiento angular? (c) ¿Cuál es la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular de la bola respecto al punto P?

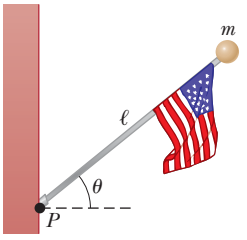


Figura P11.21

Sección 11.3 Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido rotatorio

22. Una esfera sólida uniforme de radio $r = 0.500$ m y masa $m = 15.0$ kg gira contra las manecillas del reloj respecto a un eje vertical a través de su centro. Encuentre su vector cantidad de movimiento angular cuando su rapidez angular es 3.00 rad/s.

23. El Big Ben (figura P10.49, página 328), el reloj de la torre del Parlamento en Londres, tiene manecillas horaria y minutero con longitudes de 2.70 m y 4.50 m, y masas de 60.0 kg y 100 kg, respectivamente. Calcule la cantidad de movimiento angular total de dichas manecillas en torno al punto central. (Trate las manecillas como largas y delgadas barras rotando respecto a un extremo. Suponga que estas manecillas rotan con razón constante de una revolución por 12 horas y 60 minutos, respectivamente.)

24. Demuestre que la energía cinética de un objeto rotatorio en torno a un eje fijo con cantidad de movimiento angular $L = I\omega$ se puede escribir como $K = L^2/2I$.

25. Un disco sólido uniforme de masa $m = 3.00$ kg y radio $r = 0.200$ m rota en torno a un eje fijo perpendicular a su cara con frecuencia angular 6.00 rad/s. Calcule la magnitud de la cantidad de movimiento angular del disco cuando el eje de rotación (a) pasa a través de su centro de masa y (b) pasa a través de un punto a la mitad entre el centro y el borde.

26. Modele la Tierra como una esfera uniforme. (a) Calcule la cantidad de movimiento angular de la Tierra debida a su movimiento de giro en torno a su eje. (b) Calcule la cantidad de movimiento angular de la Tierra debida a su movimiento orbital respecto al Sol. (c) Explique por qué la respuesta al inciso (b) es mayor que la obtenida en el inciso (a) no obstante que a la Tierra le lleva más tiempo ir alrededor del Sol que rotar sobre su propio eje.

27. Una partícula de 0.400 kg de masa está unida a la marca de 100 cm de una regleta de 0.100 kg de masa. La regleta gira sobre una mesa horizontal sin fricción con una rapidez angular de 4.00 rad/s. Calcule la cantidad de movimiento angular del sistema cuando la regleta se articula en torno a un eje (a) perpendicular a la mesa a través de la marca de 50.0 cm y (b) perpendicular a la mesa a través de la marca de 0 cm.

28. La distancia entre los centros de las ruedas de una motocicleta es 155 cm. El centro de masa de la motocicleta, incluido el conductor, está a 88.0 cm sobre el suelo y a la mitad entre las ruedas. Suponga que la masa de cada rueda es pequeña comparada con el cuerpo de la motocicleta. El motor sólo impulsa la rueda trasera. ¿Qué aceleración horizontal de la motocicleta hará que la rueda frontal se eleve del suelo?

29. Se construye una estación espacial en forma de anillo hueco de 5.00×10^4 kg de masa. Los integrantes de la tripulación caminan sobre una cubierta formada por la superficie interior de la pared cilíndrica exterior del anillo, con radio $r = 100$ m. En reposo, cuando se construyó, el anillo se puso a girar en torno a su eje de modo que las personas en el interior experimentan una aceleración en caída libre efectiva igual a g. (Véase la figura P11.29.) La rotación se logra al encender dos pequeños cohetes unidos tangencialmente a puntos opuestos sobre el borde del anillo. (a) ¿Qué cantidad de movimiento angular adquiere la estación espacial? (b) ¿Durante qué intervalo de tiempo se deben encender los cohetes si cada uno ejerce un empuje de 125 N?

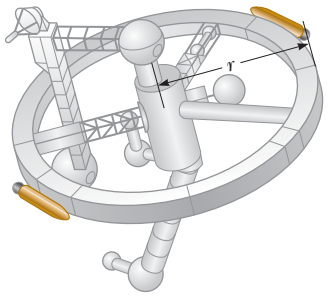


Figura P11.29 Problemas 29 y 40.

Sección 11.4 Análisis de modelo: sistema aislado (cantidad de movimiento angular)

30. Un disco con momento de inercia I_1 rota respecto a un eje vertical sin fricción con rapidez angular ω_i. Un segundo disco, con momento de inercia I_2 y que inicialmente no gira, cae sobre el primer disco (figura P11.30). Debido a la fricción entre las superficies, con el tiempo los dos llegan a la misma rapidez angular ω_f. (a) Calcule ω_f. (b) Determine la razón de la energía rotacional final a la inicial.

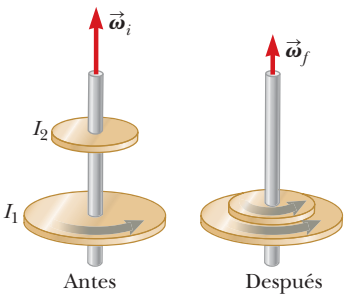


Figura P11.30

31. Un carrusel de jardín con radio $R = 2.00$ m tiene un momento de inercia $I = 250$ kg · m^2 y es rotatorio a 10.0 rev/min en torno a un eje vertical sin fricción. Frente al eje, un niño de 25.0 kg salta hacia el carrusel y logra sentarse en el borde. ¿Cuál es la nueva rapidez angular del carrusel?

32. La figura P11.17 representa un pequeño disco plano con masa $m = 2.40$ kg que se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. Se mantiene en una órbita circular en torno a un eje fijo mediante una barra con masa despreciable y longitud $R = 1.50$ m, pivoteada en un extremo. Al inicio, el disco tiene una rapidez $v = 5.00$ m/s. Una bola de arcilla de 1.30 kg se deja caer verticalmente sobre el disco desde una pequeña distancia sobre éste y de inmediato se pega al disco. (a) ¿Cuál es el nuevo periodo de rotación? (b) ¿En este proceso se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema disco-arcilla en torno al eje de rotación? (c) ¿La cantidad de movimiento lineal del sistema se conserva en el proceso de la arcilla que se pega al disco? (d) ¿La energía mecánica del sistema se conserva en el proceso?

33. Una mujer de 60.0 kg está de pie en el borde Oeste de una tornamesa horizontal que tiene un momento de inercia de

500 kg · m^2 y un radio de 2.00 m. La tornamesa inicialmente está en reposo y es libre de dar vuelta en torno a un eje vertical sin fricción a través de su centro. Después la mujer comienza a caminar alrededor del borde en sentido de las manecillas del reloj (visto desde arriba del sistema) con una rapidez constante de 1.50 m/s en relación con la Tierra. Considere el sistema mujer-tornamesa mientras comienza el movimiento. (a) ¿Se conserva la energía mecánica del sistema? (b) ¿Es constante la cantidad de movimiento lineal del sistema? (c) ¿Se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema? (d) ¿En qué dirección y con qué rapidez angular gira la tornamesa? (e) ¿Cuánta energía química convierte el cuerpo de la mujer en energía mecánica conforme la mujer se pone a sí misma y a la tornamesa en movimiento?

34. Un estudiante se sienta sobre un banco rotatorio libremente sosteniendo dos mancuernas, cada una de 3.00 kg de masa (figura P11.34). Cuando el estudiante extiende los brazos horizontalmente (figura P11.34a), las mancuernas están a 1.00 m del eje de rotación y el estudiante gira con una rapidez angular de 0.750 rad/s. El momento de inercia del estudiante más el banco es de 3.00 kg · m^2 y se supone constante. El estudiante jala las mancuernas horizontalmente hacia dentro a una posición 0.300 m del eje de rotación (figura P11.34b). (a) Encuentre la nueva rapidez angular del estudiante. (b) Obtenga la energía cinética del sistema rotatorio antes y después de jalar las mancuernas hacia dentro.

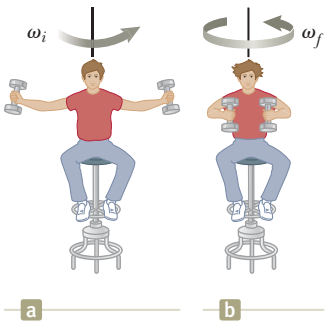


Figura P11.34

35. Una tornamesa cilíndrica uniforme de 1.90 m de radio y 30.0 kg de masa gira contra las manecillas del reloj en un plano horizontal con una rapidez angular inicial de 4π rad/s. Los cojinetes fijos de la tornamesa no tienen fricción. Un bulto de barro de 2.25 kg de masa y tamaño despreciable se deja caer sobre la tornamesa desde una pequeña distancia sobre ésta y de inmediato se pega a la tornamesa en un punto a 1.80 m al Este del eje. (a) Encuentre la rapidez angular final del barro y la tornamesa. (b) ¿En este proceso se conserva la energía mecánica del sistema tornamesa-barro? Explique y use sus resultados numéricos para verificar su respuesta. (c) ¿En este proceso se conserva la cantidad de movimiento del sistema? Explique su respuesta.

36. Un disco de masa $m_1 = 80.0$ g y radio $r_1 = 4.00$ cm se desliza a través de una mesa de aire con una rapidez de $\vec{\mathbf{v}} = 1.50$ m/s, como se muestra en la figura P11.36a. Hace una colisión oblicua con un segundo disco de radio $r_2 = 6.00$ cm y masa $m_2 = 120$ g (inicialmente en reposo) tal que sus bordes apenas se tocan. Ya que sus bordes están recubiertos con pegamento de acción instantánea, los discos quedan unidos y giran después de la colisión (figura P11.36b). (a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema relativa al centro de masa? (b) ¿Cuál es la rapidez angular en torno al centro de masa?

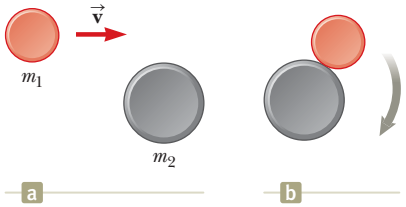


Figura P11.36

37. Un bloque de madera de masa M, que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, está unido a una barra rígida de longitud ℓ y masa despreciable (figura P11.37). La barra se articula en el otro extremo. Una bala de masa m, que viaja paralela a la superficie horizontal y perpendicular a la barra con rapidez v, golpea al bloque y queda incrustada en él. (a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema bala-bloque respecto a un eje vertical a través del pivote? (b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se convierte en energía interna en el sistema durante la colisión?

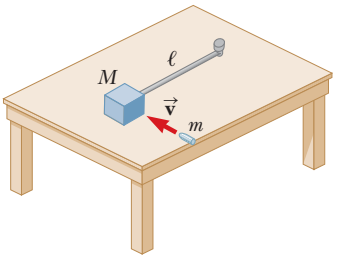


Figura P11.37

38. **Problema de repaso.** Un anuncio rectangular, uniforme y delgado cuelga verticalmente sobre la puerta de una tienda. El anuncio tiene bisagras con una barra horizontal estable a lo largo de su borde superior. La masa del anuncio es de 2.40 kg y su dimensión vertical es de 50.0 cm. El anuncio se balancea sin fricción, de modo que es un blanco tentador para niños armados con bolas de nieve. El máximo desplazamiento angular del anuncio es 25.0° en ambos lados de la vertical. En un momento cuando el anuncio está vertical y se mueve a la izquierda, una bola de nieve de 400 g de masa, que viaja en sentido horizontal hacia la derecha con una velocidad de 160 cm/s, golpea perpendicularmente el borde inferior del anuncio y se pega ahí. (a) Calcule la rapidez angular del anuncio justo antes del impacto. (b) Calcule su rapidez angular inmediatamente después del impacto. (c) ¿A qué ángulo máximo se balanceará el anuncio salpicado?

39. Un tapón de barro pegajoso con masa m y velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i$ se dispara a un cilindro sólido de masa M y radio R (figura P11.39). El cilindro inicialmente está en reposo y se monta sobre un eje horizontal fijo que corre a través de su centro de masa. La línea de movimiento del proyectil es perpendicular al eje y a una distancia $d < R$ desde el centro. (a) Encuentre la rapidez angular del sistema

justo antes que el barro golpee y se pegue a la superficie del cilindro. (b) ¿En este proceso se conserva la energía mecánica del sistema barro-cilindro? Explique su respuesta. (c) ¿En este proceso se conserva la cantidad de movimiento del sistema barro-cilindro? Explique su respuesta.

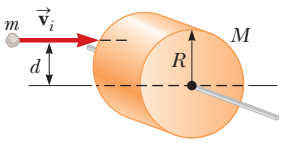


Figura P11.39

40. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Una estación espacial en forma de rueda gigante tiene un radio de $r = 100$ m y un momento de inercia de 5.00×10^8 kg · m^2. Una tripulación de 150 personas de masa promedio 65.0 kg vive en el borde, y la rotación de la estación hace que la tripulación sienta una aparente aceleración de caída libre de g (figura P11.29). Un técnico investigador es asignado para efectuar un experimento en el cual una bola es liberada en el borde de la estación cada 15 minutos y se mide el intervalo de tiempo que la bola tarda en recorrer una distancia dada, esto como una prueba para asegurar que el aparente valor de g se mantenga correctamente. Una tarde, 100 personas se mueven al centro de la estación para una reunión. El técnico investigador, quien ha estado realizando su experimento durante una hora antes de la reunión, está triste por no poder asistir a dicha reunión, y su ambiente se deteriora aún más por su aburrido experimento, en donde la bola ha caído de la misma manera durante toda la tarde, para cada intervalo de tiempo.

41. Una bala de 0.00500 kg que viaja horizontalmente con rapidez 1.00×10^3 m/s golpea una puerta de 18.0 kg y se incrusta a 10.0 cm a partir del lado opuesto de las bisagras, como se muestra en la figura P11.41. El ancho de la puerta de 1.00 m es libre para girar sin fricción sobre sus bisagras. (a) Antes de golpear la puerta, ¿la bala tiene cantidad de movimiento angular relativa al eje de rotación de la puerta? (b) Si tiene, entonces evalúe esta cantidad de movimiento angular. Si no tiene, explique por qué no hay cantidad de movimiento angular. (c) ¿Durante esta colisión se conserva la energía mecánica del sistema bala-puerta? Responda sin realizar un cálculo. (d) Inmediatamente después de la colisión, ¿qué rapidez angular tiene la puerta? (e) Calcule la energía total del sistema bala-puerta y determine si es menor o igual que la energía cinética de la bala antes de la colisión.

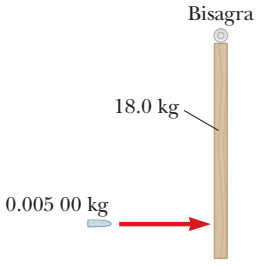


Figura P11.41 Vista superior de una bala golpeando una puerta.

Sección 11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

42. Una nave espacial está en el espacio vacío. Porta en cubierta un giroscopio con un momento de inercia $I_g = 20.0$ kg · m^2 en torno al eje del giroscopio. El momento de inercia de la nave espacial respecto al mismo eje es $I_s = 5.00 \times 10^5$ kg · m^2. Ni la nave espacial ni el giroscopio giran originalmente. El giroscopio se puede activar en un periodo despreciable de tiempo a una rapidez angular de 100 rad/s. Si la orientación de la nave debe cambiar 30.0°, ¿durante qué intervalo de tiempo se debe hacer funcionar el giroscopio?

43. El vector cantidad de movimiento angular de un giroscopio en precesión barre un cono, como se muestra en la figura P11.43. La rapidez angular de la punta del vector de cantidad de movimiento angular, llamada su frecuencia de precesión, está dada por $\omega_p = \tau/L$, donde τ es la magnitud del momento de torsión sobre el giroscopio y L es la magnitud de su cantidad de movimiento angular. En el movimiento llamado *precesión de los equinoccios*, el eje de rotación de la Tierra precede en torno a la perpendicular a su plano orbital con un periodo de 2.58×10^4 años. Modele la Tierra como una esfera uniforme y calcule el momento de torsión sobre la Tierra que provoca esta precesión.

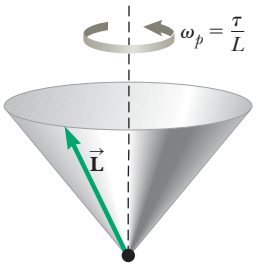


Figura P11.43 Un vector cantidad de movimiento angular con precesión barre un cono en el espacio.

Problemas adicionales

44. Una soga ligera pasa sobre una polea ligera sin fricción. Un extremo está unido a un racimo de plátanos de masa M y un mono de masa M escala por el otro extremo (figura P11.44). El mono escala la cuerda con la intención de llegar a los plátanos. (a) Al tratar el sistema que consiste de mono, plátanos, soga y polea, evalúe el momento de torsión neto en torno al eje de la polea. (b) Use el resultado de (a) y determine la cantidad de movimiento angular total en torno al eje de la polea y describa el movimiento del sistema. ¿El mono alcanzará los plátanos?

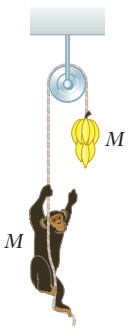


Figura P11.44

45. El cometa Halley se mueve en torno al Sol en una órbita elíptica, su aproximación más cercana al Sol es más o menos 0.590 UA y su mayor distancia 35.0 UA (1 UA = distancia Tierra-Sol). La cantidad de movimiento angular del cometa respecto al Sol es constante, y la fuerza gravitacional ejercida por el Sol tiene brazo de momento nulo. La rapidez del cometa en la aproximación más cercana es 54.0 km/s. ¿Cuál es su rapidez cuando está más alejado del Sol?

46. **Problema de repaso.** Dos niños se deslizan uno hacia el otro sobre un estacionamiento cubierto de hielo, sin fricción. Jacob, de masa 45.0 kg, se mueve hacia la derecha a 8.00 m/s, y Ethan, de masa 31.0 kg, se desplaza hacia la izquierda a 11.0 m/s a lo largo de la misma línea. Cuando ellos se encuentran, se agarran y quedan unidos. (a) ¿Cuál es su velocidad inmediatamente después de este momento? (b) ¿Qué fracción de su energía cinética original continúa siendo mecánica después de su colisión? Fue tan divertido que los niños repitieron la colisión con las mismas velocidades originales, esta vez moviéndose a lo largo de

líneas paralelas separadas 1.20 m. En la aproximación más cercana, ellos acoplan sus brazos y comienzan a rotar respecto a su centro de masa común. Modele los niños como partículas y a sus brazos como una cuerda que no se estira. (c) Encuentre la velocidad de su centro de masa. (d) Obtenga su rapidez angular. (e) ¿Qué fracción de su energía cinética original continúa siendo mecánica después que acoplan sus brazos? (f) ¿Por qué son tan diferentes las respuestas a los incisos (b) y (e)?

47. Todo mundo se queja de que no hay suficientes horas en un día. En un intento por componer esto, suponga que todas las personas en el mundo se alinean en el Ecuador y comienzan a correr hacia el Este a 2.50 m/s respecto a la superficie de la Tierra. ¿En cuánto aumenta la longitud de un día? Suponga que la población mundial es de 7.00×10^9 personas, con una masa promedio de 55.0 kg cada una, y que la Tierra es una esfera homogénea sólida. Además, puede usar la aproximación $1/(1 - x) \approx 1 + x$ para x pequeña.

48. Un patinador con su patineta se modelan como una partícula de 76.0 kg de masa, ubicada en su centro de masa, 0.500 m arriba del suelo. Como se muestra en la figura P11.48, el patinador parte del reposo en una posición encogida en un extremo de una media tubería (punto Ⓐ). La media tubería forma la mitad de un cilindro de 6.80 m de radio con su eje horizontal. En su descenso, el patinador se mueve sin fricción y mantiene su postura de modo que su centro de masa se desplaza a través de un cuarto de círculo. (a) Encuentre su rapidez en la parte baja de la media tubería (punto Ⓑ). (b) Encuentre su cantidad de movimiento angular en torno al centro de curvatura en este punto. (c) Inmediatamente después de pasar el punto Ⓑ, se pone de pie y eleva los brazos, lo que eleva su centro de gravedad a 0.950 m sobre el concreto (punto Ⓒ). Explique por qué su cantidad de movimiento angular es constante en esta maniobra, mientras que la energía cinética de su cuerpo no es constante. (d) Encuentre su rapidez inmediatamente después de ponerse de pie. (e) ¿Cuánta energía química en las piernas del patinador se convirtió en energía mecánica en el sistema patinador-Tierra cuando él se puso de pie?

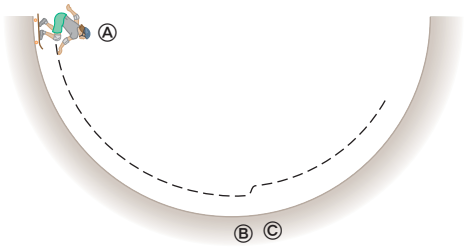


Figura P11.48

49. Una barra rígida sin masa tiene tres partículas con masas iguales unidas a ella, como se muestra en la figura P11.49. La barra es libre de girar en un plano vertical en torno a un eje sin fricción perpendicular a la barra a través del punto P y se libera del reposo en la posición horizontal en $t = 0$. Si supone que se conocen m y d, encuentre: (a) el momento de inercia del sistema (barra más partículas) en torno al eje, (b) el momento de torsión que actúa sobre el sistema en $t = 0$, (c) la aceleración angular del sistema en $t = 0$, (d) la aceleración lineal de la partícula 3 en $t = 0$, (e) la máxima energía cinética del sistema, (f) la máxima rapidez angular alcanzada por la barra, (g) la máxima cantidad de movimiento angular del sistema y (h) la máxima rapidez alcanzada por la partícula 2.

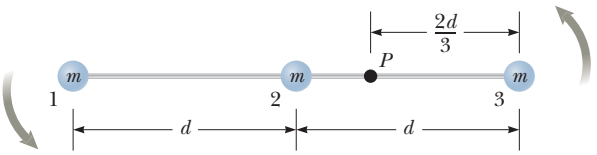


Figura P11.49

50. Dos niños juegan sobre los taburetes del mostrador de un restaurante. Sus pies no llegan a los reposapiés y lo alto de los taburetes tiene libertad de girar sin fricción sobre pedestales fijos al suelo. Uno de los niños atrapa una bola lanzada en un proceso descrito por la ecuación

$$(0.730\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(2.40\hat{\mathbf{j}}\ \text{rad/s}) + (0.120\ \text{kg})(0.350\hat{\mathbf{i}}\ \text{m}) \times (4.30\hat{\mathbf{k}}\ \text{m/s}) = [0.730\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + (0.120\ \text{kg})(0.350\ \text{m})^2]\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

(a) Resuelva la ecuación para la incógnita $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. (b) Complete el enunciado del problema al que se aplica esta ecuación. Su enunciado debe incluir la información numérica dada y la especificación de la incógnita por determinar. (c) ¿La ecuación podría describir igualmente bien al otro niño que lanza la bola? Explique su respuesta.

51. Un proyectil de masa m se mueve hacia la derecha con una rapidez v_i (figura P11.51a). El proyectil golpea y se pega al extremo de una barra estable de masa M y longitud d, articulada en torno a un eje sin fricción perpendicular a la página a través de O (figura P11.51b). Se desea encontrar el cambio fraccional de energía cinética en el sistema debido a la colisión. (a) ¿Cuál es el análisis de modelo apropiado para describir al proyectil y a la barra? (b) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema antes de la colisión respecto a un eje a través de O? (c) ¿Cuál es el momento de inercia del sistema respecto a un eje a través de O después de que el proyectil golpea la barra? (d) Si ω es la rapidez angular del sistema después de la colisión, ¿cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema después de la colisión? (e) Encuentre la rapidez angular ω después de la colisión en términos de las cantidades dadas.

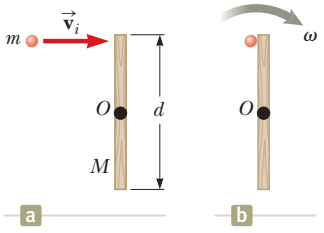


Figura P11.51

(f) ¿Cuál es la energía cinética del sistema antes de la colisión? (g) ¿Cuál es la energía cinética del sistema después de la colisión? (h) Determine el cambio fraccional de energía cinética debido a la colisión.

52. Un disco de masa $m = 50.0$ g se amarra a una cuerda que pasa a través de un pequeño hoyo en una superficie horizontal sin fricción (figura P11.52). El disco inicialmente orbita con rapidez $v_i = 1.50$ m/s en un círculo de radio $r_i = 0.300$ m. (a) La cuerda se jala lentamente desde abajo, lo que disminuye el radio del círculo a $r = 0.100$ m. (a) ¿Cuál es la rapidez del disco para el radio más pequeño? (b) Encuentre la tensión en la cuerda para el radio menor. (c) ¿Cuánto trabajo es realizado por la mano al jalar la cuerda para que el radio de movimiento del disco cambie de 0.300 m a 0.100 m?

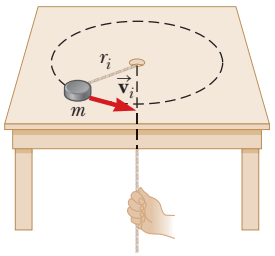


Figura P11.52 Problemas 52 y 53.

53. Un disco de masa m está unida a una cuerda tensa que pasa a través de un pequeño hoyo en una superficie horizontal sin fricción (figura P11.52). El disco inicialmente orbita con rapidez v_i en un círculo de radio r_i. La cuerda se jala lentamente desde abajo, entonces el radio del círculo disminuye al valor r. (a) ¿Cuál es la rapidez del disco cuando el radio es r? (b) Encuentre la tensión en la cuerda como una función de r. (c) ¿Cuánto trabajo realiza la mano al jalar la cuerda para que el radio de movimiento del disco cambie de r_i a r?

54. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un meteoro impacta directamente la Tierra en el Ecuador. En el momento de impactar, lo hace exactamente en forma vertical y hacia abajo. Debido a la colisión, el tiempo de rotación de la Tierra se incrementa 0.5 s, así el día es más largo por 0.5 s, indetectable para el ciudadano común. Después del impacto, la gente en la Tierra ignora ese medio segundo extra y sigue con su vida normal. (Suponga que la Tierra tiene densidad uniforme.)

55. Dos astronautas (figura P11.55), cada uno de 75.0 kg de masa, están conectados mediante una cuerda de 10.0 m de masa despreciable. Están aislados en el espacio, orbitando su centro de masa con magnitudes de velocidad de 5.00 m/s. Trate a los astronautas como partículas y calcule (a) la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema de dos astronautas y (b) la energía rotacional del sistema. Al jalar la cuerda, un astronauta acorta la distancia entre ellos a 5.00 m. (c) ¿Cuál es la nueva cantidad de movimiento angular del sistema? (d) ¿Cuáles son las nuevas magnitudes de velocidad de los astronautas? (e) ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema? (f) ¿Cuánta energía potencial química en el cuerpo del astronauta se convirtió en energía mecánica en el sistema cuando él jaló la cuerda?

56. Dos astronautas (figura P11.55), cada uno de masa M, están conectados por una cuerda de longitud d de masa despreciable. Ellos están aislados en el espacio, orbitando su centro de masa con magnitudes de rapidez v. Trate a los astronautas como partículas y calcule (a) la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema de dos astronautas y (b) la energía rotacional del sistema. Al jalar la cuerda, uno de los astronautas acorta la distancia entre ellos a $d/2$. (c) ¿Cuál es la nueva cantidad de movimiento angular del sistema? (d) ¿Cuáles son las nuevas magnitudes de rapidez de los astronautas? (e) ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema? (f) ¿Cuánta energía potencial química en el cuerpo del astronauta se convirtió en energía mecánica en el sistema cuando él acortó la cuerda?

57. Los nativos de Norte y Sudamérica usan *boleadoras* para cazar aves y animales. Una *boleadora* puede consistir de tres piedras, cada una con masa m, en los extremos de tres cuerdas ligeras, cada una con longitud ℓ. Los otros extremos de las cuerdas se amarran juntos para formar una Y. El cazador sostiene una piedra y gira las otras dos piedras sobre su cabeza (figura P11.57a). Ambas piedras se mueven juntas en un círculo horizontal de radio 2ℓ con rapidez v_0. En el instante en que el componente horizontal de su velocidad se dirige hacia la presa, el cazador suelta la piedra de su mano. A medida que la boleadora vuela a través del aire, las cuerdas rápidamente toman un ordenamiento estable con ángulos constantes de 120° entre ellas (figura P11.57b). En la dirección vertical, la boleadora está en caída libre. Las fuerzas gravitacionales que ejerce la Tierra hacen que la unión de las cuerdas se mueva con la aceleración descendente $\vec{\mathbf{g}}$. Usted puede ignorar el movimiento vertical mientras procede a describir el movimiento horizontal de la boleadora. En términos de m, ℓ y v_0, calcule (a) la magnitud de la cantidad de movimiento lineal de la boleadora en el momento de liberarla y después de su liberación, (b) la rapidez horizontal del centro de masa de la boleadora y (c) la cantidad de movimiento angular de la boleadora respecto a su centro de masa. (d) Encuentre la rapidez angular de la boleadora respecto a su centro de masa después de asumir la formación en Y. Calcule la energía cinética de la boleadora (e) en el instante de liberación

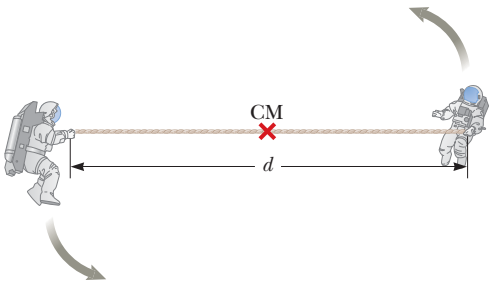


Figura P11.55 Problemas 55 y 56.

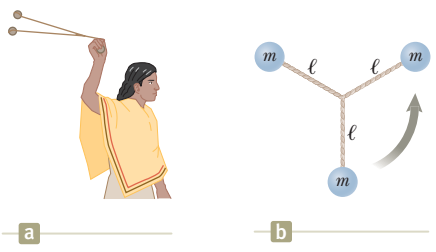


Figura P11.57

y (f) en su forma Y estable. (g) Explique cómo se aplican las leyes de conservación a la boleadora mientras cambia su configuración. Robert Beichner sugirió la idea para este problema.

58. Una barra uniforme de 300 g de masa y 50.0 cm de longitud rota en un plano horizontal en torno a una clavija fija vertical sin fricción a través de su centro. Dos pequeñas cuentas densas, cada una de masa m, se montan sobre la barra de modo que puedan deslizarse sin fricción a lo largo de su longitud. Al inicio, las cuentas se sostienen mediante broches en posiciones a 10.0 cm en cada lado del centro, y el sistema está girando con una rapidez angular de 36.0 rad/s. Los broches se liberan simultáneamente y las cuentas se deslizan hacia fuera a lo largo de la barra. (a) Encuentre la rapidez angular ω_f del sistema, dependiente de m, en el instante que las cuentas se deslizan a los extremos de la barra. (b) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo posibles para ω_f y los valores de m a los que corresponden?

59. El calentamiento global causa preocupación porque incluso pequeños cambios en la temperatura de la Tierra pueden tener consecuencias significativas. Por ejemplo, si las capas de hielo polar de la Tierra se derritieran por completo, el agua adicional resultante en los océanos inundaría muchas áreas costeras. Modele el hielo polar con una masa de 2.30×10^{19} kg y que forma dos discos planos de 6.00×10^5 m de radio. Suponga que el agua se dispersa en un delgado cascarón esférico irrompible después de derretirse. Calcule el cambio resultante en la duración de un día, en segundos y como un porcentaje.

60. El disco en la figura P11.60 tiene una masa de 0.120 kg. La distancia del disco al centro de rotación es originalmente 40.0 cm, y el disco está deslizándose con una rapidez de 80.0 cm/s. La cuerda es jalada hacia abajo 15.0 cm a través del hoyo en la mesa sin fricción. Determine el trabajo realizado sobre el disco. (*Sugerencia*: Considere el cambio de energía cinética.)

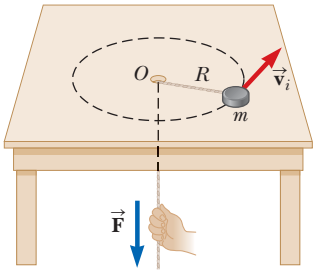


Figura P11.60

Problemas de desafío

61. Un disco sólido uniforme de radio R es puesto a girar con una rapidez angular ω_i respecto a un eje a través de su centro. Mientras el disco rota con esta rapidez, se le coloca en contacto con una superficie horizontal e inmediatamente se le libera, como se muestra en la figura P11.61. (a) ¿Cuál es la rapidez angular del disco al ocurrir rodamiento puro? (b) Encuentre el cambio fraccional en la energía cinética desde el instante que el disco hace contacto con la superficie hasta que ocurre el rodamiento puro. (c) Suponga que el coeficiente de fricción entre el disco y la superficie es μ. ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre el contacto del disco con la superficie y el instante en que se presenta rodamiento puro? (d) ¿Qué distancia recorre el disco antes que inicie el rodamiento puro?

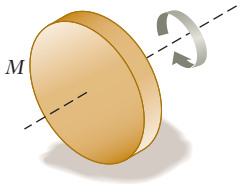


Figura P11.61

62. En el ejemplo 11.9 se estudió una colisión elástica entre un disco y un bastón sobre una superficie sin fricción. Suponga que todo es igual como en dicho ejemplo, excepto que ahora la colisión es perfectamente inelástica, de manera que el disco se adhiere al bastón en el extremo donde golpea. Encuentre (a) la rapidez del centro de masa del sistema y (b) la rapidez angular del sistema después de la colisión.

63. Un cubo sólido de lado $2a$ y masa M se desliza sobre una superficie sin fricción con velocidad uniforme $\vec{\mathbf{v}}$, como se muestra en la figura P11.63a. Golpea un pequeño obstáculo al final de la mesa, causando que el cubo se incline como se indica en la figura P11.63b. Encuentre el valor mínimo de la magnitud de $\vec{\mathbf{v}}$ tal que el cubo caiga de la mesa. *Nota*: el cubo experimenta una colisión inelástica en el borde.

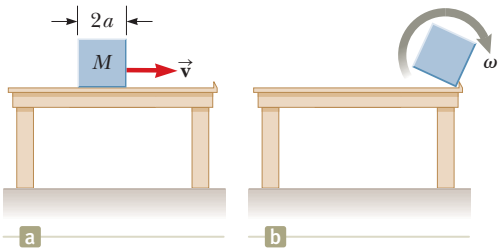


Figura P11.63

64. Un cubo sólido de madera, de lado $2a$ y masa M, descansa sobre una superficie horizontal. El cubo está restringido a dar vuelta en torno al eje fijo AB (figura P11.64). Una bala de masa m y rapidez v se dispara a la cara opuesta a $ABCD$ a una altura de $4a/3$. La bala se incrusta en el cubo. Encuentre el valor mínimo de v que se requiere para voltear al cubo de modo que caiga sobre la cara $ABCD$. Suponga $m << M$.

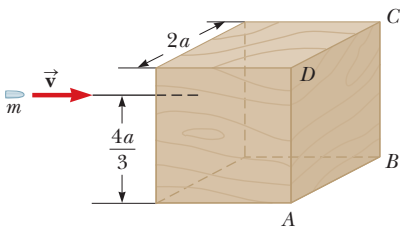
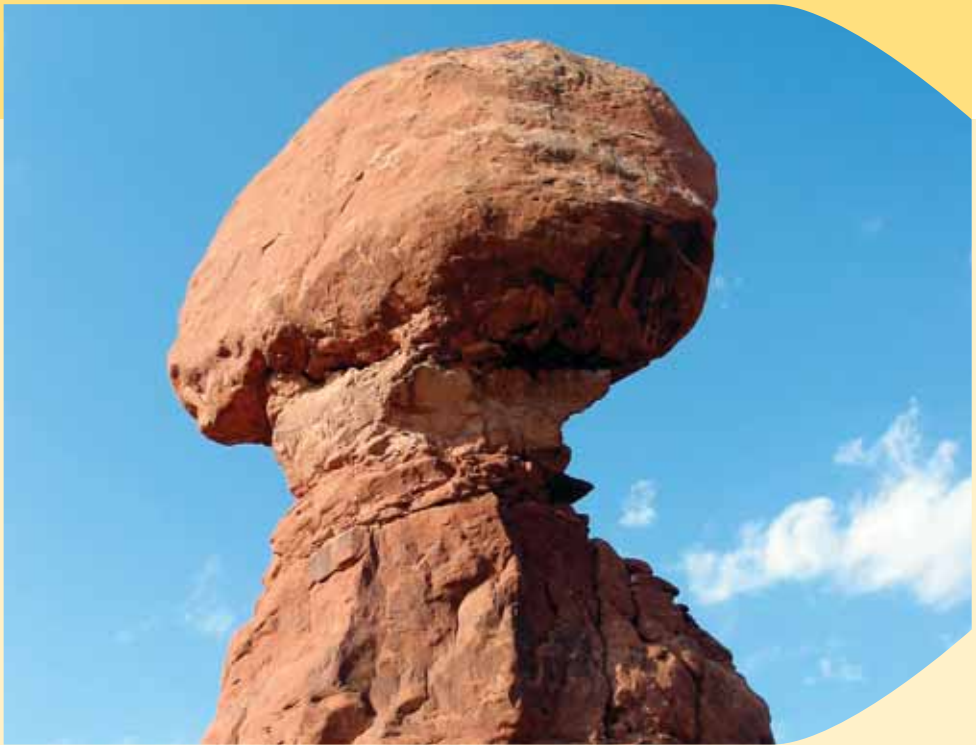


Figura P11.64

CAPÍTULO

12

Equilibrio estático y elasticidad



12.1 Análisis de modelo: objeto rígido en equilibrio

12.2 Más acerca del centro de gravedad

12.3 Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático

12.4 Propiedades elásticas de los sólidos

La Roca Equilibrada en el Arches National Park, Utah, es una gran roca de 3 000 000 kg que ha estado en equilibrio estable durante milenios. Tenía de vecina una compañera más pequeña, llamada "Astilla del viejo bloque", que cayó durante el invierno de 1975. La Roca Equilibrada apareció en una de las primeras escenas de la película *Indiana Jones y la última cruzada*. En este capítulo se estudiarán las condiciones bajo las que un objeto está en equilibrio. *(John W. Jewett Jr.)*

En los capítulos 10 y 11 se estudió la dinámica de los objetos rígidos. Parte de este capítulo aborda las condiciones en que un objeto rígido está en equilibrio. El término *equilibrio* implica que el objeto se mueve con velocidad constante y con velocidad angular constante respecto a un observador en un marco de referencia inercial. Aquí sólo se trata con el caso especial donde esas dos velocidades son iguales a cero. En este caso, el objeto está en *equilibrio estático*. El equilibrio estático representa una situación común en la práctica ingenieril, y los principios que involucra son de especial interés para ingenieros civiles, arquitectos e ingenieros mecánicos. Si es estudiante de ingeniería, sin duda llevará un curso avanzado de estática.

La última sección de este capítulo trata sobre cómo se deforman los objetos bajo condiciones de carga. Un objeto elástico regresa a su forma original cuando se eliminan las fuerzas deformantes. Se definen varias constantes elásticas, cada una correspondiente a un tipo diferente de deformación.

12.1 Análisis de modelo: objeto rígido en equilibrio

En el capítulo 5 se explicó el modelo de partícula en equilibrio, en el que una partícula se mueve con velocidad constante porque la fuerza neta que actúa sobre ella es cero. La situación con objetos reales (extendidos) es más compleja, porque dichos objetos con frecuencia no se pueden modelar como partículas. Para que un objeto extendido esté en equilibrio, se debe satisfacer una segunda condición. Esta segunda condición involucra el movimiento rotacional del objeto extendido.

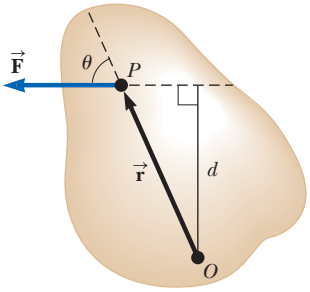


Figura 12.1 Una sola fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ actúa sobre un objeto rígido en el punto *P*.

Considere una sola fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre un objeto rígido, como se muestra en la figura 12.1. Recuerde que el momento de torsión, asociado con la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$, respecto a un eje que pasa a través de *O* está dado por la ecuación 11.1:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

La magnitud de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ es Fd (véase la ecuación 10.14), donde d es el brazo de momento indicado en la figura 12.1. De acuerdo con la ecuación 10.18, el momento de torsión neto sobre un objeto rígido causa que éste experimente una aceleración angular.

En esta discusión se investigan aquellas situaciones rotacionales en las cuales la aceleración angular de un objeto rígido es cero. Tal objeto está en **equilibrio rotacional**. Como $\Sigma\, \tau_{\text{ext}} = I\alpha$ para rotación alrededor de un eje fijo, la condición necesaria para equilibrio rotacional es que el momento de torsión neto respecto a cualquier eje debe ser cero. Ahora se tienen dos condiciones necesarias para el equilibrio de un objeto rígido:

1. La fuerza externa neta sobre el objeto debe ser igual a cero:

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 0 \qquad (12.1)$$

2. El momento de torsión externo neto sobre el objeto alrededor de cualquier eje debe ser cero:

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = 0 \qquad (12.2)$$

Estas condiciones describen el análisis de modelo de **objeto rígido en equilibrio**. La primera condición es un enunciado de equilibrio traslacional; establece que la aceleración traslacional del centro de masa del objeto debe ser cero cuando se ve desde un marco de referencia inercial. La segunda condición es un enunciado de equilibrio rotacional; afirma que la aceleración angular en torno a cualquier eje debe ser cero. En el caso especial de **equilibrio estático**, que es el tema principal de este capítulo, el objeto en equilibrio está en reposo relativo al observador y por eso carece de rapidez traslacional o angular (es decir, $v_{\text{CM}} = 0$ y $\omega = 0$).

Examen rápido 12.1 En la figura 12.2, considere el objeto sometido a dos fuerzas de igual magnitud. Elija el enunciado correcto respecto a esta situación. **(a)** El objeto está en equilibrio de fuerzas pero no en equilibrio de momento de torsión. **(b)** El objeto está en equilibrio de momento de torsión pero no en equilibrio de fuerza. **(c)** El objeto está en equilibrio de fuerza y en equilibrio de momento de torsión. **(d)** El objeto no está ni en equilibrio de fuerza ni en equilibrio de momento de torsión.

Examen rápido 12.2 En la figura 12.3 considere el objeto sometido a tres fuerzas. Seleccione el enunciado correcto relativo a esta situación. **(a)** El objeto está en equilibrio de fuerza pero no en equilibrio de momento de torsión. **(b)** El objeto está en equilibrio de momento de torsión pero no en equilibrio de fuerza. **(c)** El objeto está en equilibrio de fuerza y en equilibrio de momento de torsión. **(d)** El objeto no está ni en equilibrio de fuerza ni en equilibrio de momento de torsión.

Prevención de riesgos ocultos 12.1

Momento de torsión cero Un momento de torsión neto cero no significa una ausencia de movimiento rotacional. Un objeto que rota con rapidez angular constante puede estar bajo la influencia de un momento de torsión neto nulo. Esta posibilidad es análoga a la situación traslacional: fuerza neta cero no significa una ausencia de movimiento traslacional.

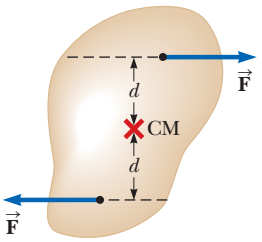


Figura 12.2 (Examen rápido 12.1) Dos fuerzas de igual magnitud se aplican a distancias iguales desde el centro de masa de un objeto rígido.

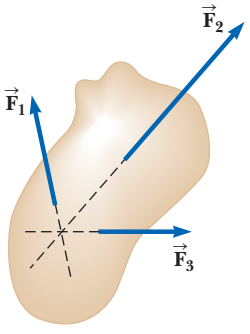


Figura 12.3 (Examen rápido 12.2) Tres fuerzas actúan sobre un objeto. Note que las líneas de acción de las tres fuerzas pasan a través de un punto común.

Las dos expresiones vectoriales dadas por las ecuaciones 12.1 y 12.2 son equivalentes, en general, a seis ecuaciones escalares: tres de la primera condición para equilibrio y tres de la segunda (que corresponden a las componentes x, y y z). Por tanto, en un sistema complejo que involucra varias fuerzas que actúan en diversas direcciones, se podría enfrentar con resolver un conjunto de ecuaciones con muchas incógnitas. Aquí la discusión se restringe a situaciones donde todas las fuerzas se encuentran en el plano xy. (Se dice que las fuerzas cuyas representaciones vectoriales están en el mismo plano son *coplanares*.) Con esta restricción, sólo debe ocuparse con tres ecuaciones escalares. Dos vienen de equilibrar las fuerzas en las direcciones x y y. La tercera resulta de la ecuación de momento de torsión, a saber: que el momento de torsión neto respecto a un eje perpendicular a través de *cualquier* punto en el plano xy

debe ser cero. Este eje perpendicular necesariamente será paralelo al eje z, así que las dos condiciones del modelo de equilibrio del objeto rígido aportan las ecuaciones

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum \tau_z = 0 \tag{12.3}$$

donde la ubicación del eje en la ecuación del momento de torsión es arbitraria.

Análisis de modelo **Objeto rígido en equilibrio**

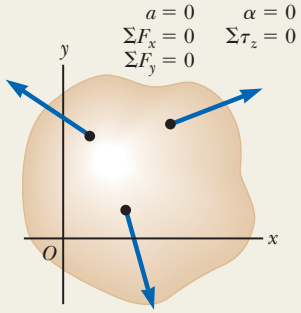
Imagine un objeto que puede rotar pero que no muestra aceleración traslacional a ni aceleración rotacional α. Tal objeto está en equilibrio traslacional y rotacional, así la fuerza neta y el momento de torsión neto respecto a cualquier eje son iguales a cero:

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 0 \tag{12.1}$$

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = 0 \tag{12.2}$$

Ejemplos:

- un balcón sobresale de un edificio y debe sostener el peso de varias personas sin colapsar
- en un evento olímpico, un gimnasta ejecuta la difícil maniobra *cruz de hierro*
- un barco navega con rapidez constante en agua tranquila y mantiene una orientación perfectamente nivelada (capítulo 14)
- en un material dieléctrico las moléculas polarizadas en un campo eléctrico constante adoptan una orientación de equilibrio promedio que permanece fija en el tiempo (capítulo 26)



12.2 Más acerca del centro de gravedad

Siempre que trate con un objeto rígido, una de las fuerzas que debe considerar es la fuerza gravitacional que actúa sobre él, y debe conocer el punto de aplicación de esta fuerza. Como aprendió en la sección 9.5, asociado con todo objeto hay un punto especial llamado centro de gravedad. La combinación de las diferentes fuerzas gravitacionales que actúan en todos los elementos de masa del objeto es equivalente a una sola fuerza gravitacional que actúa a través de este punto. Por lo tanto, para calcular el momento de torsión debido a la fuerza gravitacional de un objeto de masa M, sólo se necesita considerar la fuerza $M\vec{\mathbf{g}}$ que actúa en el centro de gravedad del objeto.

¿Cómo se encuentra este punto especial? Como se mencionó en la sección 9.5, si supone que $\vec{\mathbf{g}}$ es uniforme en el objeto, el centro de gravedad del objeto coincide con su centro de masa. Para ver por qué, considere un objeto con forma arbitraria que se encuentra en el plano xy, como se ilustra en la figura 12.4. Suponga que el objeto se divide en un gran número de partículas de masas m_1, m_2, m_3,. . . que tienen coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),. . . . En la ecuación 9.29 se definió la coordenada x del centro de masa como

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

Se usa una ecuación similar para definir la coordenada y del centro de masa, al sustituir cada x con su contraparte y.

Ahora se examinará la situación desde otro punto de vista al considerar la fuerza gravitacional que se ejerce sobre cada partícula, como se muestra en la figura 12.5. Cada partícula contribuye con un momento de torsión en torno a un eje a través del origen igual en magnitud al peso mg de la partícula multiplicado por su brazo de momento. Por ejemplo, la magnitud del momento de torsión debida a la fuerza $m_1\vec{\mathbf{g}}_1$ es $m_1g_1x_1$, donde g_1 es el valor de la aceleración gravitacional en la posición de la partícula de masa m_1. Se desea ubicar el centro de gravedad, el punto donde la aplicación de la única fuerza gravitacional $M\vec{\mathbf{g}}_{\text{CG}}$ (donde $M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$ es la masa total del objeto y $\vec{\mathbf{g}}_{\text{CG}}$ es la aceleración debida a la gravedad en la posición del centro de gravedad) tiene el mismo efecto sobre la rotación que el efecto combi-

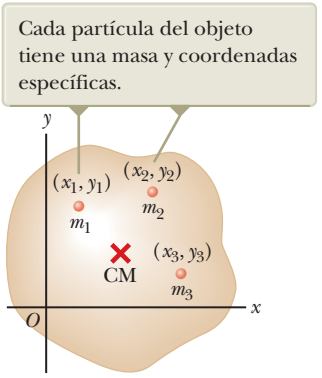


Figura 12.4 Un objeto se puede dividir en muchas pequeñas partículas. Estas partículas se pueden emplear para localizar el centro de masa.

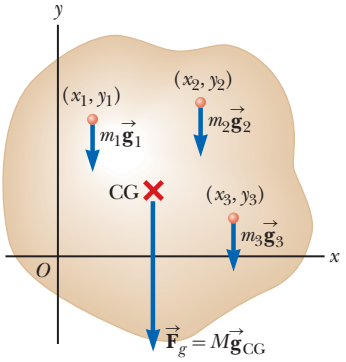


Figura 12.5 Si un objeto se divide en muchas partículas, se puede encontrar su centro de gravedad.

nado de todas las fuerzas gravitacionales individuales $m_i\vec{\mathbf{g}}_i$. Al igualar el momento de torsión resultante de $M\vec{\mathbf{g}}_{CG}$ que actúa en el centro de gravedad con la suma de los momentos de torsión que actúan sobre las partículas individuales, se obtiene

$$(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots)g_{CG}\, x_{CG} = m_1 g_1 x_1 + m_2 g_2 x_2 + m_3 g_3 x_3 + \cdots$$

Esta expresión revela la posibilidad de que el valor de g pueda en general variar sobre el objeto. Si se supone g uniforme sobre el objeto (como usualmente es el caso), los factores g se cancelan y resulta

$$x_{CG} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \tag{12.4}$$

Al comparar este resultado con la ecuación 9.29, se demuestra que el centro de gravedad se localiza en el centro de masa en tanto $\vec{\mathbf{g}}$ sea uniforme sobre todo el objeto. Varios ejemplos en la siguiente sección tratan con objetos homogéneos simétricos. El centro de gravedad para cualquiera de tales objetos coincide con su centro geométrico.

Examen rápido 12.3 Una regleta de densidad uniforme cuelga de una cuerda amarrada en la marca de 25 cm. Un objeto de 0.50 kg cuelga del extremo cero de la regleta y ésta se equilibra horizontalmente. ¿Cuál es la masa de la cinta métrica? **(a)** 0.25 kg, **(b)** 0.50 kg, **(c)** 0.75 kg, **(d)** 1.0 kg, **(e)** 2.0 kg, **(f)** imposible de determinar.



© Cengage Learning/Charles D. Winters

Figura 12.6 Este soporte de una botella de vino es una sorprendente muestra de equilibrio estático.

12.3 Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático

La fotografía del soporte de una botella de vino de la figura 12.6 muestra un ejemplo de un sistema mecánico en equilibrio que parece desafiar a la gravedad. Para que el sistema (soporte más botella) esté en equilibrio, la fuerza externa neta debe ser cero (véase la ecuación 12.1) y el momento de torsión externo neto debe ser cero (véase la ecuación 12.2). La segunda condición se satisface sólo cuando el centro de gravedad del sistema está directamente arriba del punto de soporte.

Estrategia para resolución de problemas — Objeto rígido en equilibrio

Cuando analice un objeto rígido en equilibrio bajo la acción de varias fuerzas externas, utilice el siguiente procedimiento.

1. Conceptualizar. Piense en el objeto que está en equilibrio e identifique todas las fuerzas que actúan sobre él. Imagine qué efecto tendría cada fuerza en la rotación del objeto si fuese la única fuerza en acción.

2. Categorizar. Confirme que el objeto bajo estudio es un objeto rígido en equilibrio. El objeto debe tener sus aceleraciones traslacional y angular iguales a cero.

3. Analizar. Dibuje un diagrama y etiquete todas las fuerzas externas que actúan sobre el objeto. Intente sugerir la dirección correcta para cada fuerza si ésta no tiene una dirección dada. Al emplear el modelo de partícula bajo una fuerza neta, el objeto sobre el que actúan las fuerzas puede representarse con un punto en un diagrama de cuerpo libre porque no depende en qué parte del objeto se aplican las fuerzas. Sin embargo, al utilizar el modelo de objeto rígido en equilibrio, no se puede emplear un punto para representar al objeto porque en los cálculos ahora sí es importante la ubicación donde actúan las fuerzas. Por lo tanto, en un diagrama que muestra las fuerzas sobre un objeto se debe mostrar el objeto real o una versión simplificada de él.

Descomponga todas las fuerzas en componentes rectangulares y elija un sistema coordenado conveniente. Luego aplique la primera condición para el equilibrio, la ecuación 12.1. Recuerde seguir la pista de los signos de las diferentes componentes de las fuerzas.

Estrategia para resolución de problemas continuación

Elija un eje conveniente para calcular el momento de torsión neto sobre el objeto rígido. Recuerde que la elección del eje para la ecuación del momento de torsión es arbitraria; por lo tanto, seleccione un eje que simplifique sus cálculos tanto como sea posible. Usualmente, el eje más conveniente para calcular momentos de torsión es el que pasa por un punto sobre la línea de acción de varias fuerzas, así éstas tienen momento de torsión cero respecto de ese eje. Si no conoce o no es necesario conocer una fuerza, entonces con frecuencia es benéfico elegir un eje a través del punto en el que actúa dicha fuerza. Aplique la segunda condición para el equilibrio, ecuación 12.2.

Resuelva las ecuaciones simultáneas para las incógnitas en términos de las cantidades conocidas.

4. Finalizar. Confirme que sus resultados sean consistentes con su diagrama. Si seleccionó una dirección que conduce a un signo negativo en su solución para una fuerza, no se alarme; simplemente significa que la dirección de la fuerza es la opuesta a la que supuso. Sume las fuerzas verticales y horizontales sobre el objeto y confirme que cada conjunto de componentes suma cero. Sume los momentos de torsión sobre el objeto y confirme que la suma es igual a cero.

Ejemplo 12.1 Otra visita al sube y baja AM

Un sube y baja consiste de un tablón uniforme de masa M y longitud ℓ que sostiene en reposo a un padre y su hija con masas m_f y m_d, respectivamente, como se muestra en la figura 12.7. El soporte (llamado *fulcro*) está bajo el centro de gravedad del tablón, el padre está a una distancia d del centro y la hija a una distancia $\ell/2$ del centro.

(A) Determine la magnitud de la fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{n}}$ que ejerce el soporte sobre el tablón.

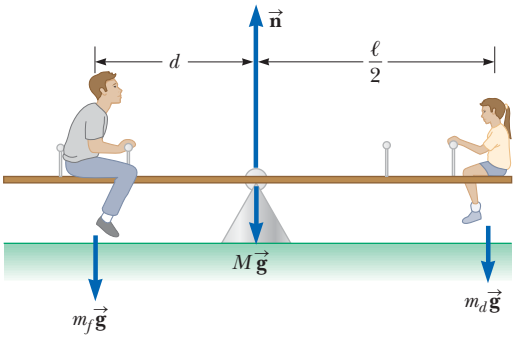


Figura 12.7 (Ejemplo 12.1) Un sistema en equilibrio.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Concentre su atención en el tablón y considere las fuerzas gravitacionales sobre el padre y la hija como fuerzas aplicadas directamente al tablón. La hija causaría una rotación en sentido de las manecillas del reloj sobre el tablón en torno al soporte, mientras que el padre causaría una rotación contra las manecillas del reloj.

Categorizar Ya que el texto del problema establece que el sistema está en reposo, el tablón se modela como un *objeto rígido en equilibrio*. Sin embargo, debido a que sólo se necesitará la primera condición de equilibrio para resolver esta parte del problema, el tablón se modela como una *partícula en equilibrio*.

Analizar Defina hacia arriba como la dirección y positiva y sustituya las fuerzas sobre el tablón en la ecuación 12.1:

$$n - m_f g - m_d g - Mg = 0$$

Resuelva para la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{n}}$:

$$(1)\quad n = m_f g + m_d g + Mg = (m_f + m_d + M)g$$

(B) Determine dónde se debería sentar el padre para equilibrar el sistema en reposo.

SOLUCIÓN

Categorizar Esta parte del problema requiere la introducción de momento de torsión para encontrar la posición del padre, así que el tablón se modela como un *objeto rígido en equilibrio*.

Analizar El centro de gravedad del tablón está en su centro geométrico porque se dijo que el tablón es uniforme. Si se elige un eje de rotación perpendicular a la página a través del centro de gravedad del tablón, los momentos de torsión producidos por $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza gravitacional sobre el tablón en torno a este eje son cero.

continúa

12.1 continuación

Sustituya en la ecuación 12.2 expresiones para los momentos de torsión sobre el tablón debidos al padre y la hija:

$$(m_f g)(d) - (m_d g)\frac{\ell}{2} = 0$$

Resuelva para d:

$$d = \left(\frac{m_d}{m_f}\right)\frac{\ell}{2}$$

Finalizar Este resultado es el mismo que se obtuvo en el ejemplo 11.6 al evaluar la aceleración angular del sistema y haciendo la aceleración angular igual a cero.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que se elige otro punto por donde pasa el eje de rotación. Por ejemplo, suponga que el eje es perpendicular a la página y pasa a través de la posición del padre. ¿Esto cambia los resultados de los incisos (A) y (B)?

Respuesta El inciso (A) no se afecta porque el cálculo de la fuerza neta no involucra un eje de rotación. En el inciso (B), conceptualmente se esperaría que no hubiera cambio si se elige un eje de rotación diferente, porque la segunda condición de equilibrio afirma que el momento de torsión es cero en torno a *cualquier* eje de rotación.

Compruebe matemáticamente esta respuesta. Recuerde que el signo del momento de torsión asociado con una fuerza es positivo si dicha fuerza tiende a dar vuelta al sistema contra las manecillas del reloj, mientras que el signo del momento de torsión es negativo si la fuerza tiende a dar vuelta al sistema en sentido de las manecillas del reloj. Elija un eje de rotación que pase a través de la posición del padre.

Sustituya en la ecuación 12.2 las expresiones para los momentos de torsión sobre el tablón respecto a este eje:

$$n(d) - (Mg)(d) - (m_d g)\left(d + \frac{\ell}{2}\right) = 0$$

Sustituya la ecuación (1) del inciso (A) y resuelva para d:

$$(m_f + m_d + M)g(d) - (Mg)(d) - (m_d g)\left(d + \frac{\ell}{2}\right) = 0$$

$$(m_f g)(d) - (m_d g)\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad d = \left(\frac{m_d}{m_f}\right)\frac{\ell}{2}$$

Este resultado está de acuerdo con el obtenido en el inciso (B).

Ejemplo 12.2 De pie sobre una viga horizontal

AM

Una viga horizontal uniforme con una longitud $\ell = 8.00$ m y un peso $W_b = 200$ N se une a una pared mediante una junta articulada. Su extremo lejano está sostenido con un cable que forma un ángulo de $\phi = 53.0°$ con la viga (figura 12.8a). Una persona de peso $W_p = 600$ N está de pie a 2.00 m de la pared. Encuentre la tensión en el cable así como la magnitud y dirección de la fuerza que ejerce la pared sobre la viga.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que la persona de la figura 12.8a se mueve hacia fuera sobre la viga. Parece razonable que mientras más avance hacia fuera, mayor será el momento de torsión que aplique sobre el eje y la tensión en el cable debe ser mayor para equilibrar este momento de torsión.

Categorizar Ya que el sistema está en reposo, la viga se clasifica como un *objeto rígido en equilibrio*.

Analizar Identifique todas las fuerzas externas que actúan sobre la viga: la fuerza gravitacional de 200 N, la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce el cable, la fuerza $\vec{\mathbf{R}}$ que ejerce la pared en el pivote y la fuerza de 600 N que ejerce la persona sobre la viga. Todas estas fuerzas se indican en el diagrama

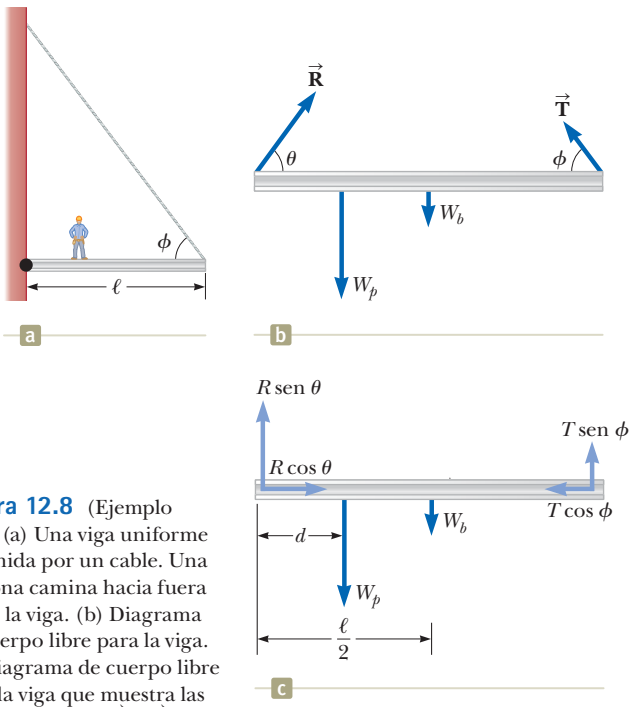


Figura 12.8 (Ejemplo 12.2) (a) Una viga uniforme sostenida por un cable. Una persona camina hacia fuera sobre la viga. (b) Diagrama de cuerpo libre para la viga. (c) Diagrama de cuerpo libre para la viga que muestra las componentes de $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{T}}$.

12.2 continuación

de cuerpo libre para la viga que se muestra en la figura 12.8b. Cuando se asignan direcciones a las fuerzas, a veces es útil imaginar qué sucedería si súbitamente se retira una fuerza. Por ejemplo, si de pronto desapareciera la pared, el extremo izquierdo de la viga se movería a la izquierda mientras comienza a caer. Este escenario dice que la pared no sólo sostiene la viga, sino también presiona hacia fuera contra ella. Por lo tanto, el vector $\vec{\mathbf{R}}$ se dibuja en la dirección que se indica en la figura 12.8b. La figura 12.8c muestra las componentes horizontal y vertical de $\vec{\mathbf{T}}$ y $\vec{\mathbf{R}}$.

Aplique la primera condición de equilibrio, sustituya expresiones para las fuerzas sobre la viga en las ecuaciones de las componentes de la ecuación 12.1:

$$(1)\quad \sum F_x = R\cos\theta - T\cos\phi = 0$$
$$(2)\quad \sum F_y = R\,\text{sen}\,\theta + T\,\text{sen}\,\phi - W_p - W_b = 0$$

donde se eligió hacia la derecha y hacia arriba como las direcciones positivas. Puesto que R, T y θ son incógnitas, no se puede obtener una solución sólo a partir de estas expresiones. (Para resolver las incógnitas, en general el número de ecuaciones simultáneas debe ser igual al número de incógnitas.)

Ahora invoque la condición de equilibrio rotacional. Un eje conveniente a elegir para la ecuación de momento de torsión es el que pasa a través de la junta articulada. La característica que hace a este eje tan conveniente es que tanto la fuerza $\vec{\mathbf{R}}$ como la componente horizontal de $\vec{\mathbf{T}}$ tienen un brazo de momento cero; en consecuencia, dichas fuerzas no producen momento de torsión en torno a ese eje.

Sustituya expresiones para los momentos de torsión sobre la viga en la ecuación 12.2:

$$\sum \tau_z = (T\,\text{sen}\,\phi)(\ell) - W_p d - W_b\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$$

Esta ecuación sólo contiene a T como una incógnita debido a la elección del eje de rotación. Resuelva para T y sustituya valores numéricos:

$$T = \frac{W_p d + W_b(\ell/2)}{\ell\,\text{sen}\,\phi} = \frac{(600\text{ N})(2.00\text{ m}) + (200\text{ N})(4.00\text{ m})}{(8.00\text{ m})\,\text{sen}\,53.0^\circ} = \boxed{313\text{ N}}$$

Reacomode las ecuaciones (1) y (2), y después divida:

$$\frac{R\,\text{sen}\,\theta}{R\cos\theta} = \tan\theta = \frac{W_p + W_b - T\,\text{sen}\,\phi}{T\cos\phi}$$

Resuelva para θ y sustituya valores numéricos:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{W_p + W_b - T\,\text{sen}\,\phi}{T\cos\phi}\right)$$

Resuelva la ecuación (1) para R y sustituya valores numéricos:

$$= \tan^{-1}\left[\frac{600\text{ N} + 200\text{ N} - (313\text{ N})\,\text{sen}\,53.0^\circ}{(313\text{ N})\cos 53.0^\circ}\right] = \boxed{71.1^\circ}$$

$$R = \frac{T\cos\phi}{\cos\theta} = \frac{(313\text{ N})\cos 53.0^\circ}{\cos 71.1^\circ} = \boxed{581\text{ N}}$$

Finalizar El valor positivo para el ángulo θ indica que la estimación de la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ fue precisa.

De haber seleccionado algún otro eje para la ecuación de momento de torsión la solución podría diferir en los detalles, pero las respuestas serían las mismas. Por ejemplo, si hubiese elegido un eje a través del centro de gravedad de la viga, la ecuación del momento de torsión involucraría tanto a T como a R. Sin embargo, esta ecuación, junto con las ecuaciones (1) y (2), todavía se podría resolver para las incógnitas. ¡Inténtelo!

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la persona camina más lejos sobre la viga? ¿Cambia T? ¿Cambia R? ¿Cambia θ?

Respuesta T debe aumentar porque la fuerza gravitacional sobre la persona ejerce un momento de torsión mayor en torno a la junta articulada, que debe contrarrestar un momento de torsión más grande en la dirección opuesta debido a un valor creciente de T. Si T aumenta, la componente vertical de $\vec{\mathbf{R}}$ disminuye para mantener el equilibrio de fuerza en la dirección vertical. Sin embargo, el equilibrio de fuerzas en la dirección horizontal requiere una componente horizontal creciente de $\vec{\mathbf{R}}$ para equilibrar la componente horizontal de la $\vec{\mathbf{T}}$ creciente. Este hecho sugiere que θ se vuelve más pequeño, pero es difícil predecir qué sucede con R. El problema 66 le pide explorar el comportamiento de R.

Ejemplo 12.3 La escalera inclinada AM

Una escalera uniforme de longitud ℓ descansa contra una pared vertical lisa (figura 12.9a). La masa de la escalera es m y el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo es $\mu_s = 0.40$. Encuentre el ángulo mínimo $\theta_{\text{mín}}$ en el cual la escalera no se resbala.

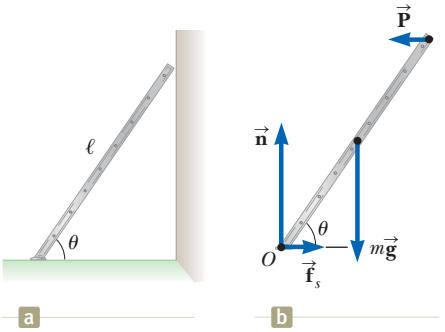


Figura 12.9 (Ejemplo 12.3) (a) Una escalera uniforme en reposo que se apoya contra una pared lisa. El suelo es rugoso. (b) Diagrama de cuerpo libre para la escalera.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en cualquier escalera que haya subido. ¿Prefiere una gran fuerza de fricción entre la parte baja de la escalera y la superficie o una pequeña? Si la fuerza de fricción es cero, ¿la escalera quedará levantada? Simule una escalera con una regla que se inclina contra una superficie vertical. ¿La regla se desliza en ciertos ángulos y queda levantada en otros?

Categorizar No es deseable que la escalera se deslice, así que se le modela como un *objeto rígido en equilibrio*.

Analizar En la figura 12.9b se ilustra el diagrama de cuerpo libre que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre la escalera. La fuerza que el suelo ejerce sobre la escalera es la suma vectorial de una fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza de fricción estática $\vec{\mathbf{f}}_s$. La pared ejerce una fuerza normal $\vec{\mathbf{P}}$ sobre lo alto de la escalera, pero ahí no existe fuerza de fricción porque la pared es lisa. Así que la fuerza neta sobre la parte alta de la escalera es perpendicular a la pared y tiene magnitud P.

Aplique a la escalera la primera condición para el equilibrio en las direcciones x y y:

$$(1)\quad \sum F_x = f_s - P = 0$$
$$(2)\quad \sum F_y = n - mg = 0$$

Resuelva la ecuación (1) para P:

$$(3)\quad P = f_s$$

Resuelva la ecuación (2) para n:

$$(4)\quad n = mg$$

Cuando la escalera está a punto de deslizarse, la fuerza de fricción estática debe tener su valor máximo, que se conoce por $f_{s,\text{máx}} = \mu_s n$. Combine esta ecuación con las ecuaciones (3) y (4):

$$(5)\quad P_{\text{máx}} = f_{s,\text{máx}} = \mu_s n = \mu_s mg$$

Aplique a la escalera la segunda condición para el equilibrio y considere momentos de torsión en torno a un eje perpendicular a la página a través de O:

$$\sum \tau_O = P\ell \operatorname{sen}\theta - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta = 0$$

Resuelva para tan θ:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{mg}{2P} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{mg}{2P}\right)$$

Bajo las condiciones de que la escalera está justo a punto de resbalar, θ es $\theta_{\text{mín}}$ y $P_{\text{máx}}$ está dada por la ecuación (5). Sustituya:

$$\theta_{\text{mín}} = \tan^{-1}\left(\frac{mg}{2P_{\text{máx}}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\mu_s}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{1}{2(0.40)}\right] = 51°$$

Finalizar Note que el ángulo sólo depende del coeficiente de fricción, no de la masa o longitud de la escalera.

Ejemplo 12.4 Superar una acera AM

(A) Estime la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que una persona debe aplicar a la rueda principal de una silla de ruedas para que ruede sobre el borde de una acera (figura 12.10a). Esta rueda principal que entra en contacto con el borde tiene un radio r y la altura del borde es h.

12.4 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en los accesos de los edificios para las sillas de ruedas. Por lo general, existen rampas que se construyen para los individuos en sillas de ruedas. Las estructuras escalonadas como los bordes de las aceras son serias barreras para una silla de ruedas.

Categorizar Imagine que la persona ejerce suficiente fuerza de modo que la parte baja de la rueda principal apenas pierde contacto con la superficie inferior y oscila en reposo. La rueda en esta situación se modela como un *objeto rígido en equilibrio.*

Analizar Por lo general, las manos de la persona proporcionan la fuerza requerida a una rueda ligeramente más pequeña que es concéntrica con la rueda principal. Por simplicidad, suponga que el radio de esta segunda rueda es el mismo que el radio de la rueda principal. Estime una fuerza gravitacional combinada de magnitud $mg = 1\ 400$ N para la persona y la silla de ruedas, que actúa a lo largo de la línea de acción que pasa por el eje de la rueda principal, y elija un radio de rueda de $r = 30$ cm. Considere que la altura del borde de la acera es $h = 10$ cm. Suponga también que la silla de ruedas y el ocupante son simétricos y que cada rueda soporta un peso de 700 N. En tal caso proceda a analizar sólo una de las ruedas principales. La figura 12.10b muestra la geometría para una sola rueda.

Cuando la rueda está a punto de elevarse del pavimento, la fuerza normal que ejerce el suelo sobre la rueda en el punto B tiende a cero. En consecuencia, en este instante sólo actúan tres fuerzas sobre la rueda, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 12.10c. La fuerza $\vec{\mathbf{R}}$, que es la fuerza que ejerce el borde de la acera sobre la rueda, actúa en el punto A, de modo que si se elige tener un eje de rotación perpendicular a la página y pasando a través del punto A, no es necesario incluir $\vec{\mathbf{R}}$ en la ecuación de momento de torsión. El brazo de momento de $\vec{\mathbf{F}}$ relativo a un eje a través de A es $2r - h$ (véase la figura 12.10c).

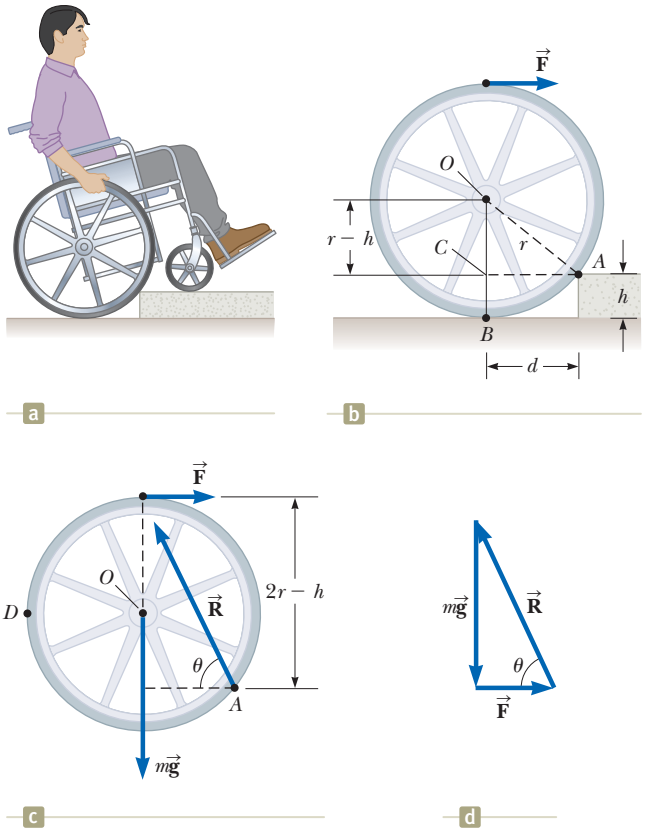


Figura 12.10 (Ejemplo 12.4) (a) Una persona en una silla de ruedas intenta rodar sobre el borde de una acera. (b) Detalles de la rueda y el borde. La persona aplica una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ a lo alto de la rueda. (c) Diagrama de cuerpo libre para la rueda cuando está a punto de elevarse. Tres fuerzas actúan sobre la rueda en este instante: $\vec{\mathbf{F}}$ que ejerce la mano; $\vec{\mathbf{R}}$,que ejerce el borde, y la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$. (d) La suma vectorial de las tres fuerzas externas que actúan sobre la rueda es cero.

Use el triángulo OAC de la figura 12.10b para encontrar el brazo de momento d de la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$ que actúa sobre la rueda, relativo a un eje a través del punto A:

$$(1)\quad d = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}$$

Aplique a la rueda la segunda condición para el equilibrio, considere momentos de torsión en torno a un eje que pasa a través de A:

$$(2)\quad \sum \tau_A = mgd - F(2r - h) = 0$$

Sustituya d de la ecuación (1):

$$mg\sqrt{2rh - h^2} - F(2r - h) = 0$$

Resuelva para F:

$$(3)\quad F = \frac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{2r - h}$$

Simplifique:

$$F = mg\frac{\sqrt{h}\sqrt{2r - h}}{2r - h} = mg\sqrt{\frac{h}{2r - h}}$$

Sustituya los valores conocidos:

$$F = (700\ \text{N})\sqrt{\frac{0.1\ \text{m}}{2(0.3\ \text{m}) - 0.1\ \text{m}}}$$

$$= 3 \times 10^2\ \text{N}$$

continúa

12.4 continuación

(B) Determine la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{R}}$.

SOLUCIÓN

Aplique a la rueda la primera condición para el equilibrio en las componentes x y y de las fuerzas:

$$(4)\quad \sum F_x = F - R\cos\theta = 0$$
$$(5)\quad \sum F_y = R\,\text{sen}\,\theta - mg = 0$$

Divida la ecuación (5) entre la ecuación (4):

$$\frac{R\,\text{sen}\,\theta}{R\cos\theta} = \tan\theta = \frac{mg}{F}$$

Resuelva para el ángulo θ:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{mg}{F}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{700\ \text{N}}{300\ \text{N}}\right) = 70°$$

Resuelva la ecuación (5) para R y sustituya valores numéricos:

$$R = \frac{mg}{\text{sen}\,\theta} = \frac{700\ \text{N}}{\text{sen}\,70°} = 8 \times 10^2\ \text{N}$$

Finalizar Advierta que sólo se conservó un dígito como significativo. (El ángulo se escribió como 70°, ¡porque $7 \times 10^{1°}$ es complicado!) Los resultados indican que la fuerza que debe aplicarse a cada rueda es sustancial. Puede estimar la fuerza que se requiere para rodar una silla de ruedas por una típica rampa de acceso en la acera para comparar.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Sería más fácil superar el borde si la persona sujeta la rueda en el punto D de la figura 12.10c y jala *hacia arriba*?

Respuesta Si la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ de la figura 12.10c se gira 90° contra las manecillas del reloj y se aplica en D, su brazo de momento es $d + r$. Llame a la magnitud de esta nueva fuerza F'.

Modifique la ecuación (2) para esta situación:

$$\sum \tau_A = mgd - F'(d + r) = 0$$

Resuelva esta ecuación para F' y sustituya para d:

$$F' = \frac{mgd}{d + r} = \frac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{\sqrt{2rh - h^2} + r}$$

Tome la razón de esta fuerza a la fuerza original de la ecuación (3) y exprese el resultado en términos de h/r, la razón de la altura del borde al radio de la rueda:

$$\frac{F'}{F} = \frac{\dfrac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{\sqrt{2rh - h^2} + r}}{\dfrac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{2r - h}} = \frac{2r - h}{\sqrt{2rh - h^2} + r} = \frac{2 - \left(\dfrac{h}{r}\right)}{\sqrt{2\left(\dfrac{h}{r}\right) - \left(\dfrac{h}{r}\right)^2} + 1}$$

Sustituya la razón $h/r = 0.33$ a partir de los valores dados:

$$\frac{F'}{F} = \frac{2 - 0.33}{\sqrt{2(0.33) - (0.33)^2} + 1} = 0.96$$

Este resultado dice que, *para estos valores*, es ligeramente más fácil jalar hacia arriba en D que horizontalmente en lo alto de la rueda. Para bordes muy altos, de modo que h/r es cercano a 1, la razón F'/F cae aproximadamente 0.5 porque el punto A se ubica cerca del borde derecho de la rueda en la figura 12.10b. La fuerza en D se aplica a una distancia aproximada de $2r$ desde A, mientras que la fuerza en lo alto de la rueda tiene un brazo de momento de aproximadamente r. Para bordes en tal caso, es mejor jalar hacia arriba en D, aunque se requiere un valor grande de la fuerza. Para bordes pequeños es mejor aplicar la fuerza en lo alto de la rueda. La razón F'/F se hace cada vez más grande que 1 alrededor de $h/r = 0.3$, porque el punto A ahora está cerca de la parte baja de la rueda y la fuerza que se aplica a lo alto de la rueda tiene un brazo de momento más grande que cuando se aplicó en D.

Por último, se comenta acerca de la validez de estos resultados matemáticos. Considere la figura 12.10d e imagine que el vector $\vec{\mathbf{F}}$ está hacia arriba en lugar de hacia la derecha. No hay forma de que los tres vectores sumen cero, como requiere la primera condición de equilibrio. Por lo tanto, los resultados anteriores pueden ser cualitativamente válidos, pero no cuantitativamente exactos. Para cancelar la componente horizontal de $\vec{\mathbf{R}}$, la fuerza en D se debe aplicar a un ángulo con la vertical en lugar de recto hacia arriba. Esta característica hace que el cálculo sea más complicado y requiere ambas condiciones de equilibrio.

12.4 Propiedades elásticas de los sólidos

Excepto por la explicación respecto a los resortes en capítulos anteriores, se ha supuesto que los objetos permanecen rígidos cuando fuerzas externas actúan sobre ellos. En la sección 9.8 se exploraron sistemas deformables. En realidad, todos los objetos son deformables en cierta medida. Es decir, es posible cambiar la forma o el tamaño (o ambos) de un objeto al aplicar fuerzas externas. Sin embargo, conforme se presentan estos cambios las fuerzas internas en el objeto resisten la deformación.

Se discutirá la deformación de los sólidos en términos de los conceptos de *esfuerzo* y *deformación*. **Esfuerzo** es una cantidad que es proporcional a la fuerza que causa una deformación; más en específico, esfuerzo es la fuerza externa que actúa sobre un objeto por unidad de área de sección transversal. El resultado de un esfuerzo es una **deformación**, que es una medida del grado de deformación. Se encuentra que para esfuerzos suficientemente pequeños, el esfuerzo es proporcional a la deformación; la constante de proporcionalidad depende del material que se deforma y de la naturaleza de la deformación. A esta constante de proporcionalidad se le llama **módulo elástico**. Por lo tanto, el módulo elástico se define como la razón del esfuerzo a la deformación resultante:

$$\text{Módulo elástico} \equiv \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} \tag{12.5}$$

En general, el módulo elástico conecta lo que se hace a un objeto sólido (se aplica una fuerza) con la manera en que el objeto responde (se deforma en cierta medida). Es similar a la constante de resorte k en la ley de Hooke (ecuación 7.9) que relaciona una fuerza aplicada a un resorte y a la deformación resultante del resorte, medida por su elongación o compresión.

Se consideran tres tipos de deformación y se define un módulo elástico para cada uno:

1. El **módulo de Young** mide la resistencia de un sólido a cambiar su longitud.
2. El **módulo de corte** mide la resistencia al movimiento de los planos paralelos entre sí dentro de un sólido.
3. El **módulo volumétrico** mide la resistencia de los sólidos o líquidos a cambios en su volumen.

Módulo de Young: elasticidad en longitud

Considere una barra larga con área de sección transversal A y longitud inicial L_i que se sujeta con una pinza en un extremo, como en la figura 12.11. Cuando se aplica una fuerza externa perpendicular a la sección transversal, fuerzas moleculares internas en la barra resisten la distorsión ("estiramiento"), pero la barra llega a una situación de equilibrio donde su longitud final L_f es mayor que L_i y en la cual la fuerza externa se equilibra exactamente mediante fuerzas internas. En tal situación se dice que la barra está sobrecargada. El **esfuerzo de tracción** se define como la razón de la magnitud de la fuerza externa F al área de sección transversal A, donde la sección transversal es perpendicular al vector fuerza. La **deformación por tracción** en este caso se define como la razón del cambio en longitud ΔL a la longitud original L_i. El **módulo de Young** se define mediante una combinación de estas dos razones:

$$Y \equiv \frac{\text{esfuerzo de tracción}}{\text{deformación por tracción}} = \frac{F/A}{\Delta L/L_i} \tag{12.6}$$

◀ Módulo de Young

El módulo de Young típicamente se emplea para caracterizar una barra o alambre sobrecargado bajo tensión o compresión. Ya que la deformación es una cantidad adimensional, Y tiene unidades de fuerza por unidad de área. En la tabla 12.1, página 374, se proporcionan valores característicos.

Para esfuerzos relativamente pequeños la barra regresa a su longitud inicial cuando se retira la fuerza. El **límite elástico** de una sustancia se define como el

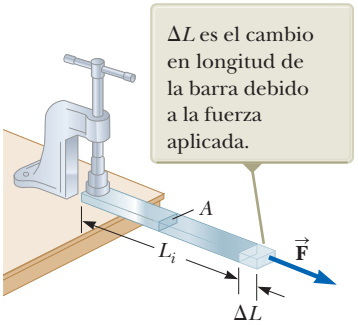


Figura 12.11 Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica en el extremo libre de una barra sujeta en el otro extremo.

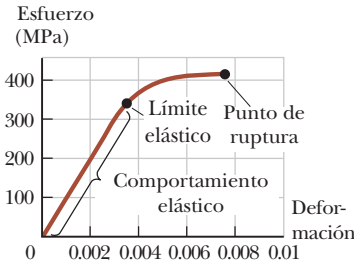


Figura 12.12 Curva esfuerzo contra deformación para un sólido elástico.

Tabla 12.1 Valores típicos para módulos elásticos

Sustancia	Módulo de Young (N/m^2)	Módulo de corte (N/m^2)	Módulo volumétrico (N/m^2)
Tungsteno	35×10^{10}	14×10^{10}	20×10^{10}
Acero	20×10^{10}	8.4×10^{10}	6×10^{10}
Cobre	11×10^{10}	4.2×10^{10}	14×10^{10}
Latón	9.1×10^{10}	3.5×10^{10}	6.1×10^{10}
Aluminio	7.0×10^{10}	2.5×10^{10}	7.0×10^{10}
Vidrio	$6.5–7.8 \times 10^{10}$	$2.6–3.2 \times 10^{10}$	$5.0–5.5 \times 10^{10}$
Cuarzo	5.6×10^{10}	2.6×10^{10}	2.7×10^{10}
Agua	—	—	0.21×10^{10}
Mercurio	—	—	2.8×10^{10}

esfuerzo máximo que se puede aplicar a la sustancia antes de quedar permanentemente deformada sin regresar a su longitud inicial. Es posible exceder el límite elástico de una sustancia al aplicar un esfuerzo demasiado grande, como se ve en la figura 12.12. Al inicio, una curva esfuerzo contra deformación es una línea recta. Sin embargo, conforme aumenta el esfuerzo la curva ya no es una línea recta. Cuando el esfuerzo supera el límite elástico el objeto se distorsiona permanentemente y no regresa a su forma original después de retirar el esfuerzo. A medida que el esfuerzo aumenta aún más el material finalmente se rompe.

Módulo de corte: elasticidad de forma

Otro tipo de deformación se presenta cuando un objeto se somete a una fuerza paralela a una de sus caras mientras la cara opuesta se mantiene fija mediante otra fuerza (figura 12.13a). En este caso el esfuerzo se llama *esfuerzo de corte*. Si originalmente el objeto es un bloque rectangular, un esfuerzo de corte resulta en una forma cuya sección transversal es un paralelogramo. Un libro que se empuja de costado, como se muestra en la figura 12.13b, es un ejemplo de objeto sometido a un esfuerzo de corte. En una primera aproximación (para distorsiones pequeñas), con esta deformación no se presentan cambios en el volumen.

El **esfuerzo de corte** se define como F/A, la razón de la fuerza tangencial al área A de la cara a cortar. La **deformación de corte** se define como la razón $\Delta x/h$, donde Δx es la distancia horizontal que se mueve la cara cortada y h es la altura del objeto. En términos de estas cantidades, el **módulo de corte** es

Módulo de corte ▶

$$S \equiv \frac{\text{esfuerzo de corte}}{\text{deformación de corte}} = \frac{F/A}{\Delta x/h} \qquad (12.7)$$

En la tabla 12.1 se proporcionan valores de módulos de corte para algunos materiales representativos. Al igual que el módulo de Young, la unidad del módulo de corte es la razón de la de fuerza a la de área.

Módulo volumétrico: elasticidad del volumen

El módulo volumétrico caracteriza la respuesta de un objeto a cambios en una fuerza de magnitud uniforme aplicada perpendicularmente sobre toda la superficie del

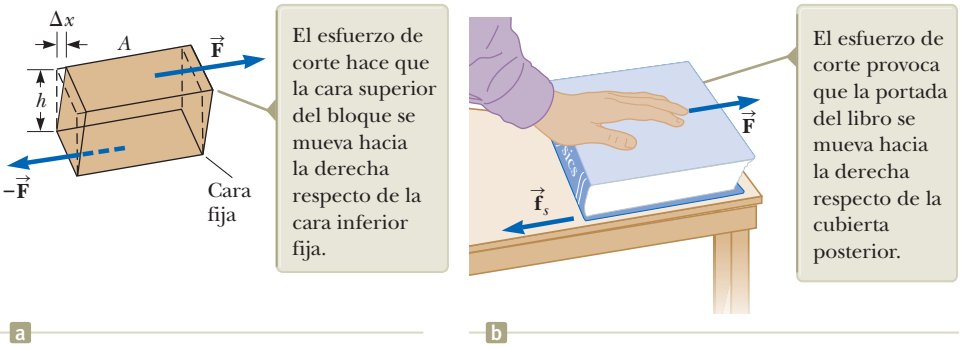


Figura 12.13 Figura 12.13 (a) Una deformación de corte en la que un bloque rectangular se distorsiona mediante dos fuerzas de igual magnitud pero direcciones opuestas aplicadas a dos caras paralelas. (b) Un libro está bajo esfuerzo de corte cuando una mano que se coloca en la portada aplica una fuerza horizontal que se aleja del lomo.

objeto, como se muestra en la figura 12.14. (Aquí se supone que el objeto está hecho de una sola sustancia.) Como se verá en el capítulo 14, tal distribución uniforme de fuerzas se presenta cuando un cuerpo está inmerso en un fluido. Un objeto sujeto a este tipo de deformación experimenta un cambio en volumen pero no un cambio en forma. El **esfuerzo volumétrico** se define como la razón de la magnitud de la fuerza total F ejercida sobre una superficie al área A de la superficie. La cantidad $P = F/A$ se llama **presión**, que se estudiará con más detalle en el capítulo 14. Si la presión sobre un objeto cambia en una cantidad $\Delta P = \Delta F/A$, el objeto experimenta un cambio de volumen ΔV. La **deformación volumétrica** es igual al cambio en volumen ΔV dividido entre el volumen inicial V_i. Por lo tanto, de la ecuación 12.5, una compresión volumétrica puede caracterizarse en términos del **módulo volumétrico**, que se define como

$$B \equiv \frac{\text{esfuerzo volumétrico}}{\text{deformación volumétrica}} = -\frac{\Delta F/A}{\Delta V/V_i} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_i} \qquad (12.8)$$

◀ Módulo volumétrico

En esta ecuación se inserta un signo menos, de modo que B sea un número positivo. Esta maniobra es necesaria porque un aumento en presión (ΔP positivo) causa una disminución en volumen (ΔV negativo) y viceversa.

La tabla 12.1 menciona módulos volumétricos para algunos materiales. Si busca tales valores en una fuente distinta, puede encontrar que se menciona el recíproco del módulo volumétrico. El recíproco del módulo volumétrico se llama **compresibilidad** del material.

Observe de la tabla 12.1 que tanto sólidos como líquidos tienen un módulo volumétrico. Sin embargo, no se proporcionan módulos de corte ni módulos de Young para líquidos, porque un líquido no soporta un esfuerzo de corte o un esfuerzo de tracción. Si una fuerza cortante o una fuerza de tracción se aplican a un líquido, el líquido simplemente fluye como respuesta.

Examen rápido 12.4 Para las tres partes de este examen rápido, elija de las siguientes opciones la respuesta correcta para el módulo elástico que describa la correspondencia entre esfuerzo y deformación para el sistema de interés, que está en itálicas: (a) módulo de Young, (b) módulo de corte, (c) módulo volumétrico, (d) ninguna de estas opciones. **(i)** Un *bloque de hierro* se desliza a través de un suelo horizontal. La fuerza de fricción entre el bloque y el suelo hace que el bloque se deforme. **(ii)** Un artista del trapecio se balancea a través de un arco circular. En la parte baja de la oscilación, los *alambres* que sostienen al trapecio son más largos que cuando el trapecista simplemente cuelga del trapecio debido a la tensión aumentada en ellos. **(iii)** Una nave espacial lleva una *esfera de acero* a un planeta en el que la presión atmosférica es mucho mayor que en la Tierra. La mayor presión hace que el radio de la esfera disminuya.

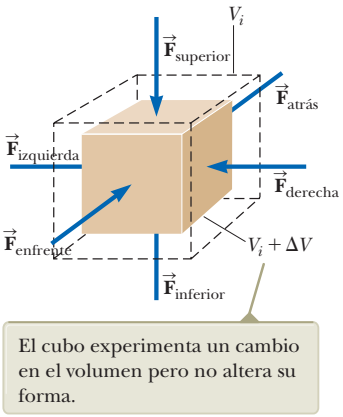


Figura 12.14 Un cubo está bajo presión uniforme y, por lo tanto, se comprime en todos sus lados mediante fuerzas normales a sus seis caras. El cubo oculta las puntas de flecha de los vectores fuerza sobre los lados no visibles.

Hormigón pretensado

Si el esfuerzo sobre un objeto sólido supera cierto valor, el objeto se fractura. El máximo esfuerzo que puede aplicarse antes de ocurrir la fractura, llamado *resistencia a la tracción*, *resistencia a la compresión* o *resistencia al corte*, depende de la naturaleza del material y del tipo de esfuerzo aplicado. Por ejemplo, el concreto tiene una resistencia a la tracción de aproximadamente 2×10^6 N/m^2, una resistencia a la compresión de 20×10^6 N/m^2 y una resistencia al corte de 2×10^6 N/m^2. Si el esfuerzo aplicado supera estos valores, el concreto se fractura. Es práctica común usar grandes factores de seguridad para evitar la fractura en las estructuras de concreto.

Por lo general, el concreto es muy quebradizo cuando se moldea en secciones delgadas. Por lo tanto, las losas de concreto tienden a pandearse y romperse en áreas

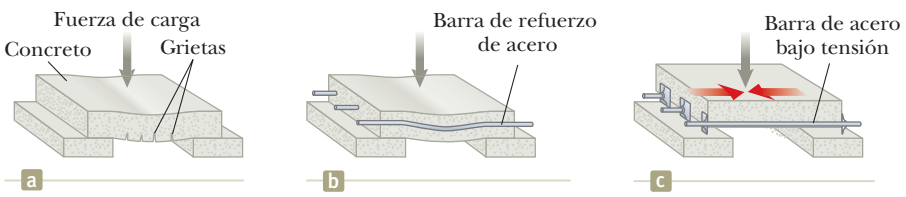


Figura 12.15 (a) Una losa de concreto sin refuerzo tiende a romperse bajo una carga pesada. (b) La resistencia del concreto aumenta con el uso de barras de refuerzo de acero. (c) El concreto se fortalece aún más si se le pretensa con barras de acero bajo tensión.

sin soporte, como se muestra en la figura 12.15a. La losa se puede reforzar con el empleo de barras de acero, como se ilustra en la figura 12.15b. Ya que el concreto es mucho más fuerte bajo compresión (comprimido) que bajo tensión (estiramiento) o corte, columnas verticales de concreto soportan cargas muy pesadas, mientras que las vigas horizontales de concreto tienden a pandearse y romperse.

Sin embargo, se logra un aumento significativo en la resistencia al corte si el concreto reforzado se pretensa, como se muestra en la figura 12.15c. Conforme se vierte el concreto, las barras de acero se mantienen bajo tensión mediante fuerzas externas. Las fuerzas externas se liberan después que el concreto se cura; el resultado es una tensión permanente en el acero y, por tanto, un esfuerzo de compresión en el concreto. La losa de concreto ahora puede soportar una carga mucho más pesada.

Ejemplo 12.5 Diseño de escenario

En el ejemplo 8.2 se analizó un cable utilizado para sostener a un actor que se balanceaba hacia el escenario. Suponga ahora que la tensión en el cable es 940 N cuando el actor alcanza el punto más bajo. ¿Qué diámetro debe tener un cable de acero de 10 m de largo si se desea que no se estire más de 0.50 cm bajo estas condiciones?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Vea de nuevo el ejemplo 8.2 para recordar lo que sucede en esta situación. Ahí se ignoró cualquier elongación del cable, pero en este ejemplo se quiere abordar dicho fenómeno.

Categorizar Se realiza un simple cálculo que involucra la ecuación 12.6, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 12.6 para el área de la sección transversal del cable:

$$A = \frac{FL_i}{Y\Delta L}$$

Suponga que la sección transversal es circular, utilice $d = 2r$ y $A = \pi r^2$ para encontrar el diámetro del cable:

$$d = 2r = 2\sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{FL_i}{\pi Y\Delta L}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$d = 2\sqrt{\frac{(940\ \text{N})(10\ \text{m})}{\pi(20 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2)(0.005\ 0\ \text{m})}} = 3.5 \times 10^{-3}\ \text{m} = 3.5\ \text{mm}$$

Para lograr un gran margen de seguridad, probablemente usaría un cable flexible elaborado de muchos alambres más pequeños que tengan un área de sección transversal sustancialmente mayor que el valor calculado.

Ejemplo 12.6 Compresión de una esfera de latón

Una esfera de latón sólida inicialmente está rodeada de aire y la presión del aire que se ejerce sobre ella es $1.0 \times 10^5\ \text{N/m}^2$ (presión atmosférica normal). La esfera se sumerge en el océano a una profundidad donde la presión es $2.0 \times 10^7\ \text{N/m}^2$. El volumen de la esfera en el aire es $0.50\ \text{m}^3$. ¿Por cuánto cambia el volumen una vez que la esfera se sumerge?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en las películas o programas de televisión que ha visto acerca de buzos que penetran a mayores profundidades en el agua en contenedores sumergibles. Dichos contenedores deben ser muy fuertes para soportar la gran presión bajo el agua. Esta presión comprime al contenedor y reduce su volumen.

Categorizar Se realiza un simple cálculo que involucra la ecuación 12.8, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 12.8 para el cambio de volumen de la esfera:

$$\Delta V = -\frac{V_i \Delta P}{B}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\Delta V = -\frac{(0.50\ \text{m}^3)(2.0 \times 10^7\ \text{N/m}^2 - 1.0 \times 10^5\ \text{N/m}^2)}{6.1 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2}$$

$$= -1.6 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

El signo negativo indica que el volumen de la esfera disminuye.

Resumen

Definiciones

Se puede considerar que la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto actúa en un solo punto llamado **centro de gravedad**. El centro de gravedad de un objeto coincide con su centro de masa si el objeto está en un campo gravitacional uniforme.

Las propiedades elásticas de una sustancia se pueden describir con el uso de los conceptos de esfuerzo y deformación. El **esfuerzo** es una cantidad proporcional a la fuerza que produce una deformación; la **deformación** es una medida del grado de cambio de forma. El esfuerzo es proporcional a la deformación, y la constante de proporcionalidad es el **módulo elástico**:

$$\text{Módulo elástico} \equiv \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} \qquad (12.5)$$

Conceptos y principios

Tres tipos comunes de deformación se representan mediante (1) la resistencia de un sólido a elongación bajo una carga, que se caracteriza por el **módulo de Young** Y; (2) la resistencia de un sólido al movimiento de planos internos que se deslizan uno sobre otro, que se caracteriza por el **módulo de corte** S, y (3) la resistencia de un sólido o un fluido a un cambio de volumen, que se caracteriza por el **módulo volumétrico** B.

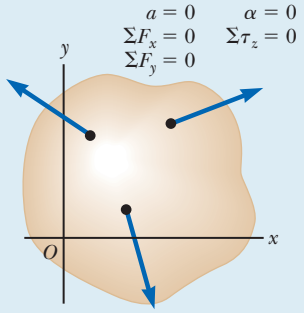
Análisis de modelos para resolver problemas

Objeto rígido en equilibrio. Un objeto rígido en equilibrio no muestra aceleración traslacional o angular. La fuerza externa neta que actúa sobre él es cero, y el momento de torsión externo neto sobre él es cero en torno a cualquier eje:

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 0 \qquad (12.1)$$

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = 0 \qquad (12.2)$$

La primera condición es para el equilibrio traslacional, y la segunda es la condición para equilibrio rotacional.



Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. La aceleración debida a la gravedad se vuelve más débil en casi tres partes en diez millones por cada metro de aumento de elevación sobre la superficie de la Tierra. Suponga que un rascacielos tiene 100 pisos de alto, con el mismo plano de piso para cada planta y con densidad promedio uniforme. Compare la ubicación del centro de masa del edificio y la localización de su centro de gravedad. Elija una: (a) Su centro de masa está más arriba en una distancia de varios metros. (b) Su centro de masa está más arriba en una distancia de varios milímetros. (c) Su centro de masa y su centro de gravedad están en la misma ubicación. (d) Su centro de gravedad está más arriba en una distancia de varios milímetros. (e) Su centro de gravedad está más arriba en una distancia de varios metros.

2. Una varilla de longitud 7.0 m está articulada en un punto a 2.0 m del extremo izquierdo. Una fuerza por debajo de 50 N actúa en el extremo izquierdo y una fuerza por debajo de 200 N actúa en el extremo derecho. ¿A qué distancia a la derecha del pivote puede actuar una tercera fuerza hacia arriba de 300 N para producir equilibrio rotacional? *Nota*: Desprecie el peso de la varilla. (a) 1.0 m, (b) 2.0 m, (c) 3.0 m, (d) 4.0 m y (e) 3.5 m.

3. Considere el objeto de la figura PO12.3. Sobre el objeto se ejerce una sola fuerza. La línea de acción de la fuerza no pasa a través del centro de masa del objeto. La aceleración del centro de masa del objeto debida a esta fuerza (a) es la misma que si la fuerza se aplicara al centro de masa, (b) es mayor a la aceleración que sería si la fuerza se aplicara al

centro de masa, (c) es menor a la aceleración que sería si la fuerza se aplicara al centro de masa o (d) es cero porque la fuerza sólo causa aceleración angular en torno al centro de masa.

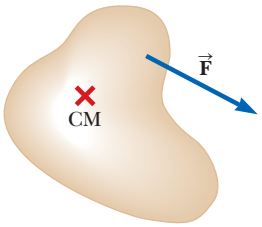


Figura PO12.3

4. Dos fuerzas actúan sobre un objeto. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto? (a) El objeto está en equilibrio si las fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en dirección. (b) El objeto está en equilibrio si el momento de torsión neto sobre el objeto es cero. (c) El objeto está en equilibrio si las fuerzas actúan en el mismo punto sobre el objeto. (d) El objeto está en equilibrio si la fuerza neta y el momento de torsión neto sobre el objeto son iguales a cero. (e) El objeto no puede estar en equilibrio porque sobre él actúa más de una fuerza.
5. En la cabina de un barco una lata de refresco descansa en una hendidura con forma de plato empotrado en un mostrador. La lata se inclina conforme el barco se bambolea lentamente. ¿En qué caso la lata es más estable contra las volcaduras? (a) Es más estable cuando está llena. (b) Es más estable cuando está medio llena. (c) Es más estable cuando está vacía. (d) Es más estable en dos de estos casos. (e) Es igualmente estable en todos los casos.
6. Un tablón horizontal de 20.0 kg con 4.00 m de longitud descansa sobre dos soportes, uno en el extremo izquierdo y el otro a 1.00 m del extremo derecho. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza ejercida sobre el tablón por el soporte cercano al extremo derecho? (a) 32.0 N, (b) 45.2 N, (c) 112 N, (d) 131 N, (e) 98.2 N.
7. Suponga que una sola fuerza de 300 N se ejerce sobre el marco de una bicicleta, como se muestra en la figura PO12.7. Considere el momento de torsión producido por esta fuerza en torno a los ejes perpendiculares al plano del papel y a través de cada uno de los puntos del A al E, donde E es el centro de masa del marco. Clasifique los momentos de torsión τ_A, τ_B, τ_C, τ_D y τ_E de mayor a menor, y note que cero es mayor que una cantidad negativa. Si dos momentos de torsión son iguales, anote su igualdad en la clasificación.

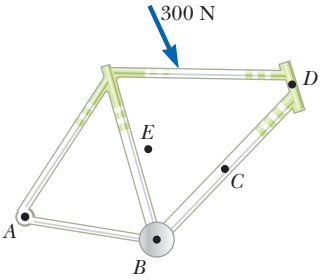


Figura PO12.7

8. Al analizar el equilibrio de un objeto rígido plano, usted debe elegir un eje respecto al cual calcular momentos de torsión. ¿Cuál de los siguientes ejes describe su elección? (a) El eje pasaría a través del centro de masa del objeto. (b) El eje pasaría por un extremo del objeto. (c) El eje sería el eje x o el eje y. (d) El eje pasaría a través de cualquier punto dentro del objeto. (e) Se podría elegir cualquier eje dentro o fuera del objeto.
9. Cierto alambre de 3 m de largo se estira 1.2 mm cuando está bajo 200 N de tensión. (i) ¿Un alambre igualmente grueso de 6 m de largo hecho del mismo material y bajo la misma tensión se estira (a) 4.8 mm, (b) 2.4 mm, (c) 1.2 mm, (d) 0.6 mm o (e) 0.3 mm? (ii) Un alambre con el doble de diámetro de 3 m de largo elaborado del mismo material y bajo la misma tensión, ¿cuánto se estira? Elija las mismas posibilidades de la (a) a la (e).
10. El centro de gravedad de un hacha está en la línea central del mango, cerca de la cabeza. Suponga que usted corta a través del mango por el centro de gravedad y pesa las dos partes. ¿Qué descubrirá? (a) El lado del mango es más pesado que el lado de la cabeza. (b) El lado de la cabeza es más pesado que el lado del mango. (c) Las dos partes son igualmente pesadas. (d) Sus pesos comparativos no se pueden predecir.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Una escalera está de pie sobre el suelo y se inclina contra una pared. ¿Se sentiría más seguro de subir a la escalera si le dijeran que el suelo no tiene fricción pero que la pared es rugosa, o si le dicen que la pared carece de fricción pero que el piso es rugoso? Justifique su respuesta.
2. El centro de gravedad de un objeto puede estar ubicado afuera del objeto. Proporcione dos ejemplos que ilustren este caso.
3. (a) Proporcione un ejemplo en el que la fuerza neta que actúa sobre un objeto sea cero y aún así el momento de torsión neto sea distinto de cero. (b) Proporcione un ejemplo donde el momento de torsión neto que actúa sobre un objeto sea cero y aún así la fuerza neta sea diferente de cero.
4. Póngase de pie con la espalda contra una pared. ¿Por qué no puede poner los talones firmemente contra la pared y luego doblarse hacia adelante sin caer?
5. Un pedazo de madera de forma arbitraria se puede suspender de una cuerda fija al techo. Explique cómo podría emplearse una plomada para encontrar su centro de gravedad.
6. Una niña tiene un gran perro dócil al que desea pesar en una pequeña báscula de baño. Ella razona que puede determinar el peso del perro con el siguiente método. Primero coloca las dos patas delanteras del perro sobre la báscula y registra la lectura de ésta. Luego coloca las dos patas traseras del perro sobre la báscula y anota la lectura. Piensa que la suma de las lecturas será el peso del perro. ¿Tiene razón? Explique su respuesta.
7. ¿Un objeto puede estar en equilibrio si está en movimiento? Explique.
8. ¿Qué tipo de deformación muestra un cubo de gelatina cuando tiembla?

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 12.1 Análisis de modelo: objeto rígido en equilibrio

1. ¿Cuáles son las condiciones necesarias para el equilibrio del objeto que se muestra en la figura P12.1? Calcule momentos de torsión en torno a un eje a través del punto *O*.

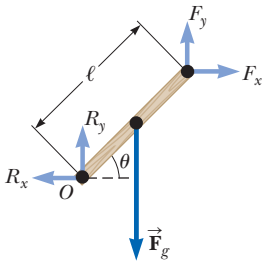


Figura P12.1

2. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Una viga uniforme de masa $m_b = 3.00$ kg y longitud $\ell = 1.00$ m sostiene bloques con masas $m_1 = 5.00$ kg y $m_2 = 15.0$ kg en dos posiciones, como se muestra en la figura P12.2. La viga descansa sobre dos bloques triangulares, con el punto P a una distancia $d = 0.300$ m a la derecha del centro de gravedad de la viga. La posición del objeto de masa m_2 se ajusta a lo largo de la viga hasta que la fuerza normal sobre ésta en O sea cero.

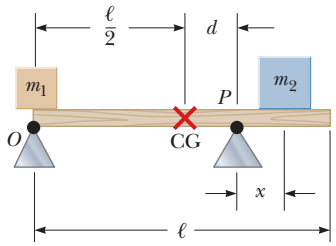


Figura P12.2

Sección 12.2 Más acerca del centro de gravedad

Los problemas 45, 48 y 92 en el capítulo 9 también pueden asignarse con esta sección.

3. La escuadra de un carpintero tiene la forma de una L. como se muestra en la figura P12.3. Ubique su centro de gravedad.

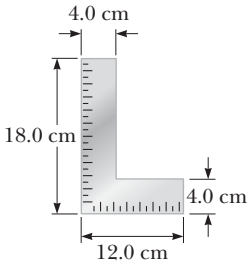


Figura P12.3

4. Considere la siguiente distribución de objetos: un objeto de 5.00 kg con su centro de gravedad en (0, 0) m, un objeto de 3.00 kg en (0, 4.00) m y un objeto de 4.00 kg en (3.00, 0) m. ¿Dónde se debe colocar un cuarto objeto de 8.00 kg de masa tal que el centro de gravedad del arreglo de cuatro objetos esté en (0, 0)?

5. Pat construye con madera sólida una pista para su automóvil a escala, como se muestra en la figura P12.5. La pista mide 5.00 m de ancho, 1.00 m de alto y 3.00 m de largo. La pista se corta de manera que forma una parábola con la ecuación $y = (x - 3)^2/9$. Ubique la coordenada horizontal del centro de gravedad de esta pista.

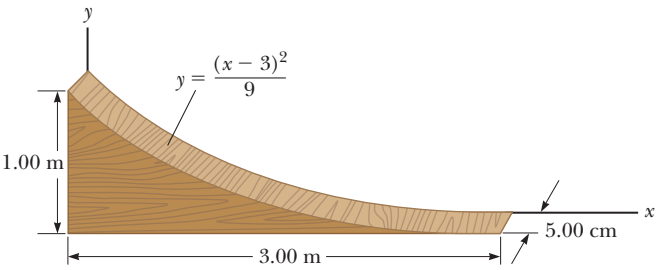


Figura P12.5

6. A una pizza circular de radio R se le quita un trozo circular de radio $R/2$, como se muestra en la figura P12.6. El centro de gravedad se movió de C a C' a lo largo del eje x. Demuestre que la distancia de C a C' es $R/6$. Suponga que el grosor y la densidad de la pizza son uniformes en todas sus partes.

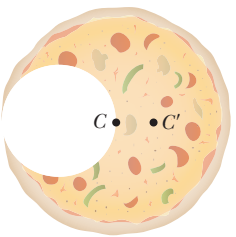


Figura P12.6

7. La figura P12.7 de la página 380 muestra tres objetos uniformes: una barra con $m_1 = 6.00$ kg, un triángulo rectángulo con $m_2 = 3.00$ kg y un cuadrado con $m_3 = 5.00$ kg. Se proporcionan sus coordenadas en metros. Determine el centro de gravedad para el sistema de tres objetos.

Sección 12.3 Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático

Los problemas 14, 26, 27, 28, 31, 33, 34, 60, 66, 85, 89, 97 y 100 en el capítulo 5 también pueden asignarse con esta sección.

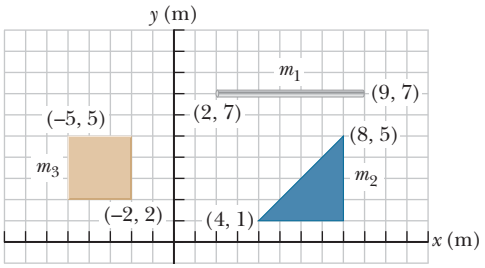


Figura P12.7

8. Un automóvil de 1 500 kg tiene una base de ruedas (distancia entre los ejes) de 3.00 m. El centro de masa del automóvil está en la línea de centros en un punto 1.20 m detrás del eje frontal. Encuentre la fuerza que ejerce el suelo sobre cada rueda.

9. Encuentre la masa m del contrapeso necesario para equilibrar un camión de masa $M = 1\,500$ kg sobre un plano inclinado de $\theta = 45^\circ$ (figura P12.9). Suponga que ninguna polea tiene fricción ni masa.

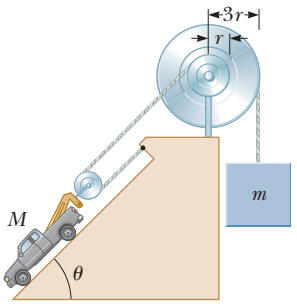


Figura P12.9

10. Se construye un móvil con barras ligeras, cuerdas ligeras y recuerdos marinos, como se muestra en la figura P12.10. Si $m_4 = 12.0$ g, encuentre los valores de (a) m_1, (b) m_2 y (c) m_3.

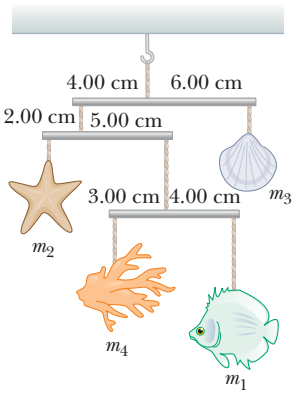


Figura P12.10

11. Una barra uniforme de longitud 7.60 m y peso 4.50×10^2 N es transportada por dos trabajadores, Sam y Joe, como se muestra en la figura P12.11. Determine la fuerza que cada persona ejerce sobre la barra.

12. Una saltadora sostiene en equilibrio una garrocha de 29.4 N al ejercer una fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{U}}$ con una mano y una fuerza hacia abajo $\vec{\mathbf{D}}$ con la otra mano, como se muestra en la figura P12.12. El punto C es el centro de gravedad de la garrocha. ¿Cuáles son las magnitudes de (a) $\vec{\mathbf{U}}$ y (b) $\vec{\mathbf{D}}$?

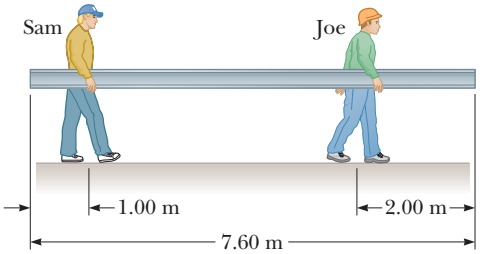


Figura P12.11

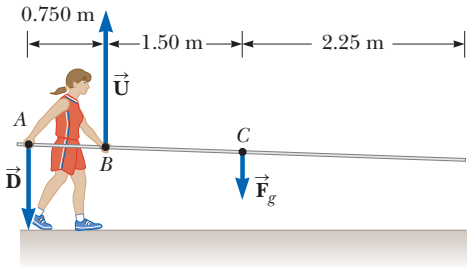


Figura P12.12

13. Una escalera uniforme de 15.0 m que pesa 500 N descansa contra una pared sin fricción. La escalera forma un ángulo de 60.0° con la horizontal. (a) Encuentre las fuerzas horizontal y vertical que ejerce el suelo sobre la base de la escalera cuando un bombero de 800 N está a 4.00 m desde la parte baja. (b) Si la escalera está a punto de deslizarse cuando el bombero está a 9.00 m arriba, ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo?

14. Una escalera uniforme de longitud L y masa m_1 descansa contra una pared sin fricción. La escalera forma un ángulo θ con la horizontal. (a) Encuentre las fuerzas horizontal y vertical que el suelo ejerce sobre la base de la escalera cuando un bombero de masa m_2 está a una distancia x desde la parte baja. (b) Si la escalera está a punto de deslizarse cuando el bombero está a una distancia d desde la parte baja, ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo?

15. Una cadena flexible que pesa 40.0 N cuelga entre dos ganchos ubicados a la misma altura (figura P12.15). En cada gancho, la tangente a la cadena forma un ángulo $\theta = 42.0^\circ$ con la horizontal. Encuentre (a) la magnitud de la fuerza que ejerce cada gancho sobre la cadena y (b) la tensión en la cadena en su punto medio. *Sugerencia*: para el inciso (b), elabore un diagrama de cuerpo libre para la mitad de la cadena.

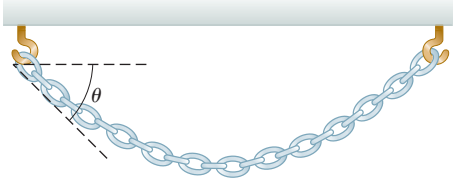


Figura P12.15

16. En la figura P12.16 se muestra una viga uniforme de longitud L y masa m inclinada un ángulo θ con la horizontal. Su extremo superior está unido a una pared mediante una cuerda y su extremo inferior descansa sobre una superficie horizontal rugosa. El coeficiente de fricción estática entre la viga y la superficie es μ_s. Suponga que el ángulo θ es tal que la fuerza de fricción estática alcanza su valor *máximo*. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga. (b) Utilice la condición de equilibrio rotacional para obtener una expresión para la tensión T en la cuerda en términos de m, g y θ. (c) Con la condición de equilibrio traslacional encuentre una segunda expresión para T en términos de μ_s, m y g. (d) Empleando los resultados de los incisos (a), (b) y (c) obtenga una expresión para μ_s que sólo involucre el ángulo θ. (e) ¿Qué ocurre si la escalera es levantada y su base se coloca nuevamente sobre el suelo pero desplazada ligeramente hacia la izquierda de su posición en la figura P12.16? Explique.

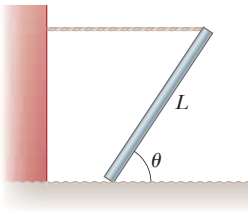


Figura P12.16

17. La figura P12.17 muestra un martillo de oreja que se utiliza para quitar un clavo de una tabla horizontal. La masa del martillo es 1.00 kg. Se ejerce una fuerza de 150 N horizontalmente como se muestra, y el clavo no se mueve respecto a la tabla. Encuentre (a) la fuerza que la oreja del martillo ejerce sobre el clavo y (b) la fuerza ejercida por la superficie sobre el punto de contacto con la cabeza del martillo. Suponga que el martillo ejerce sobre el clavo una fuerza paralela a éste.

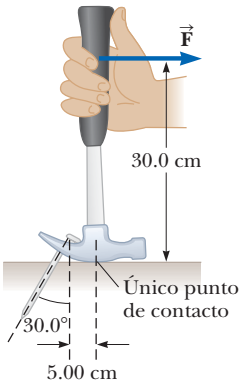


Figura P12.17

18. Un reflector de 20.0 kg en un parque está sostenido al final de una viga horizontal de masa despreciable que está articulada a un poste, como se muestra en la figura P12.18. Un cable a un ángulo de $\theta = 30.0°$ con la viga ayuda a sostenerlo. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga. Calcule los momentos de torsión en torno a un eje en la bisagra en su extremo izquierdo, y después encuentre (b) la tensión en el cable, (c) la componente horizontal de la fuerza que ejerce el poste sobre la viga y (d) la componente vertical de esta fuerza. Ahora resuelva el mismo problema a partir del diagrama de cuerpo libre del inciso (a), calcule los momentos de torsión alrededor de la unión entre el cable y la viga en el extremo derecho de ésta. Obtenga (e) la componente vertical de la fuerza que ejerce el poste sobre la viga, (f) la tensión en el cable y (g) la componente horizontal de la fuerza que ejerce el poste sobre la viga. (h) Compare la solución a los incisos (b), (c) y (d) con la solución a los incisos (e), (f) y (g). ¿Alguna solución es más precisa?

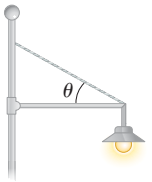


Figura P12.18

19. El Caballero Distraído se pone su armadura y sale del castillo en su noble corcel (figura P12.19). Usualmente el puente elevadizo se baja a una posición horizontal de manera que el extremo del puente descansa sobre la repisa de piedra. Por desgracia, su escudero no bajó lo suficiente el puente elevadizo y se detuvo a 20° por encima de la horizontal. Distraído y su caballo se detienen cuando su centro de masa combinado es $d = 1.00$ m del extremo del puente. El puente uniforme mide $\ell = 8.00$ m y tiene una masa de 2 000 kg. El cable de elevación está unido al puente a 5.00 m de la bisagra desde el lado del castillo y a un punto en la pared del castillo $h = 12.0$ m arriba del puente. La masa combinada de Distraído con su armadura y su corcel es 1 000 kg. Determine (a) la tensión en el cable, y las componentes de fuerza (b) horizontal y (c) vertical que actúan sobre el puente en la bisagra.

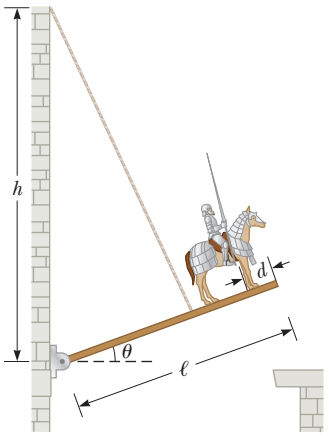


Figura P12.19 Problemas 19 y 20.

20. **Problema de repaso.** Mientras Distraído decide su próximo movimiento en la situación descrita en el problema 19 e ilustrada en la figura P12.19, ¡el enemigo ataca! Un proyectil destruye la repisa de piedra, así que el extremo del puente elevadizo puede bajarse aún más de donde usualmente descansaba. Además, ¡un fragmento del proyectil rompe el cable de elevación! La bisagra entre la pared del castillo y el puente carece de fricción, y el puente se balancea libremente hasta que está en posición vertical pegado a la pared del castillo bajo la entrada a éste. (a) ¿Qué tanto estuvo en contacto Distraído con el puente mientras éste caía? (b) Encuentre la aceleración angular del puente justo cuando comienza a moverse. (c) Determine la rapidez angular del puente cuando golpea la pared abajo de la bisagra. Obtenga la fuerza que ejerce la bisagra sobre el puente (d) inmediatamente después que el cable se rompe y (e) inmediatamente antes de golpear la pared del castillo.

21. John empuja a su hermana Rachel en una carretilla cuando la detiene un ladrillo de 8.00 cm de alto (figura P12.21). El manubrio de la carretilla forma un ángulo de $\theta = 15.0^\circ$ con el suelo. Debido al peso de Rachel y del manubrio, una fuerza de 400 N hacia abajo es ejercida en el centro de la rueda, la cual tiene un radio de 20.0 cm. (a) ¿Qué fuerza debe aplicar John a lo largo del manubrio para apenas comenzar a pasar la rueda sobre el ladrillo? (b) ¿Cuál es la fuerza (magnitud y dirección) que el ladrillo ejerce sobre la rueda justo cuando ésta comienza a elevarse sobre el ladrillo? En ambos incisos suponga que el ladrillo permanece fijo y no se desliza sobre el suelo. También suponga que la fuerza aplicada por John está dirigida exactamente hacia el centro de la rueda.

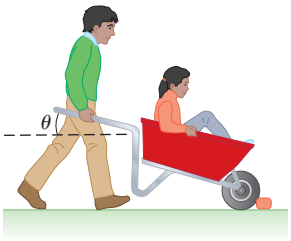


Figura P12.21 Problemas 21 y 22.

22. John empuja a su hermana Rachel en una carretilla cuando la detiene un ladrillo de altura h (figura P12.21). El manubrio forma un ángulo θ con el suelo. Debido al peso de Rachel y del manubrio, una fuerza mg hacia abajo es ejercida en el centro de la rueda, la cual tiene radio R. (a) ¿Qué fuerza F debe aplicar John a lo largo del manubrio para apenas comenzar a pasar la rueda sobre el ladrillo? (b) ¿Cuáles son las componentes de la fuerza que el ladrillo ejerce sobre la rueda justo cuando ésta comienza a elevarse sobre el ladrillo? En ambos incisos suponga que el ladrillo permanece fijo y no se desliza sobre el suelo. También suponga que la fuerza aplicada por John está dirigida exactamente hacia el centro de la rueda.

23. Un extremo de una barra uniforme de 4.00 m de largo y peso F_g está sostenido mediante un cable a un ángulo de $\theta = 37^\circ$ con respecto a la barra. El otro extremo descansa contra la pared, donde se sostiene por fricción, como se muestra en la figura P12.23. El coeficiente de fricción estática entre la pared y la barra es $\mu_s = 0.500$. Determine la distancia mínima x desde el punto A en el cual un objeto adicional, también con el mismo peso F_g, se puede colgar sin causar que la barra se deslice en el punto A.

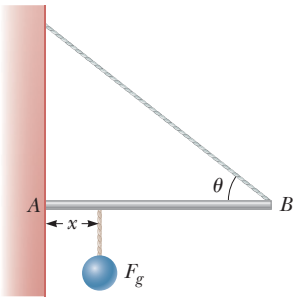


Figura P12.23

24. Un mono de 10.0 kg trepa una escalera uniforme de peso 1.20×10^2 N y longitud $L = 3.00$ m, como se muestra en la figura P12.24. La escalera descansa contra la pared y forma un ángulo de $\theta = 60.0^\circ$ con el suelo. Los extremos de la escalera descansan sobre superficies sin fricción. El extremo inferior está unido a la pared mediante una cuerda horizontal que puede soportar una tensión máxima de sólo 80 N. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la escalera. (b) Encuentre la fuerza normal ejercida sobre la parte baja de la escalera. (c) Determine la tensión en la cuerda cuando el mono esté a dos tercios de la longitud de la escalera. (d) Obtenga la distancia máxima d que el mono puede trepar sobre la escalera antes de que se rompa la cuerda. (e) Si la superficie horizontal fuera rugosa y se eliminara la cuerda, ¿cómo cambiaría su análisis del problema? ¿Qué otra información necesitaría para contestar los incisos (c) y (d)?

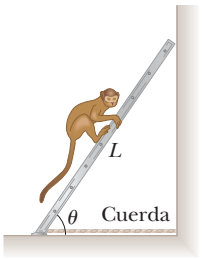


Figura P12.24

25. Un tablón uniforme de longitud 2.00 m y de masa 30.0 kg es sostenido por tres cuerdas, como lo indican los vectores azules en la figura P12.25. Encuentre la tensión en cada cuerda cuando una persona de 700 N está a una distancia $d = 0.500$ m del extremo izquierdo.

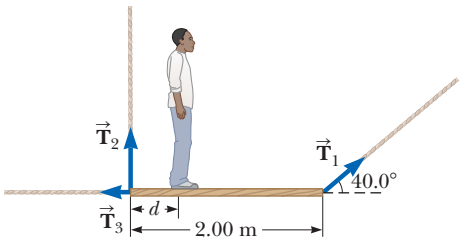


Figura P12.25

Sección 12.4 Propiedades elásticas de los sólidos

26. Un alambre de acero de 1 mm de diámetro puede sostener una tensión de 0.2 kN. Un cable de acero para soportar una tensión de 20 kN debe tener diámetro, ¿de qué orden de magnitud?

27. El punto más profundo del océano está en la Fosa Mariana, que tiene aproximadamente 11 km de profundidad, en el Pacífico. Es enorme la presión a esta profundidad, más o menos de 1.13×10^8 N/m^2. (a) Calcule el cambio en volumen de 1.00 m^3 de agua de mar que se lleve desde la superficie hasta este punto más profundo. (b) La densidad del agua de mar en la superficie es 1.03×10^3 kg/m^3. Determine su densidad en el fondo. (c) Explique si es o cuándo es una buena aproximación pensar en el agua como incompresible.

28. Suponga que el módulo de Young para el hueso es 1.50×10^{10} N/m^2. El hueso se rompe si sobre él se impone un esfuerzo mayor que 1.50×10^8 N/m^2. (a) ¿Cuál es la fuerza máxima que se puede ejercer sobre el fémur si éste tiene un diámetro efectivo mínimo de 2.50 cm? (b) Si esta fuerza se aplica de manera compresiva, ¿en cuánto se acorta el hueso de 25.0 cm de largo?

29. Un niño se desliza por el suelo con un par de zapatos con suela de caucho. La fuerza de fricción que actúa sobre cada pie es 20.0 N. El área de la huella de cada suela mide 14.0 cm^2 y el grosor de cada suela es de 5.00 mm. Encuentre la

distancia horizontal que corren las superficies superior e inferior de cada suela. El módulo de corte del caucho es 3.00 MN/m^2.

30. Evalúe el módulo de Young para el material cuya curva de esfuerzo-deformación está mostrada en la figura 12.12.

31. Suponga que el esfuerzo de corte en acero excede aproximadamente 4.00×10^8 N/m^2, la ruptura del acero. Determine la fuerza cortante necesaria para (a) cortar un perno de acero de 1.00 cm de diámetro y (b) perforar un hoyo de 1.00 cm de diámetro en una placa de acero de 0.500 cm de espesor.

32. Cuando el agua se congela, se expande aproximadamente 9.00%. ¿Qué aumento de presión se presenta dentro del monoblock de su automóvil si el agua se congela? (El módulo volumétrico del hielo es 2.00×10^9 N/m^2.)

33. Una carga de 200 kg cuelga de un alambre de longitud 4.00 m, con área transversal de 0.200×10^{-4} m^2 y módulo de Young de 8.00×10^{10} N/m^2. ¿Cuánto aumenta en longitud?

34. Una pasarela suspendida a través del lobby de un hotel está sostenida en numerosos puntos a lo largo de sus bordes mediante un cable vertical arriba de cada punto y una columna vertical por debajo. El cable de acero mide 1.27 cm de diámetro y mide 5.75 m de largo antes de la carga. La columna de aluminio es un cilindro hueco con un diámetro interior de 16.14 cm, diámetro exterior de 16.24 cm y longitud sin carga de 3.25 m. Cuando la pasarela ejerce una fuerza de carga de 8 500 N sobre uno de los puntos de soporte, ¿cuánto baja el punto?

35. **Problema de repaso.** Un alambre cilíndrico de acero de 2.00 m de largo, con diámetro de sección transversal de 4.00 mm, se coloca sobre una polea ligera sin fricción. Un objeto de masa $m_1 = 5.00$ kg cuelga de un extremo del alambre y un objeto de masa $m_2 = 3.00$ kg cuelga del otro extremo, como se muestra en la figura P12.35. Los objetos son liberados y caen libremente. Mientras los objetos están en movimiento, ¿cuánto se estira el alambre respecto de su longitud sin carga?

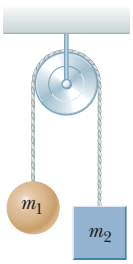


Figura P12.35

36. **Problema de repaso.** Un martillo de 30.0 kg, que se mueve con rapidez de 20.0 m/s, golpea una punta de acero de 2.30 cm de diámetro. El martillo rebota con rapidez de 10.0 m/s después de 0.110 s. ¿Cuál es la deformación promedio en la punta de acero durante el impacto?

Problemas adicionales

37. Un puente de 50.0 m de largo y 8.00×10^4 kg de masa está sostenido sobre un pilar liso en cada extremo, como se muestra en la figura P12.37. Un camión de masa 3.00×10^4 kg de masa se ubica a 15.0 m de un extremo. ¿Cuáles son las fuerzas sobre el puente en los puntos de soporte?

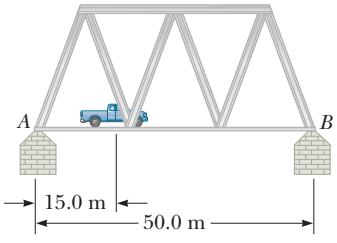


Figura P12.37

38. Una viga uniforme que descansa sobre dos pivotes tiene una longitud $L = 6.00$ m y una masa $M = 90.0$ kg. El pivote bajo el extremo izquierdo ejerce una fuerza normal n_1 sobre la viga, y el segundo pivote ubicado a una distancia $\ell = 4.00$ m del extremo izquierdo ejerce una fuerza normal n_2. Una mujer de masa $m = 55.0$ kg se para en el extremo izquierdo de la viga y comienza a caminar hacia la derecha, como se indica en la figura P12.38. El objetivo es encontrar la posición de la mujer cuando la viga se empieza a inclinar. (a) ¿Cuál es el análisis de modelo apropiado para la viga antes que se incline? (b) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga, marque las fuerzas gravitacionales y las normales que actúan sobre la viga y coloque a la mujer a una distancia x hacia la derecha del primer pivote, el cual es el origen. (c) ¿Dónde está la mujer cuando la fuerza normal n_1 es máxima? (d) ¿Cuánto vale n_1 cuando la viga está por inclinarse? (e) Utilice la ecuación 12.1 para encontrar el valor de n_2 cuando la viga está a punto de inclinarse. (f) Empleando el resultado del inciso (d) y la ecuación 12.2, con los momentos de torsión calculados en torno al segundo pivote, determine la posición x de la mujer cuando la viga tiende a inclinarse. (g) Verifique la respuesta al inciso (a) mediante el cálculo de momentos de torsión alrededor del primer punto pivote.

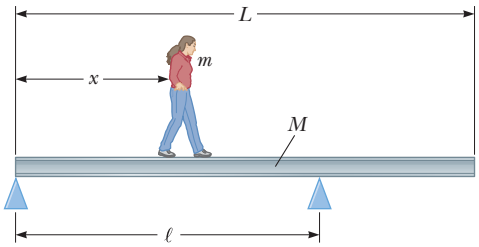


Figura P12.38

39. En estudios de fisiología del ejercicio a veces es importante determinar la posición del centro de masa de una persona. Esta determinación se realiza con el dispositivo que se muestra en la figura P12.39. Una plancha ligera descansa sobre dos básculas, que leen $F_{g1} = 380$ N y $F_{g2} = 320$ N. Una distancia de 1.65 m separa las básculas. ¿A qué distancia de los pies de la mujer está su centro de masa?

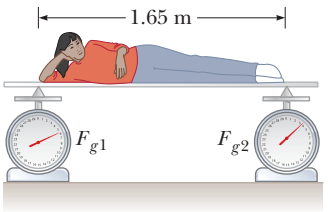


Figura P12.39

40. El dintel de concreto reforzado pretensado en la figura P12.40 tiene 1.50 m de largo. El concreto encierra una barra de acero reforzado con área de 1.50 cm^2 de sección transversal. La barra une las placas de los extremos. El área de la sección transversal del concreto perpendicular a la barra es 50.0 cm^2. El módulo de Young para el concreto es 30.0×10^9 N/m^2. Después de curar el concreto y de liberar la tensión

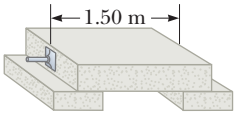


Figura P12.40

original T_1 en la barra, el concreto está bajo el esfuerzo de compresión de 8.00×10^6 N/m^2. (a) ¿Cuánto comprime la barra al concreto cuando se libera la tensión original en la barra? (b) ¿Cuál es la nueva tensión T_2 en la barra? (c) ¿Cuánto se alarga la barra respecto a su longitud sin esfuerzo? (d) Cuando el concreto fue vertido, ¿cuánto se alargó la barra respecto a su longitud sin esfuerzo? (e) Encuentre la tensión original requerida T_1 en la barra.

41. En la figura P12.41 el brazo pesa 41.5 N. La fuerza gravitacional sobre el brazo actúa a través del punto A. Determine las magnitudes de la fuerza de tensión $\vec{\mathbf{F}}_t$ en el músculo deltoides y la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_s$ ejercida por el hombro sobre el húmero (hueso del brazo superior) para mantener el brazo en la posición mostrada.

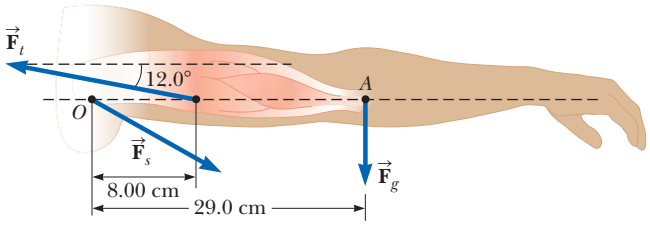


Figura P12.41

42. Cuando una persona se para de puntillas sobre un pie (una posición vigorosa), la posición del pie es como se muestra en la figura P12.42a. La fuerza gravitacional total $\vec{\mathbf{F}}_g$ sobre el cuerpo es compensada por la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ ejercida por el piso sobre los dedos de un pie. En la figura P12.42b se muestra un modelo mecánico de la situación, donde $\vec{\mathbf{T}}$ es la fuerza ejercida sobre el pie por el tendón de Aquiles y $\vec{\mathbf{R}}$ es la fuerza ejercida sobre el pie por la tibia. Encuentre los valores de T, R y θ cuando $F_g = 700$ N.

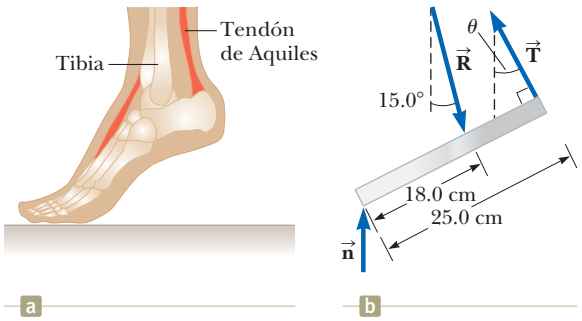


Figura P12.42

43. Un oso hambriento que pesa 700 N camina hacia fuera de una viga en un intento por recuperar una canasta de golosinas que cuelga en el extremo de la viga (figura P12.43). La viga es uniforme, pesa 200 N, tiene 6.00 m de largo y es sostenida por un alambre a un ángulo $\theta = 60.0°$. La canasta pesa 80.0 N. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga. (b) Cuando el oso está en $x = 1.00$ m, encuentre la tensión en el alambre sosteniendo la viga y las componentes de la fuerza ejercida por la pared sobre el extremo izquierdo de la viga. (c) **¿Qué pasaría si?** Si el alambre puede soportar una tensión máxima de 900 N, ¿cuál es la distancia máxima que el oso puede caminar antes de romper el alambre?

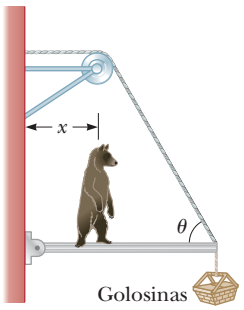


Figura P12.43

44. Las siguientes ecuaciones se obtienen a partir de un diagrama de cuerpo libre de una puerta rectangular sostenida por dos bisagras en el lado izquierdo. Una cubeta de grano cuelga de la puerta.

$$-A + C = 0$$

$$+B - 392\ \text{N} - 50.0\ \text{N} = 0$$

$$A(0) + B(0) + C(1.80\ \text{m}) - 392\ \text{N}(1.50\ \text{m}) - 50.0\ \text{N}(3.00\ \text{m}) = 0$$

(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre, complete el enunciado del problema y especifique las incógnitas. (b) Determine los valores de las incógnitas y establezca el significado físico de cada una.

45. Un anuncio uniforme de peso F_g y ancho $2L$ cuelga de una viga horizontal ligera con bisagra en la pared y sostenida por un cable (figura P12.45). Determine (a) la tensión en el cable y (b) las componentes de la fuerza de reacción que ejerce la pared sobre la viga en términos de F_g, d, L y θ.

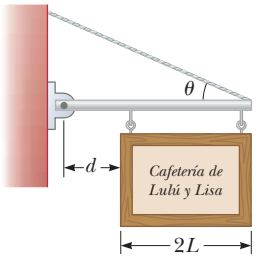


Figura P12.45

46. Una pluma uniforme de 1 200 N a $\phi = 65°$ de la vertical está sostenida por un cable a un ángulo $\theta = 25.0°$ con la horizontal, como lo muestra la figura P12.46. La pluma está articulada en la parte baja y un objeto de peso $mg = 2\,000$ N cuelga de su parte superior. Encuentre (a) la tensión en el cable y (b) las componentes de las fuerzas de reacción que ejerce el suelo sobre la pluma.

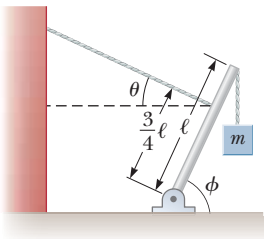


Figura P12.46

47. Una grúa de masa $m_1 = 3\,000$ kg soporta una carga de masa $m_2 = 10\,000$ kg, como se muestra en la figura P12.47. La grúa se articula sin fricción en A y descansa contra un soporte suave en B. Encuentre las fuerzas de reacción en (a) el punto A y (b) el punto B.

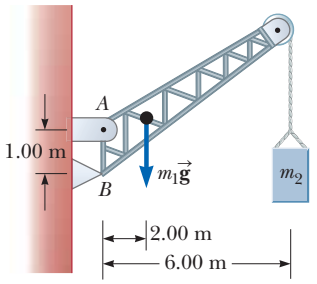


Figura P12.47

48. Suponga que una persona se dobla hacia delante para levantar una carga "con su espalda", como se muestra en la figura P12.48a. La columna de la persona se articula principalmente en la quinta vértebra lumbar, y la principal fuerza de soporte la da el músculo espinal erector de la espalda. Para estimar la magnitud de las fuerzas involucradas considere el modelo que se indica en la figura P12.48b para una persona que se dobla hacia adelante para levantar un objeto de 200 N. La columna de la persona y la parte superior del cuerpo se representan como una barra horizontal uniforme de 350 N de peso que se articula en la base de la columna. El músculo espinal erector, unido a un punto a dos tercios de camino sobre la columna, mantiene la posición de la espalda. El ángulo entre la columna y este músculo es $\theta = 12.0^\circ$. Encuentre (a) la tensión T en el músculo de la espalda y (b) la fuerza compresiva en la columna. (c) ¿Este método es una buena forma de levantar una carga? Explique su respuesta, utilice los resultados de los incisos (a) y (b). ¿Puede sugerir un mejor método para levantar una carga?

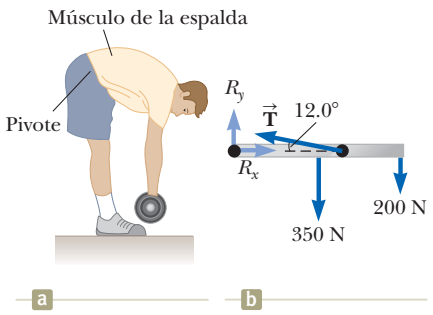


Figura P12.48

49. Un tiburón de 10 000 N está sostenido mediante un cable unido a una barra de 4.00 m que se articula en la base. (a) Calcule la tensión en el cable entre la barra y la pared, suponga que el cable también sostiene el sistema en la posición mostrada en la figura P12.49. Encuentre (b) la fuerza horizontal y (c) la fuerza vertical ejercidas sobre la base de la barra. Ignore el peso de la barra.

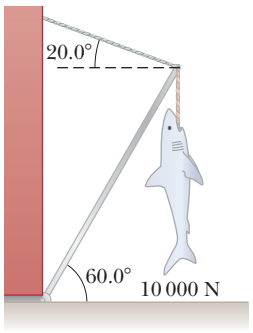


Figura P12.49

50. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* En una fábrica, un trabajador jala un mueble sobre el piso mediante una cuerda, como se muestra en la figura P12.50a. La cuerda forma un ángulo $\theta = 37^\circ$ con el piso y está sujeta a una altura de $h_1 = 10.0$ cm respecto al fondo del mueble. El mueble rectangular uniforme tiene $\ell = 100$ cm de alto, $w = 60.0$ cm de ancho y pesa 400 N. El mueble se desliza con rapidez constante cuando a la cuerda se le aplica una fuerza $F = 300$ N. El trabajador se cansa de caminar de espaldas, y entonces amarra la cuerda en un punto del mueble a una altura $h_2 = 65.0$ cm del piso y coloca la cuerda sobre su hombro de manera que ya no camina de espaldas y jala, como se indica en la figura P12.50b. De esta forma, la cuerda otra vez forma un ángulo $\theta = 37.0^\circ$ con la horizontal y nuevamente tiene una tensión de 300 N. Empleando esta técnica, el trabajador logra arrastrar el mueble durante una larga distancia sobre el piso con menos cansancio.

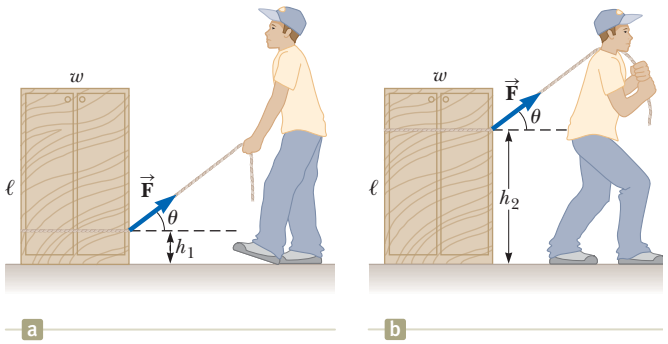


Figura P12.50 Problemas 50 y 62.

51. Una viga uniforme de masa m se inclina en un ángulo θ con la horizontal. Su extremo superior (punto P) produce un doblez de 90° en una cuerda muy rugosa unida a la pared, y su extremo inferior descansa sobre un suelo rugoso (figura P12.51). Sea μ_s el coeficiente de fricción estática entre la viga y el piso. Suponga que μ_s es menor que la cotangente de θ. (a) Encuentre una expresión para la máxima masa M que se puede suspender desde lo alto antes que la viga se deslice. Determine (b) la magnitud de la fuerza de reacción en el suelo y (c) la magnitud de la fuerza ejercida por la viga sobre la cuerda en P en términos de m, M y μ_s.

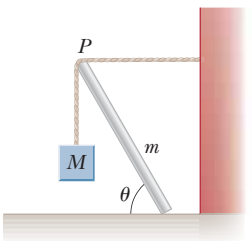


Figura P12.51

52. El gran músculo cuádriceps en la pierna superior termina en su extremo inferior en un tendón unido al extremo superior de la tibia (figura P12.52a, página 386). En la figura P12.52b se modelan las fuerzas sobre la pierna inferior cuando ésta se encuentra extendida, donde $\vec{\mathbf{T}}$ es la fuerza en el tendón, $\vec{\mathbf{F}}_{g,\text{pierna}}$ es la fuerza gravitacional que actúa sobre la pierna inferior y $\vec{\mathbf{F}}_{g,\text{pie}}$ es la fuerza gravitacional que actúa sobre el pie. Encuentre T cuando el tendón está a un ángulo $\phi = 25.0^\circ$ con la tibia, suponga $F_{g,\text{pierna}} = 30.0$ N, $F_{g,\text{pie}} = 12.5$ N y la pierna extendida a un ángulo $\theta = 40.0^\circ$ con respecto a la vertical. También suponga que el centro de gravedad de la tibia está en su centro

geométrico y que el tendón se une a la pierna inferior en una posición a un quinto del camino hacia abajo de la pierna.

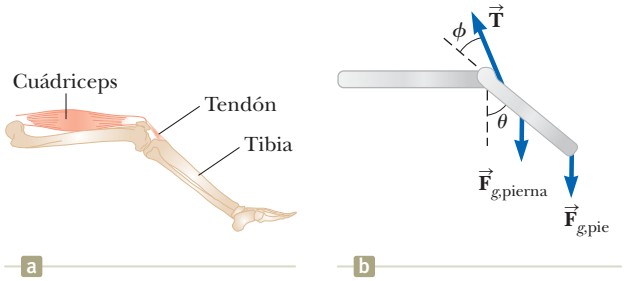


Figura P12.52

53. Cuando un gimnasta en su rutina de los anillos ejecuta la *cruz de hierro* mantiene en reposo la posición indicada en la figura P12.53a. En esta maniobra los pies del gimnasta (no mostrados) no tocan el suelo. Los músculos primarios involucrados en sostener esta posición son los dorsales y los pectorales. Uno de los anillos ejerce una fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{F}}_h$ sobre una mano, como se ilustra en la figura P12.53b. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_s$ es ejercida por la articulación del hombro sobre el brazo. Los músculos dorsales y pectorales ejercen una fuerza total $\vec{\mathbf{F}}_m$ sobre el brazo. (a) Con la información en la figura, encuentre la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_m$ para un atleta de peso 750 N. (b) Suponga que un atleta durante el entrenamiento no puede realizar la cruz de hierro pero puede mantener una posición similar a la figura en la cual los brazos forman un ángulo de 45° con la horizontal en lugar de estar horizontales. ¿Por qué esta posición es más fácil para el atleta?

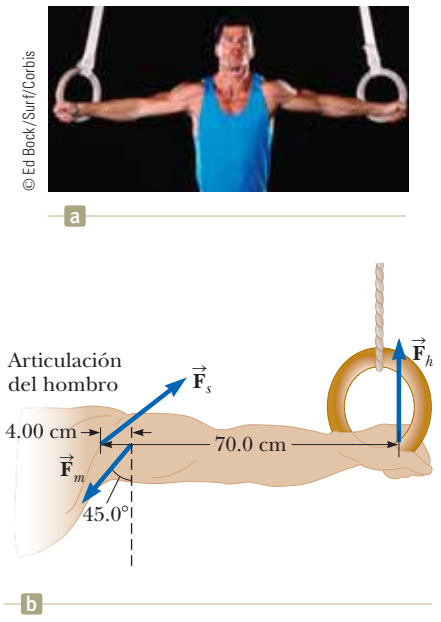


Figura P12.53

54. La figura P12.54 muestra una estructura ligera formada con tres puntales en un plano y unidos en sus extremos por tres pernos de bisagra lisos. La estructura soporta una fuerza hacia abajo de $\vec{\mathbf{F}} = 1\,000$ N aplicada en el punto *B*. La estructura tiene peso despreciable. Los pilares en *A* y *C* son suaves. (a) Dados $\theta_1 = 30.0°$ y $\theta_2 = 45.0°$, encuentre n_A y n_C. (b) Se puede probar que la fuerza ejercida por cualquier puntal sobre un perno debe estar dirigida a lo largo de la longitud del puntal, como una fuerza de tensión o de compresión. Utilice ese hecho para identificar las direcciones de las fuerzas que ejercen los puntales sobre los pernos que los unen. Determine la fuerza de tensión o de compresión en cada una de las tres barras.

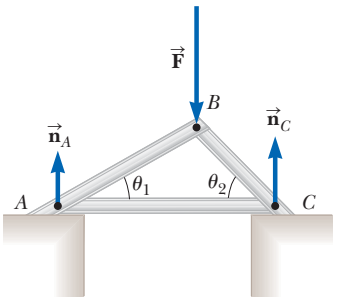


Figura P12.54

55. Un lado de una repisa está sostenido por una ménsula montada sobre una pared vertical mediante un solo tornillo, como se muestra en la figura P12.55. Desprecie el peso de la ménsula. (a) Encuentre la componente horizontal de la fuerza que ejerce el tornillo en la ménsula cuando una fuerza vertical de 80.0 N se aplica como se muestra. (b) Mientras su abuelo riega sus geranios, la fuerza de carga de 80.0 N aumenta a una tasa de 0.150 N/s. ¿A qué razón cambia la fuerza que ejerce el tornillo? *Sugerencia*: imagine que la ménsula está ligeramente floja.

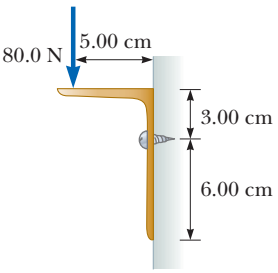


Figura P12.55

56. Una escalera de tijera de peso despreciable se construye como se muestra en la figura P12.56, con $AC = BC = \ell = 4.00$ m. Un pintor de masa $m = 70.0$ kg está de pie en la escalera, a $d = 3.00$ m desde la parte baja. Suponga que el suelo no tiene fricción, encuentre (a) la tensión en la barra horizontal *DE* que conecta las dos mitades de la escalera, (b) las fuerzas normales en *A* y *B*, y (c) las componentes de la fuerza de reacción en la única bisagra *C* que la mitad izquierda de la escalera ejerce sobre la mitad derecha. *Sugerencia*: Trate la escalera como un solo objeto, pero también trate cada mitad de la escalera por separado.

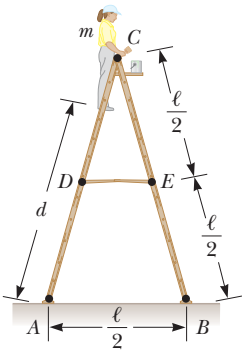


Figura P12.56
Problemas 56 y 57.

57. Una escalera de tijera de peso despreciable se construye como se muestra en la figura P12.56, con $AC = BC = \ell$. Un pintor de masa *m* está de pie en la escalera a una distancia *d* desde la parte baja. Suponga que el suelo no tiene fricción, encuentre (a) la tensión en la barra horizontal *DE* que conecta las dos mitades de la escalera, (b) las fuerzas

normales en A y B, y (c) las componentes de la fuerza de reacción en la única bisagra C que la mitad izquierda de la escalera ejerce sobre la mitad derecha. *Sugerencia*: trate la escalera como un solo objeto, pero también trate a cada mitad de la escalera por separado.

58. (a) Estime la fuerza con la que un maestro de karate golpea una tabla, si supone que la rapidez de la mano en el momento del impacto es 10.0 m/s y disminuye a 1.00 m/s durante un intervalo de tiempo de contacto de 0.002 00 s entre la mano y la tabla. La masa de su mano y brazo es 1.00 kg. (b) Estime el esfuerzo de corte, si supone que esta fuerza se ejerce sobre una tabla de pino de 1.00 cm de grueso que mide 10.0 cm de ancho. (c) Si el esfuerzo de corte máximo que soporta la tabla de pino antes de romperse es de 3.60×10^6 N/m^2, ¿la tabla se romperá?

59. Dos pelotas de squash, cada una de 170 g de masa, se colocan en un frasco de vidrio, como se muestra en la figura P12.59. Sus centros están sobre una línea recta a 45° con la horizontal. (a) Suponga que las paredes carecen de fricción y determine P_1, P_2 y P_3. (b) Obtenga la magnitud de la fuerza que ejerce la pelota izquierda sobre la pelota derecha.

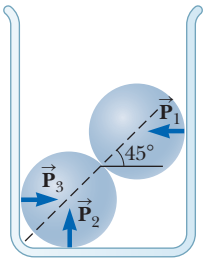


Figura P12.59

60. **Problema de repaso.** Un alambre de longitud L, módulo de Young Y y área de sección transversal A se estira elásticamente una cantidad ΔL. Por la ley de Hooke, la fuerza restauradora es $-k\Delta L$. (a) Demuestre que $k = YA/L$. (b) Demuestre que el trabajo realizado al estirar el alambre una cantidad ΔL es $W = \frac{1}{2}YA(\Delta L)^2/L$.

61. **Problema de repaso.** Un alambre de aluminio de 0.850 m de largo tiene una sección transversal circular de 0.780 mm de diámetro. Fijo en el extremo superior el alambre soporta un objeto de 1.20 kg que se balancea en un círculo horizontal. Determine la rapidez angular que se requiere para producir una deformación de 1.00×10^{-3}.

62. Considere el mueble rectangular del problema 50 mostrado en la figura P12.50, pero con una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada horizontalmente en el borde superior. (a) ¿Cuál es la fuerza mínima requerida para iniciar la inclinación del mueble? (b) ¿Cuál es el mínimo coeficiente de fricción estática requerido para que el mueble no resbale con la aplicación de una fuerza de esta magnitud? (c) Encuentre la magnitud y dirección de la mínima fuerza requerida para inclinar el mueble si el punto de aplicación puede ser en *cualquier* lugar del mueble.

63. Un anuncio rectangular uniforme de 4.00 m de ancho y 3.00 m de alto está suspendido de una barra horizontal uniforme de longitud 6.00 m, como se indica en la figura P12.63. El extremo izquierdo de la barra está soportado por una bisagra y el extremo derecho está unido a un delgado cable que forma un ángulo de 30° con la vertical. (a) Encuentre la tensión T en el cable. (b) Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la bisagra sobre el extremo izquierdo de la barra.

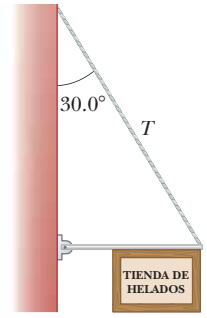


Figura P12.63

64. Un cable de acero con 3.00 cm^2 de área transversal tiene una masa de 2.40 kg por metro. Si 500 m del cable cuelgan sobre un acantilado vertical, ¿qué tanto se estira el alambre bajo su propio peso? Utilice $Y_{\text{acero}} = 2.00 \times 10^{11}$ N/m^2.

Problemas de desafío

65. Un poste uniforme está apoyado entre el piso y el techo de un cuarto. La altura del cuarto es 7.80 pies y el coeficiente de fricción estática entre el poste y el techo es 0.576. El coeficiente de fricción estática entre el piso y el poste es mayor que entre éste y el techo. ¿Cuál es la longitud del poste más largo que puede ser apoyado entre el piso y el techo?

66. En la sección ¿Qué pasaría si? del ejemplo 12.2, sea d la distancia en metros entre la persona y la bisagra en el extremo izquierdo de la viga. (a) Demuestre que la tensión en el cable está dada por $T = 93.9d + 125$, con T en newtons. (b) Demuestre que el ángulo de dirección θ de la fuerza de la bisagra está descrito por

$$\tan\theta = \left(\frac{32}{3d+4} - 1\right)\tan 53.0°$$

(c) Demuestre que la magnitud de la fuerza de la bisagra está dada por

$$R = \sqrt{8.82 \times 10^3 d^2 - 9.65 \times 10^4 d + 4.96 \times 10^5}$$

(d) Conforme d se incrementa, describa cómo difieren entre sí los cambios en T, θ y R.

67. La figura P12.67 muestra la aplicación tangencial de una fuerza vertical a un cilindro uniforme de peso F_g. El coeficiente de fricción estática entre el cilindro y todas las superficies es 0.500. La fuerza $\vec{\mathbf{P}}$ se incrementa en magnitud hasta que el cilindro inicia su rotación. En términos de F_g, encuentre la máxima fuerza P que se puede aplicar sin causar que el cilindro rote. *Sugerencia*: Demuestre que ambas fuerzas de fricción alcanzarán sus valores máximos cuando el cilindro esté a punto de deslizarse.

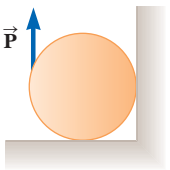


Figura P12.67

68. Una barra uniforme de peso F_g y longitud L está sostenida en sus extremos mediante un canal sin fricción, como se muestra en la figura P12.68. (a) Demuestre que el centro de gravedad de la barra debe estar vertical sobre el punto O cuando la barra está en equilibrio. (b) Determine el valor de equilibrio del ángulo θ. (c) ¿El equilibrio de la barra es estable o inestable?

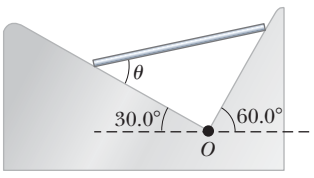


Figura P12.68

CAPÍTULO

13

Gravitación universal

13.1 Ley de Newton de gravitación universal

13.2 Aceleración en caída libre y fuerza gravitacional

13.3 Análisis de modelo: partícula en un campo (gravitacional)

13.4 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

13.5 Energía potencial gravitacional

13.6 Consideraciones energéticas en el movimiento planetario y de satélites



En el 2005, el Telescopio Espacial Hubble captó esta imagen de la galaxia en espiral M51. Los brazos de esta galaxia en espiral comprimen el gas hidrógeno y crean nuevos cúmulos de estrellas. Algunos astrónomos opinan que los brazos son prominentes debido a un encuentro cercano con la pequeña galaxia amarilla NGC5195, en la punta de uno de sus brazos. *(NASA, Hubble Heritage Team, (STScI/AURA), ESA, S. Beckwith (STScI).Additional Processing: Robert Gendler)*

Antes de 1687 se había acumulado una gran cantidad de información acerca de los movimientos de la Luna y de los planetas, pero no se había logrado una comprensión clara de las fuerzas relacionadas con estos movimientos. En ese año, Isaac Newton proporcionó la clave que abrió los secretos de los cielos. Él sabía, a partir de su primera ley, que una fuerza neta tenía que actuar sobre la Luna, porque sin tal fuerza la Luna se movería en una trayectoria en línea recta en lugar de su órbita casi circular. Newton explicó que esta fuerza era la atracción gravitacional que ejercía la Tierra sobre la Luna. Se dio cuenta que las fuerzas participantes en la atracción Tierra-Luna y en la atracción Sol-planeta no eran algo especial de dichos sistemas, sino casos particulares de la atracción general y universal entre los objetos. En otras palabras, Newton entendió que la misma fuerza de atracción que hace a la Luna seguir su trayectoria alrededor de la Tierra, también hace que una manzana caiga de un árbol. Fue la primera ocasión en que se unificaron los movimientos "terrenal" y "celestial".

En este capítulo se estudia la ley de gravitación universal. Se enfatiza una descripción del movimiento planetario, porque la información astronómica aporta una importante prueba de la validez de esta ley. Luego se muestra que las leyes del movimiento planetario elaboradas por Johannes Kepler se siguen de la ley de gravitación universal y del principio de conservación de la cantidad de movimiento angular para un sistema aislado. Se concluye con la deduc-

ción de una expresión general para la energía potencial gravitacional y el examen de la energía del movimiento planetario y de los satélites.

13.1 Ley de Newton de gravitación universal

Quizá ha escuchado la leyenda de que, mientras dormitaba bajo un árbol, Newton fue golpeado en la cabeza por una manzana que caía. Este supuesto accidente hizo que él imaginara que tal vez todos los objetos en el Universo eran atraídos unos hacia otros en la misma forma que la manzana era atraída hacia la Tierra. Newton analizó datos astronómicos sobre el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. A partir de dicho análisis, hizo la atrevida afirmación de que la ley de fuerza que gobierna el movimiento de los planetas era la *misma* ley de fuerza que atraía una manzana en caída libre hacia la Tierra.

En 1687, Newton publicó su obra acerca de la ley de gravedad en su tratado *Principios matemáticos de filosofía natural*. **La ley de Newton de la gravitación universal** establece que

◀ **La ley de gravitación universal**

> toda partícula en el Universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

Si las partículas tienen masas m_1 y m_2, y están separadas una distancia r, la magnitud de esta fuerza gravitacional es

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{13.1}$$

donde G es una constante llamada *constante gravitacional universal*. Su valor en unidades del SI es

$$G = 6.674 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \tag{13.2}$$

La constante gravitacional universal G fue evaluada por primera vez en 1798 mediante un importante experimento realizado por Sir Henry Cavendish (1731-1810). La ley de gravitación universal no fue expresada por Newton en la forma de la ecuación 13.1, y él no mencionó una constante como G. En efecto, aún en la época de Cavendish en su sistema de unidades no existía una unidad de fuerza. El objetivo de Cavendish era medir la densidad de la Tierra. Entonces, 100 años después sus resultados fueron utilizados por otros científicos para obtener un valor de G.

El aparato de Cavendish consistió en dos pequeñas esferas, cada una de masa m, fijas en los extremos de una barra horizontal ligera suspendida de una fibra fina o alambre metálico delgado, como se ilustra en la figura 13.1. Cuando dos esferas grandes, cada una de masa M, se colocan cerca de las más pequeñas, la fuerza de atracción entre las esferas pequeñas y grandes hace que la barra gire y tuerza el alambre de suspensión a una nueva orientación de equilibrio. El ángulo de rotación se mide por la desviación de un haz de luz reflejado de un espejo unido a la suspensión vertical.

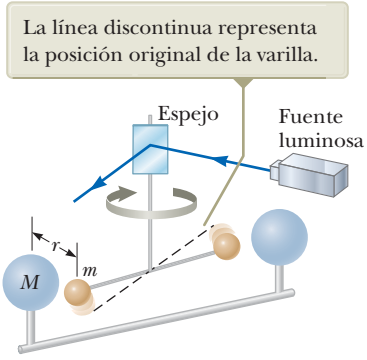


Figura 13.1 Aparato de Cavendish para medir fuerzas gravitacionales.

La forma de la ley de fuerza dada por la ecuación 13.1 con frecuencia se conoce como una **ley del inverso del cuadrado,** porque la magnitud de la fuerza varía con el inverso del cuadrado de la separación de las partículas.[1] En capítulos posteriores se verán otros ejemplos de este tipo de ley de fuerza. Esta fuerza se expresa en forma vectorial al definir un vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ (figura 13.2). Ya que este vector unitario se dirige de la partícula 1 a la partícula 2, la fuerza que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2 es

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \tag{13.3}$$

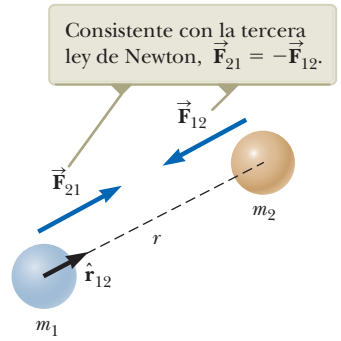


Figura 13.2 La fuerza gravitacional entre dos partículas de atracción. El vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ está dirigido de la partícula 1 a la partícula 2.

[1]Una proporcionalidad *inversa* entre dos cantidades x y y es aquella en la que $y = k/x$, donde k es una constante. Una proporción *directa* entre x y y existe cuando $y = kx$.

donde el signo negativo indica que la partícula 2 es atraída hacia la partícula 1; en consecuencia, la fuerza sobre la partícula 2 debe dirigirse hacia la partícula 1. Por la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1, designada $\vec{\mathbf{F}}_{21}$, es igual en magnitud a $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ y en la dirección opuesta. Es decir, dichas fuerzas forman un par acción-reacción, y $\vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}$.

Dos características de la ecuación 13.3 merecen mención. Primero, la fuerza gravitacional es un campo de fuerza que siempre existe entre dos partículas, sin importar el medio que las separe. Segundo, ya que la fuerza varía como el inverso al cuadrado de la distancia entre las partículas, entonces disminuye rápidamente al aumentar la separación.

La ecuación 13.3 también se utiliza para mostrar que la fuerza gravitacional que ejerce una distribución de masa esféricamente simétrica y de tamaño finito sobre una partícula afuera de la distribución es la misma como si toda la masa de ésta se concentrara en el centro. Por ejemplo, la magnitud de la fuerza que ejerce la Tierra sobre una partícula de masa m cerca de la superficie de la Tierra es

$$F_g = G\frac{M_T m}{R_T^{\,2}} \tag{13.4}$$

donde M_T es la masa de la Tierra y R_T es su radio. Esta fuerza se dirige hacia el centro de la Tierra.

Prevención de riesgos ocultos 13.1

Sea claro con *g* y *G* El símbolo g representa la magnitud de la aceleración en caída libre cerca de un planeta. En la superficie de la Tierra, g tiene un valor promedio de 9.80 m/s². Por otra parte, G es una constante universal que tiene el mismo valor en cualquier parte del Universo.

Examen rápido 13.1 Un planeta tiene dos lunas de igual masa. La luna 1 está en órbita circular de radio r. La luna 2 está en órbita circular de radio $2r$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional que ejerce el planeta sobre la luna 2? **(a)** Cuatro veces mayor que sobre la luna 1, **(b)** dos veces mayor que sobre la luna 1, **(c)** igual que sobre la luna 1, **(d)** la mitad de la ejercida sobre la luna 1 y **(e)** un cuarto de la ejercida sobre la luna 1.

Ejemplo 13.1 ¿Alguien juega billar?

Tres bolas de billar de 0.300 kg se colocan sobre una mesa en las esquinas de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 13.3. Los lados del triángulo tienen longitudes $a = 0.400$ m, $b = 0.300$ m y $c = 0.500$ m. Calcule el vector de fuerza gravitacional sobre la bola blanca (designada por m_1) que resulta de las otras dos bolas, así como la magnitud y la dirección de esta fuerza.

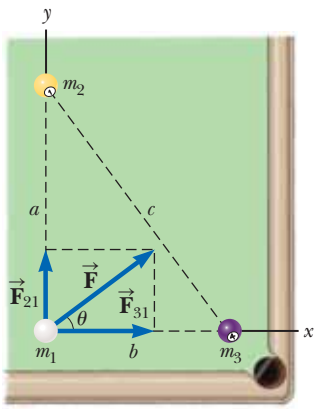


Figura 13.3 (Ejemplo 13.1) La fuerza gravitacional resultante que actúa sobre la bola blanca es la suma vectorial $\vec{\mathbf{F}}_{21} + \vec{\mathbf{F}}_{31}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe en la figura 13.3 que la bola blanca es atraída hacia ambas bolas por la fuerza gravitacional. En la gráfica se aprecia que la fuerza neta debe apuntar hacia arriba y a la derecha. Los ejes coordenados se ubican como se muestra en la figura 13.3 y el origen se coloca en la posición de la bola blanca.

Categorizar Este problema involucra evaluar las fuerzas gravitacionales sobre la bola blanca con el uso de la ecuación 13.3. Una vez evaluadas dichas fuerzas, la construcción de la fuerza neta equivale a un problema de suma vectorial.

Analizar Encuentre la fuerza que ejerce m_2 sobre la bola blanca:

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} = G\frac{m_2 m_1}{a^2}\hat{\mathbf{j}}$$

$$= (6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})\frac{(0.300\ \mathrm{kg})(0.300\ \mathrm{kg})}{(0.400\ \mathrm{m})^2}\hat{\mathbf{j}}$$

$$= 3.75 \times 10^{-11}\,\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{N}$$

Halle la fuerza que ejerce m_3 sobre la bola blanca:

$$\vec{\mathbf{F}}_{31} = G\frac{m_3 m_1}{b^2}\hat{\mathbf{i}}$$

$$= (6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})\frac{(0.300\ \mathrm{kg})(0.300\ \mathrm{kg})}{(0.300\ \mathrm{m})^2}\hat{\mathbf{i}}$$

$$= 6.67 \times 10^{-11}\,\hat{\mathbf{i}}\ \mathrm{N}$$

13.1 continuación

Encuentre la fuerza gravitacional neta sobre la bola blanca al sumar estos vectores de fuerza:

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{31} + \vec{\mathbf{F}}_{21} = (6.67\,\hat{\mathbf{i}} + 3.75\,\hat{\mathbf{j}}) \times 10^{-11}\ \text{N}$$

Obtenga la magnitud de esta fuerza:

$$F = \sqrt{F_{31}^{\,2} + F_{21}^{\,2}} = \sqrt{(6.67)^2 + (3.75)^2} \times 10^{-11}\ \text{N}$$
$$= 7.66 \times 10^{-11}\ \text{N}$$

Encuentre la tangente del ángulo θ para el vector de fuerza neta:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{F_{21}}{F_{31}} = \frac{3.75 \times 10^{-11}\ \text{N}}{6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}} = 0.562$$

Evalúe el ángulo θ:

$$\theta = \tan^{-1}(0.562) = 29.4^\circ$$

Finalizar El resultado para F muestra que las fuerzas gravitacionales entre los objetos cotidianos tienen magnitudes extremadamente pequeñas.

13.2 Aceleración en caída libre y fuerza gravitacional

A la magnitud de la fuerza gravitacional sobre un objeto cerca de la superficie de la Tierra se le llama *peso* del objeto, donde el peso está dado por la ecuación 5.6. La ecuación 13.4 es otra expresión para esta fuerza. Por lo tanto, las ecuaciones 5.6 y 13.4 se pueden igualar entre sí para obtener

$$mg = G\frac{M_E m}{R_E^{\,2}}$$

$$g = G\frac{M_E}{R_E^{\,2}} \qquad (13.5)$$

La ecuación 13.5 relaciona la aceleración en caída libre g con los parámetros físicos de la Tierra, su masa y radio, y explica el origen del valor de 9.80 m/s^2 que se ha utilizado en capítulos anteriores. Ahora considere un objeto de masa m ubicado a una distancia h sobre la superficie de la Tierra o a una distancia r del centro de la Tierra, donde $r = R_T + h$. La magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre este objeto es

$$F_g = G\frac{M_E m}{r^2} = G\frac{M_E m}{(R_E + h)^2}$$

La magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto en esta posición también es $F_g = mg$, donde g es el valor de la aceleración en caída libre a la altura h. Al sustituir esta expresión para F_g en la última ecuación se obtiene que g está dada por

$$g = \frac{GM_E}{r^2} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \qquad (13.6)$$

◀ Variación de g con la altura

Por lo tanto, se sigue que g *disminuye* con la *altura creciente*. En la tabla 13.1 se proporcionan los valores de g para diferentes alturas. Ya que el peso de un objeto es mg, se ve que conforme $r \to \infty$, el peso tiende a cero.

Tabla 13.1 **Aceleración g en caída libre a diferentes alturas sobre la superficie de la Tierra**

Altura h (km)	g (m/s^2)
1 000	7.33
2 000	5.68
3 000	4.53
4 000	3.70
5 000	3.08
6 000	2.60
7 000	2.23
8 000	1.93
9 000	1.69
10 000	1.49
50 000	0.13
∞	0

Examen rápido 13.2 Superman está de pie en lo alto de una montaña elevada y lanza una pelota de béisbol horizontalmente con una rapidez tal que la pelota entra en una órbita circular alrededor de la Tierra. Mientras la pelota está en órbita, ¿cuál es la magnitud de la aceleración de la pelota? **(a)** Depende de qué tan rápido se lance la pelota. **(b)** Es cero porque la pelota no cae al suelo. **(c)** Es ligeramente menor que 9.80 m/s^2. **(d)** Es igual a 9.80 m/s^2.

Ejemplo 13.2 La densidad de la Tierra

Con el radio conocido de la Tierra y $g = 9.80\ \text{m/s}^2$ en la superficie de la Tierra, encuentre la densidad promedio de la Tierra.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Suponga que la Tierra es una esfera perfecta. La densidad de material en la Tierra varía, pero adopte un modelo simplificado en donde considere que la densidad es uniforme en todas partes de la Tierra. La densidad resultante es la densidad promedio de la Tierra.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

Utilice la ecuación 13.5, resuelva para la masa de la Tierra:

$$M_E = \frac{gR_E^{\,2}}{G}$$

Sustituya esta masa y el volumen de una esfera en la definición de densidad (ecuación 1.1):

$$\rho_E = \frac{M_E}{V_E} = \frac{gR_E^{\,2}/G}{\frac{4}{3}\pi R_E^{\,3}} = \tfrac{3}{4}\frac{g}{\pi G R_E}$$

$$= \tfrac{3}{4}\frac{9.80\ \text{m/s}^2}{\pi(6.674 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(6.37 \times 10^{6}\ \text{m})} = 5.50 \times 10^{3}\ \text{kg/m}^3$$

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si se le dice que una densidad típica del granito en la superficie de la Tierra es de $2.75 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$? ¿Qué concluiría acerca de la densidad del material en el interior de la Tierra?

Respuesta Ya que este valor es casi la mitad de la densidad calculada como promedio para toda la Tierra, se concluiría que el núcleo de la Tierra tiene una densidad mucho mayor que el valor promedio. Es más sorprendente que el experimento de Cavendish, que determina G y se puede realizar sobre una mesa, combinado con simples mediciones de g en caída libre, ¡proporciona información acerca del núcleo de la Tierra!

13.3 Análisis de modelo: partícula en un campo (gravitacional)

Cuando Newton publicó su teoría de la gravitación universal, fue considerada un éxito porque explicaba satisfactoriamente el movimiento de los planetas. Esto representó fuerte evidencia de que las mismas leyes que describen fenómenos sobre la Tierra pueden emplearse para grandes objetos como planetas y en diversos lugares del Universo. Desde 1687 la teoría de Newton se ha utilizado para explicar los movimientos de cometas, la desviación de una balanza de Cavendish, las órbitas de estrellas binarias y la rotación de galaxias. Sin embargo, tanto los contemporáneos de Newton como las generaciones siguientes han encontrado difícil de aceptar el concepto de una fuerza que actúa a distancia. Ellos preguntaron: ¿cómo es posible que dos objetos, como el Sol y la Tierra, interactúen cuando no están en contacto entre sí? Newton mismo no pudo responder esta pregunta.

Un método para describir las interacciones entre los objetos que no están en contacto apareció mucho después de la muerte de Newton. Este método permite una forma diferente de observar la interacción gravitacional, al usar el concepto de un **campo gravitacional** que existe en cada punto del espacio. Cuando una partícula se coloca en un punto donde existe un campo gravitacional, la partícula experimenta una fuerza gravitacional. En otras palabras, piense que el campo ejerce una fuerza sobre la partícula en lugar de considerar una interacción directa entre dos partículas. El campo gravitacional $\vec{\mathbf{g}}$ se define como

Campo gravitacional ▶

$$\vec{\mathbf{g}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{F}}_g}{m_0} \tag{13.7}$$

Es decir, el campo gravitacional en un punto del espacio es igual a la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$ que experimenta una *partícula de prueba* colocada en dicho punto, dividida entre la masa m_0 de la partícula de prueba. Al objeto que crea el campo se le llama *partícula fuente*. (No obstante que la Tierra no es una partícula, es posible demostrar

que la Tierra se puede modelar como una partícula con el propósito de encontrar el campo gravitacional que crea.) Observe que la presencia de la partícula de prueba no es necesaria para que el campo exista: la partícula fuente crea el campo gravitacional. Es posible detectar la presencia del campo y medir su intensidad al colocar una partícula de prueba en el campo y notar la fuerza que se ejerce sobre ella. En esencia, lo que se describe es el "efecto" que cualquier objeto (en este caso, la Tierra) tiene sobre el espacio vacío alrededor de sí mismo en términos de la fuerza que *estaría* presente *si* un segundo objeto estuviese en alguna parte en ese espacio.[2]

El concepto de campo está en el corazón del análisis de modelo de **partícula en un campo**. En la versión general de este modelo, una partícula reside en un sector del espacio en donde existe un campo. Debido a la existencia del campo y una propiedad de la partícula, la partícula experimenta una fuerza. En la versión gravitacional del modelo de partícula en un campo, discutida aquí, el tipo de campo es gravitacional y la propiedad de la partícula que resulta en la fuerza es la masa m de la partícula. La representación matemática de la versión gravitacional del modelo de partícula en un campo es la ecuación 5.5:

$$\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}} \tag{5.5}$$

En futuros capítulos se verán otras dos versiones del modelo de partícula en un campo. En la versión eléctrica, la propiedad de una partícula que resulta en una fuerza es la *carga eléctrica*: cuando una partícula cargada se coloca en un *campo eléctrico*, experimenta una fuerza. La magnitud de la fuerza es el producto de la carga eléctrica y el campo, en analogía con la fuerza gravitacional en la ecuación 5.5. En la versión magnética del modelo de partícula en un campo, una partícula cargada se coloca en un *campo magnético*. Se requiere otra propiedad de esta partícula para que ésta experimente una fuerza: la partícula debe tener una *velocidad* en algún ángulo no nulo respecto al campo magnético. Las versiones eléctrica y magnética del modelo de partícula en un campo son críticas en la comprensión de los principios del electromagnetismo, lo cual se estudiará en los capítulos 23-34. Ya que la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto tiene una magnitud GM_Tm/r^2 (ecuación 13.4), el campo gravitacional $\vec{\mathbf{g}}$ a una distancia r del centro de la Tierra es

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_g}{m} = -\frac{GM_E}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{13.8}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario que apunta radialmente hacia fuera de la Tierra y el signo negativo indica que el campo apunta hacia el centro de la Tierra, como se ilustra en la figura 13.4a. Los vectores de campo en diferentes puntos alrededor de la Tierra varían tanto en dirección como en magnitud. En una pequeña región cerca de la superficie de la Tierra, el campo hacia abajo $\vec{\mathbf{g}}$ es aproximadamente constante y uniforme, como se indica en la figura 13.4b. La ecuación 13.8 es válida en todos los puntos *externos* a la superficie de la Tierra, si se supone que la Tierra es esférica. En la superficie de la Tierra, donde $r = R_E$, $\vec{\mathbf{g}}$ tiene una magnitud de 9.80 N/kg. (La unidad N/kg es la misma que m/s^2.)

Los vectores de campo apuntan en la dirección de la aceleración que una partícula experimentaría si se le colocara en el campo. La magnitud del vector campo en cualquier ubicación es la magnitud de la aceleración en caída libre en dicha ubicación.

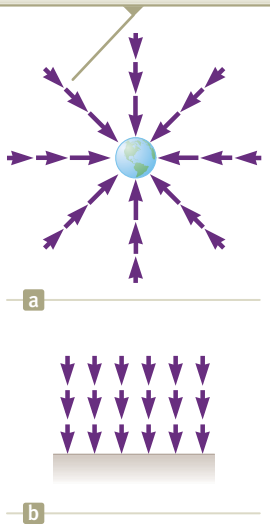
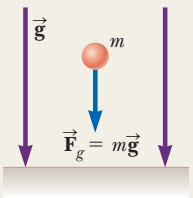


Figura 13.4 (a) Los vectores de campo gravitacional cercanos a una masa esférica uniforme como la Tierra varían tanto en dirección como en magnitud. (b) Los vectores de campo gravitacional en una pequeña región cerca de la superficie de la Tierra son uniformes tanto en dirección como en magnitud.

Análisis de modelo Partícula en un campo (gravitacional)

Imagine un objeto con masa, la *partícula fuente*. La partícula fuente genera un **campo gravitacional** $\vec{\mathbf{g}}$ a través del espacio. El campo gravitacional se evalúa al medir la fuerza sobre una partícula de prueba de masa m_0 y emplear la ecuación 13.7. Ahora suponga que en ese campo se coloca una partícula de masa m. La partícula interactúa con el campo gravitacional, así que experimenta una fuerza gravitacional dada por

$$\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}} \tag{5.5}$$



continúa

[2]Se regresará a esta idea de una masa que afecta al espacio a su alrededor cuando se analice la teoría de gravitación de Einstein en el capítulo 39.

Análisis de modelo **Partícula en un campo (gravitacional) (*continuación*)**

Ejemplos:

- un objeto de masa m cerca de la superficie de la Tierra tiene un *peso*, que es el resultado del campo gravitacional que la Tierra genera en el espacio
- un planeta en el Sistema Solar está en órbita alrededor del Sol, esto debido a la fuerza gravitacional ejercida sobre el planeta por el campo gravitacional generado por el Sol
- un objeto cercano a un agujero negro es atrapado por éste, para nunca escapar, esto debido al intenso campo gravitacional producido por el agujero negro (sección 13.6)
- en la teoría general de la relatividad, el campo gravitacional de un objeto masivo se supone descrito por la *curvatura del espacio-tiempo* (capítulo 39)
- se supone que el campo gravitacional de un objeto masivo es transmitido por partículas llamadas *gravitones*, que hasta la fecha no se han detectado (capítulo 46)

Ejemplo 13.3 El peso de la estación espacial AM

La Estación Espacial Internacional opera a una altura de 350 km. Los planes para la construcción final muestran que 4.22×10^6 N de material, pesado en la superficie de la Tierra, fue transportado por diferentes naves espaciales. ¿Cuál es el peso de la estación espacial cuando está en órbita?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La masa de la estación espacial es fija, sin importar su ubicación. En términos de la explicación de esta sección y de la sección 13.2, se advierte que el valor de g se reducirá en la altura de la órbita de la estación espacial. Por lo tanto, su peso será más pequeño que en la superficie de la Tierra.

Categorizar La estación espacial se modela como una *partícula en un campo gravitacional*.

Analizar Del modelo de partícula en un campo, encuentre la masa de la estación espacial mediante su peso en la superficie de la Tierra:

$$m = \frac{F_g}{g} = \frac{4.22 \times 10^6 \text{ N}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 4.31 \times 10^5 \text{ kg}$$

Utilice la ecuación 13.6 con $h = 350$ km para encontrar la magnitud del campo gravitacional en la ubicación orbital:

$$g = \frac{GM_T}{(R_E + h)^2} = \frac{(6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6.37 \times 10^6 \text{ m} + 0.350 \times 10^6 \text{ m})^2} = 8.82 \text{ m/s}^2$$

Aplique otra vez el modelo de partícula en un campo para obtener el peso de la estación espacial en órbita:

$$F_g = mg = (4.31 \times 10^5 \text{ kg})(8.82 \text{ m/s}^2) = 3.80 \times 10^6 \text{ N}$$

Finalizar Observe que el peso de la estación espacial es menor cuando está en órbita, como se esperaba. El peso se reduce un 10% respecto de su valor en la superficie de la Tierra, implicando una disminución del 10% en la magnitud del campo gravitacional.

13.4 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

Los humanos han observado los movimientos de los planetas, estrellas y otros objetos celestes durante miles de años. En la historia temprana, dichas observaciones condujeron a los científicos a considerar a la Tierra como el centro del Universo. Este *modelo geocéntrico* fue elaborado y formalizado por el astrónomo griego Claudius Ptolomeo (*c.* 100-*c.* 170) en el siglo II y fue aceptado durante los siguientes 1 400 años. En 1543 el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473-1543) sugirió que la Tierra y los otros planetas giraban en órbitas circulares alrededor del Sol (el *modelo heliocéntrico*).

El astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601) quería determinar cómo estaban construidos los cielos y siguió un proyecto para determinar las posiciones de las estrellas y los planetas. Dichas observaciones de los planetas y de 777 estrellas visibles

a simple vista se realizaron sólo con un gran sextante y una brújula. (Todavía no se inventaba el telescopio.)

El astrónomo alemán Johannes Kepler fue asistente de Brahe durante una época breve antes de la muerte de éste, después de lo cual adquirió los datos astronómicos de su mentor y pasó 16 años intentando deducir un modelo matemático para el movimiento de los planetas. Tal información es difícil de ordenar porque los planetas en movimiento se observan desde una Tierra en movimiento. Después de muchos cálculos laboriosos, Kepler encontró que los datos de Brahe acerca de la revolución de Marte alrededor del Sol conducían a un modelo exitoso.

El análisis completo de Kepler del movimiento planetario se resume en tres enunciados que se conocen como **leyes de Kepler**.

Leyes de Kepler

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco.
2. El radio vector dibujado desde el Sol a un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.
3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

Primera ley de Kepler

Los modelos geocéntrico y heliocéntrico del Sistema Solar sugirieron órbitas circulares para los cuerpos celestes. La primera ley de Kepler indica que la órbita circular es un caso muy especial y que las órbitas elípticas son la situación general. Esta idea fue difícil de aceptar para los científicos de la época, porque creían que las órbitas circulares perfectas de los planetas reflejaban la perfección del cielo.

La figura 13.5 muestra la geometría de una elipse, que sirve como modelo para la órbita elíptica de un planeta. Una elipse se define matemáticamente al elegir dos puntos, F_1 y F_2, cada uno llamado **foco**, y luego dibujar una curva a través de los puntos para los que la suma de las distancias r_1 y r_2 desde F_1 y F_2, respectivamente, es una constante. La mayor distancia a través del centro entre los puntos en la elipse (y que pasa por cada foco) se llama **eje mayor**, y esta distancia es $2a$. En la figura 13.5 el eje mayor se dibuja a lo largo de la dirección x. La distancia a se llama **semieje mayor**. De igual modo, la distancia más corta a través del centro entre los puntos en la elipse se llama eje menor de longitud $2b$, donde la distancia b es el **semieje menor**. Cualquier foco de la elipse se ubica a una distancia c desde el centro de la elipse, donde $a^2 = b^2 + c^2$. En la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol, éste está en un foco de la elipse. No hay objeto en el otro foco.

La **excentricidad** de una elipse se define como $e = c/a$ y describe la forma general de la elipse. Para una circunferencia $c = 0$, y por tanto la excentricidad es cero. Mientras más pequeña sea b en comparación con a, más corta es la elipse a lo largo de la dirección y en comparación con su medida en la dirección x de la figura 13.5. A medida que b disminuye, c aumenta y crece la excentricidad e. Por lo tanto, mayores valores de excentricidad corresponden a elipses más grandes y delgadas. El intervalo de valores de la excentricidad para una elipse es $0 < e < 1$.

Las excentricidades para órbitas planetarias varían enormemente en el Sistema Solar. La excentricidad de la órbita de la Tierra es 0.017, lo que la hace casi circular. Por otra parte, la excentricidad de la órbita de Mercurio es 0.21, la mayor de los ocho planetas. La figura 13.6a, en la página 396, muestra una elipse con una excentricidad igual a la de la órbita de Mercurio. Note que incluso esta órbita de gran excentricidad es difícil de distinguir de una circunferencia, que es una razón para que la primera ley de Kepler sea un logro admirable. La excentricidad de la órbita del cometa Halley es 0.97, así que describe una órbita cuyo eje mayor es mucho más largo que su eje menor, como se muestra en la figura 13.6b. Como resultado, el cometa Halley pasa gran parte de su periodo de 76 años lejos del Sol e invisible a la Tierra. Sólo es visible a simple vista durante una pequeña parte de su órbita, cuando está cerca del Sol.

Ahora imagine un planeta en una órbita elíptica tal como se muestra en la figura 13.5, con el Sol en el foco F_2. Cuando el planeta está en el extremo izquierdo del



iStockphoto.com/GeorgiosArt

Johannes Kepler
Astrónomo alemán (1571-1630)
Kepler es mejor conocido por desarrollar las leyes de movimiento planetario en función de las cuidadosas observaciones de Tycho Brahe.

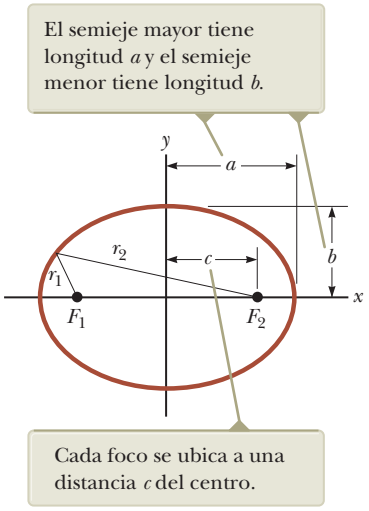


Figura 13.5 Gráfica de una elipse.

Prevención de riesgos ocultos 13.2

¿Dónde está el Sol? El Sol se ubica en un foco de la órbita elíptica de un planeta. *No* se localiza en el centro de la elipse.

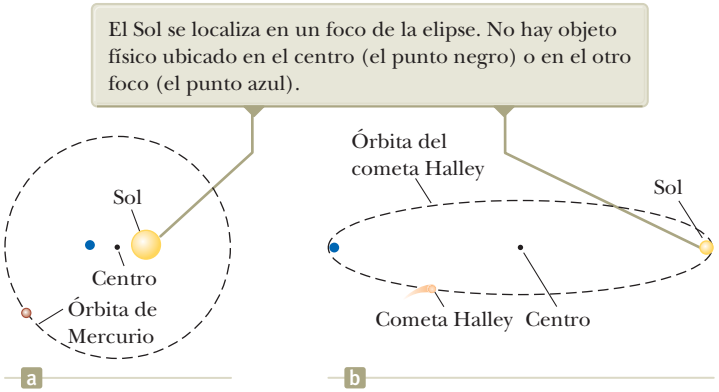


Figura 13.6 (a) La forma de la órbita de Mercurio, que tiene la mayor excentricidad ($e = 0.21$) entre los ocho planetas del Sistema Solar. (b) La forma de la órbita del cometa Halley. La forma de la órbita es correcta; por claridad, el cometa y el Sol se muestran a mayor escala.

diagrama, la distancia entre el planeta y el Sol es $a + c$. En este punto, llamado *afelio*, el planeta está a su máxima distancia del Sol. (Para un objeto en órbita alrededor de la Tierra, este punto se llama *apogeo*.) Inversamente, cuando el planeta está en el extremo derecho de la elipse, la distancia entre el planeta y el Sol es $a - c$. En este punto, llamado *perihelio* (para una órbita terrestre, el *perigeo*), el planeta está a su distancia mínima desde el Sol.

La primera ley de Kepler es un resultado directo de la naturaleza del inverso al cuadrado de la fuerza gravitacional. Las órbitas circular y elíptica corresponden a objetos que están *ligados* al centro de fuerza gravitacional. Esos objetos incluyen planetas, asteroides y cometas que se mueven repetidamente alrededor del Sol, así como lunas que orbitan un planeta. También hay objetos *no ligados*, tales como un meteoro proveniente del espacio profundo que podría pasar por el Sol una vez y luego nunca regresar. La fuerza gravitacional entre el Sol y dichos objetos también varía con el inverso al cuadrado de la distancia de separación, y las trayectorias permitidas para tales objetos incluyen parábolas ($e = 1$) e hipérbolas ($e > 1$).

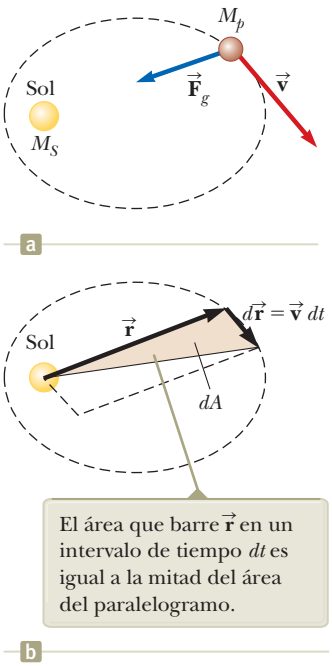


Figura 13.7 (a) La fuerza gravitacional que actúa sobre un planeta se dirige hacia el Sol. (b) Durante un intervalo de tiempo dt, los vectores $\vec{\mathbf{r}}$ y $d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{v}}\,dt$ forman un paralelogramo.

Segunda ley de Kepler

Se puede demostrar que la segunda ley de Kepler es una consecuencia del modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento angular. Considere un planeta de masa M_p que se mueve en torno al Sol en una órbita elíptica (figura 13.7a). Suponga al planeta como un sistema. El Sol se modela como mucho más pesado que el planeta, de tal modo que el Sol no se mueve. La fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre el planeta es una fuerza central, siempre a lo largo del radio vector, dirigida hacia el Sol (figura 13.7a). El momento de torsión sobre el planeta debido a esta fuerza central, respecto a un eje a través del Sol, es cero porque $\vec{\mathbf{F}}_g$ es paralela a $\vec{\mathbf{r}}$.

Por lo tanto, ya que el momento de torsión externo sobre el planeta es cero, se modela como un sistema aislado para cantidad de movimiento angular, y la cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ del planeta es una constante del movimiento:

$$\Delta\vec{\mathbf{L}} = 0 \rightarrow \vec{\mathbf{L}} = \text{constante}$$

Se evalúa $\vec{\mathbf{L}}$ para el planeta,

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = M_p \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} \rightarrow L = M_p |\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}| \qquad (13.9)$$

Este resultado se puede relacionar con la siguiente consideración geométrica. En un intervalo de tiempo dt, el radio vector $\vec{\mathbf{r}}$ en la figura 13.7b barre el área dA, que es igual a la mitad del área $|\vec{\mathbf{r}} \times d\vec{\mathbf{r}}|$ del paralelogramo formado por los vectores $\vec{\mathbf{r}}$ y $d\vec{\mathbf{r}}$. Ya que el desplazamiento del planeta en el intervalo de tiempo dt está dado por $d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{v}}\,dt$,

$$dA = \tfrac{1}{2}|\vec{\mathbf{r}} \times d\vec{\mathbf{r}}| = \tfrac{1}{2}|\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\,dt| = \tfrac{1}{2}|\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}|\,dt$$

en donde puede emplearse el valor que la ecuación 13.9 da para el valor absoluto del producto cruz, así:

$$dA = \tfrac{1}{2}\left(\frac{L}{M_p}\right)dt$$

Divida ambos lados entre dt para obtener:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_p} \tag{13.10}$$

donde L y M_p son constantes. Este resultado muestra que la derivada dA/dt es constante, el radio vector desde el Sol a cualquier planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, como está establecido por la segunda ley de Kepler.

Esta conclusión es un resultado de la fuerza gravitacional que es una fuerza central, lo que a su vez implica que la cantidad de movimiento angular del planeta es constante. Por lo tanto, la ley aplica a *cualquier* situación que involucre una fuerza central, sea o no del inverso al cuadrado.

Tercera ley de Kepler

La tercera ley de Kepler se puede predecir a partir de la ley del inverso al cuadrado para órbitas circulares y de los análisis de modelos. Considere un planeta de masa M_p que se supone en movimiento alrededor del Sol (masa M_S) en una órbita circular, como en la figura 13.8. Ya que la fuerza gravitacional proporciona la aceleración centrípeta del planeta conforme se mueve en círculo, se modela el planeta como una partícula sujeta a una fuerza neta y como una partícula en movimiento circular uniforme, y se incorpora la ley de Newton de gravitación universal,

$$F_g = M_p a \quad \rightarrow \quad \frac{GM_S M_p}{r^2} = M_p\left(\frac{v^2}{r}\right)$$

La rapidez orbital del planeta es $2\pi r/T$, donde T es el periodo; por lo tanto, la expresión anterior se convierte en

$$\frac{GM_S}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right)r^3 = K_S r^3$$

donde K_S es una constante dada por

$$K_S = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19}\ \text{s}^2/\text{m}^3$$

Esta ecuación también es válida para órbitas elípticas si se sustituye r con la longitud a del semieje mayor (figura 13.5):

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right)a^3 = K_S a^3 \tag{13.11}$$

◀ **Tercera ley de Kepler**

La ecuación 13.11 es la tercera ley de Kepler: el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del semieje mayor. Como el semieje mayor de una órbita circular es su radio, esta ecuación es válida tanto para órbitas circulares como para elípticas. Observe que la constante de proporcionalidad K_S es independiente de la masa del planeta. Por lo tanto, la ecuación 13.8 es válida para *cualquier* planeta.[3] Si tuviera que considerar la órbita de un satélite como la Luna en torno a la Tierra, la constante tendría un valor diferente, con la masa del Sol sustituida por la masa de la Tierra, es decir, $K_T = 4p^2/GM_T$.

La tabla 13.2, página 398, es un conjunto de datos útiles para planetas y otros objetos en el Sistema Solar. La columna de la extrema derecha verifica que la relación T^2/r^3 es constante para todos los objetos que orbitan el Sol. Las pequeñas variaciones en los valores de esta columna son el resultado de incertidumbres en los datos observados para los periodos y semiejes mayores de los objetos.

Trabajos astronómicos recientes revelaron la existencia de un gran número de objetos del Sistema Solar más allá de la órbita de Neptuno. En general, dichos objetos se encuentran en el *cinturón Kuiper*, una región que se extiende desde casi 30 UA (el radio orbital de Neptuno) hasta 50 UA. (Una UA es una *unidad astronómica*, igual al

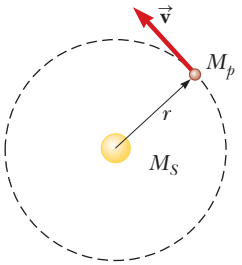


Figura 13.8 Un planeta de masa M_p que se mueve en una órbita circular alrededor del Sol. Las órbitas de todos los planetas, excepto Mercurio, son casi circulares.

[3]La ecuación 13.11 es de hecho una proporción, porque la razón entre las dos cantidades T^2 y a^3 es una constante. En una proporción no se requiere que las variables estén limitadas sólo a la primera potencia.

Tabla 13.2 **Datos planetarios útiles**

Cuerpo	Masa (kg)	Radio medio (m)	Periodo de revolución (s)	Distancia media desde el Sol (m)	$\frac{T^2}{r^3}(s^2/m^3)$
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^{6}	7.60×10^{6}	5.79×10^{10}	2.98×10^{-19}
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^{6}	1.94×10^{7}	1.08×10^{11}	2.99×10^{-19}
Tierra	5.97×10^{24}	6.37×10^{6}	3.156×10^{7}	1.496×10^{11}	2.97×10^{-19}
Marte	6.42×10^{23}	3.39×10^{6}	5.94×10^{7}	2.28×10^{11}	2.98×10^{-19}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^{7}	3.74×10^{8}	7.78×10^{11}	2.97×10^{-19}
Saturno	5.68×10^{26}	5.82×10^{7}	9.29×10^{8}	1.43×10^{12}	2.95×10^{-19}
Urano	8.68×10^{25}	2.54×10^{7}	2.65×10^{9}	2.87×10^{12}	2.97×10^{-19}
Neptuno	1.02×10^{26}	2.46×10^{7}	5.18×10^{9}	4.50×10^{12}	2.94×10^{-19}
Plutón[a]	1.25×10^{22}	1.20×10^{6}	7.82×10^{9}	5.91×10^{12}	2.96×10^{-19}
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	—	—	—
Sol	1.989×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—	—

[a] En agosto de 2006, la Unión Astronómica Internacional adoptó una definición de planeta que separa a Plutón de los otros ocho planetas. Ahora Plutón se define como un "planeta enano", como el asteroide Ceres.

radio de la órbita de la Tierra.) Estimaciones actuales identifican, en esta región, al menos 70 000 objetos con diámetros mayores a 100 km. El primer objeto del cinturón Kuiper (KBO) es Plutón, descubierto en 1930 y anteriormente clasificado como planeta. A partir de 1992 se han detectado muchos más. Varios tienen diámetros en el rango de 1 000 km, como Varuna (descubierto en 2000), Ixion (2001), Quaoar (2002), Sedna (2003), Haumea (2004), Orcus (2004) y Makemake (2005). Un KBO, Eris, descubierto en 2005, se piensa que es significativamente más grande que Plutón. Otros KBO aún carecen de nombre, pero actualmente se indican mediante su año de descubrimiento y un código, como 2009 YE7 y 2010 EK139.

Un subconjunto de aproximadamente 1 400 KBO se llama "Plutinos", porque, como Plutón, muestran un fenómeno de resonancia y orbitan el Sol dos veces en el mismo intervalo de tiempo que Neptuno da vuelta tres veces. La aplicación contemporánea de las leyes de Kepler y propuestas tan exóticas como el intercambio de cantidad de movimiento angular planetario y la migración de los planetas sugieren lo emocionante de esta área activa de la investigación actual.

Examen rápido 13.3 Un asteroide está en una órbita elíptica altamente excéntrica alrededor del Sol. El periodo de la órbita del asteroide es de 90 días. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero acerca de la posibilidad de una colisión entre este asteroide y la Tierra? **(a)** No hay peligro de posible colisión. **(b)** Existe posibilidad de una colisión. **(c)** No se tiene suficiente información para determinar si hay peligro de colisión.

Ejemplo 13.4 La masa del Sol

Calcule la masa del Sol al notar que el periodo de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es 3.156×10^7 s y su distancia desde el Sol es 1.496×10^{11} m.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Apoyándose en la representación matemática de la tercera ley de Kepler expresada por la ecuación 13.11, se observa que la masa del objeto central en un sistema gravitacional está relacionada con el tamaño orbital y con el periodo de objetos en órbita en torno al objeto central.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

Resuelva la ecuación 13.11 para la masa del Sol:
$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Sustituya los valores conocidos:
$$M_S = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\ \text{m})^3}{(6.674 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(3.156 \times 10^{7}\ \text{s})^2} = 1.99 \times 10^{30}\ \text{kg}$$

13.4 continuación

En el ejemplo 13.2, un entendimiento de las fuerzas gravitacionales permitió encontrar algo sobre la densidad del núcleo de la Tierra, ¡y ahora se ha empleado dicho entendimiento para determinar la masa del Sol!

Ejemplo 13.5 Un satélite geosíncrono AM

Considere un satélite de masa m que se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una rapidez constante v y a una altura h sobre la superficie de la Tierra, como se muestra en la figura 13.9.

(A) Determine la rapidez del satélite en términos de G, h, R_T (el radio de la Tierra) y M_T (la masa de la Tierra).

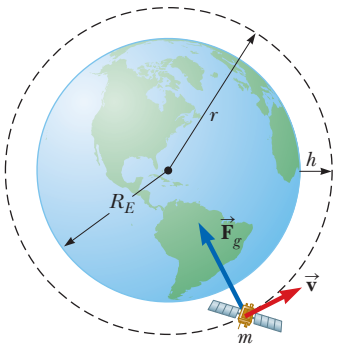


Figura 13.9 (Ejemplo 13.5) Un satélite de masa m se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r con rapidez constante v. La única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$. (Dibujo no hecho a escala.)

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el satélite se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular bajo la influencia de la fuerza gravitacional. Este movimiento es similar al efectuado por la Estación Espacial Internacional, el telescopio Hubble y otros objetos en órbita alrededor de la Tierra.

Categorizar El satélite se mueve en una órbita circular con rapidez constante. Por lo tanto, el satélite se clasifica como una *partícula en movimiento circular uniforme* y también como una *partícula bajo una fuerza neta*.

Analizar La única fuerza ejercida sobre el satélite es la fuerza gravitacional, que actúa hacia el centro de la Tierra y mantiene al satélite en su órbita circular.

Al satélite se le pueden aplicar los modelos de partícula bajo una fuerza neta y de partícula en movimiento circular uniforme:

$$F_g = ma \quad \rightarrow \quad G\frac{M_E m}{r^2} = m\left(\frac{v^2}{r}\right)$$

Resuelva para v y observe que la distancia r del centro de la Tierra al satélite es $r = R_T + h$:

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}} = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E + h}}$$

(B) Si el satélite es *geosíncrono* (es decir, parece permanecer en una posición fija sobre la Tierra), ¿qué tan rápido se mueve a través del espacio?

SOLUCIÓN

Para que parezca mantenerse en una posición fija sobre la Tierra, el periodo del satélite debe ser 24 h = 86 400 s y el satélite debe estar en órbita directamente sobre el Ecuador.

Resuelva la tercera ley de Kepler (ecuación 13.11), con $a = r$ y $M_S \rightarrow M_T$), para r:

$$r = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Sustituya valores numéricos:

$$r = \left[\frac{(6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})(86\,400\ \mathrm{s})^2}{4\pi^2}\right]^{1/3}$$
$$= 4.22 \times 10^7\ \mathrm{m}$$

Utilice la ecuación (1) para encontrar la rapidez del satélite:

$$v = \sqrt{\frac{(6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{4.22 \times 10^7\ \mathrm{m}}}$$
$$= 3.07 \times 10^3\ \mathrm{m/s}$$

Finalizar El valor de r aquí calculado se traduce a una altura del satélite sobre la superficie de la Tierra de casi 36 000 km. Por lo tanto, los satélites geosíncronos tienen la ventaja de permitir que una antena en tierra apunte en una dirección fija,

continúa

13.5 continuación

pero existe la desventaja en que las señales entre la Tierra y el satélite deben viajar una distancia más larga. Debido a su gran altura, es difícil emplear satélites síncronos para observación óptica de la superficie de la Tierra.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el movimiento del satélite en la parte (A) tuviera lugar a una altura h sobre la superficie de otro planeta más masivo que la Tierra, pero del mismo radio? ¿El satélite se movería con mayor o menor rapidez de la que se mueve alrededor de la Tierra?

Respuesta Si el planeta ejerce una mayor fuerza gravitacional sobre el satélite debido a su mayor masa, el satélite debe moverse con una rapidez superior para evitar un movimiento hacia la superficie. Esta conclusión es consistente con las predicciones de la ecuación (1), lo cual muestra que, como la rapidez v es proporcional a la raíz cuadrada de la masa del planeta, la rapidez aumenta conforme se incrementa la masa del planeta.

13.5 Energía potencial gravitacional

En el capítulo 8 se introdujo el concepto de energía potencial gravitacional, que es la energía asociada con la configuración de un sistema de objetos que interactúan mediante la fuerza gravitacional. Se enfatizó que la función de energía potencial gravitacional $U = mgy$ para un sistema partícula-Tierra sólo es válida cuando la partícula de masa m está cerca de la superficie de la Tierra, donde la fuerza gravitacional es independiente de y. Esta expresión para la energía potencial gravitacional también está restringida a situaciones donde un objeto muy masivo (como la Tierra) establece un campo gravitacional de magnitud g y una partícula de mucho menor masa m reside en ese campo. Ya que la fuerza gravitacional entre dos partículas varía como $1/r^2$, se espera que una función más general de energía potencial, una que sea válida sin las restricciones mencionadas, sea diferente de $U = mgy$.

De la ecuación 7.27 recuerde que el cambio en la energía potencial de un sistema, asociado con un desplazamiento dado de un integrante del sistema, se define como el negativo del trabajo interno realizado por la fuerza sobre dicho integrante durante el desplazamiento:

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{r_i}^{r_f} F(r)\, dr \tag{13.12}$$

Se puede emplear este resultado para evaluar la función generalizada de energía potencial gravitacional. Considere una partícula de masa m que se mueve entre dos puntos Ⓐ y Ⓑ sobre la superficie de la Tierra (figura 13.10). La partícula está sujeta a la fuerza gravitacional dada por la ecuación 13.1. Esta fuerza se expresa como:

$$F(r) = -\frac{GM_T m}{r^2}$$

donde el signo negativo indica que la fuerza es de atracción. Al sustituir esta expresión para $F(r)$ en la ecuación 13.12, se puede calcular el cambio en la función de energía potencial gravitacional para el sistema partícula-Tierra conforme cambia la distancia de separación r:

$$U_f - U_i = GM_T m \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = GM_T m \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f}$$

$$U_f - U_i = -GM_T m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \tag{13.13}$$

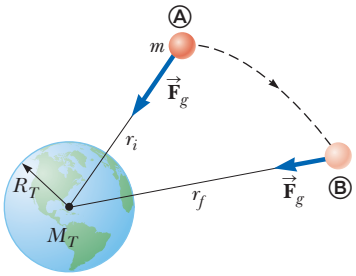


Figura 13.10 A medida que una partícula de masa m se mueve de Ⓐ a Ⓑ sobre la superficie de la Tierra, la energía potencial gravitacional del sistema partícula-Tierra cambia de acuerdo con la ecuación 13.12.

Como siempre, la elección de una configuración de referencia para la energía potencial es por completo arbitraria. Es costumbre seleccionar la configuración de referencia para energía potencial cero como la misma para la cual la fuerza es cero. Al tomar $U_i = 0$ en $r_i = \infty$, se obtiene el importante resultado:

$$U(r) = -\frac{GM_T m}{r} \tag{13.14}$$

Energía potencial gravitacional del sistema Tierra–partícula

Esta expresión se aplica cuando la partícula está separada del centro de la Tierra una distancia r, siempre que $r \geq R_T$. El resultado no es válido para partículas dentro de la Tierra, donde $r < R_T$. Dada la elección de U_i, la función U siempre es negativa (figura 13.11).

Aunque la ecuación 13.14 se dedujo para el sistema partícula-Tierra, una ecuación de forma similar se puede aplicar a dos partículas cualesquiera. Es decir, la energía potencial gravitacional asociada con cualquier par de partículas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r es

$$U = -\frac{Gm_1 m_2}{r} \tag{13.15}$$

Esta expresión muestra que la energía potencial gravitacional para cualquier par de partículas varía como $1/r$, mientras que la fuerza entre ellas cambia como $1/r^2$. Además, la energía potencial es negativa porque la fuerza es de atracción y se eligió la energía potencial como cero cuando la separación de las partículas es infinita. Debido a que la fuerza entre las partículas es atractiva, un agente externo debe hacer trabajo positivo para aumentar la separación entre ellas. El trabajo efectuado por el agente externo produce un aumento en la energía potencial conforme se separan las dos partículas. Es decir, U se vuelve menos negativa a medida que r aumenta.

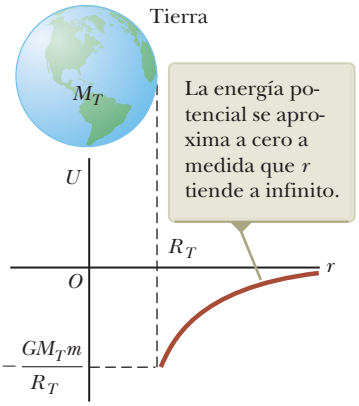


Figura 13.11 Gráfica de la energía potencial gravitacional U contra r para el sistema de un objeto sobre la superficie de la Tierra.

Cuando dos partículas están en reposo y separadas por una distancia r, un agente externo tiene que suministrar una energía al menos de $+Gm_1 m_2/r$ para separar las partículas a una distancia infinita. Por lo tanto, es conveniente pensar en el valor absoluto de la energía potencial como la *energía de enlace* del sistema. Si el agente externo suministra una energía mayor que la energía de enlace, la energía en exceso del sistema está en la forma de energía cinética de las partículas cuando éstas están en una separación infinita.

Este concepto se puede extender a tres o más partículas. En este caso la energía potencial total del sistema es la suma sobre todos los pares de partículas. Cada par aporta un término de la forma dada por la ecuación 13.15. Por ejemplo, si el sistema contiene tres partículas, como en la figura 13.12,

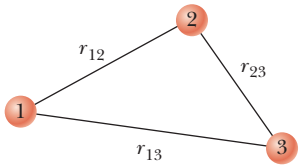


Figura 13.12 Tres partículas en interacción.

$$U_{\text{total}} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right)$$

El valor absoluto de U_{total} representa el trabajo necesario para separar las partículas una distancia infinita.

Ejemplo 13.6 El cambio en energía potencial

Una partícula de masa m se desplaza a través de una pequeña distancia vertical Δy cerca de la superficie de la Tierra. Demuestre que en esta situación la expresión general para el cambio en energía potencial gravitacional dada por la ecuación 13.13 se reduce a la familiar relación $\Delta U = mg\,\Delta y$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Compare las dos diferentes situaciones para las que se desarrollaron expresiones para la energía potencial gravitacional: (1) un planeta y un objeto que están separados, la expresión de energía para ellos es la ecuación 13.14, y (2) un objeto pequeño en la superficie de un planeta, la expresión de energía para ellos es la ecuación 7.19. Se quiere demostrar que estas dos expresiones son equivalentes.

continúa

13.6 continuación

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Combine las fracciones en la ecuación 13.13:

$$(1)\quad \Delta U = -GM_T m\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = GM_T m\left(\frac{r_f - r_i}{r_i r_f}\right)$$

Evalúe $r_f - r_i$ y $r_i r_f$ si las posiciones inicial y final de la partícula están cerca de la superficie de la Tierra:

$$r_f - r_i = \Delta y \quad r_i r_f \approx R_T^2$$

Sustituya estas expresiones en la ecuación (1):

$$\Delta U \approx \frac{GM_T m}{R_T^2}\Delta y = mg\,\Delta y$$

donde $g = GM_T/R_T^2$ (ecuación 13.5).

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que usted realiza estudios en la atmósfera superior y su supervisor le pide encontrar la altura en la atmósfera terrestre a la cual la "ecuación de superficie" $\Delta U = mg\,\Delta y$ da un error de 1.0% en el cambio en la energía potencial. ¿Cuál es esta altura?

Respuesta Como la ecuación de superficie supone un valor constante para g, dará un valor ΔU mayor que el valor dado por la ecuación general (ecuación 13.13).

Obtenga una razón que dé un error de 1.0%:

$$\frac{\Delta U_{\text{superficie}}}{\Delta U_{\text{general}}} = 1.010$$

Sustituya las expresiones para cada uno de estos cambios ΔU:

$$\frac{mg\,\Delta y}{GM_T m(\Delta y/r_i r_f)} = \frac{g r_i r_f}{GM_T} = 1.010$$

Sustituya para r_i, r_f y g de la ecuación 13.5:

$$\frac{(GM_T/R_T^2)R_T(R_T + \Delta y)}{GM_T} = \frac{R_T + \Delta y}{R_T} = 1 + \frac{\Delta y}{R_T} = 1.010$$

Resuelva para Δy:

$$\Delta y = 0.010R_T = 0.010(6.37 \times 10^6\ \text{m}) = 6.37 \times 10^4\ \text{m} = 63.7\ \text{km}$$

13.6 Consideraciones energéticas en el movimiento planetario y de satélites

Con la expresión general para la energía potencial gravitacional desarrollada en la sección 13.5, se pueden aplicar los análisis de modelos de energía a sistemas gravitacionales. Considere un objeto de masa m que se mueve con una rapidez v en la vecindad de un objeto masivo de masa M, donde $M >> m$. El sistema podría ser un planeta moviéndose alrededor del Sol, un satélite en órbita en torno a la Tierra o un cometa que hace un vuelo una sola vez alrededor del Sol. Si supone que el objeto de masa M está en reposo en un marco de referencia inercial, la energía mecánica total E del sistema de dos objetos, cuando éstos están separados una distancia r, es la suma de la energía cinética del objeto de masa m y la energía potencial del sistema, dada por la ecuación 13.15:

$$E = K + U$$

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \qquad \textbf{(13.16)}$$

Si está aislado el sistema de objetos de masas m y M, y no hay fuerzas no conservativas actuando dentro del sistema, entonces la energía mecánica del sistema dada por la ecuación 13.16 es la energía total del sistema y esta energía se conserva:

$$\Delta E_{\text{sistema}} = 0 \;\rightarrow\; \Delta K + \Delta U_g = 0 \;\rightarrow\; E_i = E_f$$

Por lo tanto, conforme el objeto de masa m se mueve de Ⓐ a Ⓑ en la figura 13.10, la energía total permanece constante y la ecuación 13.16 da

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{r_i} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{r_f} \qquad \textbf{(13.17)}$$

Al combinar este enunciado de conservación de energía con la anterior discusión de conservación de cantidad de movimiento angular, se observa que la energía total y la cantidad de movimiento angular total de un sistema de dos objetos ligados gravitacionalmente son constantes de movimiento.

La ecuación 13.16 muestra que E puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo del valor de v. Sin embargo, para un sistema ligado como el sistema Tierra-Sol, E necesariamente es *menor que cero*, porque se eligió la convención de que $U \to 0$ conforme $r \to \infty$.

Fácilmente se puede establecer que $E < 0$ para el sistema que consiste de un objeto de masa m que se mueve en una órbita circular alrededor de un objeto de masa $M >> m$ (figura 13.13). Si el objeto de masa m se modela como una partícula bajo una fuerza neta y también como una partícula en movimiento circular uniforme, se tiene que

$$F_g = ma \quad \rightarrow \quad \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Al multiplicar ambos lados por r y dividir entre 2 se obtiene

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} \tag{13.18}$$

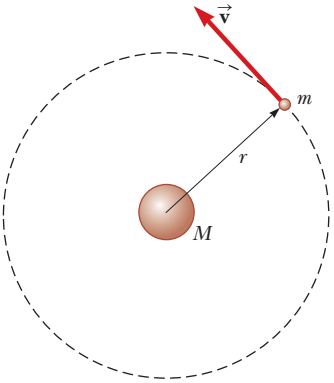


Figura 13.13 Un objeto de masa m que se mueve en una órbita circular en torno a un objeto mucho mayor de masa M.

Al sustituir esta ecuación en la ecuación 13.16

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = -\frac{GMm}{2r} \quad \text{(órbitas circulares)} \tag{13.19}$$

◀ **Energía total para órbitas circulares de un objeto de masa m en torno a un objeto de masa $M \gg m$**

Este resultado muestra que la energía mecánica total es negativa en el caso de órbitas circulares. Observe que la energía cinética es positiva e igual a la mitad del valor absoluto de la energía potencial. El valor absoluto de E también es igual a la energía de enlace del sistema, porque esta cantidad de energía debe proporcionarse al sistema para separar los dos objetos infinitamente.

La energía mecánica total también es negativa en el caso de órbitas elípticas. La expresión para E para órbitas elípticas es la misma que la ecuación 13.19 con r sustituida por la longitud del semieje mayor a:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad \text{(órbitas elípticas)} \tag{13.20}$$

◀ **Energía total para órbitas elípticas de un objeto de masa m en torno a un objeto de masa $M \gg m$**

Examen rápido 13.4 Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. ¿Cuál punto en su órbita (perihelio o afelio) representa el valor más alto de **(a)** la rapidez del cometa, **(b)** la energía potencial del sistema cometa-Sol, **(c)** la energía cinética del cometa y **(d)** la energía total del sistema cometa-Sol?

Ejemplo 13.7 Cambio de la órbita de un satélite

Un vehículo de transporte espacial libera un satélite de comunicaciones de 470 kg mientras está en órbita a 280 km sobre la superficie de la Tierra. Un motor cohete en el satélite lo pone en una órbita geosíncrona. ¿Cuánta energía debe proporcionar el motor?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Note que la altura de 280 km es mucho más baja que la de un satélite geosíncrono, 36 000 km, como se mencionó en el ejemplo 13.5. Por lo tanto, se debe gastar energía para elevar el satélite a esta posición mucho más alta.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Encuentre el radio inicial de la órbita del satélite cuando aún está en la bahía de carga del transbordador:

$$r_i = R_E + 280 \text{ km} = 6.65 \times 10^6 \text{ m}$$

Aplique la ecuación 13.19 para encontrar la diferencia en energías para el sistema satélite-Tierra con el satélite en los radios inicial y final:

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{GM_T m}{2r_f} - \left(-\frac{GM_T m}{2r_i}\right) = -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

continúa

13.7 continuación

Sustituya valores numéricos empleando $r_f = 4.22 \times 10^7$ m del ejemplo 13.5:

$$\Delta E = -\frac{(6.674 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24}\ \text{kg})(470\ \text{kg})}{2} \times \left(\frac{1}{4.22 \times 10^7\ \text{m}} - \frac{1}{6.65 \times 10^6\ \text{m}}\right) = 1.19 \times 10^{10}\ \text{J}$$

que es la energía equivalente a 89 galones de gasolina. Los ingenieros de la NASA deben tomar en cuenta el cambio de masa de la nave mientras expulsa combustible quemado, algo que no se hizo en este caso. ¿Esperaría que al incluir dicho cálculo el efecto de esta masa cambiante produzca una cantidad de energía mayor o menor que la requerida por el motor?

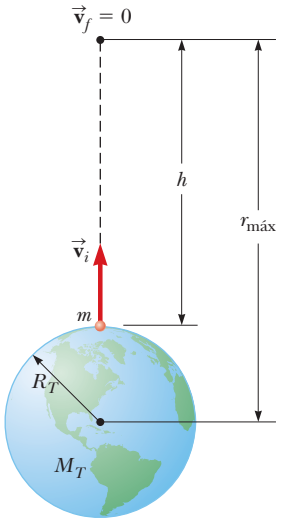


Figura 13.14 Un objeto de masa m es proyectado hacia arriba desde la superficie de la Tierra, con una rapidez inicial v_i alcanza una altura máxima h.

Rapidez de escape

Suponga que un objeto de masa m se proyecta verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial v_i, como se muestra en la figura 13.14. Se pueden emplear consideraciones de energía para encontrar el valor de la rapidez inicial necesaria para permitir que el objeto alcance una cierta distancia del centro de la Tierra. La ecuación 13.16 da la energía total del sistema para cualquier configuración. Como el objeto es proyectado hacia arriba desde la superficie de la Tierra, $v = v_i$ y $r = r_i = R_T$. Cuando el objeto alcanza su altura máxima, $v = v_f = 0$ y $r = r_f = r_{\text{máx}}$. Ya que el sistema objeto-Tierra es aislado, se sustituyen estos valores en la expresión del modelo de sistema aislado dada por la ecuación 13.17:

$$\tfrac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = -\frac{GM_T m}{r_{\text{máx}}}$$

Al resolver para v_i^2 se obtiene

$$v_i^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{\text{máx}}}\right) \qquad (13.21)$$

Para una altura máxima dada $h = r_{\text{máx}} - R_T$, se puede emplear esta ecuación para encontrar la rapidez inicial requerida.

Ahora está en posición de calcular la **rapidez de escape**, que es la rapidez mínima que debe tener el objeto en la superficie de la Tierra para aproximarse a una distancia de separación infinita desde la Tierra. Al viajar con esta rapidez mínima, el objeto continúa moviéndose cada vez más lejos de la Tierra conforme su rapidez se aproxima asintóticamente a cero. Al hacer $r_{\text{máx}} \to \infty$ en la ecuación 13.21 e identificar v_i como v_{esc}, resulta

Rapidez de escape desde la Tierra

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \qquad (13.22)$$

Esta expresión para v_{esc} es independiente de la masa del objeto. En otras palabras, una nave espacial tiene la misma rapidez de escape que una molécula. Además, el resultado es independiente de la dirección de la velocidad e ignora la resistencia del aire.

Si al objeto se le da una rapidez inicial igual a v_{esc}, la energía total del sistema es igual a cero. Advierta que, cuando $r \to \infty$, la energía cinética del objeto y la energía potencial del sistema son cero. Sin embargo, si v_i es mayor que v_{esc}, la energía total del sistema es mayor que cero y el objeto tiene alguna energía cinética residual conforme $r \to \infty$.

Prevención de riesgos ocultos 13.3

En realidad no puede escapar Aunque la ecuación 13.22 proporciona la "rapidez de escape" de la Tierra, escapar por *completo* de la influencia gravitacional de la Tierra es imposible porque la fuerza gravitacional es de alcance infinito.

Ejemplo 13.8 Rapidez de escape de un cohete

Calcule la rapidez de escape de la Tierra para una nave espacial de 5 000 kg y determine la energía cinética que debe tener en la superficie de la Tierra para moverse infinitamente lejos de la Tierra.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine proyectar la nave espacial desde la superficie de la Tierra de modo que se mueva cada vez más lejos, viajando más y más lentamente, con su rapidez tendiendo a cero. Sin embargo, su rapidez nunca llegará a cero, así que el objeto nunca dará vuelta y regresará.

13.8 continuación

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 13.22 para encontrar la rapidez de escape:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2(6.674 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24}\ \text{kg})}{6.37 \times 10^{6}\ \text{m}}}$$
$$= 1.12 \times 10^{4}\ \text{m/s}$$

Evalúe la energía cinética de la nave espacial a partir de la ecuación 7.16:

$$K = \tfrac{1}{2}mv_{esc}^2 = \tfrac{1}{2}(5.00 \times 10^{3}\ \text{kg})(1.12 \times 10^{4}\ \text{m/s})^2$$
$$= 3.13 \times 10^{11}\ \text{J}$$

La rapidez de escape calculada corresponde más o menos a 25 000 mi/h. La energía cinética de la nave espacial es equivalente a la energía liberada por la combustión de aproximadamente 2 300 galones de gasolina.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si quiere lanzar una nave espacial de 1 000 kg a la rapidez de escape? ¿Cuánta energía requeriría eso?

Respuesta En la ecuación 13.22 no aparece la masa del objeto que se mueve con la rapidez de escape. Por lo tanto, la rapidez de escape para la nave de 1 000 kg es la misma que la de la nave de 5 000 kg. El único cambio en la energía cinética se debe a la masa, así que la nave de 1 000 kg requiere un quinto de la energía de la nave de 5 000 kg:

$$K = \tfrac{1}{5}(3.13 \times 10^{11}\ \text{J}) = 6.25 \times 10^{10}\ \text{J}$$

Las ecuaciones 13.21 y 13.22 se pueden aplicar a objetos proyectados desde cualquier planeta. Es decir, en general, la rapidez de escape de la superficie de cualquier planeta de masa M y radio R es

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (13.23)$$

◀ **Velocidad de escape de la superficie de un planeta de masa *M* y radio *R***

En la tabla 13.3 se proporcionan magnitudes de rapidez de escape para los planetas, la Luna y el Sol. Los valores varían de 2.3 km/s para la Luna a más o menos 618 km/s para el Sol. Estos resultados, junto con algunas ideas de la teoría cinética de los gases (vea el capítulo 21), explican por qué algunos planetas tienen atmósferas y otros no. Como se verá más adelante, a una temperatura dada la energía cinética promedio de una molécula de gas sólo depende de la masa de la molécula. Las moléculas más ligeras, como el hidrógeno y el helio, tienen una rapidez promedio mayor que las moléculas más pesadas a la misma temperatura. Cuando la rapidez promedio de las moléculas más ligeras no es mucho menor que la rapidez de escape de un planeta, una fracción significativa de ellas tienen oportunidad de escapar.

Este mecanismo también explica por qué la Tierra no retiene moléculas de hidrógeno y átomos de helio en su atmósfera pero sí retiene moléculas más pesadas, como oxígeno y nitrógeno. Por otra parte, la rapidez de escape de Júpiter es tan grande que le permite al planeta retener hidrógeno, el principal componente de su atmósfera.

Tabla 13.3 **Magnitudes de velocidad de escape de las superficies de los planetas, Luna y Sol**

Planeta	v_{esc} (km/s)
Mercurio	4.3
Venus	10.3
Tierra	11.2
Marte	5.0
Júpiter	60
Saturno	36
Urano	22
Neptuno	24
Luna	2.3
Sol	618

Agujeros negros

En el ejemplo 11.7 se describió brevemente un raro evento llamado supernova, la explosión catastrófica de una estrella muy masiva. El material que permanece en el núcleo central de tal objeto continúa colapsándose y el destino final del núcleo depende de su masa. Si el núcleo tiene una masa menor a 1.4 veces la masa de nuestro Sol, gradualmente se enfría y termina su vida como una estrella enana blanca.

Sin embargo, si la masa del núcleo es mayor a este valor, puede colapsar aún más debido a fuerzas gravitacionales. Lo que resta es una estrella de neutrones, que se explicó en el ejemplo 11.7, en donde la masa de una estrella se comprime a un radio de casi 10 km. (En la Tierra, ¡una cucharadita de este material pesaría alrededor de 5 mil millones de toneladas!)

Una muerte estelar todavía más inusual puede presentarse cuando el núcleo tiene una masa mayor que aproximadamente tres masas solares. El colapso puede continuar hasta que la estrella se convierta en un objeto muy pequeño en el espacio, al

que comúnmente se le conoce como **agujero negro**. En efecto, los agujeros negros son restos de estrellas que colapsaron bajo su propia fuerza gravitacional. Si un objeto como una nave espacial se acerca a un agujero negro, el objeto experimenta una fuerza gravitacional extremadamente intensa y queda atrapado para siempre.

La rapidez de escape para un agujero negro es muy alta debido a la concentración de la masa de la estrella en una esfera de radio muy pequeño (vea la ecuación 13.23). Si la rapidez de escape supera la rapidez de la luz c, la radiación del objeto (tal como la luz visible) no puede escapar y el objeto parece ser negro (de ahí el origen de la terminología "agujero negro"). El radio crítico R_S en el cual la rapidez de escape es c se llama **radio de Schwarzschild** (figura 13.15). La superficie imaginaria de una esfera de este radio que rodea al agujero negro se llama **horizonte de eventos**, que es el límite de qué tan cerca se puede aproximar al agujero negro y le es posible escapar.

Existe evidencia de que en los centros de las galaxias existen agujeros negros supermasivos, con masas mucho mayores que la del Sol. (Hay fuerte evidencia de un agujero negro supermasivo con masa de 2-3 millones de masas solares en el centro de nuestra galaxia.)

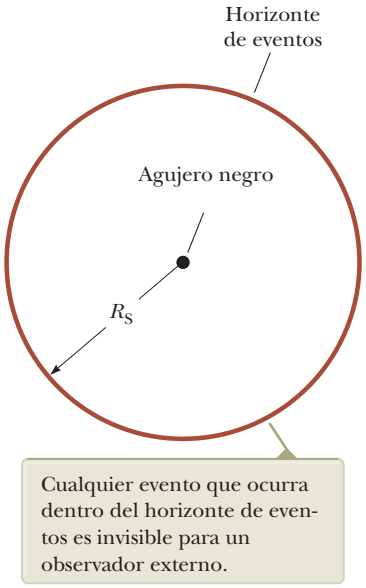


Figura 13.15 Un agujero negro. La distancia R_S es igual al radio de Schwarzschild.

Materia oscura

La ecuación (1) en el ejemplo 13.5 muestra que la rapidez de un objeto en órbita alrededor de la Tierra disminuye conforme el objeto se aleja de la Tierra:

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}} \qquad \textbf{(13.24)}$$

Al emplear los datos en la tabla 13.2 para encontrar las magnitudes de velocidad de los planetas en sus órbitas en torno al Sol, se obtiene el mismo comportamiento para los planetas. La figura 13.16 muestra este comportamiento para los ocho planetas de nuestro sistema solar. La predicción teórica de la rapidez del planeta, como una función de la distancia al Sol, se indica mediante la curva rojo marrón, en donde se utilizó la ecuación 13.24 con la masa de la Tierra sustituida por la masa del Sol. Los datos para los planetas individuales están a la derecha sobre esta curva. Este comportamiento se debe a que la mayor parte de la masa del Sistema Solar está concentrada en un pequeño espacio, el Sol.

Si este concepto se extiende aún más, se podría esperar el mismo comportamiento en una galaxia. Gran parte de la masa galáctica visible, incluyendo la de un agujero negro supermasivo, está cerca del núcleo central de una galaxia. La fotografía al inicio de este capítulo muestra el núcleo central de la galaxia Torbellino como un área muy brillante rodeada por los "brazos" de la galaxia, los cuales tienen material en órbita alrededor del núcleo central. De acuerdo con esta distribución de materia en la galaxia, la rapidez de un objeto en la parte exterior de la galaxia sería menor que la de los objetos más cercanos al centro, justo igual que para los planetas del Sistema Solar.

Sin embargo, eso *no* es lo que se observa. La figura 13.17 muestra los resultados de mediciones de las magnitudes de rapidez de objetos en la galaxia Andrómeda como una función de la distancia al centro de la galaxia.[4] La curva rojo marrón muestra las magnitudes de rapidez esperadas para esos objetos si ellos se mueven en órbitas circulares en torno a la masa agrupada en el núcleo central. Los datos para los objetos individuales en la galaxia, indicados por los puntos negros, están muy arriba de la curva teórica. Estos datos, así como una extensa cantidad de datos acumulados durante 50 años en la pasada centuria, muestran que para objetos fuera del núcleo central de la galaxia la curva de rapidez contra distancia al centro de la galaxia es aproximadamente plana en lugar de que disminuya a grandes distancias. Por lo tanto, estos objetos (incluyendo nuestro propio sistema solar en la Vía Láctea) están rotando más rápido que lo esperado por la gravedad debida a la galaxia visible! Este resultado sorprendente significa que ahí debe existir masa adicional en una distri-

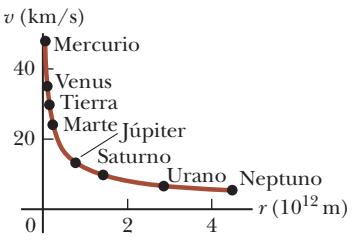


Figura 13.16 Rapidez orbital v como una función de la distancia r desde el Sol para los ocho planetas del Sistema Solar. La curva teórica está en rojo marrón y los puntos de datos para los planetas aparecen en negro.

[4] V. C. Rubin y W. K. Ford, "Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions", *Astrophysical Journal* **159**: 379-405 (1970).

bución más extendida, provocando que los objetos orbiten más rápido, y ha originado que los científicos propongan la existencia de **materia oscura**. Se propone que esta materia está presente en un gran halo alrededor de cada galaxia (con un radio hasta 10 veces más grande que el radio visible de la galaxia). Como no es luminosa (es decir, no emite radiación electromagnética), entonces debe ser muy fría o eléctricamente neutra. Por lo tanto, no es posible "ver" la materia oscura, excepto a través de sus efectos gravitacionales.

La supuesta existencia de la materia oscura también es implicada por anteriores observaciones realizadas en grandes estructuras ligadas gravitacionalmente, conocidas como cúmulos de galaxias.[5] Esas observaciones muestran que las magnitudes de rapidez orbitales de galaxias en un cúmulo son, en promedio, tan grandes como para ser explicadas sólo mediante la materia luminosa en el cúmulo. Las magnitudes de rapidez de las galaxias individuales son muy altas, lo cual sugiere que existe ¡50 veces más materia oscura en los cúmulos de galaxias que en las galaxias mismas!

¿Por qué la materia oscura no afecta las magnitudes de rapidez orbital de los planetas como lo hace con las galaxias? Tal parece que un sistema solar es una estructura muy pequeña como para contener suficiente materia oscura para afectar el comportamiento de magnitudes de rapidez orbitales. Sin embargo, una galaxia o un cúmulo de galaxias contienen enormes cantidades de materia oscura, lo cual origina el sorprendente comportamiento.

¿Qué es la materia oscura? Por ahora, nadie lo sabe. Una teoría afirma que la materia oscura está fundamentada en una partícula llamada partícula masiva interactuando débilmente, o WIMP por sus siglas en inglés. Si esta teoría es correcta, los cálculos muestran que en cualquier momento aproximadamente 200 WIMP pasan a través de un cuerpo humano. El nuevo Large Hadron Collider en Europa (vea el capítulo 46) es el primer acelerador de partículas con suficiente energía para posiblemente generar y detectar la existencia de la WIMP, lo cual ha producido mucho interés en la materia oscura. Será emocionante estar al pendiente de esta investigación en el futuro cercano.

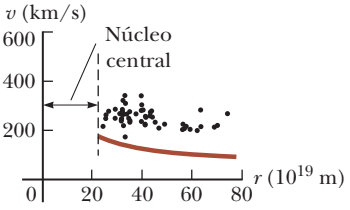


Figura 13.17 La rapidez orbital v de un objeto galáctico como una función de la distancia r al centro del núcleo central de la galaxia Andrómeda. La curva teórica está en rojo marrón, y los puntos datos para los objetos galácticos están en negro. Ningún dato se proporciona a la izquierda porque es más complicado el comportamiento dentro del núcleo central de la galaxia.

Resumen

Definición

El **campo gravitacional** en un punto en el espacio se define como la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$ que experimenta cualquier partícula de prueba ubicada en dicho punto, dividida entre la masa m_0 de la partícula de prueba:

$$\vec{\mathbf{g}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{F}}_g}{m_0} \tag{13.7}$$

Conceptos y principios

La **ley de Newton de la gravitación universal** afirma que la fuerza de atracción gravitacional entre dos partículas cualesquiera de masas m_1 y m_2 separadas por una distancia r tiene la magnitud

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{13.1}$$

donde $G = 6.674 \times 10^{-11}\ \text{N} \times \text{m}^2/\text{kg}^2$ es la **constante gravitacional universal**. Esta ecuación permite calcular la fuerza de atracción entre masas bajo muchas circunstancias.

Un objeto a una distancia h sobre la superficie de la Tierra experimenta una fuerza gravitacional de magnitud mg, donde g es la aceleración en caída libre en dicha elevación:

$$g = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \tag{13.6}$$

En esta expresión, M_T es la masa de la Tierra y R_T es su radio. Por lo tanto, el peso de un objeto disminuye a medida que el objeto se aleja de la superficie de la Tierra.

[5] F. Zwicky, "On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae," *Astrophysical Journal* **86**: 217–246 (1937).

Las **leyes de Kepler de movimiento planetario** afirman que:

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos.
2. El radio vector que se dibuja desde el Sol hacia un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.
3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

La tercera ley de Kepler se puede expresar como

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right)a^3 \qquad (13.11)$$

donde M_S es la masa del Sol y a es el semieje mayor. Para una órbita circular, a se puede sustituir en la ecuación 13.11 por el radio r. La mayoría de los planetas tiene órbitas casi circulares alrededor del Sol.

La **energía potencial gravitacional** asociada con un sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r es

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r} \qquad (13.15)$$

donde U se considera cero conforme $r \to \infty$.

Si un sistema aislado consiste en un objeto de masa m que se mueve con una rapidez v en la vecindad de un objeto masivo de masa M, la energía total E del sistema es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \qquad (13.16)$$

La energía total del sistema es una constante del movimiento. Si el objeto se mueve en una órbita elíptica con semieje mayor a alrededor del objeto masivo y $M >> m$, la energía total del sistema es

$$E = -\frac{GMm}{2a} \qquad (13.20)$$

Para una órbita circular, esta misma ecuación se aplica con $a = r$.

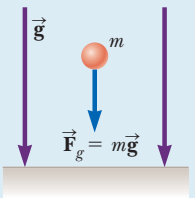
La **rapidez de escape** para un objeto que se proyecta desde la superficie de un planeta de masa M y radio R es

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (13.23)$$

Análisis de modelos para resolver problemas

Partícula en un campo (gravitacional) Una partícula fuente con cierta masa establece un **campo gravitacional** $\vec{\mathbf{g}}$ a través del espacio. Cuando una partícula de masa m se coloca en ese campo experimenta una fuerza gravitacional dada por

$$\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}} \qquad (5.5)$$



Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Un sistema consiste de cinco partículas. ¿Cuántos términos aparecen en la expresión para la energía potencial gravitacional total del sistema? (a) 4, (b) 5, (c) 10, (d) 20, (e) 25.
2. Clasifique, de mayor a menor, las siguientes cantidades de energía. Indique si algunas de ellas son iguales. (a) El valor absoluto de la energía potencial promedio del sistema Sol-Tierra. (b) La energía cinética promedio de la Tierra en su movimiento orbital respecto al Sol. (c) El valor absoluto de la energía total del sistema Sol-Tierra.
3. Un satélite se mueve, con rapidez constante, en una órbita circular alrededor de la Tierra. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero? (a) Ninguna fuerza actúa sobre el satélite. (b) No existe aceleración porque el satélite se mueve con rapidez constante. (c) El satélite tiene una aceleración que en dirección se aleja de la Tierra. (d) El satélite tiene una aceleración cuya dirección es hacia la Tierra. (e) La fuerza gravitacional realiza trabajo sobre el satélite.
4. Suponga que la aceleración gravitacional en la superficie de cierta luna A de Júpiter es 2 m/s^2. La luna B tiene el doble de masa y el doble de radio que la luna A. ¿Cuál es la aceleración gravitacional en su superficie? Desprecie la aceleración gravitacional debida a Júpiter. (a) 8 m/s^2, (b) 4 m/s^2, (c) 2 m/s^2, (d) 1 m/s^2, (e) 0.5 m/s^2.

5. Imagine que el nitrógeno y otros gases atmosféricos fuesen más solubles en agua de modo que la atmósfera de la Tierra fuese completamente absorbida por los océanos. Entonces la presión atmosférica sería cero y el espacio exterior comenzaría en la superficie del planeta. ¿En tal caso tendría la Tierra un campo gravitacional? (a) Sí, y en la superficie sería mayor en magnitud que 9.8 N/kg. (b) Sí, y en esencia sería igual que el valor actual. (c) Sí, y sería un poco menor que 9.8 N/kg. (d) Sí, y sería mucho menor que 9.8 N/kg. (e) No.

6. Un objeto de masa m está ubicado sobre la superficie de un planeta esférico de masa M y radio R. De cuáles de las siguientes opciones la rapidez de escape del planeta no depende: (a) M, (b) m, (c) la densidad del planeta, (d) R, (e) la aceleración debida a la gravedad sobre el planeta.

7. Un satélite originalmente se mueve en una órbita circular de radio R alrededor de la Tierra. Suponga que se desplaza a una órbita circular de radio $4R$. **(i)** ¿Qué ocurre con la fuerza ejercida sobre el satélite? (a) Es ocho veces mayor, (b) es cuatro veces mayor, (c) es $\frac{1}{2}$ del valor original, (d) es $\frac{1}{8}$, (e) es $\frac{1}{16}$ de su valor inicial. **(ii)** ¿Qué sucede con la rapidez del satélite? Elija de las mismas posibilidades de la (a) a la (e). **(iii)** ¿Qué ocurre con su periodo? Elija de las mismas opciones de la (a) a la (e).

8. El equinoccio de primavera y el equinoccio de otoño se asocian con dos puntos separados 180° en la órbita de la Tierra. Es decir, la Tierra está precisamente en lados opuestos del Sol cuando pasa a través de estos dos puntos. Desde el equinoccio de primavera transcurren 185.4 días antes del equinoccio otoñal. Sólo transcurren 179.8 días desde el equinoccio de otoño hasta el siguiente equinoccio de primavera. ¿Por qué el intervalo del equinoccio de marzo (primavera) al de septiembre (otoño), que contiene al solsticio de verano, es más largo que el intervalo del equinoccio de septiembre al de marzo, en lugar de ser igual a dicho intervalo? Elija una de las siguientes razones. (a) Realmente son iguales, pero la Tierra gira más rápido durante el intervalo de "verano", así que los días son más cortos. (b) Durante el intervalo de "verano" la Tierra se mueve más lento porque está más lejos del Sol. (c) Durante el intervalo marzo a septiembre la Tierra se mueve más lento porque está más cerca del Sol. (d) La Tierra tiene menos energía cinética cuando está más caliente. (e) La Tierra tiene menos cantidad de movimiento angular cuando está más caliente.

9. Clasifique las magnitudes de las siguientes fuerzas gravitacionales de mayor a menor. Si dos fuerzas son iguales, muestre dicha igualdad en su lista. (a) La fuerza que ejerce un objeto de 2 kg sobre un objeto de 3 kg separados 1 m. (b) La fuerza que ejerce un objeto de 2 kg sobre un objeto de 9 kg separados 1 m. (c) La fuerza que ejerce un objeto de 2 kg sobre un objeto de 9 kg separados 2 m. (d) La fuerza que ejerce un objeto de 9 kg sobre un objeto de 2 kg separados 2 m. (e) La fuerza que ejerce un objeto de 4 kg sobre otro objeto de 4 kg separados 2 m.

10. La fuerza gravitacional que se ejerce sobre una astronauta en la superficie de la Tierra es de 650 N dirigida hacia abajo. Cuando la astronauta está en la estación espacial en órbita alrededor de la Tierra, ¿cuál es la fuerza gravitacional sobre ella? (a) Mayor, (b) exactamente la misma, (c) menor, (d) casi pero no exactamente cero o (e) exactamente cero.

11. El cometa Halley tiene un periodo de aproximadamente 76 años y se mueve en una órbita elíptica en la cual su distancia al Sol, en su posición de mayor acercamiento, es una pequeña fracción de su máxima distancia. Estime la distancia máxima del cometa al Sol en unidades astronómicas (UA, la distancia de la Tierra al Sol). (a) 6 UA, (b) 12 UA, (c) 20 UA,(d) 28 UA y (e) 35 UA.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Cada nave espacial *Voyager* se aceleró a la rapidez de escape del Sol mediante la fuerza gravitacional ejercida por Júpiter sobre la nave. (a) ¿La fuerza gravitacional es conservativa o no conservativa? (b) ¿La interacción de la nave espacial con Júpiter satisface la definición de una colisión elástica? (c) ¿Cómo se podría mover más rápido la nave espacial después de la colisión?

2. En su experimento de 1798, Cavendish dijo haber "pesado la Tierra". Explique esta afirmación.

3. ¿Por qué no se pone un satélite climatológico geosíncrono en órbita alrededor del paralelo 45? ¿Tal satélite sería más útil en Estados Unidos que uno en órbita alrededor del Ecuador?

4. (a) Explique por qué la fuerza que ejerce una esfera uniforme sobre una partícula se debe dirigir hacia el centro de la esfera. (b) ¿Este enunciado sería verdadero si la distribución de masa de la esfera no fuera esféricamente simétrica? Explique.

5. (a) ¿En qué posición en su órbita elíptica la rapidez de un planeta es un máximo? (b) ¿En qué posición la rapidez es un mínimo?

6. Se le proporciona la masa y el radio del planeta X. ¿Cómo calcularía la aceleración en caída libre en la superficie de este planeta?

7. (a) Si se pudiera cavar un hoyo hacia el centro de la Tierra, ¿la fuerza sobre un objeto de masa m todavía obedecería ahí la ecuación 13.1? (b) ¿Cómo cree que sería la fuerza sobre m en el centro de la Tierra?

8. Explique por qué una nave espacial requiere más combustible para viajar de la Tierra a la Luna que de regreso. Estime la diferencia.

9. Un satélite en órbita baja alrededor de la Tierra realmente no viaja a través de un vacío. Más bien se mueve a través de aire poco denso. ¿La fricción resultante del aire hace que el satélite frene?

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 13.1 Ley de Newton de gravitación universal

El problema 12 del capítulo 1 también se puede asignar con esta sección.

1. En los laboratorios de introducción a la física, una típica balanza de Cavendish para medir la constante gravitacional G emplea esferas de plomo con masas de 1.50 kg y 15.0 g cuyos centros están separados aproximadamente 4.50 cm. Calcule la fuerza gravitacional entre dichas esferas y trate a cada una como una partícula ubicada en el centro de la esfera.

2. Determine el orden de magnitud de la fuerza gravitacional que usted ejerce sobre otra persona a 2 m de distancia. En su solución establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.

3. Un objeto de 200 kg y un objeto de 500 kg están separados 4.00 m. (a) Encuentre la fuerza gravitacional neta ejercida por estos objetos sobre un objeto de 50.0 kg colocado a medio camino entre ellos. (b) ¿En qué posición (distinta del infinito) se puede ubicar el objeto de 50.0 kg de modo que experimente una fuerza neta nula de los otros dos objetos?

4. Durante un eclipse solar, la Luna, la Tierra y el Sol se encuentran en la misma línea, con la Luna entre la Tierra y el Sol. (a) ¿Qué fuerza ejerce el Sol sobre la Luna? (b) ¿Qué fuerza ejerce la Tierra sobre la Luna? (c) ¿Qué fuerza ejerce el Sol sobre la Tierra? (d) Compare las respuestas a los incisos (a) y (b). ¿Por qué el Sol no captura la Luna y la aleja de la Tierra?

5. Dos trasatlánticos, cada uno con 40 000 toneladas métricas de masa, se mueven en rutas paralelas separadas 100 m. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de uno de los trasatlánticos hacia el otro debido a su atracción gravitacional mutua? Modele los barcos como partículas.

6. Tres esferas uniformes de masas $m_1 = 2.00$ kg, $m_2 = 4.00$ kg y $m_3 = 6.00$ kg se colocan en las esquinas de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura P13.6. Calcule la fuerza gravitacional resultante sobre el objeto de masa m_2 si supone que las esferas están aisladas del resto del Universo.

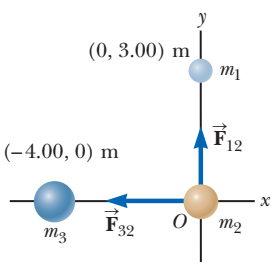


Figura P13.6

7. Dos idénticas partículas aisladas, cada una de masa 2.00 kg, están separadas una distancia de 30.0 cm. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por una partícula sobre la otra?

8. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Los centros de dos esferas homogéneas están separados 1.00 m. Las esferas están elaboradas del mismo elemento de la tabla periódica. La fuerza gravitacional entre las esferas es 1.00 N.

9. Dos objetos se atraen mutuamente con una fuerza gravitacional de 1.00×10^{-8} N de magnitud cuando están separados 20.0 cm. Si la masa total de los dos objetos es 5.00 kg, ¿cuál es la masa de cada uno?

10. **Problema de repaso.** Un estudiante propone estudiar la fuerza gravitacional al suspender dos objetos esféricos de 100.0 kg en los extremos inferiores de cables sujetos al techo de una alta catedral y medir la desviación de los cables de la vertical; los cables miden 45.00 m de largo y están separados 1.0 m. El primer objeto está suspendido y su posición se mide cuidadosamente. Luego se suspende el segundo objeto y los dos objetos se atraen gravitacionalmente. ¿A qué distancia se mueve horizontalmente el primer objeto, desde su posición inicial, debido a la atracción gravitatoria mutua? *Sugerencia*: Recuerde que esta distancia será muy pequeña y haga aproximaciones apropiadas.

Sección 13.2 Aceleración en caída libre y fuerza gravitacional

11. Cuando un meteoroide que cae está a una distancia sobre la superficie de la Tierra de 3.00 veces el radio de ésta, ¿cuál es su aceleración debida a la gravitación de la Tierra?

12. La aceleración en caída libre sobre la superficie de la Luna es alrededor de un sexto de la que hay sobre la superficie de la Tierra. El radio de la Luna es aproximadamente $0.250R_T$ (R_T = radio de la Tierra = 6.37×10^6 m). Encuentre la razón de sus densidades promedio, $\rho_{\text{Luna}}/\rho_{\text{Tierra}}$.

13. **Problema de repaso.** En la figura P13.13a se muestra Miranda, un satélite de Urano. Se le puede modelar como una esfera de 242 km de radio y 6.68×10^{19} kg de masa. (a) Encuentre la aceleración en caída libre sobre su superficie. (b) Un risco en Miranda mide 5.00 km de alto. Aparece en el extremo de la posición que corresponde a las 11 en punto en la figura P13.13a y se amplifica en la figura P13.13b. Si un devoto de los deportes extremos corre horizontalmente desde lo alto del risco a 8.50 m/s, ¿durante qué intervalo de tiempo está en vuelo? (c) ¿Qué tan lejos de la base del risco vertical golpea la superficie congelada de Miranda? (d) ¿Cuál es su vector de velocidad de impacto?

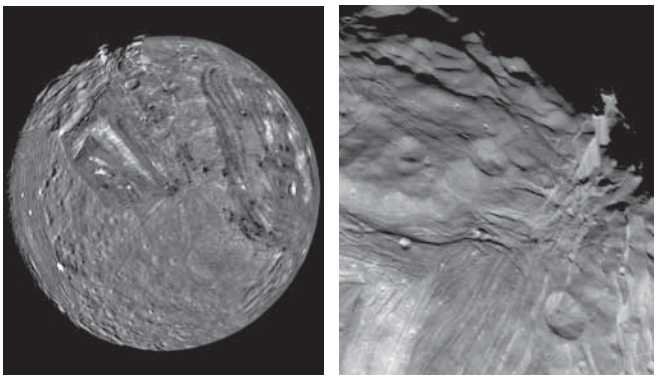


Figura P13.13

Sección 13.3 Análisis de modelo: partícula en un campo (gravitacional)

14. (a) Calcule el vector campo gravitacional en un punto P sobre el bisector perpendicular de la línea que une dos objetos de igual masa separados por una distancia $2a$, como se muestra en la figura P13.14. (b) Explique físicamente por qué el campo debe tender a cero conforme $r \to 0$. (c) Demuestre matemáticamente que la respuesta del inciso (a) se comporta de esta forma. (d) Explique físicamente por qué la magnitud del campo debe tender a $2GM/r^2$ conforme $r \to \infty$. (e) Pruebe matemáticamente que la respuesta al inciso (a) se comporta de manera correcta en este límite.

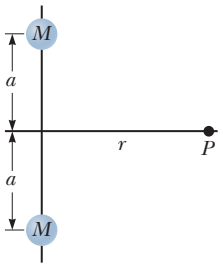


Figura P13.14

15. Tres objetos de igual masa están colocados en tres esquinas de un cuadrado de longitud de lado ℓ, como se muestra en la figura P13.15. Encuentre la magnitud y dirección del campo gravitacional en la cuarta esquina debidas a dichos objetos.

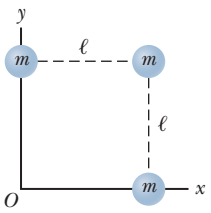


Figura P13.15

16. Una nave espacial tiene la forma de un largo cilindro con una longitud de 100 m y su masa con ocupantes es de 1 000 kg. Se acercó demasiado a un agujero negro que tiene una masa 100 veces la del Sol (figura P13.16). La nariz de la nave apunta hacia el agujero negro y la distancia entre la nariz y el centro del agujero negro es 10.0 km. (a) Determine la fuerza total sobre la nave. (b) ¿Cuál es la diferencia en los campos gravitacionales que actúan sobre los ocupantes en la nariz de la nave y sobre los que están en la parte trasera de ésta, más lejos del agujero negro? (Esta diferencia en aceleración crece rápidamente a medida que la nave se aproxima al agujero negro. Pone el cuerpo de la nave bajo extrema tensión y al final lo rompe.)

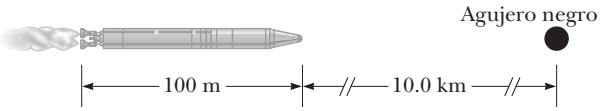


Figura P13.16

Sección 13.4 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

17. Un satélite artificial gira en torno a la Tierra, con una órbita circular, en una región donde la aceleración debida a la gravedad es 9.00 m/s^2. Determine el periodo orbital del satélite.

18. Io, un satélite de Júpiter, tiene un periodo orbital de 1.77 días y un radio orbital de 4.22×10^5 km. A partir de estos datos determine la masa de Júpiter.

19. Una transferencia de órbita, de mínima energía, hacia un planeta exterior consiste en impulsar una nave espacial sobre una trayectoria elíptica con el planeta del que se parte correspondiente al perihelio de la elipse, o el punto más cercano al Sol, y el planeta de destino en el afelio, o el punto más alejado del Sol. (a) Utilice la tercera ley de Kepler para calcular cuánto tomaría ir de la Tierra a Marte sobre tal órbita, como se muestra en la figura P13.19. (b) ¿En cualquier momento puede emplearse tal órbita? Explique.

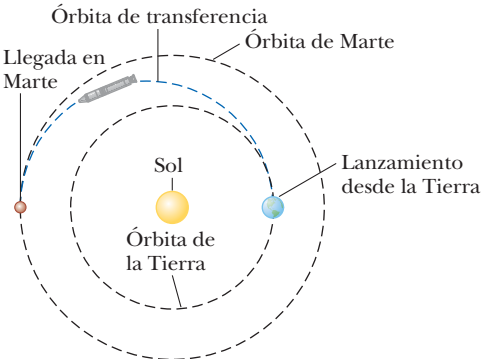


Figura P13.19

20. Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una línea recta con velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}_0$ en la dirección x, a una distancia b del eje x (figura P13.20). (a) ¿La partícula tiene alguna cantidad de movimiento angular en torno al origen? (b) Explique por qué la cantidad de su movimiento angular debe cambiar o debe permanecer constante. (c) Demuestre que la segunda ley de Kepler se satisface al mostrar que los dos triángulos sombreados en la figura tienen la misma área cuando $t_{\text{Ⓓ}} - t_{\text{Ⓒ}} = t_{\text{Ⓑ}} - t_{\text{Ⓐ}}$.

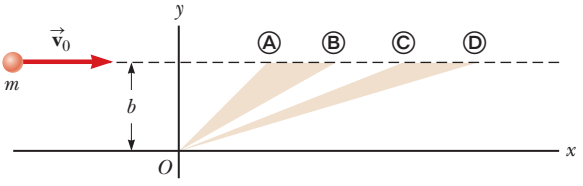


Figura P13.20

21. El sistema binario de Plaskett consiste en dos estrellas que dan vueltas en una órbita circular en torno a un centro de masa a la mitad del camino entre ellas. Este enunciado implica que las masas de las dos estrellas son iguales (figura P13.21). Suponga que la rapidez orbital de cada estrella es $|\vec{\mathbf{v}}| = 220$ km/s y que el periodo orbital de cada una es 14.4 días. Encuentre la masa M de cada estrella. (Para comparación, la masa del Sol es 1.99×10^{30} kg.)

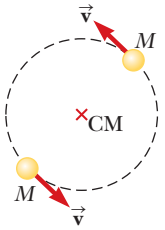


Figura P13.21

22. Dos planetas X y Y viajan en sentido contrario a las manecillas del reloj en órbitas circulares en torno a una estrella, como se muestra en la figura P13.22. Los radios de sus órbitas están a razón 3:1. En un momento dado están alineados como se indica en la figura P13.22a, formando una línea recta con la estrella. Durante los siguientes cinco años, el desplazamiento angular del planeta X es 90.0°, como se exhibe en la figura P13.22b. ¿Cuál es el desplazamiento angular del planeta Y en dicho momento?

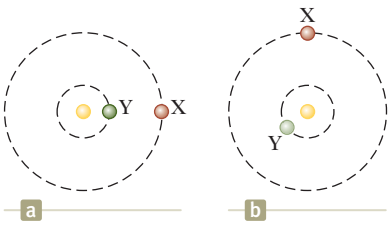


Figura P13.22

23. El cometa Halley (figura P13.23) se aproxima al Sol hasta dentro de 0.570 UA y su periodo orbital es 75.6 años. (UA es el símbolo para unidad astronómica, donde 1 UA = 1.50×10^{11} m es la distancia media Tierra-Sol.) ¿Qué tan lejos del Sol viajará el cometa Halley antes de comenzar su viaje de regreso?

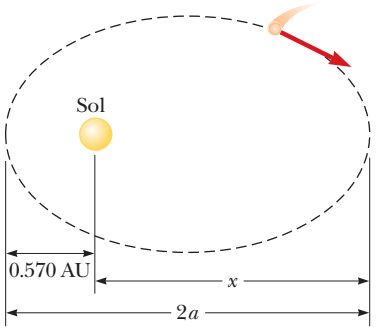


Figura P13.23 (Órbita no dibujada a escala)

24. El satélite *Explorer VIII*, colocado en órbita el 3 de noviembre de 1960 para investigar la ionosfera, tenía los siguientes parámetros de órbita: perigeo, 459 km; apogeo, 2 289 km (ambas distancias sobre la superficie de la Tierra); periodo, 112.7 min. Encuentre la razón v_p/v_a de la rapidez en el perigeo con la rapidez en el apogeo.

25. Utilice la tercera ley de Kepler para determinar cuántos días le toma a una nave viajar en una órbita elíptica desde un punto a 6 670 km del centro de la Tierra, hasta la Luna, a 385 000 km desde el centro de la Tierra.

26. Las estrellas de neutrones son objetos extremadamente densos formados a partir de los restos de explosiones de supernova. Muchas giran muy rápidamente. Suponga que la masa de cierta estrella de neutrones esférica es el doble de la masa del Sol y su radio es de 10.0 km. Determine la rapidez angular máxima posible que puede tener de modo que la materia en la superficie de la estrella sobre su ecuador apenas se mantenga en órbita mediante la fuerza gravitacional.

27. Un satélite síncrono, que siempre permanece arriba del mismo punto en el ecuador de un planeta, se pone en órbita alrededor de Júpiter para estudiar la famosa mancha roja. Júpiter gira una vez cada 9.84 h. Utilice los datos de la tabla 13.2 para encontrar la altitud del satélite sobre la superficie del planeta.

28. (a) Dado que el periodo de la órbita de la Luna en torno a la Tierra es 27.32 días y la distancia casi constante entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna es 3.84×10^8 m, aplique la ecuación 13.11 para calcular la masa de la Tierra. (b) ¿Por qué es un poco más grande el valor que calcula?

29. Suponga que la gravedad del Sol se desconectara. Los planetas dejarían sus órbitas y volarían en línea recta como describe la primera ley de Newton. (a) ¿Alguna vez Mercurio estaría más lejos del Sol que Plutón? (b) Si es así, encuentre cuánto tardaría Mercurio en lograr este tránsito. Si no, proporcione un argumento convincente de que Plutón siempre estará más lejos del Sol.

Sección 13.5 Energía potencial gravitacional

Nota: En los problemas 30 al 50, suponga $U = 0$ en $r = \infty$.

30. Un satélite de la Tierra tiene una masa de 100 kg y está a una altura de 2.00×10^6 m. (a) ¿Cuál es la energía potencial del sistema satélite-Tierra? (b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre el satélite? (c) ¿Qué pasaría si? ¿Qué fuerza, si existe alguna, ejerce el satélite sobre la Tierra?

31. ¿Cuánto trabajo realiza el campo gravitacional de la Luna sobre un meteoro de 1 000 kg mientras viene del espacio exterior e impacta sobre la superficie de la Luna?

32. ¿Cuánta energía se requiere para mover un objeto de 1 000 kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura de dos veces el radio de la Tierra?

33. Después que el Sol agote su combustible nuclear su destino final será colapsar a un estado de *enana blanca*. En dicho estado tendría aproximadamente la misma masa como ahora, pero su radio sería igual al radio de la Tierra. Calcule (a) la densidad promedio de la enana blanca, (b) la aceleración en caída libre en la superficie y (c) la energía potencial gravitacional asociada con un objeto de 1.00 kg en la superficie de la enana blanca.

34. Un objeto se libera desde el reposo a una altura h sobre la superficie de la Tierra. (a) Demuestre que su rapidez a una distancia r del centro de la Tierra, donde $R_T \leq r \leq R_T + h$, es

$$v = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T + h}\right)}$$

(b) Suponga que la altura de liberación es de 500 km. Realice la integral

$$\Delta t = \int_i^f dt = -\int_i^f \frac{dr}{v}$$

para encontrar el tiempo de caída a medida que el objeto se mueve desde el punto de liberación hasta la superficie de la Tierra. El signo negativo aparece porque el objeto se mueve opuesto a la dirección radial, así que su rapidez es $v = -dr/dt$. Efectúe la integral numéricamente.

35. Un sistema consiste de tres partículas, cada una de 5.00 g de masa, ubicadas en las esquinas de un triángulo equilátero con lados de 30.0 cm. (a) Calcule la energía potencial del sistema. (b) Suponga que las partículas se liberan simultáneamente. Describa el movimiento posterior de cada una. ¿Habrá colisiones? Explique.

Sección 13.6 Consideraciones energéticas en el movimiento planetario y de satélites

36. Una sonda espacial se dispara como un proyectil desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial de 2.00×10^4 m/s. ¿Cuál será su rapidez cuando esté muy lejos de la Tierra? Ignore la fricción y la rotación de la Tierra.

37. Un satélite de 500 kg está en órbita circular a una altitud de 500 km sobre la superficie de la Tierra. Debido a la fricción del aire el satélite eventualmente cae a la superficie de la Tierra, donde golpea el suelo con una rapidez de 2.00 km/s. ¿Cuánta energía fue transformada en energía interna debido a la fricción del aire?

38. Un "satélite copa de árbol" se mueve en una órbita circular justo sobre la superficie de un planeta que se supone no ofrece resistencia del aire. Demuestre que su rapidez orbital v y la rapidez de escape del planeta se relacionan mediante la expresión $v_{esc} = \sqrt{2}v$.

39. Un satélite de 1 000 kg orbita la Tierra a una altura constante de 100 km. (a) ¿Cuánta energía se debe agregar al sistema para mover el satélite en una órbita circular con altitud de 200 km? ¿Cuáles son los cambios en el sistema de (b) energía cinética y (c) energía potencial?

40. Un cometa de 1.20×10^{10} kg de masa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Su distancia desde el Sol varía entre 0.500 UA y 50.0 UA. (a) ¿Cuál es la excentricidad de su órbita? (b) ¿Cuál es su periodo? (c) En el afelio, ¿cuál es la energía potencial del sistema cometa-Sol? *Nota*: 1 UA = una unidad astronómica = la distancia promedio del Sol a la Tierra = 1.496×10^{11} m.

41. Un asteroide está en ruta de colisión con la Tierra. Una astronauta aterriza sobre la roca para colocar cargas explosivas y destruir el asteroide. La mayoría de los pequeños fragmentos no impactarán la Tierra, y aquellos que entren a la atmósfera sólo producirán hermosas lluvias de meteoritos. La astronauta encuentra que la densidad del asteroide esférico es igual a la densidad promedio de la Tierra. Para asegurar su pulverización, en los explosivos ella adiciona combustible de cohetes y oxidantes que están destinados para el viaje de regreso. ¿Qué radio máximo puede tener el asteroide para que a ella le sea posible abandonarlo mediante un simple salto en línea recta? En la Tierra ella es capaz de saltar una altura de 0.500 m.

42. Obtenga una expresión para el trabajo requerido para mover un satélite de la Tierra, de masa m, de una órbita circular de radio $2R_T$ a otra de radio $3R_T$.

43. (a) Determine la cantidad de trabajo que debe realizarse sobre una carga útil de 100 kg para elevarla a una altura de 1 000 km sobre la superficie de la Tierra. (b) Obtenga la cantidad de trabajo adicional necesario para colocar la carga útil en órbita circular a esa altura.

44. (a) ¿Cuál es la rapidez mínima, relativa al Sol, necesaria para que una nave espacial escape del Sistema Solar, si parte de la órbita de la Tierra? (b) El *Voyager I* logró una rapidez máxima de 125 000 km/h en su camino para fotografiar a Júpiter. ¿Más allá de qué distancia desde el Sol es suficiente esta rapidez para escapar del Sistema Solar?

45. Un satélite de 200 kg de masa se coloca en órbita terrestre a una altura de 200 km sobre la superficie. (a) Si supone una órbita circular, ¿cuánto tarda el satélite en completar una órbita? (b) ¿Cuál es la rapidez del satélite? (c) Si el satélite parte de la superficie de la Tierra, ¿cuál es el suministro de energía mínimo necesario para colocar este satélite en órbita? Ignore la resistencia del aire, pero incluya el efecto de la rotación diaria del planeta.

46. Un satélite de masa m, originalmente sobre la superficie de la Tierra, se coloca en órbita terrestre a una altura h. (a) Si supone una órbita circular, ¿cuánto tarda el satélite en completar una órbita? (b) ¿Cuál es la rapidez del satélite? (c) ¿Cuál es el suministro de energía mínimo necesario para colocar este satélite en órbita? Ignore la resistencia del aire, pero incluya el efecto de la rotación diaria del planeta. Represente la masa y el radio de la Tierra como M_T y R_T, respectivamente.

47. Ganímedes es la más grande de las lunas de Júpiter. Considere un cohete sobre la superficie de Ganímedes, en el punto más lejano del planeta (figura P13.47). Modele el cohete como una partícula. (a) ¿La presencia de Ganímedes hace que Júpiter ejerza una fuerza mayor, menor o igual sobre el cohete, en comparación con la fuerza que ejercería si Ganímedes no se interpusiera? (b) Determine la rapidez de escape para el cohete del sistema planeta-satélite. El radio de Ganímedes es 2.64×10^6 m y su masa es 1.495×10^{23} kg. La distancia entre Júpiter y Ganímedes es 1.071×10^9 m y la masa de Júpiter es 1.90×10^{27} kg.

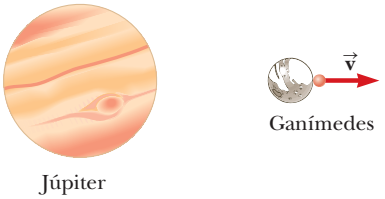


Figura P13.47

Ignore el movimiento de Júpiter y Ganímedes mientras giran en torno a su centro de masa.

48. Un satélite se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r. (a) ¿Cuál es la rapidez v_i del satélite? (b) Súbitamente, una explosión rompe el satélite en dos piezas, con masas m y $4m$. Enseguida de la explosión, la pieza más pequeña de masa m está estacionaria en relación con la Tierra y cae directamente hacia ésta. ¿Cuál es la rapidez v de la pieza más grande justo después de la explosión? (c) Debido al aumento en su rapidez, esta pieza más grande ahora se mueve en una nueva órbita elíptica. Encuentre su distancia desde el centro de la Tierra cuando llegue al otro extremo de la elipse.

49. En la superficie de la Tierra, un proyectil es lanzado directo hacia arriba con una rapidez de 10.0 km/s. ¿A qué altura se elevará? Ignore la resistencia del aire.

Problemas adicionales

50. Desde el Polo Sur, un cohete es disparado directo hacia arriba rumbo a la atmósfera, logrando una altitud de 250 km cuando viaja a 6.00 km/s. (a) ¿Qué distancia máxima, desde la superficie de la Tierra, viaja antes de caer de regreso a la Tierra? (b) ¿Sería mayor su distancia máxima, desde la superficie, si el mismo cohete fuera disparado con la misma carga de combustible desde una plataforma de lanzamiento sobre el Ecuador? ¿Por qué sí o por qué no?

51. **Problema de repaso.** G. K. O'Neill (1974) propuso un hábitat cilíndrico en el espacio con 6.00 km de diámetro y 30 km de largo. Tal hábitat tendría ciudades, tierra y lagos en la superficie interior, así como aire y nubes en el centro. Todo se mantendría en su lugar mediante la rotación del cilindro en torno a su eje largo. ¿Qué tan rápido tendría que girar el cilindro para imitar el campo gravitacional de la Tierra en las paredes del cilindro?

52. Las sondas *Voyager 1* y *Voyager 2* estudiaron la superficie de Io, luna de Júpiter, y fotografiaron volcanes activos expulsando azufre líquido a alturas de 70 km sobre la superficie de esta luna. Encuentre la rapidez con que se arroja el azufre líquido desde la boca del volcán. La masa de Io es 8.9×10^{22} kg y su radio es 1 820 km.

53. Un satélite está en órbita circular en torno a la Tierra a una altitud de 2.80×10^6 m. Encuentre (a) el periodo de la órbita, (b) la rapidez del satélite y (c) la aceleración del satélite.

54. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Una nave espacial es lanzada a órbita circular alrededor de la Tierra y da una vuelta completa en 1 hora.

55. Sea Δg_L la diferencia en los campos gravitacionales producidos por la Luna en los puntos más cercano y más lejano de la Luna sobre la superficie de la Tierra. Encuentre la fracción $\Delta g_L/g$, donde g es el campo gravitacional de la Tierra. (Esta diferencia es responsable del acontecimiento de las *mareas lunares* sobre la Tierra.)

56. El área de dormir para un largo viaje espacial consiste de dos cabinas, cada una conectada mediante un cable a un centro, como se muestra en la figura P13.56. Las cabinas se hacen girar respecto al eje central, el cual está conectado al resto de la nave para generar gravedad artificial en las cabinas. Un viajero del espacio descansa en una cama paralela a la pared exterior, como se indica en la figura P13.56. (a) Con $r = 10.0$ m, ¿qué rapidez angular del viajero de 60.0 kg se necesitaría si él debe experimentar la mitad de su peso terrestre normal? (b) Si el astronauta se pone de pie perpendicular a la cama, sin hacer nada con sus manos, ¿su cabeza se moverá más rápido, más despacio o con la misma rapidez tangencial que sus pies? ¿Por qué? (c) ¿Por qué es peligrosa la acción en el inciso (b)?

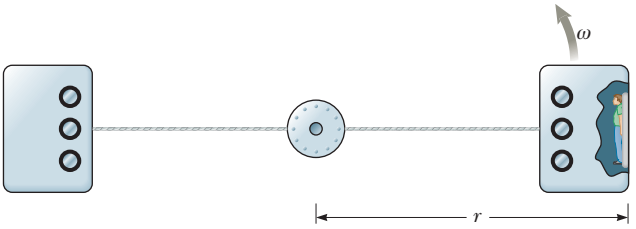


Figura P13.56

57. (a) Un vehículo espacial se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial de 8.76 km/s, menor que la rapidez de escape de 11.2 km/s. ¿Qué altura máxima alcanza? (b) Un meteoroide cae hacia la Tierra. Esencialmente está en reposo respecto a la Tierra cuando se encuentra a una altura de 2.51×10^7 m sobre la superficie de la Tierra. ¿Con qué rapidez el meteorito (un meteoroide que sobrevive para impactar la superficie de la Tierra) golpea la Tierra?

58. (a) Un vehículo espacial se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial v_i que es comparable, pero menor, con la rapidez de escape v_{esc}. ¿Qué altura máxima alcanza? (b) Un meteoroide cae hacia la Tierra. Esencialmente está en reposo respecto de la Tierra cuando se encuentra a una altura h sobre la superficie de la Tierra. ¿Con qué rapidez el meteorito (un meteoroide que sobrevive para impactar la superficie de la Tierra) golpea la Tierra? (c) **¿Qué pasaría si?** Suponga que una pelota de béisbol se lanza con una rapidez inicial que es muy pequeña comparada con la rapidez de escape. Demuestre que la ecuación del inciso (a) es consistente con la ecuación 4.12.

59. Suponga que usted es lo suficientemente ágil como para correr a través de una superficie horizontal a 8.50 m/s, independientemente del valor del campo gravitacional. ¿Cuál sería (a) el radio y (b) la masa de un asteroide esférico sin aire de 1.10×10^3 kg/m^3 de densidad uniforme en el que podría lanzarse usted mismo en órbita al correr? (c) ¿Cuál sería su periodo? (d) ¿Su carrera afectaría significativamente la rotación del asteroide? Explique.

60. Dos esferas que tienen masas M y $2M$ y radios R y $3R$, respectivamente, desde el reposo se liberan simultáneamente cuando la distancia entre sus centros es $12R$. Suponga que las dos esferas sólo interactúan entre sí y se quiere encontrar las magnitudes de velocidad con las cuales colisionan. (a) Indique *dos* modelos de sistema aislado que sean apropiados para este sistema. (b) Escriba una ecuación de uno de los modelos y resuélvala para $\vec{\mathbf{v}}_1$, la velocidad de la esfera de masa M en cualquier tiempo posterior a la liberación en términos de $\vec{\mathbf{v}}_2$, la velocidad de $2M$. (c) Escriba una ecuación del otro modelo y resuélvala para

la rapidez v_1 en términos de la rapidez v_2 cuando las esferas colisionan. (d) Combine las dos ecuaciones para obtener las dos magnitudes de velocidad v_1 y v_2 cuando las esferas colisionan.

61. Dos planetas hipotéticos de masas m_1 y m_2 y radios r_1 y r_2, respectivamente, están casi en reposo cuando se encuentran separados una distancia infinita. Debido a su atracción gravitacional se dirigen uno hacia el otro rumbo a una colisión. (a) Cuando su separación centro a centro es d, encuentre expresiones para la rapidez de cada planeta y para su rapidez relativa. (b) Encuentre la energía cinética de cada planeta justo antes de que choquen, considere $m_1 = 2.00 \times 10^{24}$ kg, $m_2 = 8.00 \times 10^{24}$ kg, $r_1 = 3.00 \times 10^6$ m y $r_2 = 5.00 \times 10^6$ m. *Nota*: Se conserva tanto la energía como la cantidad de movimiento del sistema.

62. (a) Demuestre que la rapidez de cambio de la aceleración en caída libre con la posición vertical cerca de la superficie de la Tierra es

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{2GM_T}{R_T^3}$$

Esta rapidez de cambio con la posición se llama *gradiente*. (b) Suponga que h es pequeña en comparación con el radio de la Tierra, demuestre que la diferencia en aceleración en caída libre entre dos puntos separados por la distancia vertical h es

$$|\Delta g| = \frac{2GM_T h}{R_T^3}$$

(c) Evalúe esta diferencia para $h = 6.00$ m, una altura típica para un edificio de dos pisos.

63. Un anillo de materia es una estructura familiar en astronomía planetaria y estelar. Los ejemplos incluyen los anillos de Saturno y una nebulosa anillo. Considere un gran anillo uniforme que tiene 2.36×10^{20} kg de masa y 1.00×10^8 m de radio. Un objeto de 1 000 kg de masa se coloca en un punto A sobre el eje del anillo, a 2.00×10^8 m del centro del anillo (figura P13.63). Cuando el objeto se libera, la atracción del anillo hace que el objeto se mueva a lo largo del eje hacia el centro del anillo (punto B). (a) Calcule la energía potencial gravitacional del sistema objeto-anillo cuando el objeto está en A. (b) Calcule la energía potencial gravitacional del sistema cuando el objeto está en B. (c) Calcule la rapidez del objeto mientras pasa por B.


NASA

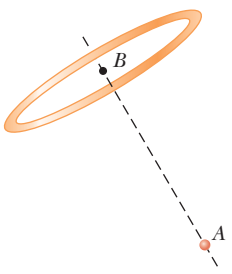


Figura P13.63

64. Una nave espacial de masa 1.00×10^4 kg está en órbita circular a una altitud de 500 km sobre la superficie de la Tierra. El Control de la misión desea encender los motores en una dirección tangente a la órbita para así colocar a la nave en una órbita elíptica en torno a la Tierra con un apogeo de 2.00×10^4 km, medido desde el centro de la Tierra. ¿Cuánta energía debe emplearse del combustible para alcanzar esta órbita? (Suponga que toda la energía del combustible sirve para incrementar la energía orbital. Este modelo dará un límite inferior para la energía requerida porque algo de la energía del combustible aparecerá como energía interna en los gases calientes expulsados y en las partes del motor.)

65. **Problema de repaso.** Como un astronauta, usted observa que un planeta pequeño es esférico. Después de aterrizar en el planeta se pone en movimiento y camina siempre en línea recta hacia adelante, después de completar una vuelta de 25.0 km se encuentra de regreso en su nave espacial desde el lado opuesto. Sostiene un martillo y una pluma de halcón a una altura de 1.40 m, los libera y observa que caen juntos a la superficie en 29.2 s. Determine la masa del planeta.

66. Cierto sistema estelar cuaternario consiste en tres estrellas, cada una de masa m, que se mueven en la misma órbita circular de radio r en torno a una estrella central de masa M. Las estrellas orbitan en el mismo sentido y se ubican a un tercio de revolución una de otra. Demuestre que el periodo de cada una de las tres estrellas es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G(M + m/\sqrt{3})}}$$

67. Estudios de la relación del Sol con su galaxia, la Vía Láctea, revelaron que el Sol se ubica cerca del borde exterior del disco galáctico, más o menos a 30 000 años luz (1 año luz $= 9.46 \times 10^{15}$ m) del centro. El Sol tiene una rapidez orbital de aproximadamente 250 km/s alrededor del centro galáctico. (a) ¿Cuál es el periodo del movimiento galáctico del Sol? (b) ¿Cuál es el orden de magnitud de la masa de la galaxia Vía Láctea? (c) Suponga que la galaxia está hecha principalmente de estrellas, entre las cuales el Sol es característico. ¿Cuál es el orden de magnitud del número de estrellas en la Vía Láctea?

68. **Problema de repaso.** Dos esferas duras idénticas, cada una con masa m y radio r, se liberan desde el reposo en espacio vacío con sus centros separados por la distancia R. Se les permite chocar bajo la influencia de su atracción gravitacional. (a) Demuestre que la magnitud del impulso recibido por cada esfera antes de tener contacto está dada por $[Gm^3(1/2r - 1/R)]^{1/2}$. (b) **¿Qué pasaría si?** Encuentre la magnitud del impulso que cada una recibe durante su contacto si chocan elásticamente.

69. La distancia máxima desde la Tierra al Sol (en el afelio) es 1.521×10^{11} m y la distancia de máximo acercamiento (en el perihelio) es 1.471×10^{11} m. La rapidez orbital de la Tierra en el perihelio es 3.027×10^4 m/s. Determine (a) la rapidez orbital de la Tierra en el afelio y las energías

cinética y potencial del sistema Tierra-Sol (b) en el perihelio y (c) en el afelio. (d) ¿La energía total del sistema es constante? Explique. Ignore el efecto de la Luna y otros planetas.

70. Muchas personas suponen que la resistencia del aire que actúa sobre un objeto en movimiento siempre hará que el objeto frene. Sin embargo, en realidad puede ser responsable de hacer que el objeto aumente su rapidez. Considere un satélite de la Tierra de 100 kg en una órbita circular a una altura de 200 km. Una fuerza pequeña de resistencia de aire hace que el satélite caiga en una órbita circular con una altura de 100 km. (a) Calcule su rapidez inicial. (b) Calcule su rapidez final en este proceso. (c) Calcule la energía inicial del sistema satélite-Tierra. (d) Calcule la energía final del sistema. (e) Demuestre que el sistema perdió energía mecánica y encuentre la cantidad de la pérdida debida a la fricción. (f) ¿Qué fuerza hace que aumente la rapidez del satélite? *Sugerencia*: encontrará que un diagrama de cuerpo libre es útil para explicar su respuesta.

71. Durante los vuelos de cohetes a gran altura se han registrado pulsos de rayos X provenientes de Cygnus X-1, una fuente de rayos X del espacio. Es posible interpretar que las señales se originan cuando una burbuja de materia ionizada orbita un agujero negro con un periodo de 5.0 ms. Si la burbuja está en una órbita circular en torno a un agujero negro cuya masa es de 20 M_{Sol}, ¿cuál es el radio orbital?

72. Demuestre que el periodo mínimo para un satélite en órbita alrededor de un planeta esférico de densidad uniforme ρ es

$$T_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

independiente del radio del planeta.

73. Los astrónomos detectaron un meteoroide distante que se mueve a lo largo de una línea recta que, si se extiende, pasaría a una distancia de $3R_T$ del centro de la Tierra, donde R_T es el radio de la Tierra. ¿Qué rapidez mínima debe tener el meteoroide para que no colisione con la Tierra?

74. Dos estrellas de masa M y m, separadas una distancia d, giran en órbitas circulares en torno a su centro de masa (figura P13.74). Demuestre que cada estrella tiene un periodo dado por

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(M + m)}$$

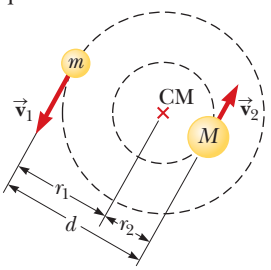


Figura P13.74

75. Dos partículas idénticas, cada una de 1 000 kg, se desplazan en el espacio libre a lo largo de la misma trayectoria, una enfrente de la otra, por 20.0 m. En el instante en que su separación tiene este valor, cada partícula tiene precisamente la misma velocidad de 800 $\hat{\mathbf{i}}$ m/s. ¿Cuáles son sus velocidades precisas cuando están separadas 2.00 m?

76. Considere un objeto de masa m, no necesariamente pequeña, comparada con la masa de la Tierra, que se libera a una distancia de 1.20×10^7 m desde el centro de la Tierra. Suponga que la Tierra y el objeto se comportan como un par de partículas, aislados del resto del Universo. (a) Encuentre la magnitud de la aceleración a_{rel} con la que cada uno comienza a moverse respecto al otro, como una función de m. Evalúe la aceleración (b) para $m = 5.00$ kg, (c) para $m = 2\,000$ kg y (d) para $m = 2.00 \times 10^{24}$ kg. (e) Describa el patrón de variación de a_{rel} con m.

77. A medida que la fusión termonuclear procede en su núcleo, el Sol pierde masa a razón de 3.64×10^9 kg/s. Durante el periodo de 5 000 años de historia registrada, ¿cuánto ha cambiado la duración del año debido a la pérdida de masa del Sol? *Sugerencia*: Suponga que la órbita de la Tierra es circular. Sobre el sistema Tierra-Sol no actúan momentos de torsión externos, de modo que se conserva la cantidad de movimiento angular.

Problemas de desafío

78. La nave espacial Observatorio Solar y Helioesférico (SOHO) tiene una órbita especial localizada entre la Tierra y el Sol a lo largo de la línea que los une y siempre está lo suficientemente cerca de la Tierra para transmitir datos con facilidad. Ambos objetos ejercen fuerzas gravitacionales sobre el observatorio. Su movimiento es casi circular alrededor del Sol y es más pequeño que la órbita circular de la Tierra. Sin embargo, su periodo no es menor a un año, sino que es igual a un año. Demuestre que su distancia desde la Tierra debe ser 1.48×10^9 m. En 1772, Joseph Louis Lagrange determinó teóricamente la ubicación especial que permitiría esta órbita. *Sugerencias*: use datos que sean precisos a cuatro dígitos. La masa de la Tierra es 5.974×10^{24} kg. No será fácil resolver las ecuaciones que usted obtenga; entonces, utilice una computadora para verificar que 1.48×10^9 m es el valor correcto.

79. El satélite más antiguo en órbita es el *Vanguard I*, que se lanzó el 3 de marzo de 1958. Su masa es de 1.60 kg. Despreciando el arrastre atmosférico, el satélite continuaría en su órbita inicial, con una distancia mínima desde el centro de la Tierra de 7.02 Mm y una rapidez en su perigeo de 8.23 km/s. Para esta órbita, encuentre (a) la energía total del sistema satélite-Tierra y (b) la magnitud de la cantidad de movimiento angular del satélite. (c) En el apogeo, encuentre la rapidez del satélite y su distancia desde el centro de la Tierra. (d) Obtenga el semieje mayor de su órbita. (e) Determine su periodo.

80. Una nave espacial se aproxima a Marte después de un largo viaje desde la Tierra. Su velocidad es tal que viaja a lo largo de una trayectoria parabólica bajo la influencia de la fuerza gravitacional de Marte. Su distancia de máximo acercamiento será de 300 km sobre la superficie marciana. En este punto de máximo acercamiento los motores se encenderán para frenar la nave espacial y colocarla en una órbita circular a 300 km sobre la superficie. (a) ¿En qué porcentaje debe reducirse la rapidez de la nave para lograr la órbita deseada? (b) ¿Cómo cambiaría la respuesta al inciso (a) si la distancia de máximo acercamiento y la altitud de la órbita circular deseada fueran de 600 km en lugar de 300 km? (*Nota*: La energía del sistema nave espacial-Marte para una órbita parabólica es $E = 0$.)

CAPÍTULO

14

Mecánica de fluidos



14.1 Presión
14.2 Variación de la presión con la profundidad
14.3 Mediciones de presión
14.4 Fuerzas de flotación y principio de Arquímedes
14.5 Dinámica de fluidos
14.6 Ecuación de Bernoulli
14.7 Otras aplicaciones de la dinámica de fluidos

En Haváii los peces se congregan en torno a un arrecife en búsqueda de comida. El pez mariposa *(Chaetadon lineolatus)*, arriba a la izquierda, ¿cómo controla sus movimientos para subir y descender en el agua? Lo sabrá en este capítulo. *(Vlad61/Shutterstock.com)*

Por lo general, la materia se clasifica como perteneciente a uno de tres estados: sólido, líquido o gas. Por la experiencia cotidiana se sabe que un sólido tiene un volumen y forma definidos, un líquido tiene un volumen definido mas no forma definida, y un gas no confinado carece de volumen y forma definidos. Dichas descripciones ayudan a representar los estados de la materia, pero son un poco artificiales. Por ejemplo, el asfalto y los plásticos normalmente se consideran sólidos, pero durante intervalos de tiempo prolongados tienden a fluir como líquidos. Del mismo modo, la mayoría de las sustancias pueden ser sólido, líquido o gas (o una combinación de cualquiera de estos tres), dependiendo de la temperatura y la presión. En general, el intervalo de tiempo requerido para que una sustancia particular cambie su forma en respuesta a una fuerza externa determina si se trata la sustancia como sólido, líquido o gas.

Un **fluido** es un conjunto de moléculas que se ordenan aleatoriamente y se mantienen juntas mediante fuerzas cohesivas débiles y fuerzas que ejercen las paredes de un recipiente. Tanto líquidos como gases son fluidos.

En el tratamiento de la mecánica de fluidos se aplicarán principios y análisis de modelos ya discutidos. Primero se considera la mecánica de un fluido en reposo, es decir, *estática de fluidos*, y después se estudian los fluidos en movimiento, *dinámica de fluidos*.

14.1 Presión

Los fluidos no soportan esfuerzos cortantes o de tracción como los estudiados en el capítulo 12; por lo tanto, el único esfuerzo que se puede ejercer sobre un objeto sumergido en un fluido estático es el que tiende a comprimir el objeto desde todos lados. En otras palabras, la fuerza ejercida por un fluido estático sobre un objeto siempre es perpendicular a las superficies del objeto, como se muestra en la figura 14.1. Esta situación se estudió en la sección 12.4.

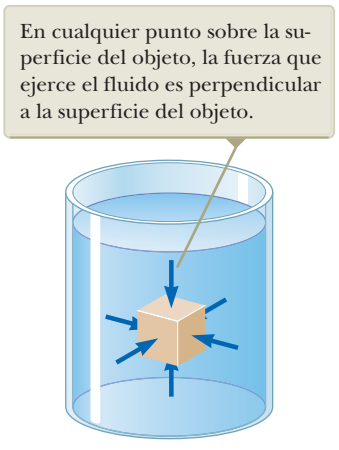


Figura 14.1 Fuerzas ejercidas por un fluido sobre las superficies de un objeto sumergido.

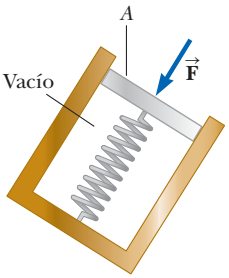


Figura 14.2 Un dispositivo simple para medir la presión que ejerce un fluido.

La presión en un fluido se puede medir con el dispositivo mostrado en la figura 14.2. El dispositivo consta de un cilindro al vacío que encierra un pistón ligero conectado a un resorte. Mientras el dispositivo está sumergido en un fluido, éste presiona arriba del pistón y comprime el resorte hasta que la fuerza hacia dentro ejercida por el fluido se equilibra con la fuerza hacia fuera que ejerce el resorte. Si de antemano se calibra el resorte, es posible medir directamente la presión del fluido. Si F es la magnitud de la fuerza ejercida sobre el pistón y A es el área del pistón, la **presión** P del fluido en el nivel al que se sumergió el dispositivo se define como la razón de la fuerza al área:

$$P \equiv \frac{F}{A} \tag{14.1}$$

La presión es una cantidad escalar porque es proporcional a la magnitud de la fuerza sobre el pistón.

Si la presión varía sobre un área, la fuerza infinitesimal dF sobre un elemento de superficie infinitesimal de área dA es

$$dF = P\,dA \tag{14.2}$$

donde P es la presión en la posición del área dA. Para calcular la fuerza total que se ejerce sobre una superficie de un recipiente, se debe integrar la ecuación 14.2 sobre la superficie.

Las unidades de presión son newtons por metro cuadrado (N/m^2) en el sistema SI. Otro nombre para la unidad SI de presión es **pascal** (Pa):

$$1\ \text{Pa} \equiv 1\ \text{N/m}^2 \tag{14.3}$$

Para una demostración táctil de la definición de presión, sostenga una tachuela entre sus dedos pulgar e índice, con la punta de la tachuela en el pulgar y la cabeza en el índice. Ahora presione suavemente el pulgar y el índice. El pulgar comenzará a sentir dolor, el índice no. La tachuela ejerce la misma fuerza sobre el pulgar y el índice, pero la presión sobre el pulgar es mucho mayor debido al área pequeña sobre la que se aplica la fuerza.

Prevención de riesgos ocultos 14.1

Fuerza y presión Las ecuaciones 14.1 y 14.2 hacen una clara distinción entre fuerza y presión. Otra importante distinción es que la *fuerza es un vector* y la *presión es un escalar*. La presión no tiene dirección asociada, pero la dirección de la fuerza asociada con la presión es perpendicular a la superficie sobre la que actúa la presión.

Examen rápido 14.1 Suponga que está de pie detrás de alguien que se mueve hacia atrás, quien por accidente le pisa con el tacón de su zapato. ¿Usted saldría mejor librado si la persona fuera **(a)** un alto jugador de basquetbol que usa tenis o **(b)** una mujer pequeña que calce zapatillas con tacón de aguja?

Ejemplo 14.1 La cama de agua

El colchón de una cama de agua mide 2.00 m de largo por 2.00 m de ancho y 30.0 cm de profundidad.

(A) Encuentre el peso del agua en el colchón.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en transportar un cubo de agua y qué tan pesado es. Ahora imagine una muestra del agua del tamaño de una cama de agua. Se espera que el peso sea relativamente grande.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Encuentre el volumen del agua que llena el colchón:

$$V = (2.00\ \text{m})(2.00\ \text{m})(0.300\ \text{m}) = 1.20\ \text{m}^3$$

Utilice la ecuación 1.1 y la densidad del agua pura (consulte la tabla 14.1) para obtener la masa de la cama de agua:

$$M = \rho V = (1\,000\ \text{kg/m}^3)(1.20\ \text{m}^3) = 1.20 \times 10^3\ \text{kg}$$

Determine el peso de la cama:

$$Mg = (1.20 \times 10^3\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 1.18 \times 10^4\ \text{N}$$

que es aproximadamente 2 650 lb. (Una cama regular, incluido el colchón, box spring y marco metálico, pesa alrededor de 300 lb.) Como esta carga es muy grande, es mejor colocar una cama de agua sobre la base o en un piso fuerte y firme.

14.1 continuación

(B) Encuentre la presión que ejerce la cama de agua sobre el suelo cuando la cama descansa en su posición normal. Suponga que toda la superficie inferior de la cama tiene contacto con el suelo.

SOLUCIÓN

Cuando la cama de agua está en su posición normal, el área en contacto con el suelo es 4.00 m^2. Utilice la ecuación 14.1 para encontrar la presión:

$$P = \frac{1.18 \times 10^4 \text{ N}}{4.00 \text{ m}^2} = 2.94 \times 10^3 \text{ Pa}$$

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la cama de agua se sustituye con una cama regular de 300 lb que se sostiene en sus cuatro patas? Cada pata tiene una sección transversal circular de 2.00 cm de radio. ¿Qué presión ejerce esta cama sobre el suelo?

Respuesta El peso de la cama regular se distribuye sobre cuatro secciones transversales circulares en la parte baja de las patas. Por lo tanto, la presión es

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{4(\pi r^2)} = \frac{300 \text{ lb}}{4\pi(0.020\ 0 \text{ m})^2}\left(\frac{1 \text{ N}}{0.225 \text{ lb}}\right)$$

$$= 2.65 \times 10^5 \text{ Pa}$$

¡Este resultado es casi 100 veces mayor que la presión debida a la cama de agua! El peso de la cama regular, aun cuando es mucho menor que el peso de la cama de agua, se aplica sobre el área muy pequeña de las cuatro patas. La presión alta sobre el suelo que ejerce el pie de una cama regular podría causar abolladuras en los suelos de madera o desgarrar permanentemente las alfombras.

14.2 Variación de la presión con la profundidad

Como bien saben los buzos, la presión del agua aumenta con la profundidad. Del mismo modo, la presión atmosférica disminuye con la altura creciente; por esta razón las aeronaves que vuelan a grandes alturas deben tener cabinas presurizadas para comodidad de los pasajeros.

Ahora se demostrará cómo la presión en un líquido aumenta con la profundidad. Como describe la ecuación 1.1, la *densidad* de una sustancia se define como su masa por unidad de volumen; la tabla 14.1 menciona las densidades de diferentes sustancias. Estos valores varían ligeramente con la temperatura porque el volumen de una sustancia depende de la temperatura (como se muestra en el capítulo 19). Bajo condiciones estándar (a 0° C y presión atmosférica), las densidades de los gases son aproximadamente $\frac{1}{1\,000}$ las densidades de sólidos y líquidos. Esta diferencia en densidades implica que la separación molecular promedio en un gas bajo estas condiciones es aproximadamente diez veces mayor que la de un sólido o líquido.

Tabla 14.1 Densidades de algunas sustancias comunes a temperatura (0°C) y presión (atmosférica) estándares

Sustancia	ρ (kg/m^3)	Sustancia	ρ (kg/m^3)
Aire	1.29	Hierro	7.86×10^3
Aire (20°C y presión atmosférica)	1.20	Plomo	11.3×10^3
Aluminio	2.70×10^3	Mercurio	13.6×10^3
Benceno	0.879×10^3	Nitrógeno gaseoso	1.25
Latón	8.4×10^3	Roble	0.710×10^3
Cobre	8.92×10^3	Osmio	22.6×10^3
Alcohol etílico	0.806×10^3	Oxígeno gaseoso	1.43
Agua pura	1.00×10^3	Pino	0.373×10^3
Glicerina	1.26×10^3	Platino	21.4×10^3
Oro	19.3×10^3	Agua de mar	1.03×10^3
Helio gaseoso	1.79×10^{-1}	Plata	10.5×10^3
Hidrógeno gaseoso	8.99×10^{-2}	Estaño	7.30×10^3
Hielo	0.917×10^3	Uranio	19.1×10^3

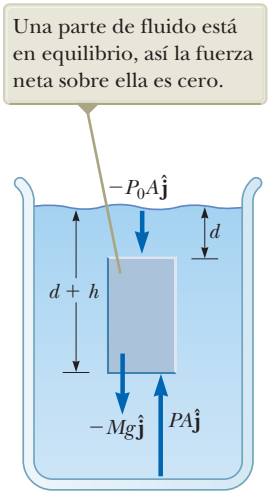


Figura 14.3 Una parte de fluido, en un volumen mayor de fluido, está aislada.

Considere ahora un líquido de densidad ρ en reposo, como se muestra en la figura 14.3. Se supone que ρ es uniforme en todo el líquido, esto significa que el líquido es incompresible. Seleccione una muestra del líquido contenido dentro de un cilindro imaginario de área de sección transversal A que se extiende desde la profundidad d a la profundidad $d + h$. El líquido externo a la muestra ejerce fuerzas en todos los puntos de la superficie de la muestra, perpendicular a la superficie. La presión que ejerce el líquido en la cara inferior de la muestra es P, y la presión en la cara superior es P_0. Por lo tanto, la fuerza hacia arriba ejercida por el fluido exterior sobre el fondo del cilindro tiene una magnitud PA, y la fuerza descendente que se ejerce sobre la parte superior tiene magnitud P_0A. La masa de líquido en la muestra es $M = \rho V = \rho Ah$; en consecuencia, el peso del líquido en la muestra es $Mg = \rho Ahg$. Como la muestra está en reposo y permanece en reposo, puede modelarse como una partícula en equilibrio, entonces la fuerza neta que actúa sobre ella debe ser cero. Al elegir hacia arriba la dirección y positiva, se ve que

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = PA\hat{\mathbf{j}} - P_0A\hat{\mathbf{j}} - Mg\hat{\mathbf{j}} = 0$$

o

$$PA - P_0A - \rho Ahg = 0$$

Variación de la presión con la profundidad ▶

$$P = P_0 + \rho gh \qquad (14.4)$$

Es decir, la presión P a una profundidad h bajo un punto en el líquido, donde la presión es P_0, es mayor por una cantidad ρgh. Si el líquido está abierto a la atmósfera y P_0 es la presión en la superficie del líquido, entonces P_0 es la **presión atmosférica**. Al realizar los cálculos y al trabajar los problemas al final del capítulo es usual tomar la presión atmosférica como

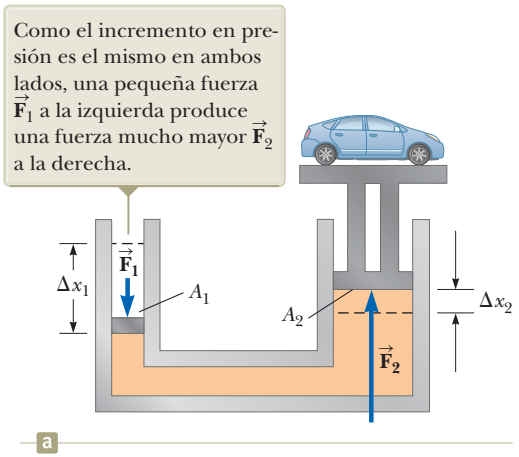
$$P_0 = 1.00 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

La ecuación 14.4 implica que la presión es la misma en todos los puntos que tengan la misma profundidad, independientemente de la forma del recipiente.

Ley de Pascal ▶

Ya que la presión en un fluido depende de la profundidad y del valor de P_0, cualquier aumento en presión en la superficie debe transmitirse a todo otro punto en el fluido. Este concepto lo reconoció por primera vez el científico francés Blaise Pascal (1623-1662) y se llama **ley de Pascal: un cambio en la presión aplicada a un fluido se transmite sin disminución a todos los puntos del fluido y a las paredes del recipiente.**

Una aplicación importante de la ley de Pascal es la prensa hidráulica, que se ilustra en la figura 14.4a. Una fuerza de magnitud F_1 se aplica a un pequeño pistón de área superficial A_1. La presión se transmite a través de un líquido incompresible a un pistón más grande de área superficial A_2. Ya que la presión debe ser la misma en ambos lados, $P = F_1/A_1 = F_2/A_2$. Por lo tanto, la fuerza F_2 es mayor que la fuerza F_1 en un factor A_2/A_1. Al diseñar una prensa hidráulica con áreas apropiadas A_1 y A_2, se aplica una gran fuerza de salida mediante una pequeña fuerza de entrada. Los fre-




Sam Jordash/Digital Vision/Getty Images

b

Figura 14.4 (a) Diagrama de una prensa hidráulica. (b) Un vehículo en reparación levantado mediante un elevador hidráulico en un taller.

nos hidráulicos, elevadores de automóviles, gatos hidráulicos y carretillas elevadoras utilizan este principio (figura 14.4b).

Puesto que no se agrega ni retira líquido del sistema, el volumen de líquido que se empuja hacia abajo, a la izquierda de la figura 14.4a, conforme el pistón se mueve hacia abajo a través de un desplazamiento Δx_1, es igual al volumen de líquido que se empuja hacia arriba en el lado derecho, mientras el pistón derecho se mueve hacia arriba a través de un desplazamiento Δx_2. Es decir, $A_1\,\Delta x_1 = A_2\,\Delta x_2$; por lo tanto $A_2/A_1 = \Delta x_1/\Delta x_2$. Ya se demostró que $A_2/A_1 = F_2/F_1$. En consecuencia, $F_2/F_1 = \Delta x_1/\Delta x_2$, de modo que $F_1\,\Delta x_1 = F_2\,\Delta x_2$. Cada lado de esta ecuación es el trabajo realizado por la fuerza sobre su pistón respectivo. Por ende, el trabajo efectuado por $\vec{\mathbf{F}}_1$ sobre el pistón de entrada es igual al trabajo realizado por $\vec{\mathbf{F}}_2$ sobre el pistón de salida, como debe ser para conservar energía. (El proceso se puede modelar como un caso especial del modelo de sistema no aislado: el *sistema no aislado en estado estacionario*. Existe transferencia de energía hacia y desde el sistema, pero dicha transferencia de energía se equilibra, así que no existe cambio neto en la energía del sistema.)

Examen rápido 14.2 La presión en el fondo de un vaso lleno de agua ($\rho = 1\,000$ kg/m^3) es P. El agua se derrama y el vaso se llena con alcohol etílico ($\rho = 806$ kg/m^3). ¿Cuál es la presión en el fondo del vaso? **(a)** Menor que P, **(b)** igual a P, **(c)** mayor que P, **(d)** indeterminado.

Ejemplo 14.2 El elevador de automóviles

En un elevador de automóviles en una estación de servicio, el aire comprimido ejerce una fuerza sobre un pequeño pistón que tiene una sección transversal circular de radio 5.00 cm. Esta presión se transmite mediante un líquido a un pistón que tiene un radio de 15.0 cm.

(A) ¿Qué fuerza debe ejercer el aire comprimido para elevar un automóvil que pesa 13 300 N?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Revise el material ya discutido sobre la ley de Pascal para entender la operación de un elevador de automóviles.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Resuelva $F_1/A_1 = F_2/A_2$ para F_1:

$$F_1 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)F_2 = \frac{\pi(5.00 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}{\pi(15.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}\,(1.33 \times 10^4\ \text{N})$$

$$= 1.48 \times 10^3\ \text{N}$$

(B) ¿Qué presión de aire produce esta fuerza?

SOLUCIÓN

Utilice la ecuación 14.1 para encontrar la presión de aire que produce esta fuerza:

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1.48 \times 10^3\ \text{N}}{\pi(5.00 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}$$

$$= 1.88 \times 10^5\ \text{Pa}$$

Esta presión es aproximadamente el doble de la presión atmosférica.

Ejemplo 14.3 Dolor en su oído

Estime la fuerza que se ejerce sobre su tímpano debido al agua cuando nada en el fondo de una alberca que tiene 5.0 m de profundidad.

SOLUCIÓN

Conceptualizar A medida que desciende en el agua la presión aumenta. Es posible que haya notado este aumento de presión en sus oídos mientras nada en una alberca, un lago o el océano. Puede encontrar la diferencia de presión que se ejerce sobre

continúa

14.3 continuación

el tímpano a partir de la profundidad dada en el problema; entonces, después de estimar el área superficial del tímpano, puede determinar la fuerza neta que el agua ejerce sobre él.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.
Por lo general, el aire dentro del oído medio está a presión atmosférica P_0. Por lo tanto, para encontrar la fuerza neta sobre el tímpano, debe considerar la diferencia entre la presión total en el fondo de la alberca y la presión atmosférica. Estime el área superficial del tímpano como aproximadamente 1 $cm^2 = 1 \times 10^{-4}\ m^2$.

Utilice la ecuación 14.4 para encontrar esta diferencia de presión:

$$P_{\text{fondo}} - P_0 = \rho g h$$
$$= (1.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)(5.0\ \text{m}) = 4.9 \times 10^4\ \text{Pa}$$

Aplique la ecuación 14.1 para determinar la magnitud de la fuerza neta sobre el oído:

$$F = (P_{\text{fondo}} - P_0)A = (4.9 \times 10^4\ \text{Pa})(1 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) \approx 5\ \text{N}$$

Ya que una fuerza de esta magnitud sobre el tímpano es extremadamente incómoda, los nadadores con frecuencia "estiran los oídos" mientras están bajo el agua, una acción que empuja el aire desde los pulmones hacia el oído medio. Usar esta técnica iguala la presión en los dos lados del tímpano y alivia la incomodidad.

Ejemplo 14.4 La fuerza sobre un dique

El agua llena una altura H detrás de un dique de ancho w (figura 14.5). Determine la fuerza resultante que el agua ejerce sobre el dique.

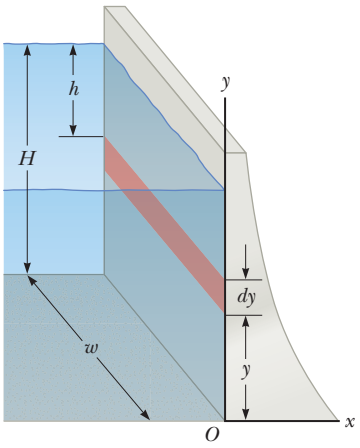


Figura 14.5 (Ejemplo 14.4) El agua ejerce una fuerza sobre un dique.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La presión varía con la profundidad, entonces no se puede calcular la fuerza simplemente al multiplicar el área por la presión. Como la presión en el agua se incrementa con la profundidad, entonces también aumenta la fuerza sobre la parte adyacente del dique.

Categorizar Debido a la variación de la presión con la profundidad, se debe integrar para resolver este ejemplo, así que se le clasifica como un problema de análisis.

Analizar Imagine un eje vertical y, con $y = 0$ en el fondo del dique. Divida la cara del dique en estrechas tiras horizontales a una distancia y sobre el fondo, como la tira roja de la figura 14.5. La presión sobre cada tira sólo se debe al agua; la presión atmosférica actúa sobre ambos lados del dique.

Utilice la ecuación 14.4 para calcular la presión debida al agua a la profundidad h:

$$P = \rho g h = \rho g(H - y)$$

Use la ecuación 14.2 para encontrar la fuerza ejercida sobre la tira sombreada de área $dA = w\,dy$:

$$dF = P\,dA = \rho g(H - y)w\,dy$$

Integre para determinar la fuerza total sobre el dique:

$$F = \int P\,dA = \int_0^H \rho g(H - y)w\,dy = \tfrac{1}{2}\rho g w H^2$$

Finalizar Note que el grosor del dique que se muestra en la figura 14.5 aumenta con la profundidad. Este diseño explica la mayor presión que el agua ejerce sobre el dique a mayor profundidad.

¿QUÉ PASARIA SI? ¿Y si se le pide encontrar esta fuerza sin emplear cálculo? ¿Cómo podría determinar este valor?

Respuesta Por la ecuación 14.4 sabe que la presión varía linealmente con la profundidad. Por lo tanto, la presión promedio debida al agua sobre la cara del dique es el promedio de la presión en la parte superior y la presión en el fondo:

$$P_{\text{prom}} = \frac{P_{\text{superior}} + P_{\text{fondo}}}{2} = \frac{0 + \rho g H}{2} = \tfrac{1}{2}\rho g H$$

14.4 continuación

La fuerza total sobre el dique es igual al producto de la presión promedio y el área de la cara del dique:

$$F = P_{\text{prom}} A = (\tfrac{1}{2}\rho g H)(Hw) = \tfrac{1}{2}\rho g w H^2$$

que es el mismo resultado obtenido utilizando cálculo.

14.3 Mediciones de presión

Durante el reporte del clima en los noticiarios de televisión, con frecuencia se proporciona la *presión barométrica*. Esta lectura es la presión actual de la atmósfera, que varía en un pequeño intervalo del valor estándar dado anteriormente. ¿Cómo se mide esta presión?

Un instrumento que se usa para medir la presión atmosférica es el barómetro común, inventado por Evangelista Torricelli (1608-1647). Un tubo largo cerrado en un extremo se llena con mercurio y luego se invierte en un recipiente con mercurio (figura 14.6a). El extremo cerrado del tubo es casi un vacío, así que la presión en lo alto de la columna de mercurio se considera cero. En la figura 14.6a la presión en el punto A, debida a la columna de mercurio, debe ser igual a la presión en el punto B, debida a la atmósfera. Si éste no fuera el caso, habría una fuerza neta que movería al mercurio de un punto al otro hasta establecer equilibrio. Por lo tanto, $P_0 = \rho_{\text{Hg}} g h$, donde ρ_{Hg} es la densidad del mercurio y h es la altura de la columna de mercurio. Conforme varía la presión atmosférica, la altura de la columna de mercurio varía, así que la altura se puede calibrar para medir la presión atmosférica. Determine la altura de una columna de mercurio para una atmósfera de presión, $P_0 = 1$ atm $= 1.013 \times 10^5$ Pa:

$$P_0 = \rho_{\text{Hg}} g h \quad \rightarrow \quad h = \frac{P_0}{\rho_{\text{Hg}} g} = \frac{1.013 \times 10^5 \text{ Pa}}{(13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)} = 0.760 \text{ m}$$

Apoyándose en tal cálculo, una atmósfera de presión se define como la presión equivalente de una columna de mercurio que tiene exactamente 0.760 0 m de alto a 0°C.

Un dispositivo para medir la presión de un gas contenido en un recipiente es el manómetro de tubo abierto que se ilustra en la figura 14.6b. Un extremo de un tubo con forma de U que contiene un líquido está abierto a la atmósfera, y el otro extremo está conectado a un recipiente de gas a presión P. En una situación de equilibrio las presiones en los puntos A y B deben ser iguales (de otro modo, la parte curva del líquido experimentaría una fuerza neta y aceleraría), y la presión en A es la presión desconocida del gas. Por lo tanto, al igualar la presión incógnita P con la presión en el punto B, se ve que $P = P_0 + \rho g h$. Otra vez, la altura h se puede calibrar a la presión P.

En cada inciso de la figura 14.6 la diferencia en las presiones (es decir, $P - P_0$) es igual a $\rho g h$. La presión P se llama **presión absoluta**, y la diferencia $P - P_0$ se llama **presión manométrica**. Por ejemplo, la presión que mide en la llanta de su bicicleta es presión manométrica.

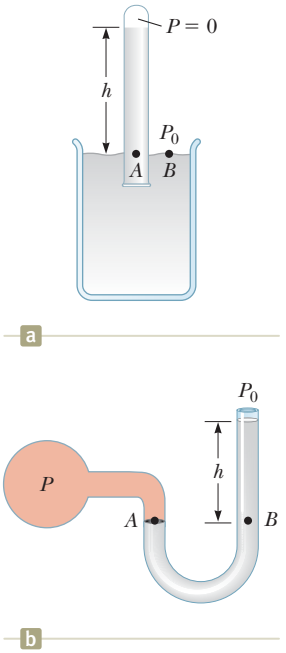


Figura 14.6 Dos dispositivos para medir la presión: (a) un barómetro de mercurio y (b) un manómetro de tubo abierto.

Examen rápido 14.3 Se construyen diversos barómetros comunes, con una variedad de fluidos. ¿Para cuál de los siguientes fluidos la columna de fluido en el barómetro será la más alta? **(a)** Mercurio, **(b)** agua, **(c)** alcohol etílico, **(d)** benceno.

14.4 Fuerzas de flotación y principio de Arquímedes

¿Alguna vez ha intentado empujar una pelota de playa hacia abajo del agua (figura 14.7a, página 424)? Es extremadamente difícil hacerlo debido a la gran fuerza hacia arriba que ejerce el agua sobre la pelota. La fuerza hacia arriba que un fluido ejerce sobre cualquier objeto sumergido se llama **fuerza de flotación (boyante).** Se puede



© iStockphoto.com/HultonArchive

Arquímedes
Matemático, físico e ingeniero griego (c.287–212 a.C.)
Arquímedes fue quizá el más grande científico de la Antigüedad. Fue el primero en calcular con precisión la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro, y también demostró cómo calcular el volumen y el área superficial de las esferas, cilindros y otras formas geométricas. Es bien conocido por descubrir la naturaleza de la fuerza de flotación y también fue un inventor genial. Una de sus invenciones prácticas, todavía en uso actual, es el tornillo de Arquímedes, un tubo anillado rotatorio e inclinado que originalmente se empleó para levantar agua de las galeras de los barcos. También inventó la catapulta y vislumbró sistemas de palancas, poleas y pesos para levantar cargas pesadas. Tales invenciones tuvieron una aplicación afortunada en la defensa de su ciudad natal, Siracusa, durante un acoso de dos años por los romanos.

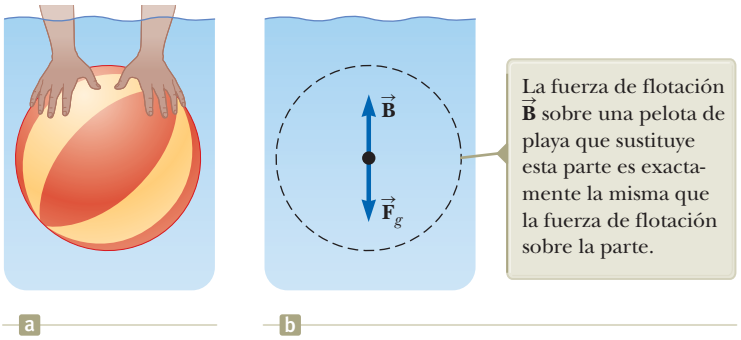


Figura 14.7 (a) Un nadador empuja una pelota de playa bajo el agua. (b) Fuerzas sobre una parte de agua del tamaño de la pelota de playa.

determinar la magnitud de una fuerza de flotación al aplicar algo de lógica. Imagine una parte de agua del tamaño de una pelota de playa bajo la superficie del agua, como en la figura 14.7b. Ya que esta parte está en equilibrio, debe haber una fuerza hacia arriba que equilibre la fuerza gravitacional hacia abajo sobre la misma. Esta fuerza hacia arriba es la fuerza de flotación, y su magnitud es igual al peso del agua en la parte. La fuerza de flotación es la fuerza que resulta sobre la misma debido a todas las fuerzas aplicadas por el fluido que rodea la parte.

Ahora imagine sustituir la parte de agua del tamaño de una pelota de playa con una pelota de playa del mismo tamaño. La fuerza neta aplicada por el fluido que rodea la pelota es la misma, sin importar si se aplica a una pelota de playa o a una parte de agua. En consecuencia, **la magnitud de la fuerza de flotación sobre un objeto siempre es igual al peso del fluido desplazado por el objeto.** Este enunciado se conoce como **principio de Arquímedes**.

Con la pelota de playa bajo el agua, la fuerza de flotación, igual al peso de una parte de agua del tamaño de la pelota de playa, es mucho mayor que el peso de la pelota de playa. Por lo tanto, existe una gran fuerza neta hacia arriba que explica por qué es tan difícil sostener la pelota de playa bajo el agua. Observe que el principio de Arquímedes no se refiere a la configuración del objeto que experimenta la fuerza de flotación. La composición del objeto no es un factor en la fuerza de flotación porque ésta la ejerce el fluido.

Para comprender mejor el origen de la fuerza de flotación, considere un cubo de material sólido sumergido en un líquido, como en la figura 14.8. De acuerdo con la ecuación 14.4, la presión P_{fondo} en el fondo del cubo es mayor que la presión P_{sup} en la parte superior por una cantidad $\rho_{\text{fluido}}gh$, donde h es la altura del cubo y ρ_{fluido} es la densidad del fluido. La presión en el fondo del cubo causa una fuerza hacia arriba igual a $P_{\text{fondo}}A$, donde A es el área de la cara inferior. La presión en la parte superior del cubo causa una fuerza hacia *abajo* igual a $P_{\text{sup}}A$. La resultante de estas dos fuerzas es la fuerza de flotación $\vec{\mathbf{B}}$ con magnitud

$$B = (P_{\text{fondo}} - P_{\text{sup}})A = (\rho_{\text{fluido}}\, gh)A$$

$$B = \rho_{\text{fluido}}\, gV_{\text{despl}} \qquad (14.5)$$

donde $V_{\text{despl}} = Ah$ es el volumen del fluido desplazado por el cubo. Ya que el producto $\rho_{\text{fluido}}V_{\text{despl}}$ es igual a la masa de fluido desplazado por el objeto,

$$B = Mg$$

donde Mg es el peso del fluido desplazado por el cubo. Este resultado es consistente con el enunciado anterior acerca del principio de Arquímedes, basado en la discusión de la pelota de playa.

Bajo condiciones normales, el peso de un pez en la fotografía al inicio de este capítulo es ligeramente mayor que la fuerza de flotación sobre el pez. Por ende,

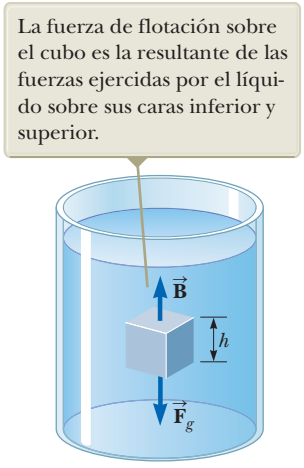


Figura 14.8 Las fuerzas externas que actúan sobre un cubo sumergido son la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$ y la fuerza de flotación $\vec{\mathbf{B}}$.

el pez se hundiría si no tuviese algún mecanismo para ajustar la fuerza de flotación. El pez logra esto mediante la regulación interna del tamaño de su vejiga natatoria llena de aire para aumentar su volumen y la magnitud de la fuerza de flotación que actúa sobre él, de acuerdo con la ecuación 14.5. De esta manera, el pez es capaz de nadar a diversas profundidades.

Antes de proceder con algunos ejemplos, es ilustrativo discutir dos situaciones comunes: un objeto totalmente sumergido y un objeto que flota (parcialmente sumergido).

Caso 1: Objeto totalmente sumergido Cuando un objeto está totalmente sumergido en un fluido de densidad ρ_{fluido}, el volumen V_{despl} del fluido desplazado es igual al volumen V_{obj} del objeto; así, de la ecuación 14.5, la magnitud de la fuerza de flotación hacia arriba es $B = \rho_{\text{fluido}} g V_{\text{obj}}$. Si el objeto tiene una masa M y densidad ρ_{obj}, su peso es igual a $F_g = Mg = \rho_{\text{obj}} g V_{\text{obj}}$, y la fuerza neta sobre el objeto es $B - F_g = (\rho_{\text{fluido}} - \rho_{\text{obj}}) g V_{\text{obj}}$. Entonces, si la densidad del objeto es menor que la densidad del fluido, la fuerza gravitacional hacia abajo es menor que la fuerza de flotación y el objeto sin apoyo acelera hacia arriba (figura 14.9a). Si la densidad del objeto es mayor que la densidad del fluido, la fuerza de flotación hacia arriba es menor que la fuerza gravitacional hacia abajo y el objeto sin apoyo se hunde (figura 14.9b). Si la densidad del objeto sumergido es igual a la densidad del fluido, la fuerza neta sobre el objeto es cero y el objeto permanece en equilibrio. Por lo tanto, la dirección de movimiento de un objeto sumergido en un fluido está determinada *sólo* por las densidades del objeto y el fluido.

Caso 2: Objeto que flota Ahora considere un objeto de volumen V_{obj} y densidad $\rho_{\text{obj}} < \rho_{\text{fluido}}$ en equilibrio estático que flota en la superficie de un fluido, es decir, un objeto que sólo está *parcialmente* sumergido (figura 14.10). En este caso, la fuerza de flotación hacia arriba se equilibra mediante la fuerza gravitacional hacia abajo que actúa sobre el objeto. Si V_{despl} es el volumen del fluido desplazado por el objeto (este volumen es el mismo que el volumen de la parte del objeto bajo la superficie del fluido), la fuerza de flotación tiene una magnitud $B = \rho_{\text{fluido}} g V_{\text{despl}}$. Ya que el peso del objeto es $F_g = Mg = \rho_{\text{obj}} g V_{\text{obj}}$ y como $F_g = B$, se ve que $\rho_{\text{fluido}} g V_{\text{despl}} = \rho_{\text{obj}} g V_{\text{obj}}$, o

$$\frac{V_{\text{despl}}}{V_{\text{obj}}} = \frac{\rho_{\text{obj}}}{\rho_{\text{fluido}}} \tag{14.6}$$

Esta ecuación demuestra que la fracción del volumen de un objeto en flotación que está debajo de la superficie del fluido es igual a la razón de la densidad del objeto con la del fluido.

Examen rápido 14.4 Usted es un náufrago y flota en medio del océano en una balsa. Su carga en la balsa incluye un cofre del tesoro lleno de oro que encontró antes que su barco se hundiera, y la balsa apenas se mantiene a flote. Para mantenerse flotando tan alto como sea posible en el agua, ¿usted debe **(a)** dejar el cofre del tesoro arriba de la balsa, **(b)** asegurar el cofre del tesoro en la parte inferior de la balsa o **(c)** con una soga amarrada a la balsa jalar el cofre del tesoro en el agua? (Suponga que lanzar el cofre del tesoro por la borda no es una opción que quiera considerar.)

Prevención de riesgos ocultos 14.2

El fluido ejerce la fuerza de flotación Recuerde que la fuerza de flotación la ejerce el fluido. No está determinada por las propiedades del objeto, excepto por la cantidad de fluido desplazado por el objeto. Por lo tanto, si varios objetos de distintas densidades, pero igual volumen, se sumergen en un fluido, todos experimentarán la misma fuerza de flotación. El que se hundan o floten está determinado por la relación entre la fuerza de flotación y la fuerza gravitacional.

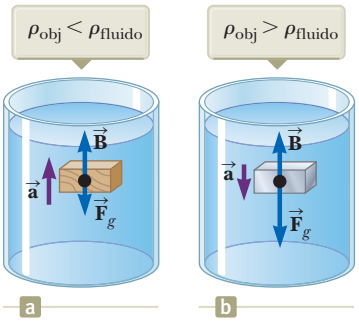


Figura 14.9 (a) Un objeto totalmente sumergido menos denso que el fluido en el que se sumerge experimenta una fuerza neta hacia arriba y se eleva hasta la superficie después de ser liberado. (b) Un objeto totalmente sumergido y que es más denso que el fluido experimenta una fuerza neta hacia abajo y se hunde.

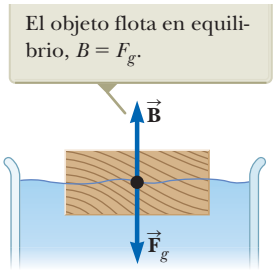


Figura 14.10 Un objeto que flota sobre la superficie de un fluido experimenta dos fuerzas, la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$ y la fuerza de flotación $\vec{\mathbf{B}}$.

Ejemplo 14.5 ¡Eureka! AM

Supuestamente a Arquímedes se le pidió determinar si una corona hecha para el rey consistía de oro puro. De acuerdo con la leyenda, él resolvió este problema al pesar la corona primero en aire y luego en agua, como se muestra en la figura 14.11. Suponga que la lectura en la balanza es 7.84 N cuando la corona estaba en aire y 6.84 N cuando estaba en agua. ¿Qué dijo Arquímedes al rey?

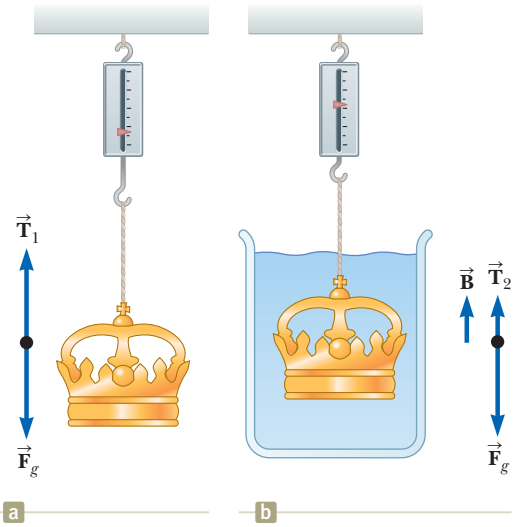


Figura 14.11 (Ejemplo 14.5) (a) Cuando la corona está suspendida en aire, la lectura en la balanza es su verdadero peso, porque $T_1 = F_g$ (la flotabilidad del aire es despreciable). (b) Cuando la corona se sumerge en agua, la fuerza de flotación $\vec{\mathbf{B}}$ cambia la lectura de la balanza a un valor menor $T_2 = F_g - B$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 14.11 ayuda a pensar lo que sucede en este ejemplo. Debido a la fuerza de flotación, la lectura de la balanza es menor en la figura 14.11b que en la figura 14.11a.

Categorizar Este problema es un ejemplo del caso 1 discutido anteriormente, porque la corona está sumergida por completo. La lectura de la balanza es la medida de una de las fuerzas sobre la corona, y ésta es fija. Por lo tanto, la corona se clasifica como una *partícula en equilibrio.*

Analizar Cuando la corona está suspendida en aire, la lectura en la balanza es el verdadero peso $T_1 = F_g$ (se desprecia la pequeña fuerza de flotación debida al aire circundante). Cuando la corona se sumerge en agua, la fuerza de flotación $\vec{\mathbf{B}}$ reduce la lectura de la balanza a un peso *aparente* de $T_2 = F_g - B$.

Aplique el modelo de partícula en equilibrio a la corona en agua:

$$\sum F = B + T_2 - F_g = 0$$

Resuelva para B:

$$B = F_g - T_2$$

Ya que esta fuerza de flotación es igual en magnitud al peso del agua desplazada, $B = \rho_a g V_{\text{despl}}$, donde V_{despl} es el volumen del agua desplazada y ρ_a es su densidad. También el volumen de la corona V_c es igual al volumen del agua desplazada, porque la corona está completamente sumergida, así $B = \rho_a g V_c$.

Encuentre la densidad de la corona mediante la ecuación 1.1

$$\rho_c = \frac{m_c}{V_c} = \frac{m_c g}{V_c g} = \frac{m_c g}{(B/\rho_a)} = \frac{m_c g \rho_a}{B} = \frac{m_c g \rho_w}{F_g - T_2}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\rho_c = \frac{(7.84\ \text{N})(1\,000\ \text{kg/m}^3)}{7.84\ \text{N} - 6.84\ \text{N}} = 7.84 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

Finalizar De la tabla 14.1 se ve que la densidad del oro es 19.3×10^3 kg/m^3. Por lo tanto, Arquímedes debió informar al rey que lo habían engañado. La corona estaba hueca o no estaba hecha de oro puro.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que la corona tiene el mismo peso, está hecha de oro puro y no está hueca. ¿Cuál sería la lectura de la balanza cuando la corona estuviera sumergida en agua?

Respuesta Encuentre la fuerza de flotación sobre la corona:

$$B = \rho_a g V_a = \rho_a g V_c = \rho_a g\left(\frac{m_c}{\rho_c}\right) = \rho_a\left(\frac{m_c g}{\rho_c}\right)$$

Sustituya valores numéricos:

$$B = (1.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)\frac{7.84\ \text{N}}{19.3 \times 10^3\ \text{kg/m}^3} = 0.406\ \text{N}$$

Determine la tensión en la cuerda que cuelga de la balanza:

$$T_2 = F_g - B = 7.84\ \text{N} - 0.406\ \text{N} = 7.43\ \text{N}$$

Ejemplo 14.6 Una sorpresa titánica

Un iceberg que flota en agua de mar, como se muestra en la figura 14.12a, es extremadamente peligroso porque la mayor parte del hielo está bajo la superficie. Este hielo oculto puede dañar una embarcación que aún está a una distancia considerable del hielo visible. ¿Qué fracción del iceberg se encuentra bajo el nivel del agua?



Figura 14.12 (Ejemplo 14.6) (a) Gran parte del volumen de este iceberg está bajo el agua. (b) Una embarcación puede resultar dañada incluso cuando no esté cerca del hielo visible.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Es probable que usted esté familiarizado con la expresión "sólo es la punta del iceberg". El origen de este dicho popular es que la mayor parte del volumen de un iceberg flotante está bajo la superficie del agua (figura 14.12b).

Categorizar Este ejemplo corresponde al caso 2, porque sólo una parte del iceberg está bajo el agua. También es un simple problema de sustitución que involucra la ecuación 14.6.

Evalúe la ecuación 14.6 empleando las densidades del hielo y el agua de mar (tabla 14.1):

$$f = \frac{V_{\text{despl}}}{V_{\text{hielo}}} = \frac{\rho_{\text{hielo}}}{\rho_{\text{agua de mar}}} = \frac{917\ \text{kg/m}^3}{1\,030\ \text{kg/m}^3} = 0.890 \text{ o } 89.0\%$$

Por lo tanto, la fracción visible de hielo sobre la superficie del agua es aproximadamente 11%. Es ese 89% no visto bajo el agua lo que representa el peligro para una embarcación que pase.

14.5 Dinámica de fluidos

Hasta el momento el estudio de los fluidos se restringió a fluidos en reposo. Ahora la atención se dirige a los fluidos en movimiento. Cuando el fluido está en movimiento, su flujo se caracteriza como uno de los dos tipos principales. Se dice que el fluido es **estable** o **laminar** si cada partícula del fluido sigue una trayectoria uniforme de tal modo que las trayectorias de diferentes partículas nunca se cruzan unas con otras, como se muestra en la figura 14.13. En el flujo estable todas las partículas de fluido que llegan a un punto dado tienen la misma velocidad.



Figura 14.13 Flujo laminar alrededor de un automóvil en un túnel de viento.

Arriba de cierta rapidez crítica el flujo de fluido se vuelve **turbulento**. El flujo turbulento es flujo irregular que se caracteriza por pequeñas regiones tipo remolino, como se muestra en la figura 14.14.

El término **viscosidad** se usa comúnmente en la descripción del flujo de fluido para caracterizar el grado de fricción interna en el fluido. Esta fricción interna, o *fuerza viscosa*, se asocia con la resistencia que tienen dos capas adyacentes de fluido para moverse una respecto a la otra. La viscosidad hace que parte de la energía cinética del fluido se convierta en energía interna. Este mecanismo es similar a aquel donde un objeto que se desliza sobre una superficie horizontal rugosa pierde energía cinética, como se analizó en las secciones 8.3 y 8.4.

Ya que el movimiento de los fluidos reales es muy complejo y no se entiende por completo, en el método de este libro se hacen algunas suposiciones simplificadoras. En este modelo simplificado de **flujo de fluido ideal** se hacen las siguientes cuatro suposiciones:

1. El fluido no es viscoso. En un fluido no viscoso se desprecia la fricción interna. Un objeto que se mueve a través del fluido experimenta fuerza no viscosa.
2. El flujo es estable. En flujo estable (laminar) todas las partículas que pasan por un punto tienen la misma velocidad.
3. El fluido es incompresible. La densidad de un fluido incompresible es constante.
4. El flujo es irrotacional. En flujo irrotacional el fluido no tiene cantidad de movimiento angular en torno a cualquier punto. Si una pequeña rueda



Figura 14.14 Los gases calientes de un cigarrillo se hacen visibles mediante partículas de humo. Primero el humo se mueve en flujo laminar en la parte baja y luego en flujo turbulento arriba.

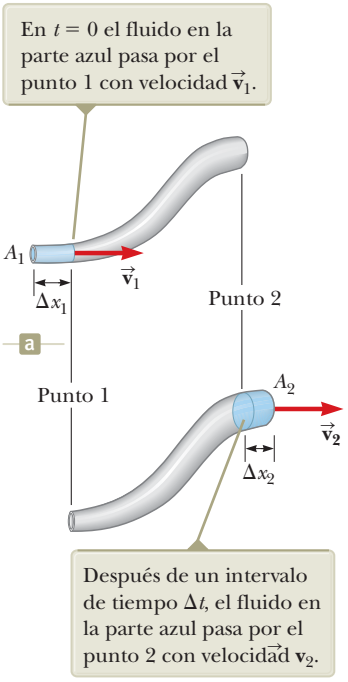


Figura 14.16 Un fluido en flujo estable se mueve a través de una tubería con área de sección transversal variable. (a) En $t = 0$ la pequeña parte azul del fluido a la izquierda se desplaza por el área A_1. (b) Después de un intervalo de tiempo Δt, la parte azul se mueve a través del área A_2.

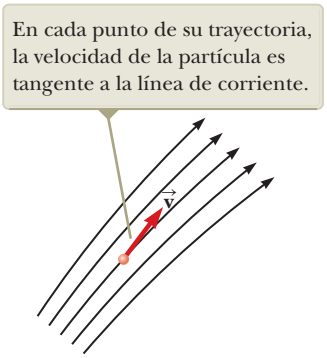


Figura 14.15 Una partícula en flujo laminar sigue una línea de corriente.

de paletas colocada en cualquier parte en el fluido no gira alrededor del centro de masa de la rueda, el flujo es irrotacional.

La trayectoria que toma una partícula de fluido en flujo estable se llama **línea de corriente**. La velocidad de la partícula siempre es tangente a la línea de corriente, como se muestra en la figura 14.15. Un conjunto de líneas de corriente, como las que se muestran en la figura 14.15, forman un *tubo de flujo*. Las partículas de fluido no pueden fluir a través de este tubo; si lo hicieran, las líneas de corriente se cruzarían mutuamente.

Considere el flujo de fluido ideal a través de una tubería de tamaño no uniforme, como se muestra en la figura 14.16. Ahora examinemos un segmento de fluido en la tubería. La figura 14.16a muestra el segmento en $t = 0$ formado por la parte gris entre los puntos 1 y 2, y la pequeña parte azul a la izquierda del punto 1. En ese tiempo, el fluido en la pequeña porción azul fluye con rapidez v_1 por una sección transversal de área A_1. Durante el intervalo de tiempo Δt, la pequeña longitud Δx_1 de fluido en la parte azul se mueve y pasa el punto 1. Durante el mismo intervalo de tiempo, el fluido en el extremo derecho del segmento se mueve a través del punto 2 de la tubería. La figura 14.16b muestra la situación al final del intervalo de tiempo Δt. La parte azul en el extremo derecho representa el fluido que se ha movido por el punto 2 a través del área A_2 con rapidez v_2.

La masa del fluido contenida en la parte azul de la figura 14.16a está dada por $m_1 = \rho A_1 \Delta x_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t$, donde ρ es la densidad (invariable) del fluido ideal. Similarmente, el fluido en la parte azul de la figura 14.16b tiene una masa $m_2 = \rho A_2 \Delta x_2 = \rho A_2 v_2 \Delta t$. Sin embargo, como el fluido es incompresible y el flujo es estable, la masa de fluido que pasa por el punto 1 en un intervalo de tiempo Δt debe ser igual a la que pasa por el punto 2 en el mismo intervalo de tiempo. Es decir, $m_1 = m_2$ o $\rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t$, lo cual significa que

Ecuación de continuidad para fluidos ▶

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante} \tag{14.7}$$

Esta expresión se llama **ecuación de continuidad para fluidos**. Establece que el producto del área y la rapidez del fluido en todos los puntos a lo largo de una tubería es constante para un fluido incompresible. La ecuación 14.7 muestra que la rapidez es alta donde el tubo es estrecho (A pequeña) y baja donde el tubo es ancho (A grande). El producto Av, que tiene las dimensiones de volumen por unidad de tiempo, se llama *flujo volumétrico* o *razón de flujo*. La condición Av = constante es equivalente a la afirmación de que el volumen de fluido que entra por un extremo de un tubo en un intervalo de tiempo dado iguala al volumen que abandona el otro extremo del tubo en el mismo intervalo de tiempo si no hay fugas presentes.

Usted demuestra la ecuación de continuidad cada vez que riega su jardín y pone su pulgar sobre el extremo de una manguera de jardín, como en la figura 14.17. Al bloquear parcialmente la abertura con su pulgar, reduce el área de sección transversal por la que pasa el agua. Como resultado, la rapidez del agua aumenta en la salida de la manguera y se puede rociar a gran distancia.



© Cengage Learning/George Semple

Figura 14.17 La rapidez del agua que se rocía desde el extremo de una manguera de jardín aumenta conforme el tamaño de la abertura disminuye con el pulgar.

Ejemplo 14.7 Regar un jardín AM

Un jardinero utiliza una manguera para llenar con agua una cubeta de 30.0 L. El jardinero nota que tarda 1.00 min en llenar la cubeta. Luego acopla una boquilla con una abertura de 0.500 cm^2 de área de sección transversal. La boquilla se sostiene de tal modo que el agua se proyecta horizontalmente desde un punto a 1.00 m sobre el suelo. ¿A qué distancia horizontal se puede proyectar el agua?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine cualquier experiencia pasada que haya tenido al proyectar agua desde una manguera horizontal o una tubería utilizando el pulgar o una boquilla, ésta puede estar acoplada al extremo de la manguera. Mientras más rápido viaje el agua que sale de la manguera, más se alejará del extremo de ésta.

Categorizar Una vez que el agua sale de la manguera, está en caída libre. Por lo tanto, un elemento dado del agua se clasifica como un proyectil. El elemento se modela como una *partícula bajo aceleración constante* (debido a la gravedad) en la dirección vertical y una *partícula bajo velocidad constante* en la dirección horizontal. La distancia horizontal sobre la que se proyecta el elemento depende de la rapidez con que se proyecta. Este ejemplo involucra un cambio en el área de la tubería, así que también se clasifica como un uso de la ecuación de continuidad para fluidos.

Analizar

Exprese la razón de flujo volumétrico R en términos del área y rapidez del agua en la manguera:

$$R = A_1 v_1$$

Resuelva para la rapidez del agua en la manguera:

$$v_1 = \frac{R}{A_1}$$

Esta rapidez se etiqueta v_1 porque se identifica el punto 1 dentro de la manguera. El punto 2 se identifica en el aire justo afuera de la boquilla. Se debe encontrar la rapidez $v_2 = v_{xi}$ con la que el agua sale de la boquilla. El subíndice i anticipa que será la componente de velocidad *inicial* del agua que se proyecta desde la manguera, y el subíndice x indica que el vector velocidad inicial del agua proyectada es horizontal.

Resuelva la ecuación de continuidad para fluidos para v_2:

$$(1)\quad v_2 = v_{xi} = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{R}{A_1}\right) = \frac{R}{A_2}$$

Ahora el pensamiento se traslada de fluidos al movimiento de proyectiles. En la dirección vertical, un elemento del agua parte del reposo y cae una distancia vertical de 1.00 m.

Escriba la ecuación 2.16 para la posición vertical de un elemento de agua, modelado como una partícula bajo aceleración constante:

$$y_f = y_i + v_{yi} t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

La posición inicial de agua es $y_i = 0$ y acepte que el agua comienza con una componente de velocidad vertical nula. Resuelva para el tiempo cuando el agua alcanza el suelo:

$$(2)\quad y_f = 0 + 0 - \tfrac{1}{2} g t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{-2y_f}{g}}$$

Use la ecuación 2.7 para encontrar la posición horizontal del elemento en este tiempo, modelado como una partícula bajo velocidad constante:

$$x_f = x_i + v_{xi} t = 0 + v_2 t = v_2 t$$

Sustituya de las ecuaciones (1) y (2):

$$x_f = \frac{R}{A_2}\sqrt{\frac{-2y_f}{g}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$x_f = \frac{30.0\ \text{L/min}}{0.500\ \text{cm}^2}\sqrt{\frac{-2(-1.00\ \text{m})}{9.80\ \text{m/s}^2}}\left(\frac{10^3\ \text{cm}^3}{1\ \text{L}}\right)\left(\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\right) = 452\ \text{cm} = 4.52\ \text{m}$$

Finalizar El intervalo de tiempo para que el elemento de agua caiga al suelo no cambia si la rapidez de proyección varía, porque la proyección es horizontal. Aumentar la rapidez de proyección resulta en que el agua golpea el suelo más lejos del extremo de la manguera, pero requiere el mismo intervalo de tiempo para llegar al suelo.



© iStockphoto.com/ZU_09

Daniel Bernoulli
Físico suizo (1700-1782)
Bernoulli hizo importantes descubrimientos en dinámica de fluidos. La obra más famosa de Bernoulli, *Hidrodinámica*, se publicó en 1738; es un estudio tanto teórico como práctico acerca del equilibrio, la presión y la rapidez en los fluidos. Demostró que a medida que aumenta la rapidez de un fluido su presión disminuye. Conocido como "principio de Bernoulli", el trabajo de Bernoulli se usa para producir un vacío parcial en laboratorios químicos al conectar un recipiente a un tubo a través del cual corre agua rápidamente.

14.6 Ecuación de Bernoulli

Tal vez ha experimentado el evento de conducir en una autopista y que un gran camión pase junto a usted con elevada rapidez. En esta situación, es posible que haya tenido la aterradora sensación de que su automóvil era jalado hacia el camión mientras éste pasaba. En esta sección se investigará el origen de este efecto.

A medida que un fluido se mueve a través de una región donde su rapidez o elevación sobre la superficie de la Tierra cambian, la presión en el fluido varía con dichos cambios. La relación entre rapidez del fluido, presión y elevación la dedujo por primera vez, en 1738, el físico suizo Daniel Bernoulli. Considere el flujo de un segmento de un fluido ideal a través de una tubería no uniforme en un intervalo de tiempo Δt, como se ilustra en la figura 14.18. Esta figura es muy similar a la figura 14.16, la cual se utilizó para desarrollar la ecuación de continuidad. Se han agregado dos aspectos: las fuerzas sobre los extremos externos de las partes azules del fluido y las alturas de dichas partes sobre la posición de referencia $y = 0$.

La fuerza ejercida sobre el segmento por el fluido a la izquierda de la parte azul en la figura 14.18a tiene una magnitud P_1A_1. El trabajo hecho por esta fuerza sobre el segmento en un intervalo de tiempo Δt es $W_1 = F_1\,\Delta x_1 = P_1A_1\,\Delta x_1 = P_1V$, donde V es el volumen de la parte azul del fluido que pasa por el punto 1 en la figura 14.18a. De manera similar, el trabajo realizado sobre el segmento por el fluido a la derecha del segmento en el mismo intervalo de tiempo Δt es $W_2 = -P_2A_2\,\Delta x_2 = -P_2V$, donde V es el volumen de la parte azul de fluido que pasa por el punto 2 en la figura 14.18b. (Los volúmenes de las partes de color azul del fluido en las figuras 14.18a y 14.18b son iguales porque el fluido es incompresible.) Este trabajo es negativo porque la fuerza sobre el segmento de fluido es hacia la izquierda y el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es hacia la derecha. Por lo tanto, el trabajo neto efectuado sobre el segmento por estas fuerzas en el mismo intervalo de tiempo Δt es

$$W = (P_1 - P_2)V$$

Parte de este trabajo cambia la energía cinética del segmento de fluido, y otra parte cambia la energía potencial gravitacional del sistema segmento-Tierra. Ya que

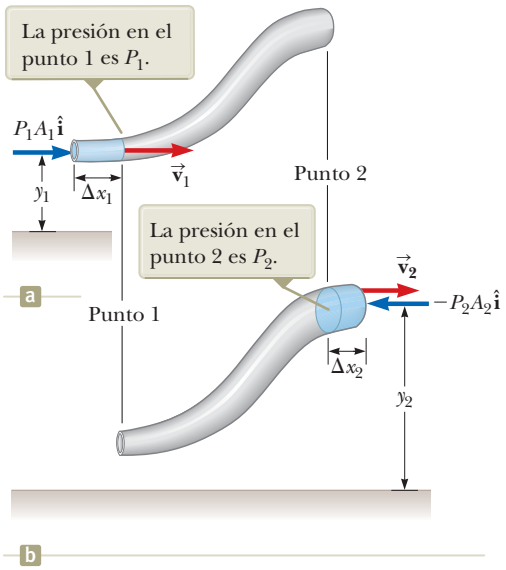


Figura 14.18 Un fluido en flujo laminar a través de una tubería. (a) Un segmento del fluido al tiempo $t = 0$. Una pequeña parte del fluido, de color azul, está a una altura y_1 sobre una posición de referencia. (b) Después de un intervalo de tiempo Δt, el segmento completo se ha movido hacia la derecha. La parte del fluido de color azul es la que ha pasado por el punto 2 con altura y_2.

se supone flujo en líneas de corriente, la energía cinética K_{gris} de la parte gris del segmento es la misma en ambos incisos de la figura 14.18. Por lo tanto, el cambio en la energía cinética del segmento de fluido es

$$\Delta K = (\tfrac{1}{2}mv_2^2 + K_{\text{gris}}) - (\tfrac{1}{2}mv_1^2 + K_{\text{gris}}) = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

donde m es la masa de las partes de fluido de color azul en ambos incisos de la figura 14.18. (Como los volúmenes de ambas partes son iguales, entonces también tienen la misma masa.)

Al considerar la energía potencial gravitacional del sistema segmento-Tierra, una vez más durante el intervalo de tiempo no existe cambio para la energía potencial gravitacional U_{gris} asociada con la parte gris del fluido. En consecuencia, el cambio en la energía potencial gravitacional del sistema es

$$\Delta U = (mgy_2 + U_{\text{gris}}) - (mgy_1 + U_{\text{gris}}) = mgy_2 - mgy_1$$

De la ecuación 8.2, el trabajo total efectuado sobre el sistema por el fluido externo al segmento es igual al cambio en energía mecánica del sistema: $W = \Delta K + \Delta U$. Al sustituir para cada uno de estos términos se obtiene

$$(P_1 - P_2)V = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_2 - mgy_1$$

Si divide cada término entre el volumen V de la parte y recuerda que $\rho = m/V$, esta expresión se reduce a

$$P_1 - P_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_2 - \rho gy_1$$

Al reordenar términos resulta

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gy_2 \qquad (14.8)$$

que es la **ecuación de Bernoulli** como se aplica a un fluido ideal. Esta ecuación con frecuencia se expresa como

$$P + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{constante} \qquad (14.9)$$

◀ **Ecuación de Bernoulli**

La ecuación de Bernoulli muestra que la presión de un fluido disminuye conforme crece la rapidez del fluido. Además, la presión baja a medida que aumenta la elevación. Este último punto explica por qué la presión del agua de las llaves en los pisos superiores de un edificio alto es débil a menos que se tomen medidas para proporcionar mayor presión para dichos edificios.

Cuando el fluido está en reposo, $v_1 = v_2 = 0$ y la ecuación 14.8 se convierte en

$$P_1 - P_2 = \rho g(y_2 - y_1) = \rho gh$$

Este resultado está de acuerdo con la ecuación 14.4.

No obstante que la ecuación 14.9 se dedujo para un fluido incompresible, el comportamiento general de la presión con la rapidez es verdadero incluso para gases: si la rapidez aumenta, la presión disminuye. Este efecto Bernoulli explica la experiencia con el camión en la autopista, citada al inicio de esta sección. A medida que el aire pasa entre usted y el camión, debe pasar a través de un canal relativamente estrecho. De acuerdo con la ecuación de continuidad, la rapidez del aire es mayor. Por el efecto Bernoulli, esta mayor rapidez del aire ejerce menos presión sobre su auto que el aire que se mueve con lentitud en el otro lado de su vehículo. Por lo tanto, ¡existe una fuerza neta que lo empuja hacia el camión!

Examen rápido 14.5 Observe dos globos de helio que flotan uno junto al otro en los extremos de cuerdas aseguradas a una mesa. Las superficies de los globos enfrentados están separadas de 1 a 2 cm. Usted sopla a través del pequeño espacio entre los globos. ¿Qué ocurre con los globos? **(a)** Se mueven uno hacia el otro. **(b)** Se separan. **(c)** No resultan afectados.

Ejemplo 14.8 El tubo Venturi

La tubería horizontal constreñida que se ilustra en la figura 14.19, conocida como *tubo Venturi*, se utiliza para medir la rapidez de flujo de un fluido incompresible. Determine la rapidez de flujo en el punto 2 de la figura 14.19a si se conoce la diferencia de presión $P_1 - P_2$.

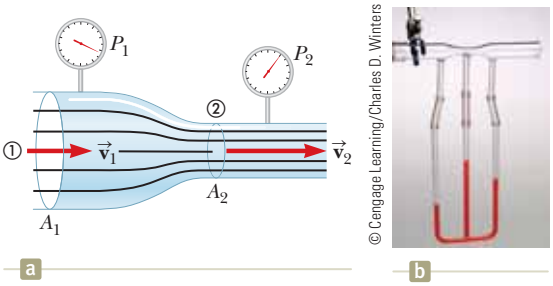


Figura 14.19 (Ejemplo 14.8) (a) La presión P_1 es mayor que la presión P_2 porque $v_1 < v_2$. Este dispositivo se utiliza para medir la rapidez del flujo de fluido. (b) Un tubo Venturi, ubicado en la parte superior de la fotografía. El mayor nivel de fluido en la columna de en medio muestra que la presión en lo alto de la columna, que está en la región estrecha del tubo Venturi, es menor.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La ecuación de Bernoulli muestra cómo disminuye la presión de un fluido ideal a medida que aumenta su rapidez. Por lo tanto, debe ser posible calibrar un dispositivo para obtener la rapidez del fluido si se puede medir la presión.

Categorizar El problema afirma que el fluido es incompresible, por lo que se le clasifica como uno en el que puede aplicarse la ecuación de continuidad para fluidos y la ecuación de Bernoulli.

Analizar Aplique la ecuación 14.8 a los puntos 1 y 2, note que $y_1 = y_2$ porque la tubería es horizontal:

$$(1)\quad P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

Resuelva la ecuación de continuidad para v_1:

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

Sustituya esta expresión en la ecuación (1):

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

Resuelva para v_2:

$$v_2 = A_1\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Finalizar A partir del diseño del tubo (áreas A_1 y A_2) y las mediciones de la diferencia de presión $P_1 - P_2$, con esta ecuación se puede calcular la rapidez del fluido. Para ver la correspondencia entre la rapidez del fluido y la diferencia de presión, coloque sobre sus costados dos latas de refresco vacías, separadas aproximadamente 2 cm sobre una mesa. Sople suavemente una corriente de aire horizontalmente entre las latas y obsérvelas rodar lentamente debido a una modesta diferencia de presión entre el aire que se estanca en sus bordes exteriores y el aire en movimiento entre ellas. Ahora sople más fuerte y observe la creciente diferencia de presión que mueve a las latas más rápidamente.

Ejemplo 14.9 Ley de Torricelli AM

Un tanque cerrado que contiene un líquido de densidad ρ tiene un orificio en su costado a una distancia y_1 desde el fondo del tanque (figura 14.20). El orificio está abierto a la atmósfera y su diámetro es mucho menor que el diámetro superior del tanque. El aire sobre el líquido se mantiene a una presión P. Determine la rapidez del líquido que sale del orificio cuando el nivel del líquido está a una distancia h sobre el orificio.

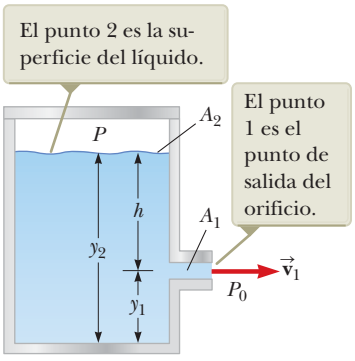


Figura 14.20 (Ejemplo 14.9) Salida de un líquido por un orificio en un tanque con rapidez v_1.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el tanque es un extintor de incendios. Cuando el orificio se abre, el líquido sale del orificio con cierta rapidez. Si la presión P en lo alto del líquido aumenta, éste sale con una mayor rapidez. Si la presión P cae muy baja, el líquido sale con una rapidez baja y se debe sustituir el extintor.

14.9 continuación

Categorizar Al observar la figura 14.20 se conoce la presión en dos puntos y la velocidad en uno de dichos puntos. Se desea encontrar la velocidad en el segundo punto. Por lo tanto, este ejemplo se puede clasificar como uno en el que es válido aplicar la ecuación de Bernoulli.

Analizar Ya que $A_2 >> A_1$, el líquido está cercano al reposo en lo alto del tanque, donde la presión es P. En el orificio, P_1 es igual a la presión atmosférica P_0.

Aplique la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2: $$P_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P + \rho g y_2$$

Resuelva para v_1 y note que $y_2 - y_1 = h$: $$v_1 = \sqrt{\frac{2(P - P_0)}{\rho} + 2gh}$$

Finalizar Cuando P es mucho mayor que P_0 (de modo que el término $2gh$ se puede despreciar), la rapidez de salida del agua es principalmente una función de P. Si el tanque está abierto a la atmósfera, entonces $P = P_0$ and $v_1 = \sqrt{2gh}$. En otras palabras, para un tanque abierto, la rapidez del líquido que sale de un orificio a una distancia h bajo la superficie es igual a la que adquiere un objeto en caída libre a través de una distancia vertical h. Este fenómeno se conoce como **ley de Torricelli**.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la posición del orificio en la figura 14.20 se pudiera ajustar verticalmente? Si el tanque está abierto a la atmósfera y colocado en una mesa, ¿qué posición del orificio haría que el agua cayera sobre la mesa a la mayor distancia del tanque?

Respuesta Modele una parte de agua que sale del orificio como un proyectil. Del modelo de *partícula bajo aceleración constante*, encuentre el tiempo en que la parte golpea la mesa desde un orificio en una posición arbitraria y_1:

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$0 = y_1 + 0 - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$t = \sqrt{\frac{2y_1}{g}}$$

Del modelo de *partícula bajo velocidad constante*, determine la posición horizontal de la parte en el tiempo cuando golpea la mesa:

$$x_f = x_i + v_{xi}t = 0 + \sqrt{2g(y_2 - y_1)}\sqrt{\frac{2y_1}{g}}$$
$$= 2\sqrt{(y_2 y_1 - y_1^2)}$$

Maximice la posición horizontal al tomar la derivada de x_f con respecto a y_1 (porque y_1, la altura del orificio, es la variable que se puede ajustar) e iguale a cero:

$$\frac{dx_f}{dy_1} = \tfrac{1}{2}(2)(y_2 y_1 - y_1^2)^{-1/2}(y_2 - 2y_1) = 0$$

Resuelva para y_1: $$y_1 = \tfrac{1}{2}y_2$$

Por lo tanto, para maximizar la distancia horizontal el orificio debería estar a la mitad entre el fondo del tanque y la superficie superior del agua. Debajo de esta posición el agua se proyecta a una mayor rapidez pero cae durante un intervalo de tiempo breve, lo que reduce el alcance horizontal. Arriba de este punto el agua está en el aire durante un intervalo de tiempo más largo, pero se proyecta con una rapidez horizontal menor.

14.7 Otras aplicaciones de la dinámica de fluidos

Considere las líneas de corriente que circulan alrededor del ala de un avión, como se muestra en la figura 14.21, página 434. Suponga que la corriente de aire horizontal se aproxima al ala desde la derecha con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_1$. La inclinación del ala hace que la corriente de aire se desvíe hacia abajo con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_2$. La corriente de aire es desviada por el ala, entonces ésta debe ejercer una fuerza sobre la corriente de aire. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la corriente de aire ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el ala que es igual en magnitud y opuesta en dirección. Esta fuerza tiene una componente vertical llamada **sustentación** (o sustentación aerodinámica) y una componente horizontal llamada **arrastre**. La sustentación depende de varios

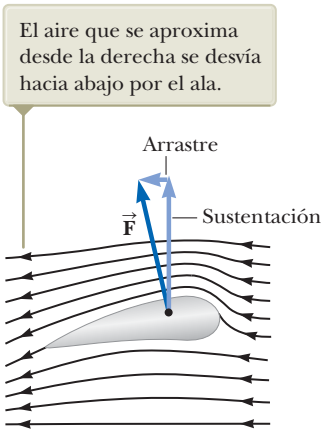


Figura 14.21 Flujo de línea de corriente alrededor del ala de un avión en movimiento. Por la tercera ley de Newton, la desviación del aire por el ala resulta en una fuerza hacia arriba sobre el ala proveniente del aire: *sustentación*. Debido a la resistencia del aire, también hay una fuerza opuesta a la velocidad del ala: *arrastre*.

factores, como la rapidez del avión, el área del ala, la curvatura del ala y el ángulo entre el ala y la horizontal. La curvatura de las superficies del ala hace que la presión sobre el ala sea menor que la presión debajo de ésta debido al efecto Bernoulli. Esta diferencia de presión ayuda a la sustentación sobre el ala. A medida que el ángulo entre el ala y la horizontal aumenta, se establece un flujo turbulento sobre el ala para reducir la sustentación.

En general, un objeto que se mueve a través de un fluido experimenta sustentación como resultado de cualquier efecto que haga que el fluido cambie su dirección mientras circula por el objeto. Algunos factores que influyen en la sustentación son la forma del objeto, su orientación respecto al flujo de fluido, cualquier movimiento de giro que pueda tener y la textura de su superficie. Por ejemplo, a una bola de golf golpeada con un palo se le da un rápido giro hacia atrás debido a la inclinación del palo. Los hoyuelos en la bola aumentan la fuerza de fricción entre la bola y el aire, de modo que el aire se adhiere a la superficie de la bola. La figura 14.22 muestra el aire que se adhiere a la bola y se desvía hacia abajo como resultado. Ya que la bola empuja el aire hacia abajo, el aire debe empujar hacia arriba sobre la bola. Sin los hoyuelos, la fuerza de fricción es menor y la bola de golf no viaja tanto. Puede parecer contrario a la intuición aumentar el alcance al incrementar la fuerza de fricción, pero la sustentación ganada al girar más la bola compensa la pérdida de alcance debida al efecto de fricción sobre el movimiento traslacional de la bola. Por la misma razón, la cubierta de una pelota de béisbol ayuda a que la pelota que gira "agarre" el aire por el que pasa y le ayuda a desviarlo cuando se lanza una "bola curva".

Algunos dispositivos operan mediante los diferenciales de presión que resultan de las diferencias en la rapidez de un fluido. Por ejemplo, una corriente de aire que pasa sobre un extremo abierto de un tubo, con el otro extremo sumergido en un líquido, reduce la presión sobre el tubo, como se ilustra en la figura 14.23. Esta reducción en presión hace que el líquido se eleve en la corriente del aire. Por lo tanto, se dispersa en un fino rocío de gotitas. Usted puede identificar que este *atomizador* se usa en botellas de perfume y rociadores de pintura.

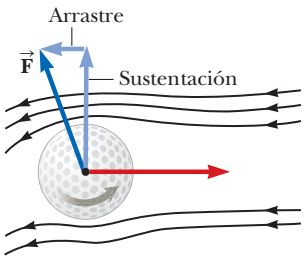


Figura 14.22 Debido a la desviación del aire, una bola de golf que gira experimenta una fuerza de sustentación que le permite viajar mucho más lejos de lo que viajaría si no girara.

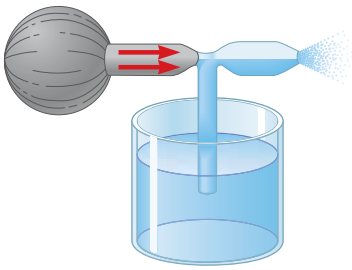


Figura 14.23 Una corriente de aire que pasa sobre un tubo sumergido en un líquido hace que el líquido se eleve en el tubo.

Resumen

Definiciones

La **presión** P en un fluido es la fuerza por unidad de área que ejerce el fluido sobre una superficie:

$$P \equiv \frac{F}{A} \tag{14.1}$$

En el sistema SI la presión tiene unidades de newtons por metro cuadrado (N/m^2), y $1\ N/m^2 = 1$ **pascal** (Pa).

Conceptos y principios

La presión en un fluido en reposo varía con la profundidad h en el fluido de acuerdo con la expresión

$$P = P_0 + \rho g h \qquad (14.4)$$

donde P_0 es la presión en $h = 0$ y ρ es la densidad del fluido, que se supone uniforme.

La **ley de Pascal** afirma que cuando se aplica presión a un fluido encerrado, la presión se transmite sin disminución a cualquier punto en el fluido y a todos los puntos en las paredes del recipiente.

Cuando un objeto está parcial o completamente sumergido en un fluido, éste ejerce sobre el objeto una fuerza hacia arriba llamada **fuerza de flotación** (**boyante**). De acuerdo con el **principio de Arquímedes**, la magnitud de la fuerza boyante es igual al peso del líquido desplazado por el objeto:

$$B = \rho_{\text{fluido}}\, g V_{\text{despl}} \qquad (14.5)$$

La rapidez de flujo (flujo volumétrico) a través de una tubería que varía en el área de sección transversal es constante; esto es equivalente a afirmar que el producto del área transversal A y la rapidez v en cualquier punto es una constante. Este resultado se expresa en la **ecuación de continuidad para fluidos**:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante} \qquad (14.7)$$

La suma de la presión, la energía cinética por unidad de volumen y la energía potencial gravitacional por unidad de volumen tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de una línea de corriente para un fluido ideal. Este resultado se resume en la **ecuación de Bernoulli**:

$$P + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante} \qquad (14.9)$$

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. La figura PO14.1 muestra vistas aéreas de dos diques. Ambos diques son igual de anchos (la dimensión vertical en el diagrama) e igual de altos (hacia la página en el diagrama). El dique de la izquierda contiene un lago muy grande, y el de la derecha contiene un río estrecho. ¿Cuál dique debe ser más sólido? (a) El dique de la izquierda, (b) el dique de la derecha, (c) ambos, (d) no se puede predecir.

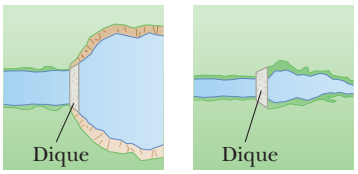


Figura PO14.1

2. Una pelota de playa llena de aire se sumerge 1 m bajo la superficie de una alberca y luego se libera desde el reposo. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son válidos, suponiendo que el tamaño de la pelota permanece constante? (Seleccione todos los enunciados correctos.) (a) Conforme la pelota se eleva en la alberca se incrementa la fuerza boyante sobre ella. (b) Cuando se libera la pelota la fuerza de flotación excede la fuerza gravitacional y la pelota acelera hacia arriba. (c) La fuerza boyante sobre la pelota disminuye a medida que ésta se aproxima a la superficie de la alberca. (d) La fuerza de flotación sobre la pelota iguala a su peso y permanece constante conforme la pelota se eleva. (e) La fuerza boyante sobre la pelota, mientras ésta está sumergida, es aproximadamente igual al peso de un volumen de agua que podría llenar la pelota.

3. Un bloque de madera flota en agua y un objeto de acero se une al fondo del bloque mediante una cuerda, como se indica en la figura PO14.3. Si el bloque permanece flotando, ¿cuáles de los siguientes enunciados son válidos? (Elija todos los enunciados correctos.) (a) La fuerza boyante sobre el objeto de acero es igual a su peso. (b) La fuerza de flotación sobre el bloque es igual a su peso. (c) La tensión en la cuerda es igual al peso del objeto de acero. (d) La tensión en la cuerda es menor que el peso del objeto de acero. (e) La fuerza boyante sobre el bloque es igual al volumen de agua que él desplaza.

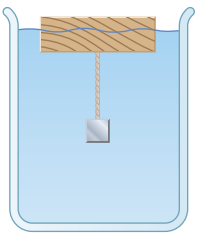


Figura PO14.3

4. Una manzana se mantiene completamente sumergida justo debajo de la superficie del agua en un recipiente. Después la manzana se mueve a un punto más profundo en el agua. Comparada con la fuerza necesaria para mantener la manzana justo bajo la superficie, ¿cuál es la fuerza necesaria para mantenerla en el punto más profundo? (a) Mayor, (b) igual, (c) menor, (d) imposible de determinar.

5. Una pelota de playa está hecha de plástico delgado. Es inflada con aire, pero el plástico no se estira. Usted se ha puesto aletas y logra bajar la pelota desde la superficie de una alberca hasta el fondo. Una vez que la pelota está sumergida por completo, ¿qué ocurre con la fuerza de flotación que se ejerce sobre la pelota de playa mientras la hunde a lo más profundo? (a) Aumenta. (b) Permanece constante. (c) Disminuye. (d) Es imposible de determinar.

6. Esferas sólidas del mismo tamaño, una de hierro y otra de plomo, se suspenden mediante cuerdas y se sumergen en

un tanque de agua. (Advierta que la densidad del plomo es mayor que la del hierro.) ¿Cuáles de los siguientes enunciados son válidos? (Seleccione todos los enunciados correctos.) (a) La fuerza boyante es la misma sobre cada esfera. (b) La fuerza de flotación sobre la esfera de plomo es mayor que la fuerza boyante sobre la esfera de hierro porque el plomo tiene mayor densidad que el hierro. (c) La tensión en la cuerda que sostiene la esfera de plomo es mayor que la tensión en la cuerda sosteniendo la esfera de hierro. (d) La fuerza de flotación sobre la esfera de hierro es mayor que la fuerza boyante sobre la esfera de plomo porque el plomo desplaza más agua. (e) Ninguno de estos enunciados es verdadero.

7. Tres vasos de formas distintas se llenan con agua hasta el mismo nivel, como en la figura PO14.7. El área de la base es la misma para los tres vasos. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son válidos? (Seleccione todos los enunciados correctos.) (a) La presión en la superficie superior del vaso A es la más grande porque tiene la mayor área superficial. (b) La presión en el fondo del vaso A es la mayor porque contiene la mayor cantidad de agua. (c) La presión en el fondo de cada vaso es la misma. (d) La fuerza en el fondo de cada vaso no es la misma. (e) A una profundidad dada bajo la superficie de cada vaso la presión en el costado del vaso A es la mayor debido a su inclinación.

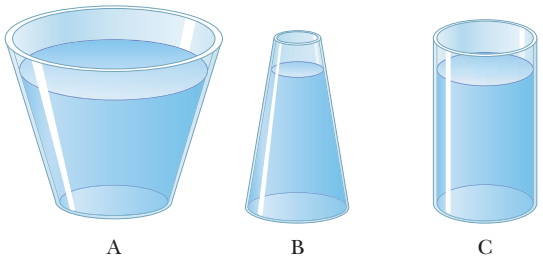


Figura PO14.7

8. Uno de los problemas esperados debido al calentamiento global es que el hielo en las capas polares se derrita y eleve el nivel del mar en muchas partes del mundo. Esto preocupa más por el hielo (a) en el Polo Norte, donde la mayor parte del hielo flota en el agua; (b) en el Polo Sur, donde la mayoría del hielo está en tierra; (c) por igual en ambos polos, o (d) en ningún polo.
9. Un bote tiene fugas y, después del rescate de sus pasajeros, eventualmente se hunde hasta el fondo de un lago. Cuando el bote está en el fondo, ¿cómo es la fuerza del fondo del lago sobre el bote? (a) Mayor que el peso del bote, (b) igual al peso del bote, (c) menor que el peso del bote, (d) igual al peso del agua desplazada, (e) igual a la fuerza de flotación sobre el bote.
10. Una pequeña pieza de acero se amarra a un bloque de madera. Cuando la madera se coloca en una tina con agua, con el acero en la parte superior, la mitad del bloque se sumerge. Ahora el bloque se invierte, de modo que el acero está bajo el agua. **(i)** ¿La cantidad del bloque sumergido (a) aumenta, (b) disminuye o (c) permanece igual? **(ii)** ¿Qué ocurre con el nivel del agua en la tina cuando el bloque se invierte? (a) Se eleva. (b) Cae. (c) Permanece igual.
11. Un pedazo de madera porosa no pintada flota en un recipiente abierto parcialmente lleno de agua. Entonces el recipiente es sellado y presurizado arriba de la presión atmosférica. ¿Qué ocurre con la madera? (a) Se eleva en el agua. (b) Se hunde un poco más en el agua. (c) Permanece al mismo nivel.
12. Una persona en un bote que flota en un pequeño lago lanza un ancla por la borda. ¿Qué ocurre con el nivel del lago? (a) Se eleva. (b) Baja. (c) Permanece igual.
13. Clasifique las fuerzas de flotación sobre los siguientes cinco objetos de igual volumen, de mayor a menor. Suponga que los objetos se dejaron caer en una alberca y se les permitió llegar a equilibrio mecánico. Si algunas fuerzas boyantes son iguales, establezca esto en su clasificación. (a) Un bloque de roble sólido, (b) un bloque de aluminio, (c) una pelota de playa hecha de plástico delgado e inflada con aire, (d) un bloque de hierro, (e) una botella de agua sellada y de pared delgada.
14. Un suministro de agua mantiene una rapidez de flujo constante para agua en una manguera. Usted quiere cambiar la abertura de la boquilla de modo que el agua que salga de la boquilla llegue a una altura que sea cuatro veces la altura máxima actual que el agua alcanza con la boquilla vertical. Para lograrlo, ¿qué debe hacer? (a) Reducir el área de la abertura en un factor de 16, (b) reducir el área en un factor de 8, (c) reducir el área en un factor de 4, (d) reducir el área en un factor de 2, (e) rendirse porque no se puede hacer.
15. Un vaso con agua contiene cubos de hielo flotantes. Cuando el hielo se funde, ¿el nivel del agua en el vaso (a) sube, (b) baja o (c) permanece igual?
16. Un fluido ideal fluye a través de una tubería horizontal cuyo diámetro varía a lo largo de su longitud. Las mediciones indicarían que la suma de la energía cinética por unidad de volumen y la presión en diferentes secciones de la tubería (a) disminuye conforme aumenta el diámetro de la tubería, (b) aumenta a medida que crece el diámetro de la tubería, (c) se incrementa conforme disminuye el diámetro de la tubería, (d) disminuye al disminuir el diámetro de la tubería o (e) permanece igual mientras cambia el diámetro de la tubería.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Cuando un objeto se sumerge en un líquido en reposo, ¿por qué la fuerza neta sobre el objeto en la dirección horizontal es igual a cero?

2. Dos vasos para beber con pared delgada, que tienen áreas de la base iguales pero diferentes formas, con áreas de sección transversal muy diferentes sobre la base se llenan al mismo nivel con agua. De acuerdo con la expresión $P = P_0 + \rho gh$, la presión es la misma en el fondo de ambos vasos. En vista de esta igualdad, ¿por qué un vaso pesa más que el otro?

3. Ya que la presión atmosférica es aproximadamente 10^5 N/m^2 y el área del pecho de una persona es aproximada-

mente de 0.13 m^2, la fuerza de la atmósfera sobre el pecho de uno es de casi 13 000 N. En vista de esta enorme fuerza, ¿por qué no colapsa el cuerpo?

4. Un pez descansa en el fondo de una cubeta con agua mientras la cubeta se pesa en una báscula. Cuando el pez comienza a nadar, ¿cambia la lectura de la báscula? Explique su respuesta.

5. Usted es pasajero en una nave espacial. Para su supervivencia y comodidad el interior contiene aire similar al de la superficie de la Tierra. La nave espacial navega a través de una región muy vacía del espacio. Es decir, afuera de la pared existe un vacío casi perfecto. De pronto, un meteoroide hace un orificio, casi del tamaño de una gran moneda, justo a través de la pared junto a su asiento. (a) ¿Qué ocurre? (b) ¿Hay algo que pueda o deba hacer al respecto?

6. Si la corriente de aire de una secadora de cabello se dirige hacia una pelota de ping pong, la pelota puede levitar. Explique.

7. Una torre de agua es una escena típica en muchas comunidades. La figura PC14.7 muestra una colección de coloridas torres de agua en Kuwait. Advierta que el gran peso del agua da un centro de masa del sistema por arriba del suelo. ¿Por qué para una torre de agua es deseable tener esta forma altamente inestable en lugar de tener una forma cilíndrica alta?



© iStockPhoto/Klaas Lingbeek-van Kranen

Figura PC14.7

8. Si usted libera una pelota mientras está dentro de un elevador en caída libre, la bola permanece enfrente de usted en lugar de caer hacia el suelo porque la bola, el elevador y usted experimentan la misma aceleración gravitacional hacia abajo. ¿Qué ocurre si repite este experimento con un globo lleno de helio?

9. (a) ¿La fuerza de flotación es una fuerza conservativa? (b) ¿Existe una energía potencial asociada con la fuerza boyante? (c) Explique sus respuestas a los incisos (a) y (b).

10. Una jabonera metálica vacía apenas flota en el agua. Una barra de jabón Ivory flota en el agua. Cuando el jabón se pega en la jabonera, la combinación se hunde. Explique por qué.

11. ¿Cómo determinaría la densidad de una piedra con forma irregular?

12. En un recipiente con agua se colocan dos latas de refresco, uno regular y el otro dietético. Se obtiene que el dietético flota y el regular se hunde. Utilice el principio de Arquímedes para dar una explicación.

13. Es frecuente que el abastecimiento de agua para una ciudad se dé mediante elevados depósitos sobre el suelo. El agua fluye desde el depósito, a través de tuberías, hasta la llave en casa. ¿Por qué el agua fluye más rápidamente de la llave en el primer piso de un edificio que en un departamento de pisos superiores?

14. ¿Una embarcación flota más alto en el agua de un lago tierra adentro o en el océano? ¿Por qué?

15. Cuando los saltadores de esquí están en el aire (figura PC14.15) doblan sus cuerpos hacia adelante y mantienen sus manos en los costados. ¿Por qué?



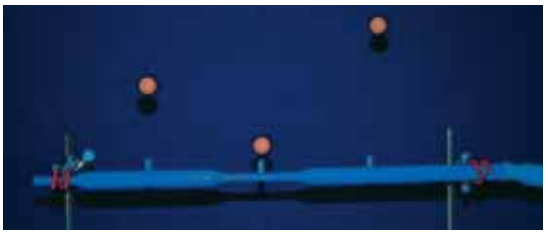
© iStockPhoto/technotr

Figura PC14.15

16. ¿Por qué los pilotos de avión prefieren despegar con el avión contra el viento?

17. Los perros de la pradera ventilan sus madrigueras al construir un montículo alrededor de una entrada que está abierta a una corriente de aire cuando el viento sopla desde cualquier dirección. Una segunda entrada al nivel del suelo está abierta a aire casi estancado. ¿Cómo esta construcción crea un flujo de aire a través de la madriguera?

18. En la figura PC14.18 una corriente de aire se mueve de derecha a izquierda a través de un tubo que está constreñido en la mitad. Tres pelotas de ping pong levitan en equilibrio sobre las columnas verticales a través de las cuales escapa el aire. (a) ¿Por qué la pelota de la derecha está más alta que la de en medio? (b) ¿Por qué la pelota de la izquierda está más baja que la pelota de la derecha, aun cuando el tubo horizontal tenga las mismas dimensiones en estos dos puntos?



Henry Leap y Jim Lehman

Figura PC14.18

19. Un silo típico en una granja tiene muchas bandas metálicas, como soporte, a lo largo de su perímetro, como se muestra en la figura PC14.19. ¿Por qué el espaciamiento entre bandas sucesivas es más pequeño para las partes inferiores del silo a la izquierda, y por qué se usan bandas dobles en las partes bajas del silo de la derecha?



Henry Leap y Jim Lehman

Figura PC14.19

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Nota: En todos los problemas, para la densidad del aire utilice el valor dado en la tabla 14.1 a 20°C, es decir, 1.20 kg/m^3, a menos que se indique otro valor.

Sección 14.1 Presión

1. Un hombre grande se sienta en una silla de cuatro patas con sus pies levantados del piso. La masa combinada del hombre y la silla es 95.0 kg. Si las patas de la silla son circulares y tienen un radio de 0.500 cm en el fondo, ¿qué presión ejerce cada pata sobre el piso?
2. El núcleo de un átomo se puede modelar como constituido por protones y neutrones cercanamente empaquetados. Cada partícula tiene una masa de 1.67×10^{-27} kg y un radio del orden de 10^{-15} m. (a) Utilice este modelo y los datos proporcionados para estimar la densidad del núcleo de un átomo. (b) Compare su resultado con la densidad de un material, por ejemplo, el hierro. ¿Qué sugieren su resultado y la comparación respecto a la estructura de la materia?
3. Una mujer de 50.0 kg que calza zapatillas es invitada a una casa donde la cocina tiene piso de vinilo. El tacón en cada zapato es circular y tiene un radio de 0.500 cm. (a) Si la mujer se balancea sobre un tacón, ¿qué presión ejerce ella sobre el piso? (b) ¿Debería preocuparse el anfitrión? Explique su respuesta.
4. Estime la masa total de la atmósfera de la Tierra. (El radio de la Tierra es 6.37×10^6 m, y la presión atmosférica en la superficie es 1.013×10^5 Pa.)
5. Calcule la masa de una barra sólida de oro rectangular con dimensiones 4.50 cm × 11.0 cm × 26.0 cm.

Sección 14.2 Variación de la presión con la profundidad

6. (a) Una aspiradora potente tiene una manguera de 2.86 cm de diámetro. Con el extremo de la manguera colocado perpendicularmente a la cara plana de un ladrillo, ¿cuál es el peso del ladrillo más pesado que la aspiradora puede levantar? (b) **¿Qué pasaría si?** Un pulpo emplea una ventosa de 2.86 cm de diámetro sobre cada una de las dos conchas de una almeja con la intención de separarlas. Encuentre la fuerza máxima que puede ejercer el pulpo sobre la almeja en agua salada a 32.3 m de profundidad.
7. El resorte del medidor de presión que se muestra en la figura P14.7 tiene una constante de fuerza de 1 250 N/m y el pistón tiene un diámetro de 1.20 cm. A medida que el medidor se baja dentro del agua, ¿qué cambio en profundidad hace que el pistón se mueva 0.750 cm?

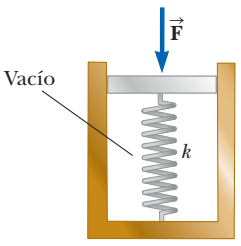


Figura P14.7

8. El pequeño pistón de un elevador hidráulico (figura P14.8) tiene un área de sección transversal de 3.00 cm^2 y su pistón grande tiene un área de sección transversal de 200 cm^2. ¿Qué fuerza de magnitud F_1 debe aplicarse al pequeño pistón para que el elevador lleve una carga cuyo peso es F_g = 15.0 kN?

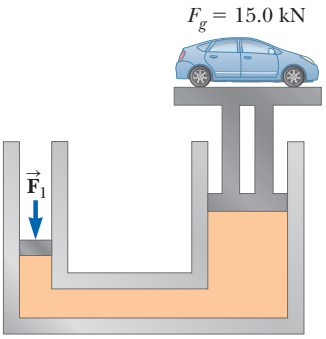


Figura P14.8

9. ¿Cuál debe ser el área de contacto entre una ventosa (completamente vacía) y un techo, si la ventosa debe soportar el peso de un estudiante de 80.0 kg?
10. Una alberca tiene dimensiones de 30.0 m × 10.0 m y un fondo plano. Cuando la alberca está llena a una profundidad de 2.00 m con agua potable, ¿cuál es la fuerza ejercida por el agua sobre (a) el fondo? (b) ¿En cada extremo? (c) ¿En cada lado?
11. (a) Calcule la presión absoluta en el fondo de un lago con agua potable en un punto cuya profundidad es 27.5 m. Suponga que la densidad del agua es 1.00×10^3 kg/m^3 y que el aire sobre la superficie está a una presión de 101.3 kPa. (b) ¿Qué fuerza es ejercida por el agua sobre la ventana de un vehículo sumergible a esta profundidad si la ventana es circular y tiene un diámetro de 35.0 cm?
12. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* La figura P14.12 muestra a Superman intentando beber agua fría con un

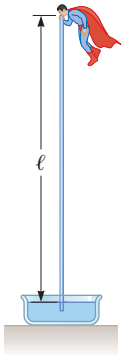


Figura P14.12

popote de longitud $\ell = 12.0$ m. Las paredes del popote tubular son muy fuertes y no se colapsan. Con su gran fuerza logra la máxima succión posible y disfruta beber el agua fría.

13. Para el sótano de una nueva casa se cava un hoyo en el suelo con lados verticales que bajan 2.40 m. Una pared de cimiento de concreto se construye horizontal los 9.60 m de ancho de la excavación. Esta pared de cimiento mide 0.183 m desde el frente del hoyo del sótano. Durante una tormenta el drenaje de la calle llena el espacio enfrente de la pared de concreto, pero no el sótano detrás de la pared. El agua no se filtra en el suelo de arcilla. Encuentre la fuerza que ejerce el agua sobre la pared de cimiento. En comparación, el peso del agua está dado por 2.40 m × 9.60 m × 0.183 m × 1 000 kg/m^3 × 9.80 m/s^2 = 41.3 kN.

14. Un recipiente está lleno de agua con una profundidad de 20.0 cm. Sobre la superficie del agua flota una delgada capa de aceite de 3.0 cm con gravedad específica de 0.700. ¿Cuál es la presión absoluta en el fondo del recipiente?

15. **Problema de repaso.** El tanque de la figura P14.15 se llenó con agua a una profundidad $d = 2.00$ m. En el fondo de una pared lateral hay una escotilla rectangular de altura $h = 1.00$ m y de ancho $w = 2.00$ m que tiene bisagras en la parte superior de la escotilla. (a) Determine la magnitud de la fuerza que el agua ejerce sobre la escotilla. (b) Encuentre la magnitud del momento de torsión ejercido por el agua en torno a las bisagras.

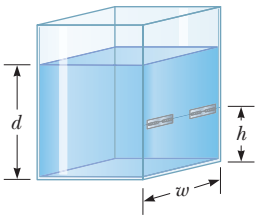


Figura P14.15
Problemas 15 y 16.

16. **Problema de repaso.** El tanque de la figura P14.15 se llenó con agua a una profundidad d. En el fondo de una pared lateral hay una escotilla rectangular de altura h y de ancho w que tiene bisagras en la parte superior de la escotilla. (a) Determine la magnitud de la fuerza que el agua ejerce sobre la escotilla. (b) Encuentre la magnitud del momento de torsión ejercido por el agua en torno a las bisagras.

17. **Problema de repaso.** El pistón ① en la figura P14.17 tiene un diámetro de 0.250 pulg. El pistón ② tiene un diámetro de 1.50 pulg. Determine la magnitud F de la fuerza necesaria para sostener la carga de 500 lb en ausencia de fricción.

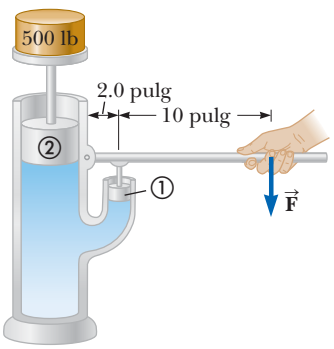


Figura P14.17

18. **Problema de repaso.** Una esfera sólida de latón (módulo volumétrico de 14.0 × 10^{10} N/m) con un diámetro de 3.00 m es lanzada al océano. ¿Cuánto disminuye el diámetro de la esfera cuando se sumerge a una profundidad de 1.00 km?

Sección 14.3 Mediciones de presión

19. La presión atmosférica normal es de 1.013 × 10^5 Pa. La proximidad de una tormenta hace que la altura de un barómetro de mercurio baje 20.0 mm de la altura normal. ¿Cuál es la presión atmosférica?

20. El cerebro humano y la médula espinal están sumergidos en el fluido cerebroespinal. El fluido normalmente es continuo entre las cavidades craneal y espinal y ejerce una presión de 100 a 200 mm de H_2O sobre la presión atmosférica prevaleciente. En el trabajo médico las presiones usualmente se miden en milímetros de H_2O porque los fluidos corporales, incluido el fluido cerebroespinal, por lo general tienen la misma densidad que el agua. La presión del fluido cerebroespinal se puede medir mediante una *sonda espinal*, como se ilustra en la figura P14.20. Un tubo hueco se inserta en la columna vertebral y se observa la altura a la que se eleva el fluido. Si el fluido se eleva a una altura de 160 mm, su presión manométrica se escribe como 160 mm H_2O. (a) Exprese esta presión en pascales, en atmósferas y en milímetros de mercurio. (b) Algunas condiciones que bloquean o inhiben el flujo de fluido cerebroespinal se pueden investigar mediante la *prueba de Queckenstedt*. En este procedimiento se comprimen las venas en la nuca del paciente para hacer que la presión sanguínea se eleve en el cerebro, lo cual se transmite al fluido cerebroespinal. Explique cómo el nivel de fluido en la sonda espinal puede utilizarse como herramienta de diagnóstico para la condición de la espina del paciente.

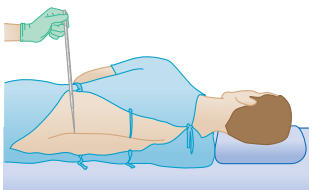


Figura P14.20

21. Blaise Pascal duplicó el barómetro de Torricelli usando un vino tinto Bordeaux, de 984 kg/m^3 de densidad, como el líquido de trabajo (figura P14.21). (a) ¿Cuál fue la altura h del vino para presión atmosférica normal? (b) ¿Esperaría que el vacío sobre la columna sea tan bueno como para el mercurio?

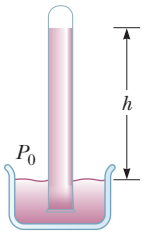


Figura P14.21

22. En un tubo en U se vierte mercurio, como se muestra en la figura P14.22a. El brazo izquierdo del tubo tiene área de sección transversal A_1 de 10.0 cm^2 y el brazo derecho tiene un área de sección transversal A_2 de 5.00 cm^2. A continuación se vierten 100 g de agua en el brazo derecho, como se ilustra en la figura P14.22b. (a) Determine la longitud de la columna de agua en el brazo derecho del tubo en U. (b) Dado que la densidad del mercurio es 13.6 g/cm^3, ¿qué distancia h se eleva el mercurio en el brazo izquierdo?

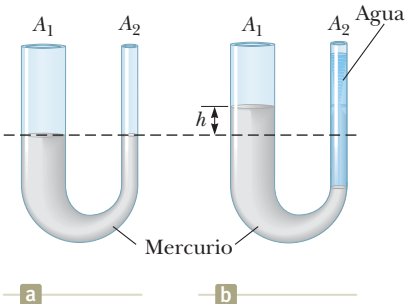


Figura P14.22

23. Una alberca con una base circular de 6.00 m de diámetro se llena con agua hasta una profundidad de 1.50 m. (a) Encuentre la presión absoluta en el fondo de la alberca. (b) Dos personas con masa combinada de 150 kg entran a la alberca y flotan tranquilamente ahí. No hay derrame de agua. Determine el aumento de presión en el fondo de la alberca después que dichas personas entraron a flotar.

24. Un tanque con un fondo plano de área A y lados verticales se llena con agua hasta una profundidad h. La presión es P_0 en la superficie superior. (a) ¿Cuál es la presión absoluta en el fondo del tanque? (b) Suponga que un objeto de masa M y densidad menor a la densidad del agua se coloca en el tanque y flota. No se desborda agua. ¿Cuál es el aumento de presión resultante en el fondo del tanque?

Sección 14.4 Fuerzas de flotación y principio de Arquímedes

25. Una pelota de ping pong tiene un diámetro de 3.80 cm y una densidad promedio de 0.084 g/cm^3. ¿Qué fuerza se requiere para mantenerla completamente sumergida bajo el agua?

26. La fuerza gravitacional que se ejerce sobre un objeto sólido es 5.00 N. Cuando el objeto se suspende de una balanza de resorte y se sumerge en agua la lectura en la balanza es 3.50 N (figura P14.26). Encuentre la densidad del objeto.

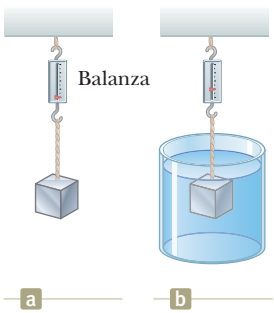


Figura P14.26 Problemas 26 y 27.

27. Un bloque metálico de 10.0 kg que mide 12.0 cm por 10.0 cm por 10.0 cm está suspendido de una balanza y sumergido en agua, como se muestra en la figura P14.26b. La dimensión de 12.0 cm es vertical y la parte superior del bloque está 5.00 cm debajo de la superficie del agua. (a) ¿Cuáles son las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre las partes superior e inferior del bloque debidas al agua circundante? (b) ¿Cuál es la lectura en la balanza de resorte? (c) Demuestre que la fuerza de flotación es igual a la diferencia entre las fuerzas sobre las partes inferior y superior del bloque.

28. Un globo ligero se llena con 400 m^3 de helio a presión atmosférica. (a) A 0°C el globo puede levantar una carga de qué masa. (b) **¿Qué pasaría si?** En la tabla 14.1 observe que la densidad del hidrógeno es casi la mitad de la densidad del helio. ¿Qué carga puede levantar el globo si se llena con hidrógeno?

29. Un cubo de madera que tiene una dimensión de arista de 20.0 cm y una densidad de 650 kg/m^3 flota en el agua. (a) ¿Cuál es la distancia desde la superficie horizontal más alta del cubo al nivel del agua? (b) ¿Qué masa de plomo se debe colocar sobre el cubo de modo que la parte superior del cubo esté justo a nivel con el agua?

30. Estados Unidos posee las diez naves de guerra más grandes del mundo, portaaviones de la clase *Nimitz*. Suponga que una de las naves se balancea para flotar 11.0 cm más alto en el agua cuando 50 aviones de combate despegan de ella en 25 minutos, en una posición donde la aceleración en caída libre es 9.78 m/s^2. Los aviones tienen una masa promedio de 29 000 kg. Encuentre el área horizontal encerrada por la línea de flotación del barco.

31. Una esfera plástica flota en agua con 50.0% de su volumen sumergido. Esta misma esfera flota en glicerina con 40.0% de su volumen sumergido. Determine las densidades de (a) la glicerina y (b) la esfera.

32. Un recipiente esférico para exploración profunda del mar tiene un radio de 1.50 m y una masa de 1.20×10^4 kg. Para bucear, este submarino toma una masa de agua de mar. Determine la masa que debe tomar el submarino si debe descender con una rapidez constante de 1.20 m/s cuando la fuerza resistiva es de 1 100 N en dirección hacia arriba. La densidad del agua de mar es 1.03×10^3 kg/m^3.

33. Un bloque de madera de volumen 5.24×10^{-4} m^3 flota en agua y un pequeño objeto de acero de masa m se coloca en la parte superior del bloque. Cuando $m = 0.310$ kg el sistema está en equilibrio y la parte superior del bloque de madera está justo al nivel del agua. (a) ¿Cuál es la densidad de la madera? (b) ¿Qué le ocurre al bloque cuando el objeto de acero es reemplazado por un objeto cuya masa es menor que 0.310 kg? (c) ¿Qué le sucede al bloque cuando el objeto de acero se sustituye por un objeto cuya masa es mayor que 0.310 kg?

34. El peso de un bloque rectangular de material de baja densidad es 15.0 N. Con una cuerda delgada el centro de la cara inferior horizontal del bloque se amarra al fondo de un vaso de precipitados parcialmente lleno con agua. Cuando 25.0% del volumen del bloque está sumergido la tensión en la cuerda es 10.0 N. (a) Encuentre la fuerza de

flotación sobre el bloque. (b) Ahora al vaso de precipitados se le agrega sin interrupción aceite de 800 kg/m^3 de densidad, lo que forma una capa sobre el agua y rodea al bloque. El aceite ejerce fuerzas sobre cada una de las cuatro paredes laterales del bloque que el aceite toca. ¿Cuáles son las direcciones de dichas fuerzas? (c) ¿Qué le ocurre a la tensión en la cuerda conforme se agrega el aceite? Explique cómo el aceite tiene este efecto sobre la tensión de la cuerda. (d) La cuerda se rompe cuando su tensión alcanza 60.0 N. En este momento 25.0% del volumen del bloque todavía está bajo la línea del agua. ¿Qué fracción adicional del volumen del bloque continúa por debajo de la superficie superior del aceite?

35. Un gran globo metereológico de masa 226 kg se llena con gas helio hasta que su volumen es 325 m^3. Suponga que la densidad del aire es 1.20 kg/m^3 y la densidad del helio es 0.179 kg/m^3. (a) Calcule la fuerza de flotación que actúa sobre el globo. (b) Encuentre la fuerza neta sobre el globo y determine si el globo se elevará o caerá después de ser liberado. (c) ¿Qué masa adicional puede soportar el globo en equilibrio?

36. Un *hidrómetro* es un instrumento utilizado para determinar la densidad de los líquidos. En la figura P14.36 se muestra uno simple. El bulbo de una jeringa se presiona y libera para dejar que la atmósfera eleve una muestra del líquido de interés en un tubo que contiene una barra calibrada de densidad conocida. La barra, de longitud L y densidad promedio ρ_0, flota parcialmente sumergida en el líquido de densidad ρ. Una longitud h de la barra sobresale de la superficie del líquido. Demuestre que la densidad del líquido está dada por

$$\rho = \frac{\rho_0 L}{L - h}$$

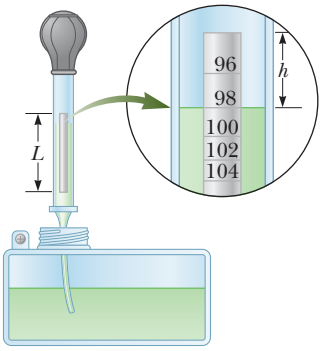


Figura P14.36 Problemas 36 y 37.

37. Remítase al problema 36 y la figura P14.36. Se construirá un hidrómetro con una barra cilíndrica flotante. Se colocarán nueve marcas a lo largo de la barra para indicar densidades que tengan valores de 0.98 g/cm^3, 1.00 g/cm^3, 1.02 g/cm^3, 1.04 g/cm^3,..., 1.14 g/cm^3. La hilera de marcas comenzará a 0.200 cm desde el extremo superior de la barra y terminará a 1.80 cm desde el extremo superior. (a) ¿Cuál es la longitud requerida de la barra? (b) ¿Cuál debe ser su densidad promedio? (c) ¿Las marcas deberían estar igualmente espaciadas? Explique su respuesta.

38. El 21 de octubre de 2001, Ian Ashpole, del Reino Unido, logró un récord de altura de 3.35 km (11 000 pies) impulsado por 600 globos llenos con helio. Cada globo lleno tuvo un radio de aproximadamente 0.50 m y una masa estimada de 0.30 kg. (a) Estime la fuerza de flotación total sobre los 600 globos. (b) Estime la fuerza neta hacia arriba sobre los 600 globos. (c) Ashpole utilizó paracaídas para su retorno a la Tierra después que los globos empezaron a reventarse a elevadas altitudes y disminuyera la fuerza boyante. ¿Por qué se reventaron los globos?

39. ¿Cuántos metros cúbicos de helio se requieren para levantar un globo ligero con una carga de 400 kg a una altura de 8 000 m? Utilice $\rho_{He} = 0.179$ kg/m^3. Suponga que el globo mantiene un volumen constante y la densidad del aire disminuye con la altura z de acuerdo con la expresión $\rho_{aire} = \rho_0 e^{-z/8\,000}$, donde z está en metros y $\rho_0 = 1.20$ kg/m^3 es la densidad del aire a nivel del mar.

Sección 14.5 Dinámica de fluidos
Sección 14.6 Ecuación de Bernoulli

40. El agua que fluye de una manguera de jardín de diámetro 2.74 cm llena una cubeta de 25 L en 1.50 min. (a) ¿Cuál es la rapidez del agua que sale del extremo de la manguera? (b) Se acopla una boquilla al extremo de la manguera. Si el diámetro de la boquilla es un tercio del diámetro de la manguera, ¿cuál es la rapidez del agua que sale por la boquilla?

41. A un gran tanque de almacenamiento, abierto en la parte superior y lleno con agua, se le hace un orificio pequeño en su costado en un punto a 16.0 m abajo del nivel de agua. La rapidez de flujo debido a la fuga es de 2.50×10^{-3} m^3/min. Determine (a) la rapidez del agua en la salida del orificio y (b) el diámetro del orificio.

42. El agua se mueve como un fluido ideal en flujo estable a través de una tubería. En el punto inferior mostrado en la figura P14.42 la presión es $P_1 = 1.75 \times 10^4$ Pa y el diámetro de la tubería es 6.00 cm. En otro punto más alto $y = 0.250$ m, la presión es $P_2 = 1.20 \times 10^4$ Pa y el diámetro de la tubería es 3.00 cm. Encuentre la rapidez de flujo (a) en la sección inferior y (b) en la sección superior. (c) Determine la razón de flujo volumétrico a través de la tubería.

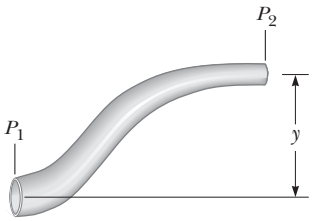


Figura P14.42

43. La figura P14.43 muestra una corriente de agua en flujo estable desde la llave de una cocina. En la llave, el diámetro de la corriente es de 0.960 cm. La corriente llena un recipiente de 125 cm^3 en 16.3 s. Encuentre el diámetro de la corriente 13.0 cm debajo de la abertura de la llave.


© Cengage Learning/George Semple

Figura P14.43

44. Una villa mantiene un gran tanque, con la parte superior abierta, que contiene agua para emergencias. El agua puede drenar del tanque a través de una manguera de 6.60 cm de diámetro. La manguera termina con una boquilla de 2.20 cm de diámetro. En la boquilla se inserta un tapón de goma. El nivel del agua en el tanque se mantiene a 7.50 m sobre la boquilla. (a) Calcule la fuerza de fricción que la boquilla ejerce sobre el tapón. (b) Se quita el tapón. ¿Qué masa de agua fluye de la boquilla en 2.00 h? (c) Calcule la presión manométrica del agua que circula en la manguera justo detrás de la boquilla.

45. Un legendario niño holandés salvó a Holanda al poner su dedo en un hoyo de 1.20 cm de diámetro en un dique. Si el hoyo estaba 2.00 m bajo la superficie del Mar del Norte (densidad 1 030 kg/m^3), (a) ¿cuál fue la fuerza sobre su dedo? (b) Si él hubiera sacado el dedo del hoyo, ¿durante qué intervalo de tiempo el agua liberada llenaría 1 acre de tierra a una profundidad de 1 pie? Suponga que el hoyo mantuvo constante su tamaño.

46. Sobre un dique de altura h cae agua con una rapidez de flujo de masa R en unidades de kilogramos por segundo. (a) Demuestre que la potencia disponible a causa del agua es

$$P = Rgh$$

donde g es la aceleración en caída libre. (b) Cada unidad hidroeléctrica en el dique Grand Coulee toma agua a una tasa de 8.50×10^5 kg/s desde una altura de 87.0 m. La potencia desarrollada por la caída de agua se convierte en energía eléctrica con una eficiencia del 85.0%. ¿Cuánta energía eléctrica produce cada unidad hidroeléctrica?

47. Desde el Río Colorado se bombea agua para suministrar a Grand Canyon Village, ubicada a la orilla del cañón. El río está a una elevación de 564 m y la villa está a una elevación de 2 096 m. Imagine que el agua se bombea a través de una larga tubería de 15.0 cm de diámetro, impulsada por una bomba en el extremo inferior. (a) ¿Cuál es la presión mínima a la que el agua debe bombearse si ha de llegar a la villa? (b) Si 4 500 m^3 de agua se bombean por día, ¿cuál es la rapidez del agua en la tubería? *Nota*: suponga que la aceleración en caída libre y la densidad del aire son constantes en este intervalo de elevaciones. Las presiones que calcule son muy altas para una tubería ordinaria. En realidad el agua se eleva en etapas mediante varias bombas a través de tuberías cortas.

48. En flujo ideal, un líquido de 850 kg/m^3 de densidad se mueve desde un tubo horizontal de 1.00 cm de radio a un segundo tubo horizontal de 0.500 cm de radio a la misma elevación que el primer tubo. La presión difiere por ΔP entre el líquido en un tubo y el líquido en el segundo tubo. (a) Encuentre la rapidez de flujo volumétrico como una función de ΔP. Evalúe la rapidez de flujo volumétrico para (b) $\Delta P = 6.00$ kPa y (c) $\Delta P = 12.0$ kPa.

49. El tubo Venturi discutido en el ejemplo 14.8, y que se muestra en la figura P14.49, se puede emplear como un medidor de flujo. Suponga que el dispositivo se utiliza en una estación de servicio para medir la razón de flujo de la gasolina ($\rho = 7.00 \times 10^2$ kg/m^3) a través de una manguera con radio de salida de 1.20 cm. Si la diferencia de presión medida es $P_1 - P_2 = 1.20$ kPa y el radio del tubo de entrada del medidor es 2.40 cm, encuentre (a) la rapidez de la gasolina cuando abandona la manguera y (b) la rapidez de flujo del fluido en metros cúbicos por segundo.

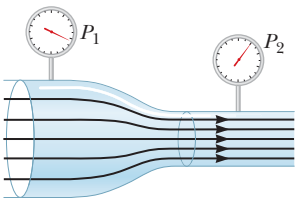


Figura P14.49

50. **Problema de repaso.** El géiser Old Faithful en el parque nacional Yellowstone erupciona a intervalos aproximados de 1 hora, y la altura de la columna de agua alcanza 40.0 m (figura P14.50). (a) Modele la corriente que se eleva como una serie de gotas separadas. Analice el movimiento en caída libre de una de las gotas para determinar la rapidez a la que el agua deja el suelo. (b) **¿Qué pasaría si?** Modele la corriente que se eleva como un fluido ideal en un flujo


Videowokart/Shutterstock.com

Figura P14.50

de líneas de corriente. Use la ecuación de Bernoulli para determinar la rapidez del agua mientras deja el nivel del suelo. (c) ¿De qué modo se compara la respuesta del inciso (a) con la respuesta del inciso (b)? (d) ¿Cuál es la presión (arriba de la atmosférica) en la cámara subterránea caliente si su profundidad es de 175 m? Suponga que la cámara es grande en comparación con la boca del géiser.

Sección 14.7 Otras aplicaciones de la dinámica de fluidos

51. Un avión cruza a una altura de 10 km. La presión afuera de la cabina es 0.287 atm; dentro del compartimiento de pasajeros la presión es de 1.00 atm y la temperatura es de 20°C. En el sello de una de las ventanas del compartimiento de pasajeros ocurre una pequeña fuga. Modele el aire como un fluido ideal para encontrar la rapidez de la corriente del aire que circula a través de la fuga.

52. Un avión tiene una masa de 1.60×10^4 kg y cada ala tiene un área de 40.0 m^2. Durante vuelo a nivel la presión sobre la superficie inferior del ala es 7.00×10^4 Pa. (a) Suponga que el empuje sobre el avión sólo se debió a una diferencia de presión. Determine la presión sobre la superficie superior del ala. (b) Más real, una parte significativa del empuje se debe a la deflexión del aire hacia abajo causada por el ala. ¿La presión en (a) es más alta o más baja si se incluye esta fuerza? Explique.

53. Un sifón se utiliza para drenar agua de un tanque, como se ilustra en la figura P14.53. Suponga flujo estable sin fricción. (a) Si $h = 1.00$ m, encuentre la rapidez del flujo de salida en el extremo del sifón. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la limitación en la altura de la parte superior del sifón respecto al extremo de éste? *Nota*: para que el flujo del líquido sea continuo, su presión no debe caer debajo de su presión de vapor. Suponga que el agua está a 20.0°C, con una presión de vapor de 2.3 kPa.

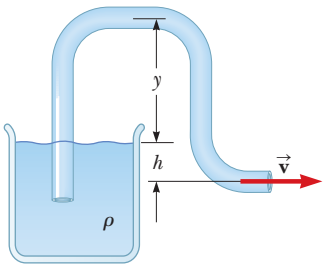


Figura P14.53

54. El efecto Bernoulli tiene importantes consecuencias para el diseño de edificios. Por ejemplo, el viento puede soplar alrededor de un rascacielos con una rapidez notablemente alta, lo que crea baja presión. La mayor presión atmosférica en aire tranquilo dentro del edificio puede hacer que las ventanas revienten. Como se construyó originalmente, al edificio John Hancock en Boston se le reventaron varias ventanas que cayeron desde muchos pisos a la acera. (a) Suponga que sopla un viento horizontal con una rapidez de 11.2 m/s afuera de un gran panel de placa de vidrio con dimensiones de 4.00 m × 1.50 m. Suponga que la densidad constante del aire es de 1.20 kg/m^3. El aire adentro del edificio está a presión atmosférica. ¿Cuál es la fuerza total que el aire ejerce sobre la ventana? (b) **¿Qué pasaría si?** Si un segundo rascacielos se construye cerca, la rapidez del aire puede ser especialmente alta donde el viento pasa a través de la estrecha separación entre los edificios. Resuelva de nuevo el inciso (a) para una rapidez de viento del doble, 22.4 m/s.

55. Una jeringa hipodérmica contiene un medicamento con la densidad del agua (figura P14.55). El barril de la jeringa tiene un área de sección transversal $A = 2.50 \times 10^{-5}$ m^2 y la aguja tiene un área de sección transversal $a = 1.00 \times 10^{-8}$ m^2. En ausencia de una fuerza sobre el émbolo, la presión en todas partes es 1 atm. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ de 2.00 N de magnitud actúa sobre el émbolo, lo que hace que la medicina salpique horizontalmente desde la aguja. Determine la rapidez del medicamento cuando sale de la punta de la aguja.

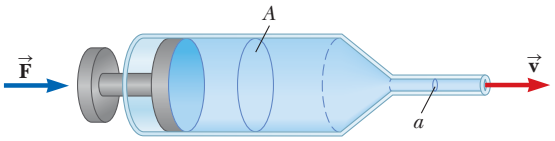


Figura P14.55

Problemas adicionales

56. Hace décadas se creía que los grandes dinosaurios herbívoros, como el *Apatosaurus* y el *Brachiosaurus*, habitualmente caminaban sobre el fondo de los lagos, y sus largos cuellos les permitían tomar aire de la superficie para respirar. El *Brachiosaurus* tenía sus orificios nasales en la parte superior de su cabeza. En 1977, Knut Schmidt-Nielsen puntualizó que para tal criatura sería muy difícil el proceso respiratorio. Como un simple modelo, considere una muestra de 10.0 L de aire a presión absoluta de 2.00 atm, con densidad de 2.40 kg/m^3, localizada en la superficie de un lago de agua dulce. Encuentre el trabajo requerido para transportarla a una profundidad de 10.3 m, permaneciendo constantes su temperatura, volumen y presión. Este requerimiento de energía es mayor que la energía que puede obtenerse mediante el metabolismo de alimentos con el oxígeno en esa cantidad de aire.

57. (a) Calcule la presión absoluta en el océano a una profundidad de 1 000 m. Suponga que la densidad del agua de mar es 1 030 kg/m^3 y que el aire ejerce una presión de 101.3 kPa. (b) A esta profundidad, ¿cuál es la fuerza de flotación sobre un submarino esférico con un diámetro de 5.00 m?

58. Aproximadamente en 1657, Otto von Guericke, inventor de la bomba de aire, evacuó una esfera hecha de dos hemisferios de latón (figura P14.58). Dos equipos de ocho caballos cada uno podían separar los hemisferios sólo después de varios intentos y "con gran dificultad", con

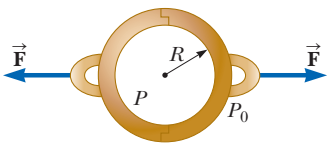


Figura P14.58

un sonido resultante parecido a un disparo de cañón. Encuentre la fuerza requerida para separar los hemisferios vacíos de pared delgada en términos de R, el radio de los hemisferios; P, la presión dentro de los hemisferios, y la presión atmosférica P_0.

59. Una bola esférica de aluminio, de 1.26 kg de masa, contiene una cavidad esférica vacía que es concéntrica con la bola. La bola apenas flota en el agua. Calcule (a) el radio exterior de la bola y (b) el radio de la cavidad.

60. Un globo (su envolvente tiene una masa de $m_b = 0.250$ kg) se llena con helio y se amarra a una cuerda uniforme de longitud $\ell = 2.00$ m y masa $m = 0.050$ kg. El globo es esférico, con un radio de $r = 0.400$ m. Cuando se libera en aire a temperatura de 20°C y densidad $\rho_{\text{aire}} = 1.20$ kg/m^3, se eleva una longitud h de cuerda y después permanece en equilibrio, como se muestra en la figura P14.60. Se desea encontrar la longitud de cuerda levantada por el globo. (a) Cuando el globo permanece estacionario, ¿cuál es el apropiado análisis de modelo para describirlo? (b) Escriba una ecuación de fuerzas para el globo, a partir de este modelo, en términos de la fuerza boyante B, el peso F_b del globo, el peso F_{He} del helio y el peso F_s del segmento de cuerda de longitud h. (c) Realice una apropiada sustitución para cada una de esas fuerzas y resuelva simbólicamente para la masa m_s del segmento de cuerda de longitud h en términos de m_b, r, ρ_{aire} y la densidad del helio ρ_{He}. (d) Obtenga el valor numérico de la masa m_s. (e) Determine la longitud h numéricamente.

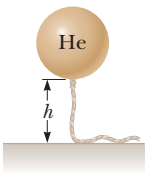


Figura P14.60

61. Problema de repaso. La figura P14.61 muestra una válvula que separa un recipiente de un tanque con agua. Si esta válvula se abre, ¿cuál es la altura máxima sobre el punto B alcanzada por la corriente de agua que sale por el lado derecho del recipiente? Suponga $h = 10.0$ m, $L = 2.00$ m, $\theta = 30.0°$ y suponga que el área de sección transversal en A es muy grande comparada con la correspondiente área en B.

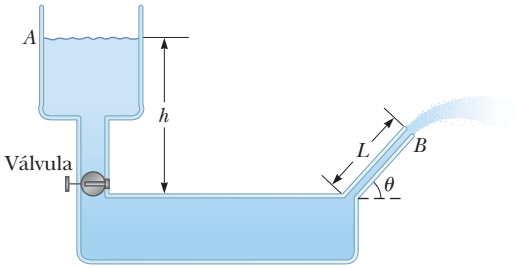


Figura P14.61

62. El peso verdadero de un objeto se puede medir en un vacío, donde las fuerzas de flotación están ausentes. Una medición en aire es alterada por fuerzas de flotación. Un objeto de volumen V se pesa en aire sobre una balanza de brazos iguales con el uso de contrapesos de densidad ρ. Al representar la densidad del aire como ρ_{aire} y la lectura de la balanza como F'_g, demuestre que el verdadero peso F_g es

$$F_g = F'_g + \left(V - \frac{F'_g}{\rho g}\right)\rho_{\text{aire}} g$$

63. El agua se fuerza hacia fuera de un extintor de incendios mediante presión de aire, como se muestra en la figura P14.63. ¿Cuánta presión manométrica de aire en el tanque se requiere para que el chorro de agua tenga una rapidez de 30.0 m/s cuando el nivel de agua está 0.500 m debajo de la boquilla?

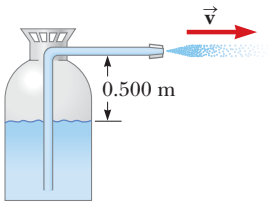


Figura P14.63

64. **Problema de repaso.** Suponga que cierto líquido, con densidad de 1 230 kg/m^3, no ejerce fuerza de fricción sobre objetos esféricos. Una bola de 2.10 kg de masa y 9.00 cm de radio se deja caer desde el reposo en un tanque profundo de este líquido desde una altura de 3.30 m sobre la superficie. (a) Encuentre la rapidez con que entra la bola al líquido. (b) Evalúe las magnitudes de las dos fuerzas que se ejercen sobre la bola mientras se mueve a través del líquido. (c) Explique por qué la bola se mueve hacia abajo sólo una distancia limitada en el líquido y calcule esta distancia. (d) ¿Con qué rapidez la bola aparece fuera del líquido? (e) ¿De qué modo se compara el intervalo de tiempo Δt_{abajo} durante el cual la bola se mueve desde la superficie hasta su punto más bajo, con el intervalo de tiempo Δt_{arriba} para el viaje de regreso entre los mismos puntos? (f) **¿Qué pasaría si?** Ahora modifique el modelo para suponer que el líquido ejerce una pequeña fuerza de fricción sobre la bola opuesta en dirección a su movimiento. En este caso, ¿de qué forma se comparan los intervalos de tiempo Δt_{abajo} y Δt_{arriba}? Explique su respuesta con un argumento conceptual en lugar de un cálculo numérico.

65. **Problema de repaso.** Un resorte ligero de constante $k = 90.0$ N/m se une verticalmente a una mesa (figura P14.65a). Un globo de 2.00 g se llena con helio (densi-

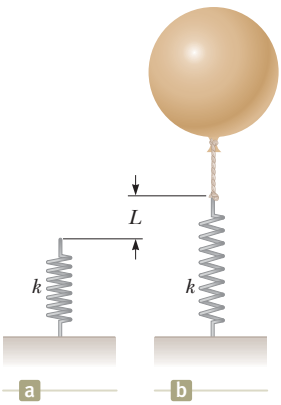


Figura P14.65

dad = 0.179 kg/m^3) a un volumen de 5.00 m^3 y después se conecta al resorte, lo que hace que el resorte se estire, como se muestra en la figura P14.65b. Determine la distancia de extensión L cuando el globo está en equilibrio.

66. A un orden de magnitud, ¿cuántos globos llenos de helio se requerirán para levantarlo a usted? Ya que el helio es un recurso irremplazable, desarrolle una respuesta teórica en lugar de una respuesta experimental. En su solución, establezca las cantidades físicas que consideró como datos y los valores que midió o estimó para ellas.

67. Un niño de 42.0 kg utiliza un bloque sólido de espuma de poliestireno como una balsa para pescar en un estanque. El poliestireno tiene un área de 1.00 m^2 y un espesor de 0.050 0 m. Mientras está sentado sobre la superficie de la balsa el niño observa que la balsa justo lo soporta porque la parte superior de la balsa está al nivel del estanque. Determine la densidad del poliestireno.

68. Un parámetro común que puede utilizarse para predecir turbulencia en el flujo de un fluido es el llamado *número de Reynolds*. El número de Reynolds para el flujo de un fluido en una tubería es una cantidad adimensional definida por

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\mu}$$

donde ρ es la densidad del fluido, v es su rapidez, d es el diámetro interno de la tubería y μ es la viscosidad del fluido. La viscosidad es una medida de la resistencia interna de un líquido al flujo y tiene unidades de Pa · s. El criterio para el tipo de flujo es como sigue:

- Si Re $<$ 2 300, el flujo es laminar.
- Si 2 300 $<$ Re $<$ 4 000, el flujo está en una región de transición entre laminar y turbulento.
- Si Re $>$ 4 000, el flujo es turbulento.

(a) Sangre de densidad 1.06 $\times$ 10^3 kg/m^3 y viscosidad 3.00 $\times$ 10^{-3} Pa · s se modela como un líquido puro, es decir, se ignora la presencia de los glóbulos rojos. Suponga que la sangre fluye en una gran arteria de radio 1.50 cm con una rapidez de 0.067 0 m/s. Demuestre que el flujo es laminar. (b) Imagine que la arteria finaliza en *un solo* capilar, así que el radio de la arteria se reduce a un valor mucho más pequeño. ¿Cuál es el radio del capilar que provocaría un flujo turbulento? (c) Los capilares reales tiene radios de aproximadamente 5-10 micrómetros, mucho más pequeños que el valor en el inciso (b). ¿Por qué el flujo en los capilares reales no se hace turbulento?

69. Evangelista Torricelli fue la primera persona en darse cuenta que los seres humanos viven en el fondo de un océano de aire. Él conjeturó correctamente que la presión de la atmósfera es atribuible al peso del aire. La densidad del aire a 0°C en la superficie de la Tierra es 1.29 kg/m^3. La densidad disminuye con la altura creciente (a medida que la atmósfera se adelgaza). Por otra parte, si se supone que la densidad es constante a 1.29 kg/m^3 hasta cierta altura h y es cero sobre dicha altura, en tal caso h representaría la profundidad del océano de aire. (a) Use este modelo para determinar el valor de h que da una presión de 1.00 atm en la superficie de la Tierra. (b) ¿La cima del monte Everest se elevaría sobre la superficie de tal atmósfera?

70. **Problema de repaso.** Con referencia al dique estudiado en el ejemplo 14.4 y mostrado en la figura 14.5, (a) demuestre que el momento de torsión total ejercido por el agua detrás del dique respecto de un eje horizontal a través de O es $\frac{1}{6}\rho g \omega H^3$. (b) Demuestre que la línea de acción efectiva de la fuerza total ejercida por el agua está a una distancia $\frac{1}{3}H$ arriba de O.

71. Un vaso de precipitados de 1.00 kg que contiene 2.00 kg de aceite (densidad = 916.0 kg/m^3) descansa sobre una báscula. Un bloque de hierro de 2.00 kg, suspendido de una balanza de resorte, se sumerge completamente en el aceite, como se muestra en la figura P14.71. Determine las lecturas de equilibrio de ambas básculas.

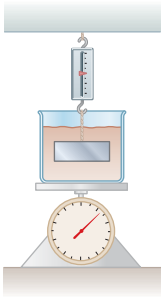


Figura P14.71 Problemas 71 y 72.

72. Un vaso de precipitados de masa m_b que contiene aceite de masa m_a y densidad ρ_a descansa sobre una báscula. Un bloque de hierro de masa m_{Fe}, suspendido de una balanza de resorte, se sumerge completamente en el aceite, como se muestra en la figura P14.71. Determine las lecturas de equilibrio de ambas básculas.

73. En 1983, Estados Unidos comenzó a acuñar la moneda de un centavo a partir de zinc revestido de cobre en lugar de cobre puro. La masa del antiguo penique de cobre es 3.083 g y el del nuevo centavo es de 2.517 g. La densidad del cobre es 8.960 g/cm^3 y la del zinc es 7.133 g/cm^3. Las monedas nueva y antigua tienen el mismo volumen. Calcule el porcentaje de zinc (por volumen) en el nuevo centavo.

74. **Problema de repaso.** Una larga barra cilíndrica de radio r se pesa sobre un extremo, así que flota hacia arriba en un fluido con densidad ρ. Se empuja hacia abajo una distancia x a partir de su posición de equilibrio y luego es liberada. Demuestre que la barra ejecutará un movimiento armónico simple si son despreciables los efectos resistivos del fluido y determine el periodo de las oscilaciones.

75. **Problema de repaso.** La figura P14.75 muestra las partes esenciales de un sistema de frenado hidráulico. El área del

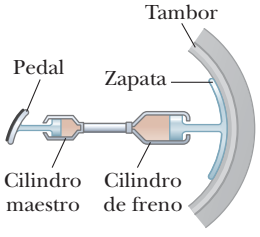


Figura P14.75

pistón en el cilindro maestro es 1.8 cm^2 y el área del pistón en el cilindro de freno es 6.4 cm^2. El coeficiente de fricción entre la zapata y el tambor es 0.50. Si la rueda tiene un radio de 34 cm, determine el momento de torsión friccional respecto al eje cuando una fuerza de 44 N se ejerce sobre el pedal de freno.

76. El *termómetro espíritu en vidrio*, inventado en Florencia, Italia, alrededor de 1654, consiste de un tubo de líquido (el espíritu) que contiene un cierto número de esferas de vidrio sumergidas con masas ligeramente distintas (figura P14.76). A temperaturas suficientemente bajas todas las esferas flotan, pero conforme se eleva la temperatura las esferas se hunden una tras otra. El dispositivo es un crudo pero interesante instrumento para medir la temperatura. Suponga que el tubo está lleno con alcohol etílico, cuya densidad es 0.789 45 g/cm^3 a 20.0°C y disminuye a 0.780 97 g/cm^3 a 30.0°C. (a) Suponga que una de las esferas tiene un radio de 1.000 cm y está en equilibrio a la mitad del tubo a 20.0°C, determine su masa. (b) Cuando la temperatura se incrementa a 30.0°C, ¿qué masa debe tener una segunda esfera del mismo radio para estar en equilibrio en el punto medio? (c) A 30.0°C la primera esfera ha caído al fondo del tubo. ¿Qué fuerza hacia arriba ejerce el fondo del tubo sobre esta esfera?


© iStockphoto.com/Alberto Pomares Photography

Figura P14.76

77. **Problema de repaso.** Un disco uniforme de 10.0 kg de masa y 0.250 m de radio gira a 300 rev/min en un eje de baja fricción. Se debe detener en 1.0 min mediante un freno que hace contacto con el disco a una distancia promedio de 0.220 m del eje. El coeficiente de fricción entre el freno y el disco es 0.500. Un pistón en un cilindro de 5.00 cm de diámetro presiona el freno contra el disco. Encuentre la presión requerida para el fluido de frenos en el cilindro.

78. **Problema de repaso.** En una pistola de agua, un pistón impulsa el agua a través de un tubo grande de área A_1 hacia un tubo más pequeño de área A_2, como se muestra en la figura P14.78. El radio del tubo grande es 1.00 cm y el del tubo pequeño es 1.00 mm. El tubo menor está 3.00 cm arriba del tubo mayor. (a) Si la pistola se dispara horizontalmente a una altura de 1.50 m, determine el intervalo de tiempo requerido para que el agua viaje desde la boquilla hasta el suelo. Desprecie la resistencia del aire y suponga presión atmosférica de 1.00 atm. (b) Si el alcance deseado del chorro es 8.00 m, ¿con qué rapidez v_2 debe salir el agua por la boquilla? (c) ¿A qué rapidez v_1 debe moverse el émbolo para lograr el alcance deseado? (d) ¿Cuál es la presión en la boquilla? (e) Encuentre la presión requerida en el tubo mayor. (f) Calcule la fuerza que se debe ejercer sobre el gatillo para lograr el alcance deseado. (La fuerza que se debe ejercer está arriba de la presión atmosférica.)

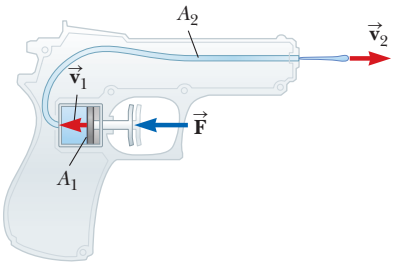


Figura P14.78

79. Un fluido incompresible, no viscoso, inicialmente está en reposo en la parte vertical de la tubería que se muestra en la figura P14.79a, donde L = 2.00 m. Cuando la válvula se abre el fluido circula a la sección horizontal de la tubería. ¿Cuál es la rapidez del fluido cuando está por completo en la sección horizontal, como se muestra en la figura P17.79b? Suponga que el área de sección transversal de toda la tubería es constante.

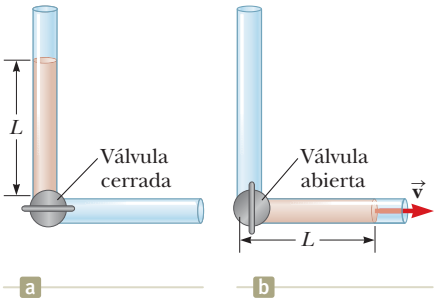


Figura P14.79

80. El suministro de agua de un edificio se alimenta a través de una tubería principal de 6.00 cm de diámetro. Una llave de 2.00 cm de diámetro, ubicada 2.00 m arriba de la tubería principal, logra llenar un recipiente de 25.0 L en 30.0 s. (a) ¿Con qué rapidez sale el agua de la llave? (b) ¿Cuál es la presión manométrica en la tubería principal de 6 cm? Suponga que la llave es la única "fuga" en el edificio.

81. Un tubo en U, abierto en ambos extremos, está parcialmente lleno con agua (figura P14.81a). A continuación, en el brazo derecho se vierte aceite que tiene una densidad de 750 kg/m^3 y forma una columna de L = 5.00 cm de alto (figura P14.81b). (a) Determine la diferencia h en las alturas de las dos superficies de los líquidos. (b) Luego el brazo derecho se cubre de cualquier movimiento del aire mientras el aire sopla a través de la parte superior del brazo izquierdo hasta que las superficies de los dos

líquidos están a la misma altura (figura P14.81c). Determine la rapidez del aire que se sopla a través del brazo izquierdo.Considere que la densidad del aire de 1.20 kg/m^3 es constante.

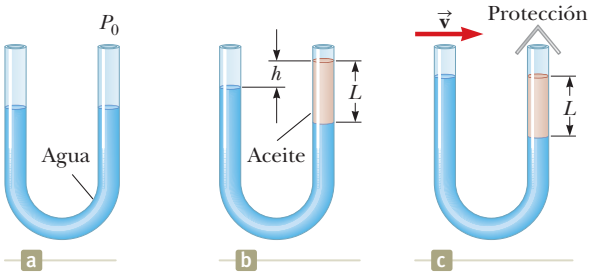


Figura P14.81

82. Una mujer drena el agua de su pecera mediante un sifón que va hacia un drenaje exterior, como se muestra en la figura P14.82. El tanque rectangular tiene área de planta A y profundidad h. El drenaje se ubica a una distancia d bajo la superficie del agua en el tanque, donde $d >> h$. El área de sección transversal del tubo de sifón es A'. Modele el agua como flujo sin fricción. Demuestre que el intervalo de tiempo requerido para vaciar el tanque es

$$\Delta t = \frac{Ah}{A'\sqrt{2gd}}$$

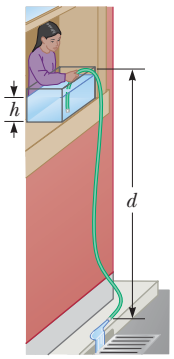


Figura P14.82

83. El casco de un bote experimental se levantará sobre el agua mediante un aerodeslizador montado bajo su quilla, como se muestra en la figura P14.83. El aerodeslizador tiene forma de ala de avión. Su área proyectada sobre una superficie horizontal es A. Cuando el bote se remolca con una rapidez lo suficientemente alta, el agua se mueve en flujo laminar de modo que su rapidez de densidad ρ promedio en la parte superior del aerodeslizador es n veces mayor que su rapidez v_b bajo el aerodeslizador. (a) Si ignora la fuerza de flotación, demuestre que la fuerza de sustentación hacia arriba que el agua ejerce sobre el aerodeslizador tiene una magnitud

$$F \approx \tfrac{1}{2}(n^2 - 1)\rho v_b{}^2 A$$

(b) El bote tiene masa M. Demuestre que la rapidez de despegue es

$$v \approx \sqrt{\frac{2Mg}{(n^2 - 1)A\rho}}$$

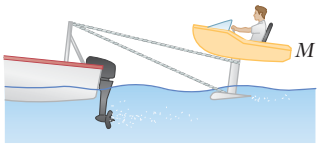


Figura P14.83

84. Un chorro de agua sale horizontalmente de un orificio cerca del fondo del tanque mostrado en la figura P14.84. Si el orificio tiene un diámetro de 3.50 mm, ¿cuál es la altura h del nivel de agua en el tanque?

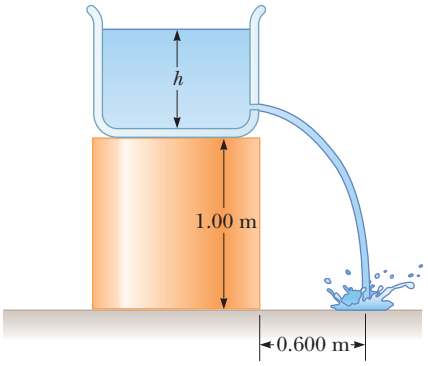


Figura P14.84

Problemas de desafío

85. Un cubo de hielo, cuyos bordes miden 20.0 mm, flota en un vaso con agua fría y una de las caras del cubo de hielo es paralela a la superficie del agua. (a) ¿A qué distancia bajo la superficie del agua está la cara inferior del cubo de hielo? (b) Se vierte suavemente alcohol etílico frío sobre la superficie del agua para formar una capa de 5.00 mm de grosor sobre el agua. El alcohol no se mezcla con el agua. Cuando el cubo de hielo de nuevo logra el equilibrio hidrostático, ¿cuál es la distancia desde la parte superior del agua a la cara inferior del bloque? (c) Se vierte alcohol etílico frío adicional en la superficie del agua hasta que la superficie superior del alcohol coincide con la superficie superior del cubo de hielo (en equilibrio hidrostático). ¿Qué espesor de capa se requiere de alcohol etílico?

86. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Una barcaza transporta, a lo largo de un río, una carga de pequeños pedazos de hierro apilados. La pila de hierro tiene la forma de un cono cuyo radio r de la base es igual a su altura central h. La barcaza tiene forma cuadrada, con lados verticales de longitud $2r$, así que la pila de hierro llena justo los bordes de la barcaza. El navío se aproxima a un puente de baja altura y el capitán observa que la parte superior de la pila no logrará pasar por debajo del puente. El capitán ordena a la tripulación que tire al agua pedazos de hierro para así disminuir la altura de la pila. Conforme el hierro se va tirando, la pila siempre mantiene su forma cónica, cuyo diámetro es igual a la longitud lateral de la barcaza. Después de un cierto volumen de hierro lanzado al agua, la nave pasa bajo el puente sin que la parte superior de la pila pegue en el puente.

87. Demuestre que la variación de presión atmosférica con la altitud está dada por $P = P_0 e^{-\alpha y}$, donde $\alpha = \rho_0 g / P_0$, P_0 es la presión atmosférica en algún nivel de referencia $y = 0$, y ρ_0 es la densidad atmosférica a este nivel. Suponga que la disminución en presión atmosférica sobre un cambio infinitesimal en altura (de modo que la densidad es aproximadamente uniforme) puede expresarse, de la ecuación 14.4, como $dP = -\rho g\, dy$. También suponga que la densidad de aire es proporcional a la presión, lo cual, como se verá en el capítulo 20, es equivalente a suponer que la temperatura del aire es la misma para toda altitud.

Oscilaciones y ondas mecánicas

PARTE 2



Las gotas de agua que caen hacen que la superficie de agua oscile. Estas oscilaciones se asocian con ondas circulares que se alejan del punto en el cual caen las gotas. En la segunda parte del texto exploraremos los principios relacionados con oscilaciones y ondas. *(Marga Buschbell Steeger/Photographer's Choice/ Getty Images)*

Esta nueva parte del texto inicia con el estudio de una clase especial de movi- miento llamado movimiento periódico, el movimiento repetitivo de un objeto en el que éste permanece para regresar a una posición conocida después de un intervalo de tiempo fijo. El movimiento repetitivo de tal objeto se llama *oscilación*. La atención se concentrará en un caso especial de movimiento periódico llamado *movimiento armónico simple*. Todos los movimientos periódicos se representan como combinaciones de movimientos armónicos simples.

El movimiento armónico simple también forma la base para comprender las *ondas mecánicas*. Las ondas sonoras, las ondas sísmicas, las ondas sobre cuerdas estiradas y las ondas en el agua son producidas por alguna fuente de oscilación. A medida que una onda sonora viaja a través del aire, elementos del aire oscilan de atrás para adelante; conforme una onda en el agua viaja a través de un estanque, los elementos del agua oscilan arriba y abajo y hacia atrás y hacia adelante. El movimiento de los elementos conduce a una marcada similitud con el movimiento periódico de un péndulo oscilante o un objeto unido a un resorte.

Para explicar muchos otros fenómenos en la naturaleza, se deben comprender los conceptos de oscilaciones y ondas. Por ejemplo, aunque los rascacielos y puentes parecen rígidos, en realidad oscilan, algo que deben tomar en consideración los arquitectos e ingenieros que los diseñan y construyen. Para entender cómo funcionan la radio y la televisión, debe comprender el origen y naturaleza de las ondas electromagnéticas y cómo se propagan a través del espacio. Por último, mucho de lo que han aprendido los científicos acerca de la estructura atómica viene de información aportada por las ondas. En consecuencia, primero debe estudiar las oscilaciones y las ondas si quiere comprender los conceptos y teorías de la física atómica. ■

CAPÍTULO

15

Movimiento oscilatorio

15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte

15.2 Análisis de modelo: partícula en movimiento armónico simple

15.3 Energía del oscilador armónico simple

15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme

15.5 El péndulo

15.6 Oscilaciones amortiguadas

15.7 Oscilaciones forzadas



El Puente del Milenio sobre el río Támesis, en Londres. El día de la inauguración del puente los peatones observaron un movimiento del puente, por lo que lo llamaron el "puente tembleque". El puente fue cerrado después de dos días y permaneció cerrado durante dos años. Se agregaron al puente más de 50 amortiguadores de masa sincronizados: los pares de estructuras con resorte en la parte superior de los travesaños (flecha). Estudiaremos tanto oscilaciones como amortiguamiento de oscilaciones en este capítulo. *(Monkey Business Images/Shutterstock.com)*

En el movimiento periódico el objeto regresa regularmente a una posición conocida después de un intervalo de tiempo fijo. Al reflexionar es posible identificar muchas clases de movimiento periódico en la vida cotidiana. Su automóvil regresa al camino cada tarde. Usted regresa a la mesa del comedor cada noche para cenar. Si empuja un candelabro lo balancea de atrás para adelante y regresa a la misma posición con una rapidez uniforme. La Tierra regresa a la misma posición en su órbita alrededor del Sol cada año, lo que resulta en la variación entre las cuatro estaciones.

Una clase especial de movimiento periódico se presenta en sistemas mecánicos cuando la fuerza que actúa en un objeto es proporcional a la posición del objeto relativo con alguna posición de equilibrio. Si esta fuerza siempre se dirige hacia la posición de equilibrio, el movimiento se llama *movimiento armónico simple*, que es el punto central de interés de este capítulo.

15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte

Como un modelo de movimiento armónico simple considere un bloque de masa m unido al extremo de un resorte, con el bloque libre de moverse sobre una superficie

horizontal sin fricción (figura 15.1). Cuando el resorte no está estirado ni comprimido el bloque queda en reposo, en la posición llamada *posición de equilibrio* del sistema, que se identifica como $x = 0$ (figura 15.1b). Se sabe por la experiencia que tal sistema oscila de atrás para adelante si se perturba desde su posición de equilibrio.

Se puede entender cualitativamente el movimiento oscilatorio del bloque en la figura 15.1 al recordar primero que, cuando el bloque se desplaza a una posición x, el resorte ejerce sobre el bloque una fuerza que es proporcional a la posición y está dada por la **ley de Hooke** (vea la sección 7.4):

$$F_s = -kx \tag{15.1}$$

◀ Ley de Hooke

A F_s se le llama **fuerza restauradora** porque siempre se dirige hacia la posición de equilibrio y, en consecuencia, es *opuesta* al desplazamiento del bloque desde el equilibrio. Es decir, cuando el bloque se desplaza hacia la derecha de $x = 0$ en la figura 15.1a, la posición es positiva y la fuerza restauradora se dirige hacia la izquierda. Cuando el bloque se desplaza a la izquierda de $x = 0$, como en la figura 15.1c, la posición es negativa y la fuerza restauradora se dirige hacia la derecha.

Cuando el bloque es desplazado desde el punto de equilibrio y se suelta, éste es una partícula bajo una fuerza neta y, en consecuencia, experimenta una aceleración. Al aplicar la segunda ley de Newton al movimiento del bloque, con la ecuación 15.1 que proporciona la fuerza neta en la dirección x, se obtiene

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow -kx = ma_x$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x \tag{15.2}$$

Es decir, la aceleración del bloque es proporcional a su posición, y la dirección de la aceleración es opuesta a la dirección del desplazamiento del bloque desde el equilibrio. Se dice que los sistemas que se comportan de esta forma exhiben **movimiento armónico simple**. Un objeto se mueve con movimiento armónico simple siempre que su aceleración es proporcional a su posición y se dirige en sentido opuesto al desplazamiento desde el equilibrio.

Si el bloque en la figura 15.1 se desplaza a una posición $x = A$ y se libera desde el reposo, su aceleración *inicial* es $-kA/m$. Cuando el bloque pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$, su aceleración es cero. En este instante su rapidez es un máximo, porque la aceleración cambia de signo. Por lo tanto, el bloque continúa viajando hacia la izquierda del equilibrio con una aceleración positiva y al final llega a $x = -A$, momento en el que su aceleración es $+kA/m$ y su rapidez de nuevo es cero, como se explicó en las secciones 7.4 y 7.9. El bloque termina un ciclo completo de su movimiento cuando regresa a la posición original y una vez más pasa por $x = 0$ con rapidez máxima. En consecuencia, el bloque oscila entre los puntos de retorno $x = \pm$A. En ausencia de fricción este movimiento idealizado continuará por siempre

Prevención de riesgos ocultos 15.1

La orientación del resorte La figura 15.1 muestra un resorte *horizontal* con un bloque unido que se desliza sobre una superficie sin fricción. Otra posibilidad es un bloque que cuelga de un resorte *vertical*. Todos los resultados que se explican para el resorte horizontal son los mismos para el resorte vertical, con una excepción: cuando el bloque se coloca en el resorte vertical, su peso hace que el resorte se extienda. Si la posición de reposo del bloque se define como $x = 0$, los resultados de este capítulo también se aplican a este sistema vertical.

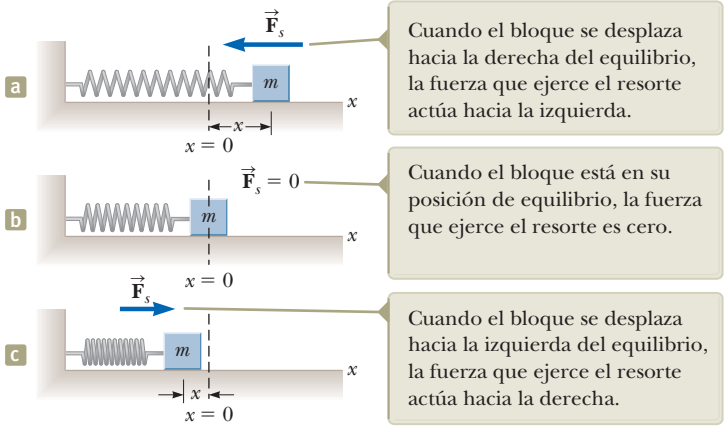


Figura 15.1 Un bloque unido a un resorte móvil sobre una superficie sin fricción.

porque la fuerza que ejerce el resorte es conservativa. Por lo general, los sistemas reales están sujetos a fricción, así que no oscilan por siempre. En la sección 15.6 se explorarán los detalles de la situación con la fricción.

Examen rápido 15.1 Un bloque en el extremo de un resorte se jala a la posición $x = A$ y se libera desde el reposo. En un ciclo completo de su movimiento, ¿qué distancia total recorre? **(a)** $A/2$, **(b)** A, **(c)** $2A$, **(d)** $4A$.

15.2 Análisis de modelo: partícula en movimiento armónico simple

El movimiento descrito en la sección precedente se presenta con tanta frecuencia que se considera el modelo de **partícula en movimiento armónico simple** para representar tales situaciones. Para desarrollar una representación matemática para este modelo, por lo general se elegirá x como el eje a lo largo del que se presenta la oscilación; por eso, en esta explicación se eliminará la notación de subíndice x. Recuerde que, por definición, $a = dv/dt = d^2x/dt^2$, y así la ecuación 15.2 se puede expresar como

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{15.3}$$

Prevención de riesgos ocultos 15.2

Una aceleración no constante

La aceleración de una partícula en movimiento armónico simple no es constante. La ecuación 15.3 muestra que su aceleración varía con la posición x. Por lo tanto, en esta situación *no se pueden* aplicar las ecuaciones de cinemática del capítulo 2.

Si la razón k/m se indica con el símbolo ω^2 (se elige ω^2 en lugar de ω para que la solución que se desarrolle a continuación sea más simple en forma), entonces

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{15.4}$$

y la ecuación 15.3 se puede escribir en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{15.5}$$

Ahora encuentre una solución matemática a la ecuación 15.5, esto es, una función $x(t)$ que satisfaga la ecuación diferencial de segundo orden y sea una representación matemática de la posición de la partícula como función del tiempo. Se busca una función cuya segunda derivada sea la misma que la función original con un signo negativo y multiplicada por ω^2. Las funciones trigonométricas seno y coseno muestran este comportamiento, así que se puede construir una solución alrededor de una de ellas o de ambas. La función coseno que aparece enseguida es una solución a la ecuación diferencial:

Posición contra tiempo para una partícula en movimiento armónico simple ▶

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{15.6}$$

donde A, ω y ϕ son constantes. Para mostrar explícitamente que esta solución satisface la ecuación 15.5, note que

$$\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \phi) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{15.7}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \tag{15.8}$$

Prevención de riesgos ocultos 15.3

¿Dónde está el triángulo?

La ecuación 15.6 incluye una función trigonométrica, una *función matemática* que se puede usar ya sea que se refiera o no a un triángulo. En este caso sucede que la función coseno tiene el comportamiento correcto para representar la posición de una partícula en movimiento armónico simple.

Al comparar las ecuaciones 15.6 y 15.8, es claro que $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ satisface la ecuación 15.5.

Los parámetros A, ω y ϕ son constantes del movimiento. Para dar un significado físico a dichas constantes es conveniente formar una representación del movimiento al graficar x como función de t, como en la figura 15.2a. Primero, A, llamada la **amplitud** del movimiento, es simplemente el máximo valor de la posición de la partícula en la dirección x positiva o negativa. La constante ω se llama *frecuencia*

angular y tiene unidades[1] de rad/s. Es una medida de qué tan rápido se presentan las oscilaciones; mientras más oscilaciones por unidad de tiempo haya, más alto es el valor de ω. A partir de la ecuación 15.4 la frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15.9}$$

El ángulo constante ϕ se llama **constante de fase** (o ángulo de fase inicial) y, junto con la amplitud A, se determina de manera unívoca por la posición y la velocidad de la partícula en $t = 0$. Si la partícula está en su posición máxima $x = A$ en $t = 0$, la constante de fase es $\phi = 0$ y la representación gráfica del movimiento es como se muestra en la figura 15.2b. La cantidad $(\omega t + \phi)$ se llama la **fase** del movimiento. Observe que la función $x(t)$ es periódica y su valor es el mismo cada vez que ωt aumenta en 2π radianes.

Las ecuaciones 15.1, 15.5 y 15.6 forman la base de la representación matemática de la partícula en el modelo de movimiento armónico simple. Si usted analiza una situación y encuentra que la fuerza sobre una partícula tiene la forma matemática de la ecuación 15.1, usted sabrá que el movimiento es de un oscilador armónico simple y la posición de la partícula la describe la ecuación 15.6. Si analiza un sistema y logra su descripción mediante una ecuación diferencial de la forma de la ecuación 15.5, el movimiento es el de un oscilador armónico simple. Si analiza una situación y ubica la posición de una partícula mediante la ecuación 15.6, sabrá que la partícula experimenta un movimiento armónico simple.

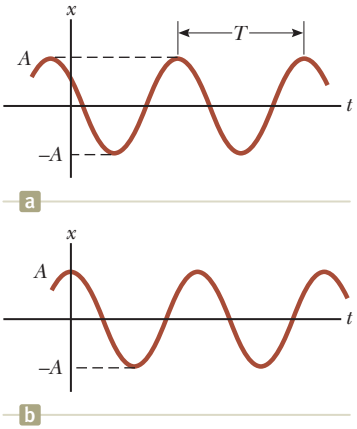


Figura 15.2 (a) Gráfica x–t para una partícula que experimenta un movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es A, el periodo (definido en la ecuación 15.10) es T. (b) Gráfica x–t en el caso especial en que $x = A$ en $t = 0$ y por eso $\phi = 0$.

Examen rápido 15.2 Considere una representación gráfica (figura 15.3) de movimiento armónico simple, como se describe matemáticamente en la ecuación 15.6. Cuando el objeto está en el punto Ⓐ de la gráfica, ¿qué puede decir acerca de su posición y velocidad? **(a)** La posición y velocidad son positivas. **(b)** La posición y velocidad son negativas. **(c)** La posición es positiva y su velocidad es cero. **(d)** La posición es negativa y su velocidad es cero. (e) La posición es positiva y su velocidad es negativa. **(f)** La posición es negativa y su velocidad es positiva.

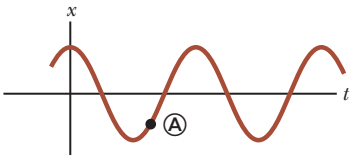


Figura 15.3 (Examen rápido 15.2) Gráfica x–t para una partícula experimentando un movimiento armónico simple. En un tiempo particular, la posición de la partícula se indica por Ⓐ en la gráfica.

Examen rápido 15.3 La figura 15.4 muestra dos curvas que representan el movimiento armónico simple al que se someten dos partículas. La descripción correcta de estos dos movimientos es que el movimiento armónico simple de la partícula B es, **(a)** de mayor frecuencia angular y mayor amplitud que el de la partícula A, **(b)** de mayor frecuencia angular y menor amplitud que el de la partícula A, **(c)** de menor frecuencia angular y mayor amplitud que el de la partícula A o **(d)** de menor frecuencia angular y menor amplitud que el de la partícula A.

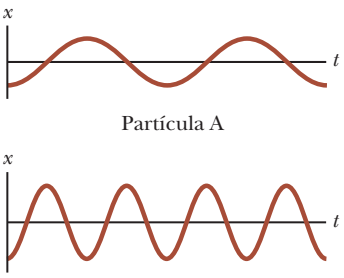


Figura 15.4 (Examen rápido 15.3) Dos gráficas x–t para partículas experimentando movimiento armónico simple. Las amplitudes y frecuencias son diferentes para las dos partículas.

Investigue un poco más la descripción matemática del movimiento armónico simple. El **periodo** T del movimiento es el intervalo de tiempo requerido para que la partícula pase a través de un ciclo completo de su movimiento (figura 15.2a). Es decir, los valores de x y v para la partícula en el tiempo t son iguales a los valores de x y v en el tiempo $t + T$. Ya que la fase aumenta en 2π radianes en un intervalo de tiempo de T,

$$[\omega(t + T) + \phi] - (\omega t + \phi) = 2\pi$$

Al simplificar esta expresión se obtiene $\omega t = 2\pi$, o

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{15.10}$$

[1]En capítulos anteriores se vieron muchos ejemplos en los que se evalúa una función trigonométrica de un ángulo. El argumento de una función trigonométrica, como seno o coseno, *debe* ser un número puro. El radián es un número puro porque es un cociente de longitudes. Los ángulos en grados son números puros porque el grado es una "unidad" artificial; no se relaciona con mediciones de longitudes. El argumento de la función trigonométrica de la función en la ecuación 15.6 debe ser un número puro. Por lo tanto, ω *debe* expresarse en rad/s (y no, por ejemplo, en revoluciones por cada segundo) si t se expresa en segundos. Además, otros tipos de funciones, como las funciones logarítmicas y exponenciales, requieren argumentos que son números puros.

Prevención de riesgos ocultos 15.4

Dos tipos de frecuencia Se identifican dos tipos de frecuencia para un oscilador armónico simple: f, llamada simplemente *frecuencia*, se mide en hertz y ω, la *frecuencia angular*, se mide en radianes por segundo. Asegúrese de tener claridad acerca de cuál frecuencia se discute o solicita en un problema determinado. Las ecuaciones 15.11 y 15.12 muestran la relación entre las dos frecuencias.

El inverso del periodo se llama **frecuencia** f del movimiento. Mientras que el periodo es el intervalo de tiempo por oscilación, la frecuencia representa el número de oscilaciones que experimenta la partícula por unidad de intervalo de tiempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{15.11}$$

Las unidades de f son ciclos por segundo, o **hertz** (Hz). Al reordenar la ecuación 15.11 se obtiene

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{15.12}$$

Las ecuaciones de la 15.9 a la 15.11 se usan para expresar el periodo y la frecuencia del movimiento para la partícula en movimiento armónico simple en términos de las características m y k del sistema como

Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{15.13}$$

Frecuencia

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15.14}$$

De este modo, el periodo y la frecuencia dependen *solamente* de la masa de la partícula y de la constante de fuerza del resorte y *no* de los parámetros del movimiento, como A o ϕ. Como es de esperar, la frecuencia es mayor para un resorte más rígido (mayor valor de k) y disminuye con la masa creciente de la partícula.

Es posible obtener la velocidad y la aceleración[2] de una partícula sometida a movimiento armónico simple a partir de las ecuaciones 15.7 y 15.8:

Velocidad de una partícula en movimiento armónico simple

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{15.15}$$

Aceleración de una partícula en movimiento armónico simple

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \tag{15.16}$$

A partir de la ecuación 15.15 se ve que, puesto que las funciones seno y coseno oscilan entre ± 1, los valores extremos de la velocidad v son $\pm\omega A$. Del mismo modo, la ecuación 15.16 muestra que los valores extremos de la aceleración a son $\pm\omega^2 A$. En consecuencia, los valores *máximos* de las magnitudes de la velocidad y la aceleración son

Magnitudes máximas de la velocidad y aceleración en movimiento armónico simple

$$v_{\text{máx}} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\, A \tag{15.17}$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A \tag{15.18}$$

La figura 15.5a grafica la posición contra el tiempo para un valor arbitrario de la constante de fase. En las figuras 15.5b y 15.5c se ilustran respectivamente las curvas asociadas velocidad-tiempo y aceleración-tiempo. Las cuales muestran que la fase de la velocidad difiere de la fase de la posición en $\pi/2$ rad o 90°. Es decir: cuando x es un máximo o un mínimo, la velocidad es cero. Del mismo modo, cuando x es cero, la rapidez es un máximo. Además, observe que la fase de la aceleración difiere de la fase de la posición en π radianes o 180°. Por ejemplo, cuando x es un máximo, a tiene una magnitud máxima en la dirección opuesta.

[2] Ya que el movimiento de un oscilador armónico simple tiene lugar en una dimensión, la velocidad se indica como v y la aceleración como a, con la dirección indicada mediante un signo positivo o negativo, como en el capítulo 2.

Examen rápido 15.4 Un objeto de masa m cuelga de un resorte y se pone en oscilación. El periodo de la oscilación se mide y registra como T. El objeto de masa m se retira y se sustituye con un objeto de masa $2m$. Cuando este objeto se pone en oscilación, ¿cuál es el periodo del movimiento? **(a)** $2T$, **(b)** $\sqrt{2}\,T$, **(c)** T, (d) $T/\sqrt{2}$, **(e)** $T/2$.

La ecuación 15.6 describe el movimiento armónico simple de una partícula en general. Ahora vea cómo evaluar las constantes del movimiento. La frecuencia angular ω se evalúa con la ecuación 15.9. Las constantes A y ϕ se evalúan a partir de las condiciones iniciales, es decir, del estado del oscilador en $t = 0$.

Suponga que la partícula se pone en movimiento al jalarla desde el equilibrio una distancia A y liberarla desde el reposo en $t = 0$, como en la figura 15.6. Después se deben requerir soluciones para $x(t)$ y $v(t)$ (ecuaciones 15.6 y 15.15) para obedecer las condiciones iniciales $x(0) = A$ y $v(0) = 0$:

$$x(0) = A\cos\phi = A$$

$$v(0) = -\omega A \operatorname{sen}\phi = 0$$

Estas condiciones se satisfacen si $\phi = 0$, lo que da $x = A\cos\omega t$ como solución. Si busca comprobar esta solución, note que satisface la condición $x(0) = A$ porque $\cos 0 = 1$.

La posición, velocidad y aceleración con el tiempo se grafican en la figura 15.7a para este caso especial. La aceleración alcanza valores extremos de $\mp\omega^2 A$ cuando la posición tiene valores extremos de $\pm A$. Además, la velocidad tiene valores extremos de $\pm\omega A$, que se presentan en $x = 0$. Por lo tanto, la solución cuantitativa concuerda con la descripción cualitativa de este sistema.

Considere otra posibilidad. Suponga que el sistema oscila y se define $t = 0$ como el instante cuando la partícula pasa a través de la posición no estirada del resorte mientras se mueve a la derecha (figura 15.8). En este caso, las soluciones para $x(t)$ y $v(t)$ deben obedecer las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $v(0) = v_i$:

$$x(0) = A\cos\phi = 0$$

$$v(0) = -\omega A \operatorname{sen}\phi = v_i$$

La primera de estas condiciones dice que $\phi = \pm\pi/2$. Con estas opciones para ϕ, la segunda condición dice que $A = \mp v_i/\omega$. Ya que la velocidad inicial es positiva y la amplitud es positiva, se debe tener $\phi = -\pi/2$. En consecuencia, la solución es

$$x = \frac{v_i}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Las gráficas de posición, velocidad y aceleración contra el tiempo para esta opción de $t = 0$ se muestran en la figura 15.7b. Note que estas curvas son las mismas que en la figura 15.7a, pero desplazadas a la derecha en un cuarto de ciclo. Este corrimiento

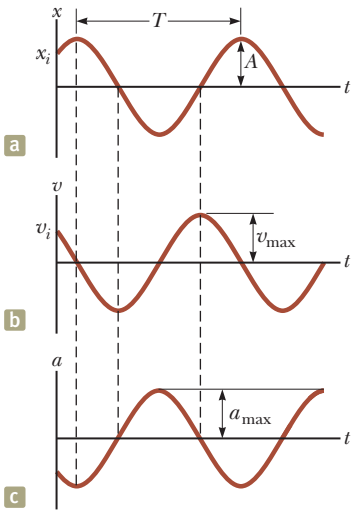


Figura 15.5 Representación gráfica de movimiento armónico simple. (a) Posición contra tiempo. (b) Velocidad contra tiempo. (c) Aceleración contra tiempo. Note que en cualquier tiempo especificado la velocidad está 90° fuera de fase con la posición y la aceleración está 180° fuera de fase con la posición.

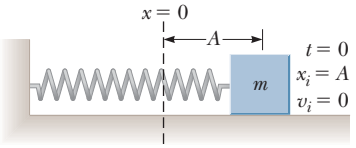


Figura 15.6 Un sistema bloque-resorte que inicia su movimiento desde el reposo con el bloque en $x = A$ en $t = 0$.

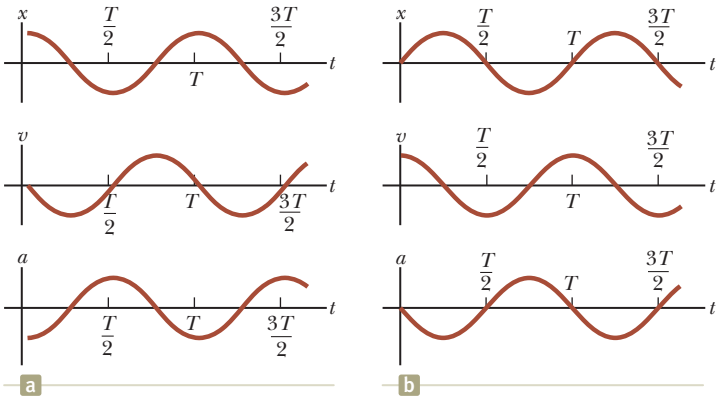


Figura 15.7 (a) Posición, velocidad y aceleración contra el tiempo para el bloque de la figura 15.6 bajo las condiciones iniciales $t = 0$, $x(0) = A$ y v$(0) = 0$. (b) Posición, velocidad y aceleración con el tiempo para el bloque de la figura 15.8 bajo las condiciones iniciales $t = 0$, $x(0) = 0$ y $v(0) = v_i$.

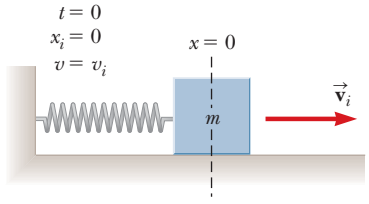
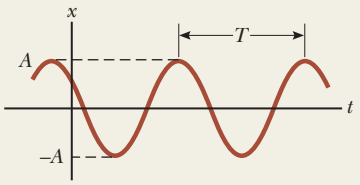


Figura 15.8 El sistema bloque-resorte experimentando oscilaciones y en $t = 0$ se define en un instante cuando el bloque pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$ y se mueve hacia la derecha con rapidez v_i.

se describe matemáticamente por la constante de fase $\phi = -\pi/2$, que es un cuarto de ciclo completo de 2π.

Análisis de modelo Partícula en movimiento armónico simple

Imagine un objeto que está sujeto a una fuerza que es proporcional al negativo de la posición del objeto, $F = -kx$. Esta ecuación de fuerza se conoce como la ley de Hooke y describe la fuerza aplicada a un objeto unido a un resorte ideal. El parámetro k de la ley de Hooke se llama la *constante elástica* o *constante de fuerza*. La posición de un objeto actuado sobre una fuerza descrita por la ley de Hooke está dada por



$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{15.6}$$

donde A es la **amplitud** del movimiento, ω es la **frecuencia angular** y ϕ es la **constante de fase**. Los valores de A y ϕ dependen de la posición inicial y la velocidad inicial de la partícula.

El **periodo** de la oscilación de la partícula es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{15.13}$$

y el inverso del periodo es la **frecuencia**.

Ejemplos:

- un saltador de bungee cuelga de una cuerda y oscila hacia arriba y abajo
- una cuerda de guitarra vibra hacia adelante y atrás en una onda estacionaria, con cada elemento de la cuerda moviéndose en movimiento armónico simple (capítulo 18)
- un pistón en un motor de gasolina oscila hacia arriba y hacia abajo dentro del cilindro del motor (capítulo 22)
- un átomo en una molécula diatómica vibra hacia adelante y atrás como si estuviera conectado por un resorte a otro átomo de la molécula (capítulo 43)

Ejemplo 15.1 Un sistema bloque-resorte AM

Un bloque de 200 g conectado a un resorte ligero tiene una constante de fuerza de 5.00 N/m y es libre de oscilar sobre una superficie horizontal sin fricción. El bloque se desplaza 5.00 cm desde el equilibrio y se libera del reposo como en la figura 15.6.

(A) Hallar el periodo de su movimiento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 15.6 e imagine el bloque que se mueve hacia atrás y adelante en movimiento armónico simple una vez que se libera. Establezca un modelo experimental en la dirección vertical al colgar un objeto pesado, como una engrapadora, de una banda de hule resistente.

Categorizar El bloque se modela como una *partícula en movimiento armónico simple.*

Analizar

Aplique la ecuación 15.9 para hallar la frecuencia angular del sistema bloque-resorte:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.00\ \text{N/m}}{200 \times 10^{-3}\ \text{kg}}} = 5.00\ \text{rad/s}$$

Use la ecuación 15.13 para encontrar el periodo del sistema:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5.00\ \text{rad/s}} = 1.26\ \text{s}$$

(B) Determine la rapidez máxima del bloque.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.17 para hallar $v_{\text{máx}}$:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (5.00\ \text{rad/s})(5.00 \times 10^{-2}\ \text{m}) = 0.250\ \text{m/s}$$

(C) ¿Cuál es la máxima aceleración del bloque?

15.1 continuación

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.18 para hallar $a_{máx}$: $a_{máx} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2(5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.25 \text{ m/s}^2$

(D) Exprese la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo en unidades del SI.

SOLUCIÓN

Encuentre la constante de fase a partir de la condición inicial de que $x = A$ en $t = 0$: $x(0) = A\cos\phi = A \rightarrow \phi = 0$

Aplique la ecuación 15.6 para escribir una expresión para $x(t)$: $x = A\cos(\omega t + \phi) = 0.050\,0\cos 5.00t$

Use la ecuación 15.15 para escribir una expresión para $v(t)$: $v = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = -0.250 \operatorname{sen} 5.00t$

Aplique la ecuación 15.16 para escribir una expresión para $a(t)$: $a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = -1.25\cos 5.00t$

Finalizar Considere el inciso (a) de la figura 15.7, que muestra las representaciones gráficas del movimiento del bloque en este problema. Asegúrese de que las representaciones matemáticas encontradas anteriormente en el inciso (D) son consistentes con estas representaciones gráficas.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el bloque se libera desde la misma posición inicial, $x_i = 5.00$ cm, pero con una velocidad inicial de $v_i = -0.100$ m/s? ¿Qué partes de la solución cambian y cuáles son las nuevas respuestas para éstas?

Respuestas El inciso (A) no cambia porque el periodo es independiente de cómo se pone en movimiento el oscilador. Los incisos (B), (C) y (D) cambiarán.

Escriba las expresiones de posición y velocidad para las condiciones iniciales:

$$(1)\quad x(0) = A\cos\phi = x_i$$
$$(2)\quad v(0) = -\omega A \operatorname{sen}\phi = v_i$$

Divida la ecuación (2) entre la ecuación (1) para encontrar la constante de fase:

$$\frac{-\omega A \operatorname{sen}\phi}{A\cos\phi} = \frac{v_i}{x_i}$$
$$\tan\phi = -\frac{v_i}{\omega x_i} = -\frac{-0.100 \text{ m/s}}{(5.00 \text{ rad/s})(0.050\,0 \text{ m})} = 0.400$$
$$\phi = \tan^{-1}(0.400) = 0.121\pi$$

Use la ecuación (1) para hallar A: $A = \dfrac{x_i}{\cos\phi} = \dfrac{0.050\,0 \text{ m}}{\cos(0.121\pi)} = 0.053\,9 \text{ m}$

Encuentre la nueva rapidez máxima: $v_{máx} = \omega A = (5.00 \text{ rad/s})(5.39 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0.269 \text{ m/s}$

Encuentre la nueva magnitud de la aceleración máxima: $a_{máx} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2(5.39 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.35 \text{ m/s}^2$

Encuentre nuevas expresiones para posición, velocidad y aceleración en unidades del SI:

$$x = 0.053\,9\cos(5.00t + 0.121\pi)$$
$$v = -0.269 \operatorname{sen}(5.00t + 0.121\pi)$$
$$a = -1.35\cos(5.00t + 0.121\pi)$$

Como aprendió en los capítulos 7 y 8, muchos problemas son más fáciles de resolver al aplicar una aproximación energética en lugar de usar una en función de variables de movimiento. La condicional ¿Qué pasaría si? es más fácil de resolver a partir de una aproximación energética. Por lo tanto, en la siguiente sección se investigará la energía del oscilador armónico simple.

Ejemplo 15.2 ¡Cuidado con los baches! AM

Un automóvil con una masa de 1 300 kg se construye de modo que su chasis está sostenido mediante cuatro amortiguadores. Cada amortiguador tiene una constante de fuerza de 20 000 N/m. Dos personas que viajan en el automóvil tienen una masa combinada de 160 kg. Encuentre la frecuencia de vibración del automóvil después que pasa sobre un bache en el camino.

continúa

15.2 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en sus experiencias con los automóviles. Cuando se sienta en un automóvil, se mueve hacia abajo una distancia pequeña porque su peso comprime aún más los amortiguadores. Si usted presiona la defensa frontal y la libera, el frente del automóvil oscila algunas veces.

Categorizar Imagine que el automóvil está sostenido mediante un solo amortiguador y modele al automóvil como una *partícula en movimiento armónico simple.*

Analizar Primero determine la constante de resorte efectiva de los cuatro amortiguadores combinados. Para una cierta extensión x de los amortiguadores, la fuerza combinada sobre el automóvil es la suma de las fuerzas de los amortiguadores individuales.

Encuentre una expresión para la fuerza total sobre el automóvil:

$$F_{\text{total}} = \sum (-kx) = -\left(\sum k\right) x$$

En esta expresión, x se factorizó de la suma porque es la misma para los cuatro amortiguadores. La constante de resorte efectiva para los amortiguadores combinados es la suma de las constantes del amortiguador individual.

Evalúe la constante de resorte efectiva:

$$k_{\text{efec}} = \sum k = 4 \times 20\,000 \text{ N/m} = 80\,000 \text{ N/m}$$

Use la ecuación 15.14 para encontrar la frecuencia de vibración:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{efec}}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{80\,000 \text{ N/m}}{1\,460 \text{ kg}}} = 1.18 \text{ Hz}$$

Finalizar La masa que se usa en este caso es la del automóvil más las personas, porque es la masa total que oscila. Note también que sólo se exploró el movimiento hacia arriba y hacia abajo del automóvil. Si se establece una oscilación en la que el automóvil se mece de atrás para adelante, tal que el extremo frontal sube cuando el extremo posterior baja, la frecuencia será diferente.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que el automóvil se detiene al lado del camino y las dos personas salen del auto. Una de ellas presiona hacia abajo el automóvil y lo libera de modo que oscile en la vertical. ¿La frecuencia de la oscilación es la misma que el valor recién calculado?

Respuesta El sistema de suspensión del automóvil es el mismo, pero la masa que oscila es menor: ya no incluye la masa de las dos personas. Por lo tanto, la frecuencia debe ser mayor. Calcule la nueva frecuencia considerando la masa como 1 300 kg:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{efec}}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{80\,000 \text{ N/m}}{1\,300 \text{ kg}}} = 1.25 \text{ Hz}$$

Como se predijo, la nueva frecuencia es un poco mayor.

15.3 Energía del oscilador armónico simple

Como ya lo hemos hecho antes, después de estudiar el modelado del movimiento de un objeto como una partícula en una situación nueva e investigado las fuerzas implicadas que influyen en ese movimiento, trataremos a la *energía.* Examine la energía mecánica de un sistema en el cual una partícula experimenta movimiento armónico simple, tal como el sistema bloque-resorte que se ilustra en la figura 15.1. Ya que la superficie no tiene fricción, el sistema está aislado y es de esperar que la energía mecánica total del sistema sea constante. Ahora suponga un resorte sin masa, de modo que la energía cinética del sistema sólo corresponde a la del bloque; puede usar la ecuación 15.15 para expresar la energía cinética del bloque como

Energía cinética de un oscilador armónico simple

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) \qquad (15.19)$$

La energía potencial elástica almacenada en el resorte para cualquier elongación x está dada por $\frac{1}{2}kx^2$ (vea la ecuación 7.22). Si usa la ecuación 15.6 produce

Energía potencial de un oscilador armónico

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \qquad (15.20)$$

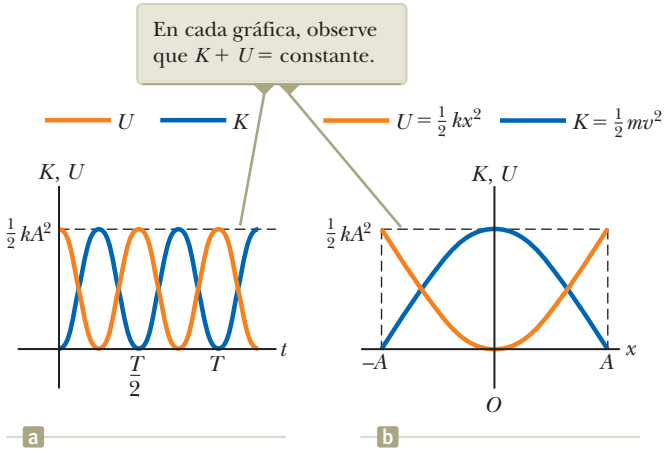


Figura 15.9 (a) Energía cinética y energía potencial contra tiempo de un oscilador armónico simple con $\phi = 0$. (b) La energía cinética y potencial de energía contra posición para un oscilador armónico simple.

Se ve que K y U *siempre* son cantidades positivas o cero. Puesto que $\omega^2 = k/m$, la energía mecánica total del oscilador armónico simple se expresa como

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}kA^2[\text{sen}^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]$$

A partir de la identidad $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, se ve que la cantidad entre corchetes es la unidad. En consecuencia, esta ecuación se reduce a

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad (15.21)$$

◀ **Energía total de un oscilador armónico**

Esto es: la energía mecánica total de un oscilador armónico simple es una constante del movimiento y es proporcional al cuadrado de la amplitud. La energía mecánica total es igual a la energía potencial máxima almacenada en el resorte cuando $x = \pm A$, porque $v = 0$ en estos puntos y no hay energía cinética. En la posición de equilibrio, donde $U = 0$ porque $x = 0$, la energía total, toda en forma de energía cinética, de nuevo es $\frac{1}{2}kA^2$.

En la figura 15.9a aparecen gráficas de las energías cinética y potencial en función del tiempo, donde se consideró $\phi = 0$. En todo momento la suma de las energías cinética y potencial es una constante igual a $\frac{1}{2}kA^2$, la energía total del sistema.

Las variaciones de K y U con la posición x del bloque se grafican en la figura 15.9b. La energía se transforma continuamente entre energía potencial almacenada en el resorte y energía cinética del bloque.

La figura 15.10 de la página 460 ilustra la posición, velocidad, aceleración, energía cinética y energía potencial del sistema bloque-resorte para un periodo completo del movimiento. La mayoría de las ideas explicadas hasta el momento se incorpora en esta importante figura. Estúdiela cuidadosamente.

Por último, la velocidad del bloque en una posición arbitraria se obtiene al expresar la energía total del sistema en alguna posición arbitraria x como

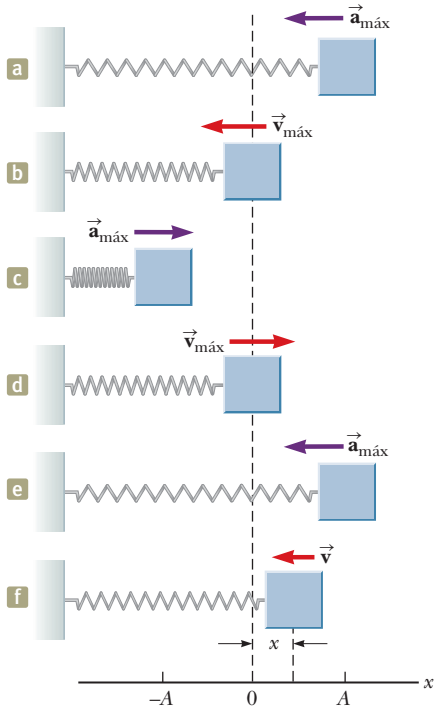
$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

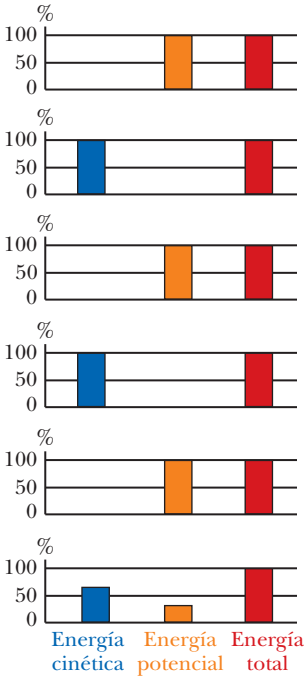
$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (15.22)$$

◀ **La velocidad como una función de la posición para un oscilador armónico simple**

Al comprobar la ecuación 15.22 para ver si concuerda con casos conocidos, se encuentra que verifica que la rapidez es un máximo en $x = 0$ y es cero en los puntos de retorno $x = \pm A$.

Es posible que se pregunte por qué se pasa tanto tiempo en el estudio de los osciladores armónicos simples. La respuesta es porque son buenos modelos de una amplia variedad de fenómenos físicos. Por ejemplo, recuerde el potencial Lennard-Jones explicado en el ejemplo 7.9. Esta complicada función describe las fuerzas que mantienen unidos a los átomos. La figura 15.11a de la página 460 muestra que para pequeños desplazamientos desde la posición de equilibrio, la curva de energía potencial para esta función se aproxima a una parábola, que representa la función





t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

Figura 15.10 De la (a) a la (e): varios instantes en el movimiento armónico simple para un sistema bloque-resorte. Las gráficas de barras de energía muestran la distribución de la energía del sistema en cada instante. Los parámetros en la tabla de la derecha se refieren al sistema bloque-resorte, si supone que en $t = 0$, $x = A$; por eso, $x = A \cos \omega t$. Por estos cinco momentos especiales, uno de los tipos de energía es cero. (f) Un punto arbitrario en el movimiento del oscilador. El sistema tiene energía cinética y energía potencial en este instante, como se muestra en el gráfico de barras.

de energía potencial para un oscilador armónico simple. Por lo tanto, las fuerzas complejas en un enlace atómico se modelan como debidas a pequeños resortes, como se bosqueja en la figura 15.11b.

Las ideas presentadas en este capítulo no sólo se aplican a sistemas bloque-resorte y átomos, también funcionan con una amplia variedad de situaciones que incluyen el salto bungee, la sintonía en una estación de televisión y la vista de la luz emitida por un láser. Usted verá más ejemplos de osciladores armónicos simples mientras trabaja a lo largo de este libro.

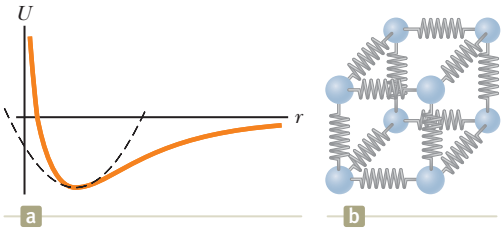


Figura 15.11 (a) Si los átomos en una molécula no se mueven demasiado de sus posiciones de equilibrio, una gráfica de energía potencial con la distancia de separación entre átomos es similar a la gráfica de energía potencial con la posición para un oscilador armónico simple (curva negra discontinua). (b) Las fuerzas entre los átomos en un sólido se pueden modelar al imaginar resortes entre átomos vecinos.

Ejemplo 15.3 Oscilaciones sobre una superficie horizontal AM

Un carro de 0.500 kg conectado a un resorte ligero para el que la constante de fuerza es 20.0 N/m oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción.

(A) Calcule la energía total del sistema y la rapidez máxima del carro si la amplitud del movimiento es 3.00 cm.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El sistema oscila exactamente en la misma forma que el bloque de la figura 15.10, así utilice la figura en su imagen mental del movimiento.

15.3 continuación

Categorizar El carro se modela como una *partícula en movimiento armónico simple.*

Analizar Use la ecuación 15.21 para encontrar la energía total del sistema oscilador e iguálela con la energía cinética del carro en $x = 0$:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}mv_{máx}^2$$

Resuelva para la rapidez máxima y sustituya los valores numéricos:

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,A = \sqrt{\frac{20.0\ \text{N/m}}{0.500\ \text{kg}}}(0.030\ 0\ \text{m}) = \boxed{0.190\ \text{m/s}}$$

(B) ¿Cuál es la velocidad del carro cuando la posición es 2.00 cm?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.22 para evaluar la velocidad:

$$\begin{aligned} v &= \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \\ &= \pm\sqrt{\frac{20.0\ \text{N/m}}{0.500\ \text{kg}}[(0.030\ 0\ \text{m})^2 - (0.020\ 0\ \text{m})^2]} \\ &= \boxed{\pm 0.141\ \text{m/s}} \end{aligned}$$

Los signos positivo y negativo indican que el carro podría moverse hacia la derecha o a la izquierda en este instante.

(C) Calcule las energías cinética y potencial del sistema cuando la posición es 2.00 cm.

SOLUCIÓN

Use el resultado del inciso (B) para evaluar la energía cinética en $x = 0.020\ 0$ m:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.500\ \text{kg})(0.141\ \text{m/s})^2 = \boxed{5.00 \times 10^{-3}\ \text{J}}$$

Evalúe la energía potencial elástica en $x = 0.020\ 0$ m:

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(20.0\ \text{N/m})(0.0200\ \text{m})^2 = \boxed{4.00 \times 10^{-3}\ \text{J}}$$

Finalizar La suma de las energías cinética y potencial en el inciso (C) es igual a la energía total que se encontró usando la ecuación 15.21. Esto debe ser cierto para *cualquier* posición del carro.

¿QUÉ PASARÍA SI? El carro en este ejemplo pudo haberse puesto en movimiento al liberarlo desde el reposo en $x = 3.00$ cm. ¿Y si el carro se libera desde la misma posición, pero con una velocidad inicial de $v = -0.100$ m/s, cuáles son las nuevas amplitud y rapidez máxima del carro?

Respuesta Esta pregunta es del mismo tipo que se planteó al final del ejemplo 15.1, pero en este caso se aplica a una aproximación energética.

Primero calcule la energía total del sistema en $t = 0$:

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(0.500\ \text{kg})(-0.100\ \text{m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(20.0\ \text{N/m})(0.030\ 0\ \text{m})^2 \\ &= 1.15 \times 10^{-2}\ \text{J} \end{aligned}$$

Iguale esta energía total con la energía potencial cuando el carro está en el punto final del movimiento:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2$$

Resuelva para la amplitud A:

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(1.15 \times 10^{-2}\ \text{J})}{20.0\ \text{N/m}}} = 0.033\ 9\ \text{m}$$

Iguale la energía total con la energía cinética del sistema cuando el carro está en la posición de equilibrio:

$$E = \tfrac{1}{2}mv_{máx}^2$$

Resuelva para la rapidez máxima:

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.15 \times 10^{-2}\ \text{J})}{0.500\ \text{kg}}} = 0.214\ \text{m/s}$$

La amplitud y velocidad máximas son mayores que los valores previos porque al carro se le dio una velocidad inicial en $t = 0$.



John W. Jewett, Jr.

Figura 15.12 La parte inferior de una máquina de coser de pedal de principios del siglo XX. El pedal es ancho y plano con rejas metálicas.

15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme

Algunos dispositivos comunes en la vida cotidiana muestran una relación entre movimiento oscilatorio y movimiento circular. Por ejemplo, en el mecanismo de manejo de una máquina de coser no eléctrica en la figura 15.12, el operador pone su pie sobre el pedal y lo acciona de atrás hacia delante. Este movimiento oscilatorio hace que una gran rueda a la derecha experimente un movimiento circular. La banda roja que se ve en la fotografía transfiere este movimiento circular al mecanismo de la máquina de coser (fotografía anterior) y causa el movimiento oscilatorio de la aguja de coser. En esta sección se explora esta interesante relación entre estos dos tipos de movimiento.

La figura 15.13 muestra una vista de un arreglo experimental que muestra esta relación. Una bola se une al borde de una tornamesa de radio A, que está iluminada desde arriba por una lámpara. La bola proyecta una sombra sobre una pantalla. A medida que la tornamesa da vueltas con rapidez angular constante la sombra de la bola se mueve de atrás para adelante en movimiento armónico simple.

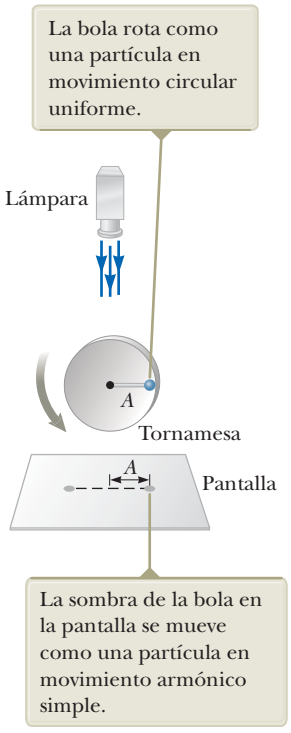


Figura 15.13 Un arreglo experimental para demostrar la conexión entre una partícula en movimiento armónico simple y una partícula correspondiente en movimiento circular uniforme.

Considere una partícula ubicada en el punto P sobre la circunferencia de un círculo de radio A, como en la figura 15.14a, con la línea OP que forma un ángulo ϕ con el eje x en $t = 0$. A este círculo se le llama *círculo de referencia,* para comparar el movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme, y se elige la posición de P en $t = 0$ como la posición de referencia. Si la partícula se mueve a lo largo del círculo con rapidez angular constante ω hasta que OP forma un ángulo θ con el eje x, como en la figura 15.14b, en algún tiempo $t > 0$ el ángulo entre OP y el eje x es $\theta = \omega t + \phi$. Conforme la partícula se mueve a lo largo del círculo, la proyección de P sobre el eje x, punto etiquetado Q, se mueve de atrás para adelante a lo largo del eje x entre los límites $x = \pm A$.

Note que los puntos P y Q siempre tienen la misma coordenada x. A partir del triángulo rectángulo OPQ se ve que esta coordenada x es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.23)}$$

Esta expresión es la misma que la ecuación 15.6 y muestra que el punto Q se mueve con movimiento de un objeto descrito por el análisis de modelo de una partícula en movimiento armónico simple a lo largo del eje x. Por lo tanto, el movimiento armónico simple a lo largo de una línea recta se puede representar mediante la proyección de un objeto que se puede modelar como una partícula en movimiento circular uniforme a lo largo del diámetro de un círculo de referencia.

Esta interpretación geométrica muestra que el intervalo de tiempo para una revolución completa del punto P sobre el círculo de referencia es igual al periodo de movimiento T para movimiento armónico simple entre $x = \pm A$. Es decir, la rapidez angular ω de P es la misma que la frecuencia angular ω del movimiento armónico simple a lo largo del eje x (que es por lo que se usa el mismo símbolo). La constante

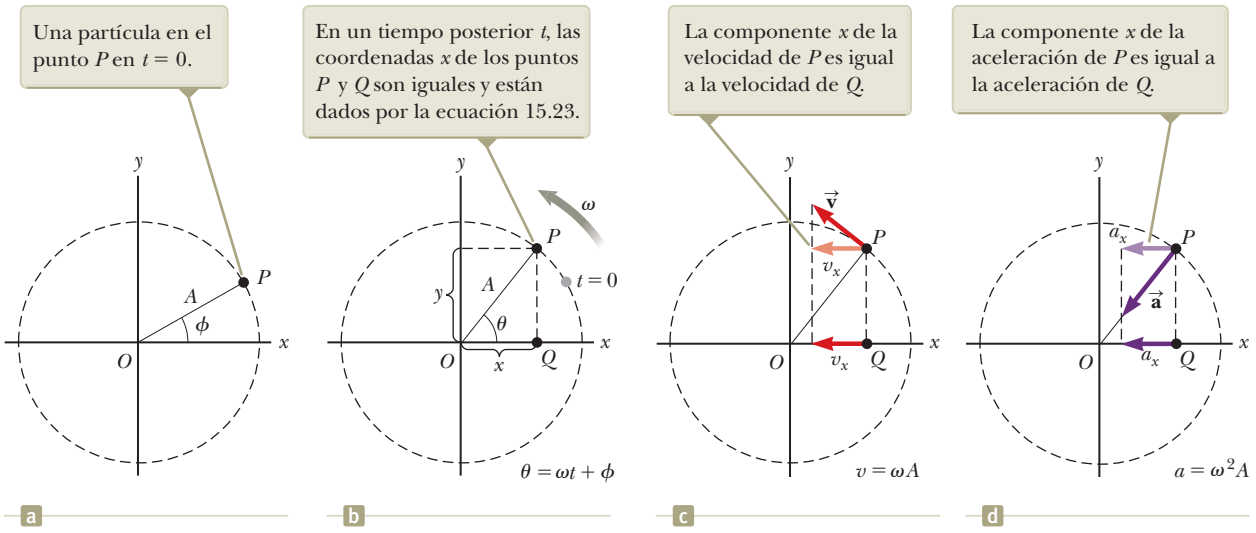


Figura 15.14 Relación entre el movimiento circular uniforme de un punto P y el movimiento armónico simple de un punto Q. Una partícula en P se mueve en un círculo de radio A con rapidez angular constante ω.

de fase ϕ para movimiento armónico simple corresponde al ángulo inicial OP que forma con el eje x. El radio A del círculo de referencia es igual a la amplitud del movimiento armónico simple.

Ya que la correspondencia entre rapidez lineal y angular para el movimiento circular es $v = r\omega$ (vea la ecuación 10.10), la partícula móvil en el círculo de referencia de radio A tiene una velocidad de magnitud ωA. A partir de la geometría en la figura 15.14c, se ve que la componente x de esta velocidad es $-\omega A$ sen $(\omega t + \phi)$. Por definición, el punto Q tiene una velocidad dada por dx/dt. Derivando la ecuación 15.23 respecto al tiempo, se encuentra que la velocidad de Q es la misma que la componente x de la velocidad de P.

La aceleración de P en el círculo de referencia se dirige radialmente hacia dentro, hacia O, y tiene magnitud $v^2/A = \omega^2 A$. A partir de la geometría de la figura 15.14d, se ve que la componente x de esta aceleración es $-\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$. Este valor también es la aceleración del punto proyectado Q a lo largo del eje x, como se puede verificar al tomar la segunda derivada de la ecuación 15.23.

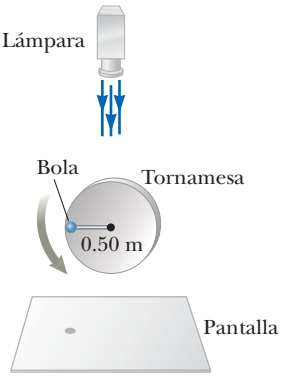


Figura 15.15 (Examen rápido 15.5) Un objeto se mueve en movimiento circular y proyecta una sombra sobre la pantalla abajo. Se muestra su posición en un instante de tiempo.

Examen rápido 15.5 La figura 15.15 muestra la posición de un objeto en movimiento circular uniforme en $t = 0$. Una luz brilla desde arriba y proyecta una sombra del objeto sobre una pantalla abajo del movimiento circular. ¿Cuáles son los valores correctos para la *amplitud* y la *constante de fase* (en relación con un eje x a la derecha) del movimiento armónico simple de la sombra? **(a)** 0.50 m y 0, **(b)** 1.00 m y 0, **(c)** 0.50 m y π, **(d)** 1.00 m y π.

Ejemplo 15.4 Movimiento circular con rapidez angular constante AM

La bola de la figura 15.13 gira en contra de las manecillas del reloj en un círculo de 3.00 m de radio, con una rapidez angular constante de 8.00 rad/s. En $t = 0$, su sombra tiene una coordenada x de 2.00 m y se mueve hacia la derecha.

(A) Determine la coordenada x de la sombra como función del tiempo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Asegúrese de que comprende la relación entre el movimiento circular de la bola y el movimiento armónico simple de su sombra, como se describe en la figura 15.13. Advierta que la sombra *no* está en su posición máxima en $t = 0$.

Categorizar La bola sobre la tornamesa es una *partícula en movimiento circular uniforme*. La sombra se modela como una *partícula en movimiento armónico simple*.

continúa

15.4 continuación

Analizar Use la ecuación 15.23 para escribir una expresión para la coordenada x de la partícula girando:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

Se resuelve la constante de fase:

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) - \omega t$$

Sustituya valores numéricos para las condiciones iniciales:

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{2.00\text{ m}}{3.00\text{ m}}\right) - 0 = \pm 48.2^\circ = \pm 0.841\text{ rad}$$

Si tuviéramos que tomar $\phi = +0.841$ rad como nuestra respuesta, la sombra que se mueve hacia la izquierda en $t = 0$. Ya que la sombra se mueve hacia la derecha en $t = 0$, debemos elegir $\phi = -0.841$ rad.

Escriba la coordenada x como una función del tiempo:

$$x = 3.00\cos(8.00t - 0.841)$$

(B) Encuentre las componentes x de velocidad y aceleración de la sombra en cualquier tiempo t.

SOLUCIÓN

Derivando la coordenada x respecto al tiempo para encontrar la velocidad en cualquier tiempo en m/s:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-3.00\text{ m})(8.00\text{ rad/s})\,\text{sen}\,(8.00t - 0.841)$$
$$= -24.0\,\text{sen}\,(8.00t - 0.841)$$

Derivando la velocidad respecto al tiempo para encontrar la aceleración en cualquier tiempo en m/s²:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = (-24.0\text{ m/s})(8.00\text{ rad/s})\cos(8.00t - 0.841)$$
$$= -192\cos(8.00t - 0.841)$$

Finalizar Estos resultados son igualmente válidos para la bola en movimiento circular uniforme y la sombra en movimiento armónico simple. Observe que el valor de la constante de fase pone la bola en el cuarto cuadrante del sistema de coordenadas xy de la figura 15.14, que es consistente con la sombra con un valor positivo para x y se mueve hacia la derecha.

15.5 El péndulo

Cuando θ es pequeño, el movimiento de un péndulo simple se puede modelar como un movimiento armónico simple sobre la posición de equilibrio $\theta = 0$.

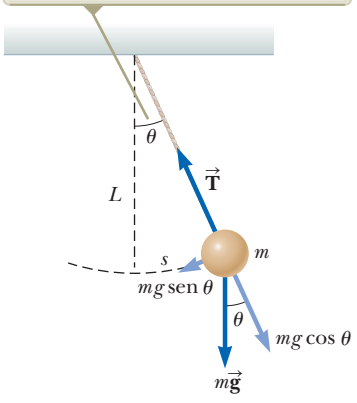


Figura 15.16 Un péndulo simple.

El **péndulo simple** es otro sistema mecánico que muestra movimiento periódico. Consiste de una plomada parecida a una partícula de masa m suspendida de una cuerda ligera de longitud L que está fija en el extremo superior, como se muestra en la figura 15.16. El movimiento se presenta en el plano vertical y es impulsado por la fuerza gravitacional. Se demostrará que siempre que el ángulo θ sea pequeño (menor que aproximadamente 10°), el movimiento es muy cercano al de un oscilador armónico simple.

Las fuerzas que actúan en la plomada son la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cuerda y la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$. La componente tangencial $mg\,\text{sen}\,\theta$ de la fuerza gravitacional siempre actúa hacia $\theta = 0$, opuesta al desplazamiento de la plomada desde la posición más baja. Por lo tanto, la componente tangencial es una fuerza restauradora y se puede aplicar la segunda ley de Newton del movimiento en la dirección tangencial:

$$F_t = ma_t \rightarrow -mg\,\text{sen}\,\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

donde el signo negativo indica que la fuerza tangencial actúa hacia la posición de equilibrio (vertical) y s es la posición de la plomada medida a lo largo del arco. Hemos expresado la celeración tangencial como la segunda derivada de la posición s. Ya que $s = L\theta$ (ecuación 10.1a con $r = L$) y L es constante, esta ecuación se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\,\text{sen}\,\theta$$

Al considerar θ como la posición, compare esta ecuación con la ecuación 15.3. ¿Tiene la misma forma matemática? El lado derecho es proporcional a sen θ en vez de θ; por eso, no se esperaría movimiento armónico simple porque esta expresión no tiene la forma de la ecuación 15.3. Sin embargo, si se supone que θ es pequeño (menor que aproximadamente 10° o 0.2 rad), se puede usar la **aproximación de ángulo pequeño**, en la que sen $\theta \approx \theta$, donde θ se mide en radianes. La tabla 15.1 muestra ángulos en grados y radianes y los senos de estos ángulos. En tanto θ sea menor que aproximadamente 10°, el ángulo en radianes y su seno son los mismos hasta dentro de una precisión menor de 1.0 por ciento.

Por lo tanto, para ángulos pequeños, la ecuación de movimiento se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad \text{(para valores pequeños de } \theta\text{)} \tag{15.24}$$

La ecuación 15.24 tiene la misma forma matemática que la ecuación 15.3, así se concluye que el movimiento para amplitudes de oscilación pequeñas se puede modelar como movimiento armónico simple. En consecuencia, la solución de la ecuación 15.24 es modelada después de la ecuación 15.6 y está dada por $\theta = \theta_{máx} \cos(\omega t + \phi)$, donde $\theta_{máx}$ es la *posición angular máxima* y la frecuencia angular ω es

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{15.25}$$

◀ **Frecuencia angular para un péndulo simple**

El periodo del movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{15.26}$$

◀ **Periodo de un péndulo simple**

En otras palabras, el periodo y la frecuencia de un péndulo simple sólo dependen de la longitud de la cuerda y de la aceleración debida a la gravedad. Ya que el periodo es independiente de la masa, se concluye que todos los péndulos simples que son de igual longitud y están en la misma ubicación (de modo que g es constante) oscilan con el mismo periodo.

El péndulo simple se puede usar como cronómetro porque su periodo sólo depende de su longitud y del valor local de g. También es un dispositivo conveniente para hacer mediciones precisas de la aceleración en caída libre. Tales mediciones son importantes porque las variaciones en los valores locales de g pueden proporcionar información acerca de la ubicación de petróleo y otros recursos subterráneos valiosos.

Examen rápido 15.6 Un reloj de péndulo depende del periodo de un péndulo para mantener el tiempo correcto. **(i)** Suponga que un reloj de péndulo se calibra correctamente y luego un niño travieso desliza la plomada del péndulo hacia abajo sobre la barra oscilante. ¿El reloj se mueve (a) lento, (b) rápido o (c) correctamente? **(ii)** Suponga que un reloj de péndulo se calibra correctamente a nivel del mar y luego se lleva a lo alto de una montaña muy alta. El reloj ahora se mueve, ¿(a) lento, (b) rápido o (c) correctamente?

Prevención de riesgos ocultos 15.5

Movimiento armónico simple no verdadero El péndulo *no* presenta cierto movimiento armónico simple para *cualquier* ángulo. Si el ángulo es menos de 10°, el movimiento está cerca y se puede *modelar* como armónico simple.

Tabla 15.1 Ángulos y senos de ángulos

Ángulo en grados	Ángulo en radianes	Seno de ángulo	Porcentaje de diferencia
0°	0.000 0	0.000 0	0.0%
1°	0.017 5	0.017 5	0.0%
2°	0.034 9	0.034 9	0.0%
3°	0.052 4	0.052 3	0.0%
5°	0.087 3	0.087 2	0.1%
10°	0.174 5	0.173 6	0.5%
15°	0.261 8	0.258 8	1.2%
20°	0.349 1	0.342 0	2.1%
30°	0.523 6	0.500 0	4.7%

Ejemplo 15.5 Conexión entre longitud y tiempo

Christian Huygens (1629-1695), el mayor relojero de la historia, sugirió que se podía definir una unidad internacional de longitud como la longitud de un péndulo simple que tiene un periodo de exactamente 1 s. ¿Cuánta más corta sería la unidad de longitud actual si se hubiese seguido su sugerencia?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un péndulo que se balancee de atrás para adelante en exactamente 1 s. De acuerdo con su experiencia al observar objetos que se balancean, ¿puede hacer una estimación de la longitud requerida? Cuelgue un objeto pequeño de una cuerda y simule el péndulo de 1 s.

Categorizar Este ejemplo es sobre un péndulo simple, así que se clasifica como una aplicación de los conceptos introducidos en esta sección.

Resuelva la ecuación 15.26 para la longitud y sustituya los valores conocidos:

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1.00\ \text{s})^2(9.80\ \text{m/s}^2)}{4\pi^2} = 0.248\ \text{m}$$

La longitud del metro sería ligeramente menor que un cuarto de su longitud actual. Además, el número de cifras significativas sólo depende de cómo se conoce exactamente g, porque el tiempo se definió exactamente como 1 s.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si Huygens hubiera nacido en otro planeta? ¿Cuál tendría que ser el valor de g en dicho planeta para que el metro en función del péndulo de Huygens tuviera el mismo valor que el metro actual?

Respuesta Resuelva la ecuación 15.26 para g:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2(1.00\ \text{m})}{(1.00\ \text{s})^2} = 4\pi^2\ \text{m/s}^2 = 39.5\ \text{m/s}^2$$

Ningún planeta en el Sistema Solar tiene una aceleración tan grande debida a la gravedad.

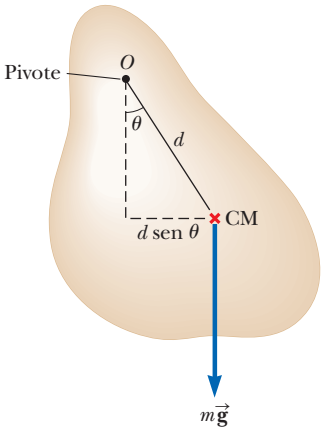


Figura 15.17 Un péndulo físico pivoteado en O.

Péndulo físico

Suponga que usted equilibra un gancho de alambre de modo que la punta esté sostenida por su dedo índice extendido. Cuando usted da al gancho un pequeño desplazamiento angular con su otra mano y luego lo libera, oscila. Si un objeto que cuelga oscila en torno a un eje fijo que no pasa a través de su centro de masa y el objeto no se puede aproximar como una masa puntual, no se puede tratar al sistema como un péndulo simple. En este caso el sistema se llama *péndulo físico*.

Considere un objeto rígido con centro de eje en un punto O que está a una distancia d del centro de masa (figura 15.17). La fuerza gravitacional proporciona un momento de torsión en torno a un eje a través de O, y la magnitud de dicho momento de torsión es mgd sen θ, donde θ es como se muestra en la figura 15.17. El objeto se modela como un objeto rígido bajo un momento de torsión neto y usa la forma rotacional de la segunda ley de Newton, $\Sigma \tau_{\text{ext}} = I\alpha$, donde I es el momento de inercia del objeto en torno al eje a través de O. El resultado es

$$-mgd \operatorname{sen}\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

El signo negativo indica que el momento de torsión en torno a O tiende a disminuir θ. Es decir, la fuerza gravitacional produce un momento de torsión restaurador. Si de nuevo se supone que θ es pequeño, la aproximación sen $\theta \approx \theta$ es válida y la ecuación de movimiento se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta \qquad (15.27)$$

Ya que esta ecuación es de la misma forma que la ecuación 15.3, su solución es la del oscilador armónico simple. Es decir: la solución de la ecuación 15.27 está dada por $\theta = \theta_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi)$, donde $\theta_{\text{máx}}$ es la máxima posición angular y

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

El periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (15.28)$$

◀ Periodo de un péndulo físico

Este resultado se puede usar para medir el momento de inercia de un objeto rígido plano. Si se conoce la posición del centro de masa y, por lo tanto, el valor de d, se obtiene el momento de inercia al medir el periodo. Por último, advierta que la ecuación 15.28 se reduce al periodo de un péndulo simple (ecuación 15.26) cuando $I = md^2$, es decir, cuando toda la masa se concentra en el centro de masa.

Ejemplo 15.6 Una barra que se balancea

Una barra uniforme de masa M y longitud L se articula en torno a un extremo y oscila en un plano vertical (figura 15.18). Encuentre el periodo de oscilación si la amplitud del movimiento es pequeña.

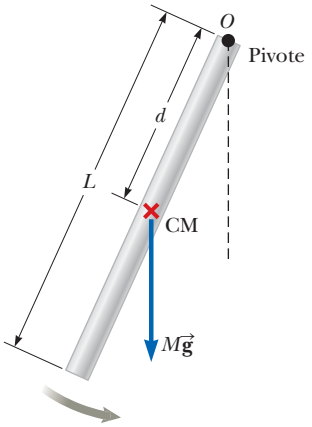


Figura 15.18 (Ejemplo 15.6) Una barra rígida que oscila en torno a un eje a través de un extremo es un péndulo físico con $d = L/2$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una barra que se balancea de atrás para adelante cuando se articula en un extremo. Inténtelo con una regleta o una pieza de madera.

Categorizar Ya que la barra no es una partícula puntual, se le clasifica como un péndulo físico.

Analizar En el capítulo 10 se encontró que el momento de inercia de una barra uniforme en torno a un eje a través de un extremo es $\frac{1}{3}ML^2$. La distancia d desde el eje al centro de masa de la barra es $L/2$.

Sustituya estas cantidades en la ecuación 15.28:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg(L/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Finalizar En uno de los alunizajes, un astronauta que caminaba sobre la superficie de la Luna tenía un cinturón que colgaba de su traje espacial y el cinturón osciló como un péndulo físico. Un científico en la Tierra observó este movimiento en televisión y lo usó para estimar la aceleración de caída libre en la Luna. ¿Cómo hizo este cálculo el científico?

Péndulo de torsión

La figura 15.19 de la página 468 muestra un objeto rígido suspendido mediante un alambre unido a lo alto de un soporte fijo. Cuando el objeto gira a través de cierto ángulo θ, el alambre que gira ejerce sobre el objeto un momento de torsión restaurador que es proporcional a la posición angular. Es decir,

$$\tau = -\kappa\theta$$

donde κ (letra griega kappa) se llama *constante de torsión* del alambre de soporte y es una rotación análoga a la fuerza constante κ para un resorte. El valor de κ se puede obtener al aplicar un momento de torsión conocido para girar el alambre a través de un ángulo mensurable θ. Al aplicar la segunda ley de Newton para movimiento rotacional se encuentra que

$$\sum \tau = I\alpha \rightarrow -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta \qquad (15.29)$$

De nuevo este resultado es la ecuación de movimiento para un oscilador armónico simple, con $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ y un periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad (15.30)$$

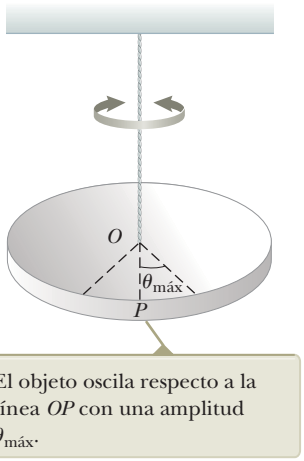


Figura 15.19 Un péndulo de torsión.

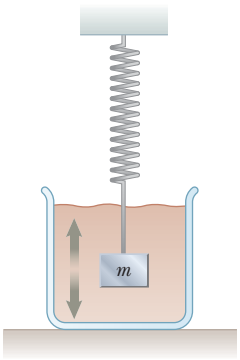


Figura 15.20 Un ejemplo de un oscilador amortiguado es un objeto unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso.

Este sistema se llama *péndulo de torsión*. En esta situación no hay restricción de ángulo pequeño en tanto no se supere el límite elástico del alambre.

15.6 Oscilaciones amortiguadas

Los movimientos oscilatorios considerados hasta el momento han sido para sistemas ideales: sistemas que oscilan indefinidamente sólo bajo la acción de una fuerza, una fuerza restauradora lineal. En muchos sistemas reales, fuerzas no conservativas como la fricción o la resistencia del aire retardan el movimiento del sistema. En consecuencia, la energía mecánica del sistema disminuye en el tiempo y se dice que el movimiento está *amortiguado*. La energía mecánica perdida se transforma en energía interna en el objeto y el medio retardador. La figura 15.20 bosqueja uno de tales sistemas: un objeto unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso. Otro ejemplo es un péndulo simple oscilando en el aire. Después de ponerse en movimiento, el péndulo va deteniendo su oscilación debido a la resistencia del aire. Los dispositivos basados en resortes de carga bajo el puente son amortiguadores que transforman la energía mecánica del puente oscilante en energía interna.

Un tipo común de fuerza retardadora es la que se explicó en la sección 6.4, donde la fuerza es proporcional a la rapidez del objeto en movimiento y actúa en la dirección opuesta a la velocidad del objeto respecto al medio. Con frecuencia esta fuerza retardadora se observa cuando un objeto se mueve a través de aire, por ejemplo. Ya que la fuerza retardadora se puede expresar como $\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$ (donde b es una constante llamada *coeficiente de amortiguamiento*) y la fuerza restauradora del sistema es $-kx$, se puede escribir la segunda ley de Newton como

$$\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (15.31)$$

La solución a esta ecuación requiere matemática que tal vez no le sea familiar; en este caso simplemente se establece sin demostración. Cuando la fuerza retardadora es pequeña en comparación con la fuerza restauradora máxima (es decir, cuando b es pequeño), la solución a la ecuación 15.31 es

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega t + \phi) \qquad (15.32)$$

donde la frecuencia angular de oscilación es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad (15.33)$$

Este resultado se puede verificar al sustituir la ecuación 15.32 en la ecuación 15.31. Es conveniente expresar la frecuencia angular de un oscilador amortiguado en la forma

$$\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ representa la frecuencia angular en ausencia de una fuerza retardadora (el oscilador no amortiguado) y se llama **frecuencia natural** del sistema.

La figura 15.21 muestra la posición como función del tiempo para un objeto que oscila en presencia de una fuerza retardadora. Cuando la fuerza retardadora es pequeña, el carácter oscilatorio del movimiento se conserva pero la amplitud disminuye exponencialmente en el tiempo, con el resultado de que al final el movimiento cesa. Cualquier sistema que se comporte de esta forma se conoce como **oscilador amortiguado**. Las líneas negras discontinuas en la figura 15.21, que definen la *envoltura* de la curva oscilatoria, representan el factor exponencial de la ecuación 15.32. Esta envoltura muestra que la amplitud decae exponencialmente con el tiempo. Para movimiento con una constante de resorte y masa de cierto objeto dados, las oscilaciones se amortiguan más rápidamente para valores más grandes de la fuerza retardadora.

Cuando la magnitud de la fuerza retardadora es pequeña, tal que $b/2m < \omega_0$, se dice que el sistema está **subamortiguado**. El movimiento resultante se representa mediante la curva azul de la figura 15.22. Conforme el valor de b aumenta, la amplitud de las oscilaciones disminuye más y más rápidamente. Cuando b alcanza un valor crítico b_c tal que $b_c/2m = \omega_0$, el sistema no oscila y se dice que está **críticamente amortiguado**. En este caso el sistema, una vez liberado del reposo en alguna posición de no equilibrio, se aproxima pero no pasa a través de la posición de equilibrio. La gráfica de posición frente a tiempo para este caso es la curva roja en la figura 15.22.

Si el medio es tan viscoso que la fuerza retardadora es grande en comparación con la fuerza restauradora (es decir, si $b/2m > \omega_0$), el sistema está **sobreamortiguado**. De nuevo el sistema desplazado, cuando tiene libertad para moverse, no oscila, sino simplemente regresa a la posición de equilibrio. Conforme el amortiguamiento aumenta, el intervalo de tiempo requerido para que el sistema se aproxime al equilibrio también aumenta, como indica la curva negra en la figura 15.22. Para sistemas críticamente amortiguados y sobreamortiguados, no hay frecuencia angular ω y la solución en la ecuación 15.32 no es válida.

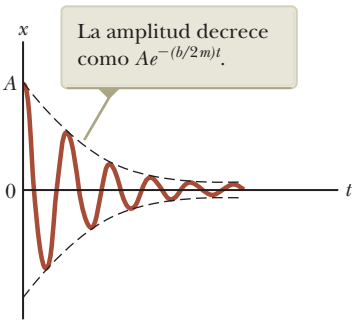


Figura 15.21 Gráfica de posición en función del tiempo para un oscilador amortiguado.

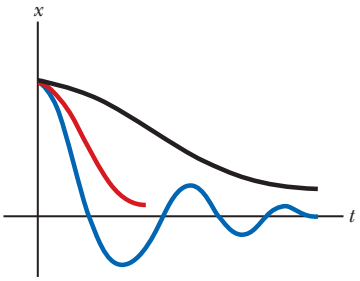


Figura 15.22 Gráficas de posición en función del tiempo para un oscilador subamortiguado (curva azul), un oscilador críticamente amortiguado (curva roja) y un oscilador sobreamortiguado (curva negra).

15.7 Oscilaciones forzadas

Se ha visto que la energía mecánica de un oscilador amortiguado disminuye en el tiempo como resultado de la fuerza retardadora. Es posible compensar esta disminución de energía al aplicar una fuerza externa que haga trabajo positivo sobre el sistema. En cualquier instante se puede transferir energía al sistema mediante una fuerza aplicada que actúe en la dirección de movimiento del oscilador. Por ejemplo, un niño en un columpio se puede mantener en movimiento mediante "empujones" adecuadamente cronometrados. La amplitud del movimiento permanece constante si la entrada de energía por cada ciclo de movimiento iguala exactamente la disminución en energía mecánica en cada ciclo que resulta de las fuerzas retardadoras.

Un ejemplo común de oscilador forzado es un oscilador amortiguado impulsado por una fuerza externa que varía periódicamente, tal como $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, donde F_0 es una constante y ω es la frecuencia angular de la fuerza impulsora. En general, la frecuencia ω de la fuerza impulsora es variable, mientras que la frecuencia natural ω_0 del oscilador es fija por los valores de k y m. Al modelar un oscilador con fuerzas retardadoras e impulsoras como una partícula bajo una fuerza neta, la segunda ley de Newton en esta situación produce

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow F_0 \operatorname{sen} \omega t - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (15.34)$$

De nuevo la solución de esta ecuación es más bien larga y no se presentará. Después que comienza a actuar la fuerza impulsora en un objeto inicialmente estable, la amplitud de la oscilación aumentará. El sistema del oscilador y el medio circundante es un sistema no aislado: el trabajo es realizado por la fueza impulsora, de manera que la energía vibracional del sistema (energía cinética del objeto, la energía potencial elástica en el resorte) y la energía interna del objeto y el medio crecen. Después de un periodo suficientemente largo, cuando la entrada de energía por cada ciclo de la fuerza impulsora sea igual a la cantidad de energía mecánica transformada en energía interna por cada ciclo, se alcanza una condición de estado estacionario en que las oscilaciones proceden con amplitud constante. En esta situación, la solución de la ecuación 15.34 es

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (15.35)$$

donde

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \qquad (15.36)$$

Amplitud de un oscilador impulsado ▶

y donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del oscilador subamortiguado ($b = 0$).

Las ecuaciones 15.35 y 15.36 muestran que el oscilador forzado vibra a la frecuencia de la fuerza impulsora y que la amplitud del oscilador es constante para una fuerza impulsora determinada porque se impulsa en estado estacionario mediante una fuerza externa. Para amortiguamiento pequeño, la amplitud es grande cuando la frecuencia de la fuerza impulsora está cerca de la frecuencia natural de oscilación, o cuando $\omega \approx \omega_0$. El dramático aumento en amplitud cerca de la frecuencia natural se llama **resonancia**, y la frecuencia natural ω_0 también se llama la **frecuencia de resonancia** del sistema.

La explicación para oscilaciones de gran amplitud en la frecuencia de resonancia es que la energía se transfiere al sistema bajo las condiciones más favorables. Este concepto se comprende mejor si se considera la primera derivada de x en el tiempo en la ecuación 15.35, que produce una expresión para la velocidad del oscilador. Se encuentra que v es proporcional a $\text{sen}(\omega t + \phi)$, que es la misma función trigonométrica que la descrita por la fuerza impulsora. Por lo tanto, la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ está en fase con la velocidad. La rapidez a la que $\vec{\mathbf{F}}$ realiza trabajo sobre el oscilador es igual al producto punto $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$; esta rapidez es la potencia entregada al oscilador. Ya que el producto $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ es un máximo cuando $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ están en fase, se concluye que, en resonancia, la fuerza aplicada está en fase con la velocidad y la potencia transferida al oscilador es un máximo.

La figura 15.23 es una gráfica de la amplitud como función de la frecuencia para un oscilador forzado con y sin amortiguamiento. Advierta que la amplitud aumenta con amortiguamiento decreciente ($b \to 0$) y que la curva de resonancia se ensancha a medida que aumenta el amortiguamiento. En ausencia de una fuerza de amortiguamiento ($b = 0$), por la ecuación 15.36 se observa que la amplitud en estado estacionario tiende a infinito conforme ω tiende a ω_0. En otras palabras, si no hay pérdidas en el sistema y se continúa impulsando un oscilador inicialmente sin movimiento con una fuerza periódica que está en fase con la velocidad, la amplitud del movimiento se acumula sin límite (vea la curva café de la figura 15.23). Esta acumulación sin límite no se presenta en la práctica porque en realidad siempre hay presente algún amortiguamiento.

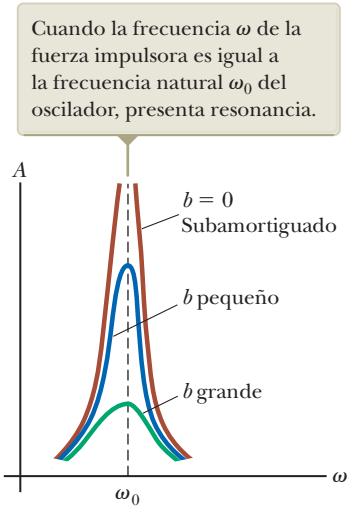


Figura 15.23 Gráfica de amplitud en función de la frecuencia para un oscilador amortiguado cuando está presente una fuerza impulsora periódica. Note que la forma de la curva de resonancia depende del tamaño del coeficiente de amortiguamiento b.

Más adelante en este libro se verá que la resonancia aparece en otras áreas de la física. Por ejemplo, ciertos circuitos eléctricos tienen frecuencias naturales y pueden entrar en fuerte resonancia al variar el voltaje aplicado a una frecuencia dada. Un puente tiene frecuencias naturales que se pueden poner en resonancia mediante una fuerza impulsora adecuada. Un dramático ejemplo de tal resonancia se presentó en 1940, cuando el puente Tacoma Narrows, en el estado de Washington, fue destruido por vibraciones resonantes. Aunque los vientos no eran particularmente intensos en dicha ocasión, el "aleteo" del viento a través del camino (piense en el "aleteo" de una bandera frente a un viento fuerte) proporcionó una fuerza impulsora periódica cuya frecuencia se emparejó con la del puente. Las oscilaciones resultantes del puente hicieron que a final de cuentas colapsara (figura 15.24) porque el diseño del puente tenía características inadecuadas de seguridad interna.

Se pueden citar muchos otros ejemplos de vibraciones resonantes. Una vibración resonante que puede haber experimentado el lector es el "canturreo" de los cables de

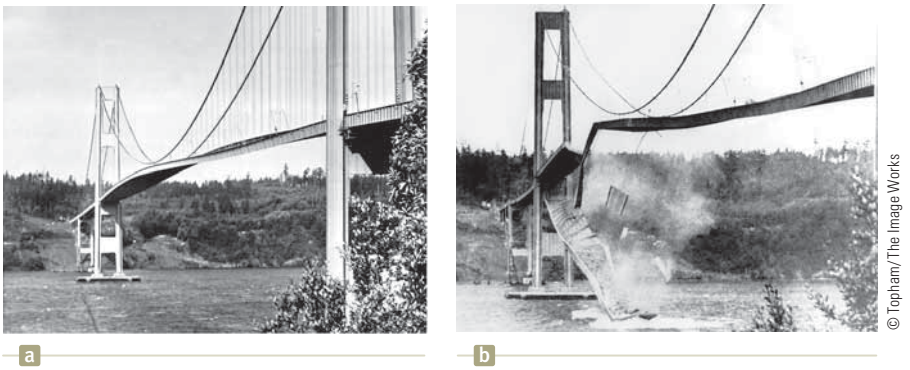


Figura 15.24 (a) En 1940 vientos turbulentos establecieron vibraciones de torsión en el puente Tacoma Narrows, haciendo que oscilara a una frecuencia cercana a una de las frecuencias naturales de la estructura del puente. (b) Una vez establecida, esta condición de resonancia condujo al colapso del puente. (Son un desafío para matemáticos y físicos algunos aspectos de esta interpretación).

teléfono en el viento. Las máquinas fallan con frecuencia si una parte en vibración está en resonancia con alguna otra parte móvil. Se ha sabido de soldados que, al marchar en cadencia por un puente, establecieron vibraciones resonantes en la estructura y por ello causaron su colapso. Siempre que cualquier sistema físico real sea impulsado cerca de su frecuencia de resonancia se pueden producir oscilaciones de amplitudes muy grandes.

Resumen

Conceptos y principios

Las energías cinética y potencial para un objeto de masa m que oscila en el extremo de un resorte con constante de fuerza k varían con el tiempo y están dadas por

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) \quad \textbf{(15.19)}$$

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad \textbf{(15.20)}$$

La energía total de un oscilador armónico simple es una constante del movimiento y está dada por

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 \quad \textbf{(15.21)}$$

Un **péndulo simple** de longitud L puede modelarse si se mueve en movimiento armónico simple para desplazamientos angulares pequeños desde la vertical. Su periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \textbf{(15.26)}$$

Para desplazamientos angulares pequeños desde la vertical, un **péndulo físico** puede modelarse si se mueve en movimiento armónico simple en torno a un perno que no pasa a través del centro de masa. El periodo de este movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad \textbf{(15.28)}$$

donde I es el momento de inercia en torno a un eje a través del eje y d es la distancia desde el eje al centro de masa.

Si un oscilador experimenta una fuerza amortiguadora $\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$, su posición para amortiguamiento pequeño está descrita por

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega t + \phi) \quad \textbf{(15.32)}$$

donde

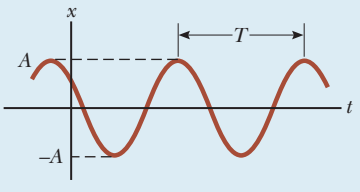
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad \textbf{(15.33)}$$

Si un oscilador está sujeto a una fuerza impulsora sinusoidal $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, muestra *resonancia*, en la cual la amplitud es mayor cuando la frecuencia impulsora ω coincide con la frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ del oscilador.

Análisis de modelos para resolver problemas

Partícula en movimiento armónico simple Si una partícula se somete a una fuerza de la forma de la ley de Hooke, $F = -kx$, la partícula muestra **movimiento armónico simple**. Su posición se describe mediante

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad \textbf{(15.6)}$$



donde A es la **amplitud** del movimiento, ω es la **frecuencia angular** y ϕ es la **constante de fase**. El valor de ϕ depende de la posición y velocidad iniciales de la partícula.

El **periodo** de la oscilación de la partícula es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \textbf{(15.13)}$$

y el inverso del periodo es la *frecuencia*.

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Si se duplica la longitud de un péndulo simple que oscila con una amplitud pequeña, ¿qué pasa con la frecuencia de su movimiento? (a) Se duplica. (b) Resulta $\sqrt{2}$ veces más grande. (c) Resulta la mitad de grande. (d) Resulta $1/\sqrt{2}$ veces más grande. (e) Sigue siendo la misma.

2. Usted une un bloque al extremo inferior de un resorte que cuelga verticalmente. Deja que el bloque se mueva despacio hacia abajo y encuentra que cuelga en reposo con el resorte estirado 15.0 cm. A continuación, levanta el bloque de nuevo y lo libera desde el reposo con el resorte no estirado. ¿Qué distancia máxima se mueve hacia abajo? (a) 7.5 cm, (b) 15.0 cm, (c) 30.0 cm, (d) 60.0 cm, e) no se puede determinar la distancia sin conocer la masa y la constante del resorte.

3. Un sistema de bloque-resorte que vibra sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 6.0 cm tiene una energía de 12 J. Si el bloque es reemplazado por uno cuya masa es dos veces la masa del bloque original y la amplitud del movimiento es otra vez 6.0 cm, ¿cuál es la energía del sistema? (a) 12 J, (b) 24 J, (c) 6 J, (d) 48 J, (e) ninguna de esas respuestas.

4. Un sistema de objeto-resorte con movimiento armónico simple tiene una amplitud A. Cuando la energía cinética del objeto es igual a dos veces la energía potencial almacenada en el resorte, ¿cuál es la posición x del objeto? (a) A, (b) $\frac{1}{3}A$, (c) $A/\sqrt{3}$, (d) 0, (e) ninguna de esas respuestas.

5. Un objeto de masa 0.40 kg cuelga de un resorte con una constante de resorte de 8.0 N/m, se encuentra en un movimiento armónico simple de arriba-abajo. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración del objeto cuando está en su desplazamiento máximo de 0.10 m? (a) cero, (b) 0.45 m/s^2, (c) 1.0 m/s^2, (d) 2.0 m/s^2, (e) 2.4 m/s^2.

6. Un vagón desbocado, con masa 3.0×10^5 kg, corre a través de un nivel de la vía a 2.0 m/s cuando choca elásticamente con un parachoques con resorte en el extremo de la vía. Si la constante elástica del parachoques es 2.0×10^6 N/m, ¿cuál es la máxima compresión del resorte durante la colisión. (a) 0.77 m (b) 0.58 m (c) 0.34 m (d) 1.07 m (e) 1.24 m

7. La posición de un objeto que se mueve con movimiento armónico simple está dada por $x = 4\cos(6\pi t)$, donde x está en metros y t está en segundos. ¿Cuál es el periodo del sistema oscilante? (a) 4 s, (b) $\frac{1}{6}$ s, (c) $\frac{1}{3}$ s, (d) 6π s, (e) es imposible determinar a partir de la información dada.

8. Si un objeto de masa m unido a un resorte ligero es reemplazado por uno de masa $9m$ cambia la frecuencia del sistema vibratorio, ¿en qué factor? (a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) 3.0 (d) 9.0 (e) 6.0

9. Usted está de pie en el borde de un trampolín y rebota para ponerlo en oscilación. Encuentre una respuesta máxima en términos de la amplitud de oscilación del borde del trampolín, cuando rebote a la frecuencia f. Ahora se mueve a la mitad del trampolín y repite el experimento. ¿La frecuencia de resonancia para oscilaciones forzadas en este punto es (a) mayor, (b) menor o (c) la misma que f?

10. Un sistema de masa-resorte se mueve con movimiento armónico simple en el eje x entre los puntos de inflexión en $x_1 = 20$ cm y $x_2 = 60$ cm. Para los incisos del (i) al (iii), elija las mismas cinco posibilidades. **(i)** ¿En qué posición tiene la mayor magnitud la cantidad de movimiento de la partícula? (a) 20 cm, (b) 30 cm, (c) 40 cm (d) alguna otra posición (e) el mayor valor se produce en varios puntos. **(ii)** ¿En qué posición tiene mayor energía cinética la partícula? **(iii)** ¿En qué posición tiene mayor energía total del sistema de partícula-resorte?

11. Un bloque con masa $m = 0.1$ kg oscila con amplitud $A = 0.1$ m en el extremo de un resorte con fuerza constante $k = 10$ N/m sobre una superficie horizontal sin fricción. Ordene los periodos de las siguientes situaciones de mayor a menor. Si algunos periodos son iguales, muestre su igualdad en su clasificación. (a) El sistema es como se describió anteriormente. (b) El sistema es como se describe en la situación (a), excepto que la amplitud es 0.2 m. (c) La situación es como se describe en la situación (a), excepto que la masa es de 0.2 kg. (d) La situación es como se describe en la situación (a), excepto que el resorte tiene una constante de fuerza de 20 N/m. (e) Una pequeña fuerza resistiva hace que el movimiento sea subamortiguado.

12. Para un oscilador armónico simple, responda sí o no a las siguientes preguntas. (a) ¿Pueden las cantidades de la posición y velocidad tener el mismo signo? (b) ¿Pueden la velocidad y la aceleración tener el mismo signo? (c) ¿Pueden la posición y la aceleración tener el mismo signo?

13. El extremo superior de un resorte se mantiene fijo. Un bloque se cuelga en el extremo inferior como en la figura PO15.13a y se mide la frecuencia f de la oscilación del sistema. El bloque, un bloque segundo idéntico y el resorte se llevan en un transbordador espacial en órbita de la Tierra. Los dos bloques se unen a los extremos del resorte. El resorte está comprimido sin tener espirales adyacentes que se toquen (figura PO15.13b), y el sistema se libera para oscilar mientras flota dentro de la cabina del transbordador (figura PO15.13c). ¿Cuál es la frecuencia de oscilación para este sistema en términos de f? (a) $f/2$, (b) $f/\sqrt{2}$, (c) f, (d) $\sqrt{2}f$, (e) $2f$.

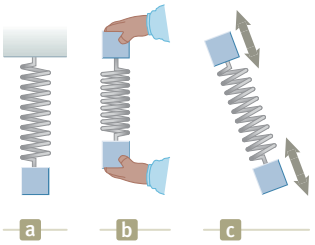


Figura PO15.13

14. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones *no* es verdadera con respecto a un sistema masa-resorte que se mueve con movimiento armónico simple en ausencia de fricción? (a) La energía total del sistema permanece constante. (b) La energía del sistema se transforma continuamente entre la energía cinética y potencial. (c) La energía total del sistema es proporcional al cuadrado de la amplitud. (d) La energía potencial almacenada en el sistema es mayor cuando la masa pasa a través de la posición de equilibrio. (e) La velocidad de la masa oscilante tiene su valor máximo cuando la masa pasa a través de la posición de equilibrio.

15. Un péndulo simple tiene un periodo de 2.5 s. **(i)** ¿Cuál es su periodo, si su longitud se hace cuatro veces más grande? (a) 1.25 s, (b) 1.77 s, (c) 2.5 s, (d) 3.54 s, (e) 5 s. **(ii)** ¿Cuál es su periodo si, en lugar de cambiar su longitud, la masa de la plomada suspendida se hace cuatro veces más grande? Elija entre las mismas posibilidades.

16. Un péndulo simple está suspendido del techo de un elevador estable y se determina el periodo. **(i)** Cuando el elevador acelera hacia arriba, ¿el periodo es (a) mayor, (b) menor o (c) no cambia? **(ii)** Cuando el elevador tiene aceleración hacia abajo, ¿el periodo es (a) mayor, (b) menor o (c) no cambia? **(iii)** Cuando el elevador se mueve con velocidad constante hacia arriba, ¿el periodo del péndulo es (a) mayor, (b) menor o (c) no cambia?

17. Una partícula en un resorte se mueve en movimiento armónico simple a lo largo del eje x entre los puntos de retorno en $x_1 = 100$ cm y $x_2 = 140$ cm. **(i)** ¿En cuál de las siguientes posiciones la partícula tiene rapidez máxima? (a) 100 cm, (b) 110 cm, (c) 120 cm, (d) alguna otra posición. **(ii)** ¿En cuál posición tiene aceleración máxima? Escoja de las mismas posibilidades que en el inciso (i). **(iii)** ¿En cuál posición se ejerce la mayor fuerza neta sobre la partícula? Escoja de las mismas posibilidades que en el inciso (i).

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Usted observa un pequeño árbol frondoso. No nota brisa y la mayoría de las hojas en el árbol están sin movimiento. Sin embargo, una hoja se agita salvajemente de atrás para adelante. Después de un rato la hoja deja de moverse y usted nota que una hoja diferente se mueve mucho más que todas las demás. Explique qué podría causar el gran movimiento de una hoja particular.

2. Las ecuaciones que se mencionan en la página 38 dan la posición como una función del tiempo, la velocidad como una función del tiempo y la velocidad como función de la posición para un objeto que se mueve en línea recta con aceleración constante. La cantidad v_{xi} aparece en cada ecuación. (a) ¿Alguna de estas ecuaciones se aplica a un objeto que se mueve en línea recta con movimiento armónico simple? (b) Con un formato similar, haga una tabla de ecuaciones que describan el movimiento armónico simple. Incluya ecuaciones que den la aceleración como una función del tiempo y la aceleración como una función de la posición. Establezca las ecuaciones en tal forma que se apliquen igualmente a un sistema bloque-resorte, a un péndulo y a otros sistemas en vibración. ¿Qué cantidad aparece en cada ecuación?

3. (a) Si la coordenada de una partícula varía como $x = -A\cos\omega t$, ¿cuál es la constante de fase en la ecuación 15.6? (b) ¿En qué posición la partícula está en $t = 0$?

4. La plomada de cierto péndulo es una esfera llena con agua. ¿Qué ocurriría a la frecuencia de vibración de este péndulo si hubiera un orificio en la esfera que permitiera al agua salir lentamente?

5. La figura PC15.5 muestra gráficas de la energía potencial de cuatro sistemas diferentes en función de la posición de una partícula en cada sistema. Cada partícula se pone en movimiento con un empujón en una ubicación elegida arbitrariamente. Describa su movimiento posterior en cada caso (a), (b), (c) y (d).

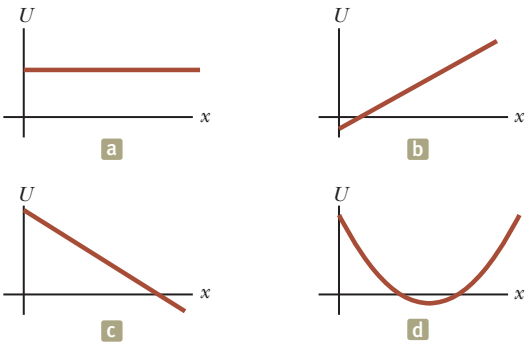


Figura PC15.5

6. Un estudiante cree que cualquier vibración real debe ser amortiguada. ¿El estudiante tiene razón? Si es así, proporcione un razonamiento convincente. Si no, dé un ejemplo de una vibración real que mantenga amplitud constante por siempre, si el sistema está aislado.

7. La energía mecánica de un sistema bloque-resorte no amortiguado es constante a medida que la energía cinética se transforma en energía potencial elástica y viceversa. Para comparar, explique en los mismos términos qué le sucede a la energía de un oscilador amortiguado.

8. ¿Es posible tener oscilaciones amortiguadas cuando un sistema está en resonancia? Explique.

9. ¿Se presentarían oscilaciones amortiguadas para cualquier valor de b y k? Explique.

10. Si un reloj de péndulo da el tiempo perfecto en la base de una montaña, ¿también dará el tiempo perfecto cuando se mueve a la cima de una montaña? Explique.

11. ¿Una pelota que rebota es un ejemplo de movimiento armónico simple? ¿El movimiento diario de un estudiante desde su casa a la escuela y de regreso es un movimiento armónico simple? ¿Por qué sí o por qué no?

12. Un péndulo simple se puede modelar como uno de movimiento armónico simple cuando θ es pequeño. ¿El movimiento es periódico cuando θ es grande?

13. Considere el motor de un solo pistón simplificado de la figura PC15.13. Suponiendo que la rueda gira con velocidad angular constante, explique por qué la varilla del pistón oscila con movimiento armónico simple.

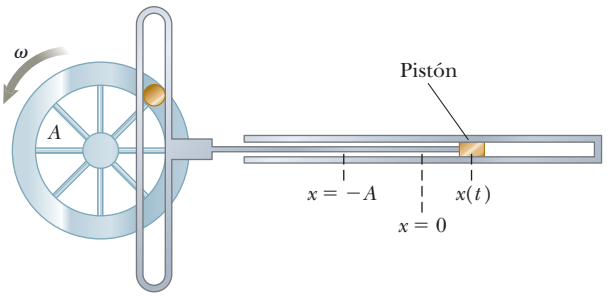


Figura PC15.13

Problemas

1. sencillo; 2. intermedio; 3. desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Nota: Ignore la masa de cada resorte, excepto en los problemas 76 y 87.

Sección 15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte

Los problemas 17, 18, 19, 22 y 59 del capítulo 7 también se pueden asignar con esta sección.

1. Un bloque de 0.60 kg unido a un resorte con fuerza constante de 130 N/m es libre de moverse sobre una superficie horizontal sin fricción, como en la figura 15.1. El bloque se suelta a partir del reposo cuando el resorte se extiende 0.13 m. En el instante en que se libera el bloque, (a) encuentre la fuerza en el bloque y (b) su aceleración.

2. Cuando un objeto de 4.25 kg se coloca sobre un resorte vertical, el resorte se comprime una longitud de 2.62 cm. ¿Cuál es la fuerza constante del resorte?

Sección 15.2 Análisis de modelo: partícula en movimiento armónico simple

3. Un resorte vertical se extiende 3.9 cm cuando se cuelga un objeto de 10 g. El objeto se reemplaza con un bloque de masa 25 g que oscila hacia arriba y hacia abajo con movimiento armónico simple. Calcule el periodo del movimiento.

4. En un motor, un pistón oscila con movimiento armónico simple de modo que su posición varía de acuerdo con la expresión

$$x = 5.00 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

donde x está en centímetros y t en segundos. En $t = 0$, encuentre (a) la posición de la partícula, (b) su velocidad y (c) su aceleración. Encuentre (d) el periodo y (e) la amplitud del movimiento.

5. La posición de una partícula está dada por la expresión $x = 4.00 \cos(3.00\omega t + \pi)$, donde x está en metros y t en segundos. Determine: (a) la frecuencia y (b) el periodo del movimiento, (c) la amplitud del movimiento, (d) la constante de fase y (e) la posición de la partícula en $t = 0.250$ s.

6. Un pistón en un motor a gasolina está en movimiento armónico simple. El motor está corriendo a razón de 3 600 rev/min. Si considera los extremos de su posición relativa con su punto central como ±5.00 cm, encuentre las magnitudes de (a) la velocidad máxima y (b) la aceleración máxima del pistón.

7. Un objeto de 1.00 kg se une a un resorte horizontal. El resorte inicialmente se estira 0.100 m y ahí se libera el objeto desde el reposo. Éste comienza a moverse sin fricción. La siguiente vez que la rapidez del objeto es cero es 0.500 s después. ¿Cuál es la rapidez máxima del objeto?

8. Un oscilador armónico simple toma 12.0 s experimentando cinco vibraciones completas. Encuentre (a) el periodo de su movimiento, (b) la frecuencia en hertz y (c) la frecuencia angular en radianes por segundo.

9. Un objeto de 7.00 kg cuelga del extremo inferior de un resorte vertical amarrado a una viga. El objeto se pone a oscilar verticalmente con un periodo de 2.60 s. Encuentre la constante de fuerza del resorte.

10. En un mercado al aire libre, una penca de plátanos está unida en la parte inferior de un resorte vertical de constante de fuerza de 16.0 N/m que se encuentra en movimiento oscilatorio con una amplitud de 20.0 cm. Se observa que la velocidad máxima de la penca de plátanos es 40.0 cm/s. ¿Cuál es el peso de los plátanos en newtons?

11. Un sensor de vibración, utilizado en la prueba de una lavadora, consiste en un cubo de aluminio de 1.50 cm de arista montado en un extremo de una tira de acero del resorte (como una hoja de sierra) que se encuentra en un plano vertical. La masa de la tira es pequeña comparada con la del cubo, pero la longitud de la tira es grande en comparación con el tamaño del cubo. El otro extremo de la tira se sujeta al bastidor de la máquina que no está en funcionamiento. Se necesita aplicar una fuerza horizontal de 1.43 N en el cubo para sostenerlo a 2.75 cm de su posición de equilibrio. Si se libera, ¿cuál es su frecuencia de vibración?

12. (a) Un resorte que cuelga se estira 35.0 cm cuando un objeto de 450 g de masa se cuelga de él en reposo. En esta situación se define su posición como $x = 0$. El objeto se jala hacia abajo 18.0 cm adicionales y se libera del reposo para oscilar sin fricción. ¿Cuál es su posición x en un momento 84.4 s más tarde? (b) Encuentre la distancia viajada por el objeto vibratorio en el inciso (a). (c) **¿Qué pasaría si?** Otro resorte que cuelga se estira 35.5 cm cuando un objeto de 440 g de masa se cuelga de él en reposo. Esta nueva posición se define como $x = 0$. Dicho objeto también se jala hacia abajo 18.0 cm adicionales y se libera del reposo para oscilar sin fricción. Encuentre su posición 84.4 s más tarde. (d) Encuentre la distancia viajada por el objeto en el inciso (c). (e) ¿Por qué las respuestas a los incisos (a) y (c) son tan diferentes cuando los datos de los incisos (a) y (c) son tan similares y las respuestas de los incisos (b) y (d) son relativamente cercanas? ¿Esta circunstancia revela una dificultad fundamental para calcular en el futuro?

13. **Problema de repaso.** Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Al inicio está en la posición 0.270 m y se mueve con velocidad de 0.140 m/s y aceleración de -0.320 m/s^2. Suponga que se mueve como una partícula con aceleración constante durante 4.50 s. Encuentre (a) su posición y (b) su velocidad al final de este intervalo de tiempo. A continuación, suponga que se mueve con movimiento armónico simple durante 4.50 s y $x = 0$ es su posición de equilibrio. Encuentre (c) su posición y (d) su velocidad al final de este intervalo de tiempo.

14. Se deja caer una bola desde una altura de 4.00 m que realiza una colisión elástica con el suelo. Si supone que no hay pérdida de energía mecánica debida a resistencia del aire, (a) demuestre que el movimiento resultante es periódico y (b) determine el periodo del movimiento. (c) ¿El movimiento es armónico simple? Explique.

15. Una partícula que se mueve a lo largo del eje x en movimiento armónico simple parte de su posición de equilibrio, el origen, en $t = 0$ y se mueve a la derecha. La amplitud de su movimiento es de 2.00 cm y la frecuencia de 1.50 Hz. (a) Encuentre una expresión para la posición de la partícula como una función del tiempo. Determine (b) la rapidez máxima de la partícula y (c) el tiempo más temprano ($t > 0$) en el que la partícula tiene esta rapidez. Encuentre (d) la aceleración positiva máxima de la partícula y (e) el tiempo más temprano ($t > 0$) en el que la partícula tiene esta aceleración y (f) la distancia total recorrida entre $t = 0$ y $t = 1.00$ s.

16. La posición inicial, velocidad y aceleración de un objeto que se mueve en movimiento armónico simple son x_i, v_i y a_i; la frecuencia angular de oscilación es ω. (a) Demuestre que la posición y velocidad del objeto para todos los tiempos se pueden escribir como

$$x(t) = x_i \cos \omega t + \left(\frac{v_i}{\omega}\right) \operatorname{sen} \omega t$$

$$v(t) = -x_i \omega \operatorname{sen} \omega t + v_i \cos \omega t$$

(b) Usando A para representar la amplitud del movimiento, demuestre que

$$v^2 - ax = v_i^2 - a_i x_i = \omega^2 A^2$$

17. Una partícula se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia de 3.00 Hz y una amplitud de 5.00 cm. (a) ¿Qué distancia total se mueve la partícula durante un ciclo de su movimiento? (b) ¿Cuál es su rapidez máxima? ¿Dónde ocurre esta rapidez máxima? (c) Encuentre la aceleración máxima de la partícula. En el movimiento, ¿dónde ocurre la aceleración máxima?

18. Un deslizador de 1.00 kg, unido a un resorte con constante de fuerza de 25.0 N/m, oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción. En $t = 0$, el deslizador se libera desde el reposo en $x = -3.00$ cm. (Es decir: el resorte se comprime 3.00 cm.) Encuentre (a) el periodo de su movimiento, (b) los valores máximos de su rapidez y aceleración, y (c) la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo.

19. Un objeto de 0.500 kg, unido a un resorte con constante de fuerza de 8.0 N/m, vibra en movimiento armónico simple con una amplitud de 10.0 cm. Calcule el máximo valor (a) de su rapidez y (b) aceleración, (c) la rapidez y (d) aceleración cuando el objeto está a 6.00 cm de la posición de equilibrio, y (e) el intervalo de tiempo requerido para que el objeto se mueva de $x = 0$ a $x = 8.00$ cm.

20. Usted une un objeto al extremo inferior de un resorte vertical que cuelga en reposo después de extender el resorte 18.3 cm. Luego pone el objeto a vibrar. (a) ¿Tiene suficiente información para encontrar su periodo? (b) Explique su respuesta y establezca lo que pueda acerca de su periodo.

Sección 15.3 Energía del oscilador armónico simple

21. Para probar la resistencia de su tope con colisiones de baja velocidad, se conduce un automóvil de 1 000 kg hacia una pared de ladrillos. Los parachoques del automóvil se comportan como un resorte con una constante de fuerza 5.00×10^6 N/m y se comprime 3.16 cm cuando el automóvil alcanza el reposo. ¿Cuál era la rapidez del automóvil antes del impacto, suponiendo que no se transforma o transfiere energía mecánica durante el impacto con la pared?

22. Un bloque de 200 g se une a un resorte horizontal y ejecuta un movimiento armónico simple con un periodo de 0.250 s. La energía total del sistema es de 2.00 J. Encuentre (a) la constante de fuerza del resorte y (b) la amplitud del movimiento.

23. Un bloque de masa desconocida se conecta a un resorte con una constante de resorte de 6.50 N/m y experimenta un movimiento armónico simple con una amplitud de 10.0 cm. Cuando el bloque está a la mitad entre su posición de equilibrio y el punto final, su rapidez que se mide es de 30.0 cm/s. Calcule (a) la masa del bloque, (b) el periodo del movimiento y (c) la aceleración máxima del bloque.

24. Un sistema bloque-resorte oscila con una amplitud de 3.50 cm. La constante de resorte es 250 N/m y la masa del bloque es 0.500 kg. Determine (a) la energía mecánica del sistema, (b) la rapidez máxima del bloque y (c) la aceleración máxima.

25. Una partícula ejecuta movimiento armónico simple con una amplitud de 3.00 cm. ¿En qué posición su rapidez es igual a la mitad de su rapidez máxima?

26. La amplitud de un sistema que se mueve con movimiento armónico simple se duplica. Determine el cambio en (a) la energía total, (b) la rapidez máxima, (c) la aceleración máxima y (d) el periodo.

27. Un objeto de 50.0 g, conectado a un resorte con una constante de fuerza de 35.0 N/m, oscila sobre una superficie horizontal sin fricción con una amplitud de 4.00 cm. Encuentre (a) la energía total del sistema y (b) la rapidez del objeto cuando la posición es de 1.00 cm. Encuentre (c) la energía cinética y (d) la energía potencial cuando la posición es de 3.00 cm.

28. Un objeto de 2.00 kg se une a un resorte y se coloca sobre una superficie horizontal uniforme. Se requiere una fuerza horizontal de 20.0 N para mantener al objeto en reposo cuando se jala 0.200 m desde su posición de equilibrio (el origen del eje x). Ahora el objeto se libera desde su posición estirada y se somete a sucesivas oscilaciones armónicas simples. Encuentre (a) la constante de fuerza del resorte, (b) la frecuencia de las oscilaciones y (c) la rapidez máxima del objeto. (d) ¿Dónde ocurre la rapidez máxima? (e) Encuentre la aceleración máxima del objeto. (f) ¿Dónde ocurre la aceleración máxima? (g) Encuentre la energía total del sistema oscilante. Encuentre (h) la rapidez e (i) la aceleración del objeto cuando su posición es igual a un tercio del valor máximo.

29. Un oscilador armónico simple de amplitud A tiene una energía total E. Determine (a) la energía cinética y (b) la energía potencial cuando la posición es un tercio de la amplitud. (c) ¿Para qué valores de la posición la ener-

gía cinética es igual a la mitad de la energía potencial? (d) ¿Hay algún valor de la posición donde la energía cinética es mayor que la máxima energía potencial? Explique.

30. Problema de repaso. Una saltadora de bungee de 65.00 kg salta de un puente con una cuerda ligera amarrada a ella y al puente. La longitud no estirada de la cuerda es de 11.0 m. La saltadora alcanza el fondo de su movimiento 36.0 m abajo del puente antes de rebotar de regreso. Queremos encontrar el intervalo de tiempo entre que deja el puente y llega al fondo de su movimiento. Su movimiento total se puede separar en una caída libre de 11.0 m y una sección de 25.0 m de oscilación armónica simple. (a) Para la parte de caída libre, ¿cuál es el análisis de modelo adecuado para describir su movimiento? (b) ¿Durante qué intervalo de tiempo está en caída libre? (c) Para la parte de oscilación armónica simple de la caída, ¿es el sistema de la saltadora, la cuerda elástica y la Tierra aislado o no aislado? (d) A partir de su respuesta en el inciso (c) encuentre la constante elástica de la cuerda. (e) ¿Cuál es la ubicación del punto de equilibrio donde la fuerza del resorte equilibra la fuerza gravitacional ejercida sobre la saltadora? (f) ¿Cuál es la frecuencia angular de la oscilación? (g) ¿Qué intervalo de tiempo se requiere para que la cuerda se estire 25.0 m? (h) ¿Cuál es el intervalo de tiempo total para un salto de 36.0 m?

31. **Problema de repaso.** Un bloque de 0.250 kg que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción se une a un resorte cuya constante de fuerza es 83.8 N/m, como en la figura P15.31. Una fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}$ hace que el resorte se estire una distancia de 5.46 cm desde su posición de equilibrio. (a) Encuentre la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}$. (b) ¿Cuál es la energía total almacenada en el sistema cuando se estira el resorte? (c) Encuentre la magnitud de la aceleración del bloque justo después que se retira la fuerza aplicada. (d) Encuentre la rapidez del bloque cuando éste primero alcanza la posición de equilibrio. (e) Si la superficie no es sin fricción, pero el bloque todavía alcanza la posición de equilibrio, sería su respuesta a la parte (d) ¿mayor o menor? (f) ¿Qué otra información necesitaría saber para encontrar la respuesta real del inciso (d) en este caso? (g) ¿Cuál es el valor más grande del coeficiente de fricción que permita al bloque alcanzar la posición de equilibrio?

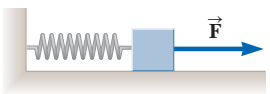


Figura P15.31

32. Un objeto de 326 g se une a un resorte y ejecuta un movimiento armónico simple con un periodo de 0.250 s. Si la energía total del sistema es 5.83 J, encuentre (a) la rapidez máxima del objeto, (b) la constante de fuerza del resorte y (c) la amplitud del movimiento.

Sección 15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme

33. Mientras viaja detrás de un automóvil a 3.00 m/s nota que una de las llantas del automóvil tiene un pequeño chichón en el borde, como se muestra en la figura P15.33. (a) Explique por qué el chichón, desde su punto de vista detrás del automóvil, ejecuta movimiento armónico simple. (b) Si el radio de la llanta del automóvil es de 0.300 m, ¿cuál es el periodo de oscilación del chichón?

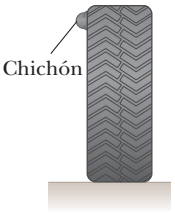


Figura P15.33

Sección 15.5 El péndulo

El problema 68 del capítulo 1 también se puede asignar en esta sección.

34. Un "péndulo segundero" es aquel que se mueve a través de su posición de equilibrio una vez cada segundo. (El periodo del péndulo es precisamente 2 s.) La longitud de un péndulo segundero es de 0.992 7 m en Tokio, Japón, y de 0.994 2 m en Cambridge, Inglaterra. ¿Cuál es la razón de las aceleraciones en caída libre en estas dos ubicaciones?

35. Un péndulo simple hace 120 oscilaciones completas en 3.00 min en un lugar donde $g = 9.80\ \text{m/s}^2$. Encuentre (a) el periodo del péndulo y (b) su longitud.

36. Una partícula de masa m se desliza sin fricción dentro de un tazón hemisférico de radio R. Demuestre que si la partícula parte del reposo con un pequeño desplazamiento desde el equilibrio, se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia angular igual al de un péndulo simple de longitud R. Es decir, $\omega = \sqrt{g/R}$.

37. Un péndulo físico en forma de objeto plano se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia de 0.450 Hz. El péndulo tiene una masa de 2.20 kg y el eje se ubica a 0.350 m del centro de masa. Determine el momento de inercia del péndulo en torno al punto de giro.

38. Un péndulo físico en forma de objeto plano se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia f. El péndulo tiene una masa de m y el eje se ubica a una distancia d del centro de masa. Determine el momento de inercia del péndulo en torno al punto de giro.

39. La posición angular de un péndulo se representa mediante la ecuación $\theta = (0.032\ 0\ \text{rad}) \cos \omega t$, donde θ está en radianes y $\omega = 4.43\ \text{rad/s}$. Determine el periodo y la longitud del péndulo.

40. Considere el péndulo físico de la figura 15.17. (a) Represente su momento de inercia en torno a un eje que pasa a través de su centro de masa y paralelo al eje que pasa a través de su punto de giro como I_{CM}. Demuestre que su periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{CM}} + md^2}{mgd}}$$

donde d es la distancia entre el punto de giro y el centro de masa. (b) Demuestre que el periodo tiene un valor mínimo cuando d satisface $md^2 = I_{\text{CM}}$.

41. Un péndulo simple tiene una masa de 0.250 kg y una longitud de 1.00 m. Se desplaza a través de un ángulo de 15.0° y luego se libera. Usando el análisis de modelo de partícula en movimiento armónico simple, ¿cuáles son (a) la rapidez máxima, (b) la aceleración angular máxima y (c) la fuerza restauradora máxima? (d) **¿Qué pasaría si?** Resuelva de nuevo los incisos del (a) al (c) usando el análisis de modelos introducidos en los capítulos anteriores. (e) Compare las respuestas.

42. Una barra rígida muy ligera con una longitud de 0.500 m se extiende recta desde un extremo de una regleta. La combinación se suspende de un pivote en el extremo superior de la barra, como se muestra en la figura P15.42. Luego la combinación se jala un ángulo pequeño y se libera. (a) Determine el periodo de oscilación del sistema. (b) ¿En qué porcentaje difiere el periodo del periodo de un péndulo simple de 1.00 m de largo?

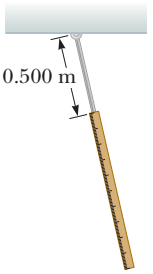
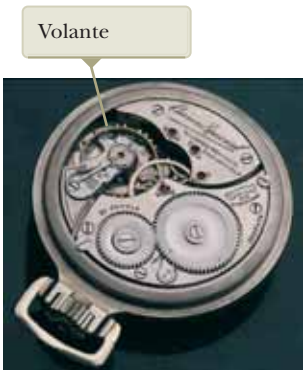


Figura P15.42

43. **Problema de repaso.** Un péndulo simple tiene 5.00 m de longitud. ¿Cuál es el periodo de oscilaciones pequeñas para este péndulo, si se ubica en un elevador que acelera hacia arriba a 5.00 m/s^2? (b) ¿Cuál es su periodo si el elevador acelera hacia abajo a 5.00 m/s^2? (c) ¿Cuál es el periodo de este péndulo si se coloca en un camión que acelera horizontalmente a 5.00 m/s^2?

44. Un objeto pequeño se une al extremo de un resorte para formar un péndulo simple. El periodo de su movimiento armónico se mide para pequeños desplazamientos angulares y tres longitudes. Para cada longitud, el intervalo de tiempo para 50 oscilaciones se mide con un cronómetro. Para longitudes de 1.000 m, 0.750 m y 0.500 m se miden intervalos de tiempo totales de 99.8 s, 86.6 s y 71.1 s para 50 oscilaciones. (a) Determine el periodo de movimiento para cada longitud. (b) Determine el valor medio de g obtenido a partir de estas tres mediciones independientes y compárelas con el valor aceptado. (c) Grafique T^2 con L y obtenga un valor para g a partir de la pendiente de su gráfica de línea recta de mejor ajuste. Compare este valor con el obtenido en el inciso (b).

45. El volante de un reloj (figura P15.45) tiene un periodo de oscilación de 0.250 s. La rueda está construida de modo que su masa de 20.0 g se concentra alrededor de un borde de 0.500 cm de radio. ¿Cuáles son (a) el momento de inercia del volante y (b) la constante de torsión del resorte unido?



© Cengage Learning/George Semple
Figura P15.45

Sección 15.6 Oscilaciones amortiguadas

46. Un péndulo con una longitud de 1.00 m se libera desde un ángulo inicial de 15.0°. Después de 1 000 s su amplitud se reduce por fricción a 5.50°. ¿Cuál es el valor de $b/2m$?

47. Un objeto de 10.6 kg oscila en el extremo de un resorte vertical que tiene una constante de resorte de 2.05×10^4 N/m. El efecto de la resistencia del aire se representa mediante el coeficiente de amortiguamiento $b = 3.00$ N · s/m. (a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada. (b) ¿En qué porcentaje disminuye la amplitud de la oscilación en cada ciclo? (c) Encuentre el intervalo de tiempo que transcurre mientras la energía del sistema disminuye al 5.00% de su valor inicial.

48. Demuestre que la rapidez de cambio con el tiempo de la energía mecánica para un oscilador amortiguado no impulsado está dada por $dE/dt = -bv^2$ y por eso siempre es negativa. Para hacerlo, derive la expresión para la energía mecánica de un oscilador, $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$, y use la ecuación 15.31.

49. Demuestre que la ecuación 15.32 es una solución de la ecuación 15.31 siempre que $b^2 < 4mk$.

Sección 15.7 Oscilaciones forzadas

50. Una bebé se regocija durante el día haciendo sonidos y rebotando arriba y abajo en su cuna. Su masa es de 12.5 kg y el colchón de la cuna se modela como un resorte ligero con constante de fuerza de 700 N/m. (a) La bebé pronto aprende a rebotar con máxima amplitud y mínimo esfuerzo al doblar sus rodillas, ¿a qué frecuencia? (b) Ella aprende a usar el colchón como trampolín y pierde contacto con él durante parte de cada ciclo, ¿cuándo su amplitud de oscilación mínima supera qué valor?

51. Cuando entra en un buen restaurante se da cuenta que se ha traído de su casa accidentalmente un pequeño temporizador electrónico en vez de su teléfono celular. Frustrado, mete el temporizador en un bolsillo de su saco, sin darse cuenta que el temporizador está funcionando. El brazo de la silla presiona la tela ligera de su abrigo contra su cuerpo en un punto. Tela con una longitud L cuelga libremente por debajo de ese punto, con el cronómetro en la parte inferior. En algún momento durante la cena, el temporizador se apaga y un zumbador y un vibrador encienden y apagan con una frecuencia de 1.50 Hz. Esto hace que la parte que cuelga de su abrigo se mueve hacia adelante y hacia atrás de la oscilación con amplitud notablemente grande, llamando la atención de todo el mundo. Encuentre el valor de L.

52. Un bloque que pesa 40.0 N está suspendido de un resorte que tiene una constante de fuerza de 200 N/m. El sistema no está amortiguado ($b = 0$) y está sujeto a una fuerza impulsora armónica de 10.0 Hz de frecuencia, lo que resulta en una amplitud de movimiento forzado de 2.00 cm. Determine el valor máximo de la fuerza impulsora.

53. Un objeto de 2.00 kg unido a un resorte se mueve sin fricción ($b = 0$) y es impulsado por una fuerza externa dada por $F = 3.00 \operatorname{sen}(2\pi t)$. La constante de fuerza del resorte es de 20.0 N/m. Determine (a) la frecuencia angular de resonancia del sistema, (b) la frecuencia angular del sistema conducido y (c) la amplitud del movimiento.

54. Si considera un oscilador forzado no amortiguado ($b = 0$), demuestre que la ecuación 15.35 es una solución de la ecuación 15.34 con una amplitud dada por la ecuación 15.36.

55. El amortiguamiento es despreciable para un objeto de 0.150 kg que cuelga de un resorte ligero de 6.30 N/m. Una

fuerza sinusoidal, con una amplitud de 1.70 N, impulsa al sistema. ¿A qué frecuencia la fuerza hará vibrar al objeto con una amplitud de 0.440 m?

Problemas adicionales

56. La masa de la molécula de deuterio (D_2) es el doble de la molécula de hidrógeno (H_2). Si la frecuencia de vibración del H_2 es 1.30×10^{14} Hz, ¿cuál es la frecuencia de vibración del D_2? Suponga que la "constante de resorte" de las fuerzas atractivas es la misma para las dos moléculas.

57. Un objeto de masa m se mueve en movimiento armónico simple con 12.0 cm de amplitud en un resorte ligero. Su aceleración máxima es 108 cm/s^2. Considere m como variable. (a) Encuentre el periodo T del objeto. (b) Encuentre su frecuencia f. (c) Halle la rapidez máxima $v_{máx}$ del objeto. (d) Localice la energía E del sistema objeto-resorte. (e) Encuentre la constante de fuerza k del resorte. (f) Describa el patrón de dependencia de cada una de las cantidades T, f, $v_{máx}$, E y k en m.

58. **Problema de repaso.** Este problema extiende el razonamiento del problema 75 del capítulo 9. Dos deslizadores se ponen en movimiento sobre una pista de aire. El deslizador 1 tiene masa $m_1 = 0.240$ kg y se mueve hacia la derecha con una rapidez de 0.740 m/s. Tendrá una colisión posterior con el deslizador número 2, de masa $m_2 = 0.360$ kg, que tiene rapidez hacia la derecha de 0.120 m/s. Un resorte ligero con constante de fuerza de 45.0 N/m se une al extremo posterior del deslizador 2, como se muestra en la figura P9.75. Cuando el deslizador 1 toca el resorte, un súper pegamento hace que instantánea e inmediatamente se pegue a su extremo del resorte. (a) Encuentre la rapidez común que tienen los dos deslizadores cuando la compresión del resorte es un máximo. (b) Encuentre la distancia máxima de compresión de resorte. El movimiento después que los planeadores se unen consiste en una combinación de (1) el movimiento de velocidad constante del centro de masa del sistema de los dos planeadores encontrados en el inciso (a), y (2) el movimiento armónico simple de los planeadores con respecto al centro de masa. (c) Encuentre la energía del movimiento del centro de masa. (d) Encuentre la energía de oscilación.

59. Una bola pequeña de masa M está unida al extremo de una barra uniforme de igual masa M y longitud L que está articulada en la parte superior (figura P15.59). Determine las tensiones en la barra (a) en el pivote y (b) en el punto P cuando el sistema es estacionario. (c) Calcule el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos desde el equilibrio y (d) determine este periodo para $L = 2.00$ m.

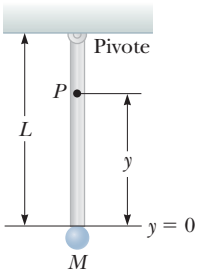


Figura P15.59

60. **Problema de repaso.** Una roca descansa sobre una acera de concreto. Se presenta un terremoto, que mueve al suelo verticalmente en movimiento armónico con una frecuencia constante de 2.40 Hz y con amplitud gradualmente creciente. (a) ¿Con qué amplitud vibra el suelo cuando la roca comienza a perder contacto con la acera? Otra roca está asentada sobre el concreto en el fondo de una alberca llena con agua. El terremoto sólo produce movimiento vertical, así que el agua no salpica de lado a lado. (b) Presente un argumento convincente de que, cuando el suelo vibra con la amplitud encontrada en el inciso (a), la roca sumergida también apenas pierde contacto con el suelo de la alberca.

61. Cuatro personas, cada una con una masa de 72.4 kg, están en un auto con una masa de 1 130 kg. Un terremoto impacta. Las oscilaciones verticales de la superficie del suelo hacen que el auto rebote hacia arriba y hacia abajo sobre sus resortes de suspensión, pero el conductor logra salir del camino y parar. Cuando la frecuencia del temblor es 1.80 Hz, el auto presenta una amplitud máxima de vibración. Al terminar el terremoto las cuatro personas salen del auto tan rápido como pueden. ¿Qué longitud se levanta la suspensión no dañada del auto conforme la gente sale?

62. Considere la velocidad con que camina un animal bípedo o cuadrúpedo, modele una pierna que no está contactando a la tierra como una barra uniforme de longitud ℓ, que se hace pivotar como un péndulo físico a través de una mitad de ciclo, en resonancia. Sea que $\theta_{máx}$ represente su amplitud. (a) Demuestre que la rapidez del animal está dada por la expresión

$$v = \frac{\sqrt{6g\ell}\,\operatorname{sen}\theta_{máx}}{\pi}$$

Si $\theta_{máx}$ es lo suficientemente pequeño que el movimiento es casi armónico simple. Una relación empírica que se basa en el mismo modelo y se aplica en un gran rango de ángulos es

$$v = \frac{\sqrt{6g\ell\,\cos\left(\theta_{máx}/2\right)}\,\operatorname{sen}\theta_{máx}}{\pi}$$

(b) Evalúe la rapidez con que camina un ser humano con una pierna de longitud 0.850 m y una amplitud de balanceo de pierna de 28.0°C. ¿Qué longitud de pierna daría el doble de la rapidez para la misma amplitud angular?

63. La aceleración de caída libre en Marte es 3.7 m/s^2. (a) ¿Qué longitud tiene el péndulo de periodo 1.0 s en la Tierra? (b) ¿Qué longitud tendría el péndulo de periodo 1.0 s en Marte? Un objeto está suspendido de un resorte con fuerza constante 10 N/m. Encuentre la masa suspendida de este resorte que daría como resultado un periodo de 1.0 s (c) en la Tierra y (d) en Marte.

64. Un objeto unido a un resorte vibra con movimiento armónico simple según lo descrito por la figura P15.64. Para este movimiento, encuentre (a) la amplitud, (b) el periodo, (c) la frecuencia angular, (d) la rapidez máxima, (e) la ace-

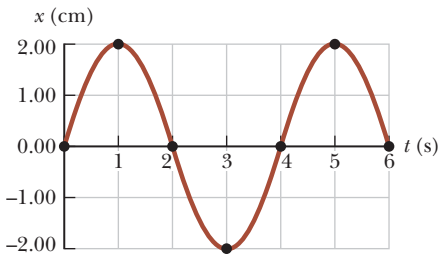


Figura P15.64

leración máxima y (f) una ecuación para su posición x en función del tiempo.

65. **Problema de repaso.** Un gran bloque P unido a un resorte ideal realiza movimiento armónico simple horizontal mientras se desliza a través de una superficie sin fricción, con una frecuencia $f = 1.50$ Hz. El bloque B descansa sobre él, como se muestra en la figura P15.65, y el coeficiente de fricción estática entre los dos es $\mu_s = 0.600$. ¿Qué amplitud máxima de oscilación puede tener el sistema si el bloque B no se desliza?

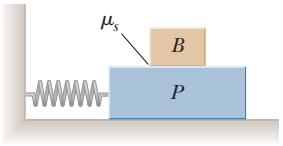


Figura P15.65
Problemas 65 y 66.

66. **Problema de repaso.** Un gran bloque P realiza movimiento armónico simple horizontal mientras se desliza a través de una superficie sin fricción con una frecuencia f. El bloque B descansa sobre él, como se muestra en la figura P15.65, y el coeficiente de fricción estática entre los dos es μ_s. ¿Qué amplitud máxima de oscilación puede tener si el bloque B no se desliza?

67. Un péndulo de longitud L y masa M tiene un resorte con constante de fuerza k conectado a él a una distancia h bajo su punto de suspensión (figura P15.67). Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para pequeños valores de la amplitud (θ pequeño). Suponga que la barra de suspensión vertical de longitud L es rígida, pero ignore su masa.

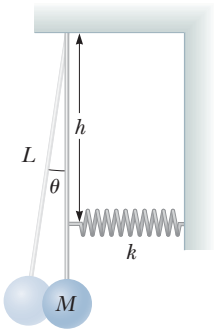


Figura P15.67

68. Un bloque de masa m se conecta a dos resortes con constantes de fuerza k_1 y k_2 en dos formas, como se muestra en la figura P15.68. En ambos casos el bloque se mueve sobre una mesa sin fricción después de desplazarse desde el equilibrio y liberarse. Demuestre que en los dos casos el bloque muestra movimiento armónico simple con periodos

$$\text{(a) } T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}} \quad \text{y} \quad \text{(b) } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

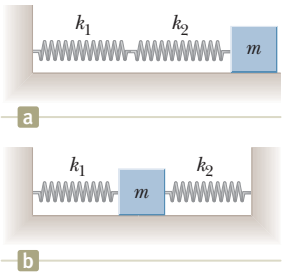


Figura P15.68

69. Un tablón horizontal de masa 5.00 kg y longitud 2.00 m se pivotea en un extremo. El otro extremo del tablón está sostenido por un resorte con constante de fuerza 100 N/m (figura P15.69). El tablón se desplaza un ángulo pequeño θ desde su posición de equilibrio horizontal y se libera. Encuentre la frecuencia angular con que el tablón se mueve con movimiento armónico simple.

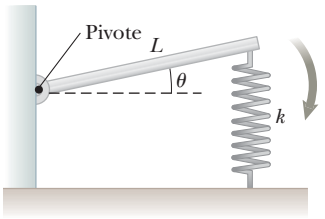


Figura P15.69
Problemas 69 y 70.

70. Un tablón horizontal de masa m y longitud L se pivotea en un extremo. El otro extremo del tablón está sostenido por un resorte con constante de fuerza k (figura P15.69). El tablón se desplaza un ángulo pequeño θ desde su posición de equilibrio horizontal y se libera. Encuentre la frecuencia angular con la que el tablón se mueve con movimiento armónico simple.

71. **Problema de repaso.** Una partícula de 4.00 kg de masa está unida a un resorte con una constante de fuerza de 100 N/m. Oscila sobre una superficie horizontal sin fricción con una amplitud de 2.00 m. Un objeto de 6.00 kg se deja caer verticalmente en la parte superior del objeto de 4.00 kg mientras pasa a través de su punto de equilibrio. Los dos objetos quedan pegados. (a) ¿Por cuánto cambia la amplitud del sistema en vibración como resultado de la colisión? (b) ¿Por cuánto cambia el periodo del sistema? (c) ¿Por cuánto cambia la energía del sistema como un resultado de la colisión? (d) Estime el cambio en energía.

72. Una bola de masa m se conecta a dos bandas de hule de longitud L, cada una bajo tensión T, como se muestra en la figura P15.72. La bola se desplaza una pequeña distancia y perpendicular a la longitud de las bandas de hule. Si supone que la tensión no cambia, demuestre que (a) la fuerza restauradora es $-(2T/L)y$, y (b) el sistema muestra movimiento armónico simple con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{2T/mL}$.

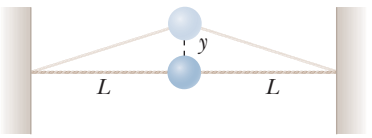


Figura P15.72

73. **Problema de repaso.** Un extremo de un resorte ligero, con constante de fuerza de $k = 100$ N/m, se une a una pared vertical. Una cuerda ligera se amarra al otro extremo del resorte horizontal, como se ve en la figura P15.73. La cuerda cambia de horizontal a vertical conforme pasa sobre una polea sólida de masa M con forma de un disco sólido de radio $R = 2.00$ cm. La polea es libre de girar sobre un eje fijo uniforme. La sección vertical de la cuerda sostiene un objeto de masa $m = 200$ g. La cuerda no se desliza en su contacto con la polea. El objeto se jala hacia abajo una pequeña distancia y se libera. (a) ¿Cuál es la frecuencia angular ω de oscilación del objeto en términos de la masa M? (b) ¿Cuál es el mayor valor posible de la frecuencia angular de osci-

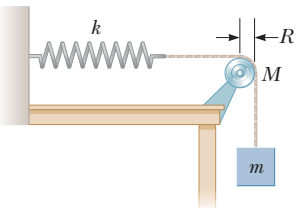


Figura P15.73

lación del objeto? (c) ¿Cuál es el mayor valor posible de la frecuencia angular de oscilación del objeto si se duplica el radio de la polea a $R = 4.00$ cm?

74. Quienes viajan en motocicletas y bicicletas aprenden a prestar atención a los baches en el camino, y en especial a las *tablas de lavar*, una condición en la que muchos bordes igualmente espaciados se forman en el camino. ¿Qué es tan malo en las tablas de lavar? Una motocicleta tiene muchos resortes y amortiguadores en su suspensión, pero usted puede modelarla como un solo resorte que sostiene un bloque. Puede estimar la constante de fuerza al pensar en cuánto se comprime el resorte cuando un motociclista pesado conduce. Un motociclista que viaja con rapidez de carretera debe tener particular cuidado de los baches en forma de tablas de lavar que están separados cierta distancia. ¿Cuál es el orden de magnitud de su distancia de separación?

75. Un péndulo simple con una longitud de 2.23 m y una masa de 6.47 kg recibe una rapidez inicial de 2.06 m/s en su posición de equilibrio. Suponga que experimenta un movimiento armónico simple. Determine su (a) periodo, (b) energía total y (c) máximo desplazamiento angular.

76. Cuando un bloque de masa M, conectado al extremo de un resorte de masa $m_s = 7.40$ g y constante de fuerza k, se pone en movimiento armónico simple, el periodo de su movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + (m_s/3)}{k}}$$

Se conduce un experimento en dos partes con el uso de bloques de diferentes masas suspendidas verticalmente del resorte, como se muestra en la figura P15.76. (a) Extensiones estáticas de 17.0, 29.3, 35.3, 41.3, 47.1 y 49.3 cm se miden para valores de M de 20.0, 40.0, 50.0, 60.0, 70.0 y 80.0 g, respectivamente. Construya una gráfica de Mg con x y realice un ajuste lineal por mínimos cuadrados a los datos. (b) De la pendiente de su gráfica, determine un valor para k de este resorte. (c) El sistema ahora se pone en movimiento armónico simple y se miden los periodos con cronómetro. Con $M = 80.0$ g, el intervalo de tiempo total requerido para 10 oscilaciones se mide en 13.41 s. El experimento se repite con valores M de 70.0, 60.0, 50.0, 40.0 y 20.0 g, con intervalos de tiempo correspondientes para diez oscilaciones de 12.52, 11.67, 10.67, 9.62 y 7.03 s. Realice una tabla con estas masas y tiempos. (d) Calcule el valor experimental para T a partir de cada una de estas mediciones. (e) Trace una gráfica de T^2 con M y (f) determine un valor para k a partir de la pendiente del ajuste lineal de mínimos cuadrados a través de los puntos de datos. (g) Compare este valor de k con el obtenido en el inciso (b). (h) Obtenga un valor para m_s a partir de su gráfica y compárelo con el valor conocido de 7.40 g.

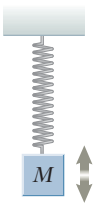


Figura P15.76

77. **Problema de repaso.** Un globo ligero lleno con helio de densidad 0.179 kg/m^3 está atado a una cuerda ligera de longitud $L = 3.00$ m. La cuerda está atada a la tierra formando un péndulo simple "invertido" (figura 15.77a). Si el balón se desplaza ligeramente del equilibrio, como en la figura P15.77b, y se libera, (a) demuestre que el movimiento es armónico simple y (b) determine el periodo del movimiento. Tome la densidad del aire de 1.20 kg/m^3. Sugerencia: utilice una analogía con el péndulo simple y vea el capítulo 14. Suponga que el aire aplica una fuerza de flotación en el globo que no afecta su movimiento.

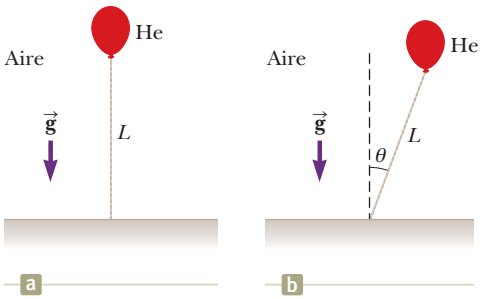


Figura P15.77

78. Considere el oscilador amortiguado que se muestra en la figura 15.20. La masa del objeto es 375 g, la constante de resorte es 100 N/m y $b = 0.100$ N · s/m. (a) ¿Durante qué intervalo de tiempo la amplitud disminuye a la mitad de su valor inicial? (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Durante qué intervalo de tiempo la energía mecánica disminuye a la mitad de su valor inicial? (c) Demuestre que, en general, la relación fraccionaria a la cual la amplitud disminuye en un oscilador armónico amortiguado es la mitad de la relación fraccionaria a la que disminuye la energía mecánica.

79. Una partícula con una masa de 0.500 kg está unida a un resorte con una constante de fuerza de 50.0 N/m. En el momento que $t = 0$ la partícula tiene su rapidez máxima de 20.0 m/s y se mueve hacia la izquierda. (a) Determine la ecuación de movimiento de la partícula y especifique su posición como función del tiempo. (b) ¿Dónde, en el movimiento, la energía potencial es tres veces la energía cinética? (c) Encuentre el intervalo de tiempo mínimo requerido para que la partícula se mueva de $x = 0$ a $x = 1.00$ m. (d) Encuentre la longitud de un péndulo simple con el mismo periodo.

80. Su pulgar rechina en un plato que acaba de lavar. Sus zapatos tenis rechinan en el piso del gimnasio. Las llantas de los autos rechinan con un arranque o frenado abrupto. Usted puede hacer cantar a una copa al secar su dedo humedecido alrededor de su borde. Cuando el gis rechina en un pizarrón, usted puede ver que hace una hilera de rayas regularmente espaciadas. Como sugieren estos ejemplos, la vibración comúnmente resulta cuando la fricción actúa sobre un objeto elástico en movimiento. La oscilación no es un movimiento armónico simple, sino que se llama *pegar* y *deslizar*. Este problema modela un movimiento de pegar y deslizar.

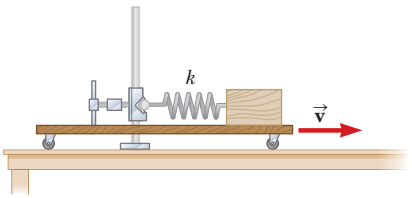


Figura P15.80

Un bloque de masa m se une a un soporte fijo mediante un resorte horizontal, con constante de fuerza k y masa despreciable (figura P15.80). La ley de Hooke describe el resorte tanto en extensión como en compresión. El bloque descansa sobre una larga tabla horizontal, con la que tiene coeficiente de fricción estático μ_s y un coeficiente de fricción cinética μ_k menor. La tabla se mueve hacia la derecha con rapidez constante v. Suponga que el bloque pasa la mayor parte de su tiempo pegado a la tabla y en movimiento hacia la derecha, de modo que la rapidez v es pequeña en comparación con la rapidez promedio que tiene el bloque mientras se desliza de regreso hacia la izquierda. (a) Demuestre que la máxima extensión del resorte, desde su posición no estirada, es muy cercana a la que se conoce mediante $\mu_s mg/k$. (b) Demuestre que el bloque oscila en torno a una posición de equilibrio en la que el resorte se estira en $\mu_k mg/k$. (c) Grafique la posición del bloque con el tiempo. (d) Demuestre que la amplitud del movimiento del bloque es

$$A = \frac{(\mu_s - \mu_k)mg}{k}$$

(e) Demuestre que el periodo del movimiento del bloque es

$$T = \frac{2(\mu_s - \mu_k)mg}{vk} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Este exceso de fricción estática sobre la fricción cinética es importante para la vibración. "La rueda chirriante obtiene la grasa" porque ni siquiera un fluido viscoso puede ejercer una fuerza de fricción estática.

81. **Problema de repaso.** Una boya de langostero es un cilindro de madera sólida de radio r y masa M a la cual se le coloca peso en un extremo, de modo que flote vertical en agua de mar tranquila, que tiene densidad ρ. Un tiburón que pasa tensa la soga floja que amarra la boya a una trampa de langosta y jala la boya una distancia x desde su posición de equilibrio y la libera. (a) Demuestre que la boya ejecutará movimiento armónico simple si se ignoran los efectos resistivos del agua y (b) determine el periodo de las oscilaciones.

82. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Su trabajo implica la construcción de osciladores amortiguados muy pequeños. Uno de sus diseños consiste en un oscilador de resorte-objeto con un resorte de constante de fuerza $k = 10.0$ N/m y un objeto de masa $m = 1.00$ g. El objetivo del diseño es que el oscilador experimente muchas oscilaciones conforme su amplitud disminuye al 25.0% de su valor inicial en un cierto intervalo de tiempo. Las mediciones en su más reciente diseño demuestran que la amplitud cae al valor del 25.0% en 23.1 ms. Este intervalo de tiempo es demasiado largo para lo que necesita en su proyecto. Para acortar el intervalo de tiempo, se duplica la constante b de amortiguamiento para el oscilador. Esta duplicación permite alcanzar su objetivo de diseño.

83. Dos bolas de acero, cada una de 67.4 cm de diámetro, se mueven en direcciones opuestas a 5.00 m/s. Chocan de manera frontal y rebotan elásticamente. Apretando una de las bolas en la prensa mientras se realizan mediciones precisas de la cantidad resultante de la compresión, encontrará que la ley de Hooke es un buen modelo del comportamiento elástico de la bola. Una fuerza de 16.0 kN que ejerce cada mandíbula de la prensa reduce el diámetro en 0.200 mm. Modelo el movimiento de cada bola, mientras las bolas están en contacto, como la mitad de un ciclo de movimiento armónico simple. Calcule el intervalo de tiempo durante el cual las bolas están en contacto. (Si usted resolvió el problema 57 del capítulo 7, compare los resultados de este problema con los resultados de ése.)

Problemas de desafío

84. Un pequeño disco de radio r y masa m se pega rígidamente a la cara de un segundo disco más grande de radio R y masa M, como se muestra en la figura P15.84. El centro del disco pequeño se ubica en el borde del disco grande. El disco grande se monta en su centro en un eje sin fricción. El ensamble da vueltas a través de un pequeño ángulo θ desde su posición de equilibrio y se libera. (a) Demuestre que mientras pasa a través de la posición de equilibrio la rapidez del centro del disco pequeño es

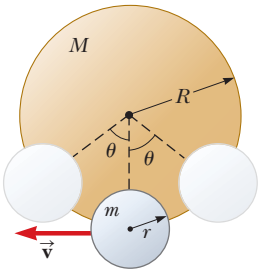


Figura P15.84

$$v = 2\left[\frac{Rg(1 - \cos\theta)}{(M/m) + (r/R)^2 + 2}\right]^{1/2}$$

(b) Demuestre que el periodo del movimiento es

$$T = 2\pi\left[\frac{(M + 2m)R^2 + mr^2}{2mgR}\right]^{1/2}$$

85. Un objeto de masa $m_1 = 9.00$ kg está en equilibrio, conectado a un resorte ligero de constante $k = 100$ N/m que está sujeto a una pared, como se muestra en la figura P15.85a. Un segundo objeto, $m_2 = 7.00$ kg, se empuja lentamente contra m_1, lo que comprime al resorte la cantidad $A = 0.200$ m (vea la figura P15.85b). Luego el sistema se libera y ambos objetos comienzan a moverse hacia la dere-

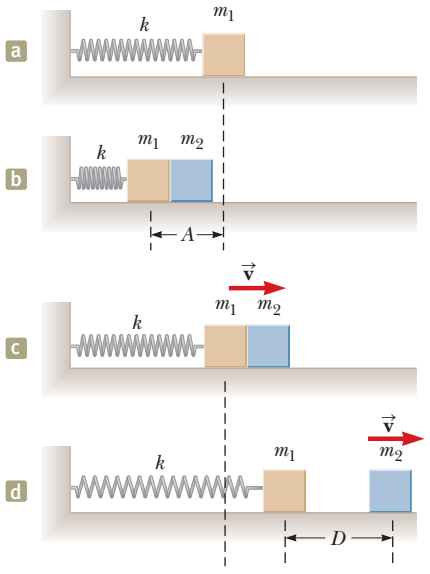


Figura P15.85

cha sobre la superficie sin fricción. (a) Cuando m_1 alcanza el punto de equilibrio, m_2 pierde contacto con m_1 (vea la figura P15.85c) y se mueve hacia la derecha con rapidez v. Determine el valor de v. (b) ¿Qué tan separados están los objetos cuando el resorte se estira completamente por primera vez (distancia D en la figura P15.85d)?

86. Problema de repaso. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Usted está en el negocio de entrega de paquetes con alta rapidez. Su competidor en el edificio contiguo adquiere el derecho de construir un túnel evacuado que pasa justo encima del suelo alrededor de la Tierra. Enviando los paquetes en el túnel a la rapidez correcta, su competidor es capaz de enviar los paquetes en la órbita alrededor de la Tierra en este túnel para que lleguen al lado opuesto exacto en un intervalo de tiempo muy corto. Usted tiene una idea para competir. Pensando que la distancia *a través* de la Tierra es más corta que la distancia *alrededor* de la Tierra, obtiene permisos para construir un túnel evacuado a través del centro de la Tierra (figura P15.86). Para que simplemente al soltar los paquetes en este túnel caigan hacia abajo y lleguen al otro extremo de su túnel, que se encuentra en un edificio justo al lado del otro extremo del túnel de su competidor. Puesto que los paquetes llegan al otro lado de la Tierra en un intervalo de tiempo corto, usted gana el concurso y su negocio florece. *Nota:* un objeto a una distancia r del centro de la Tierra es jalado hacia el centro de la Tierra solamente por la masa dentro de la esfera de radio r (la región rojiza en la figura P15.86); la Tierra tiene densidad uniforme.

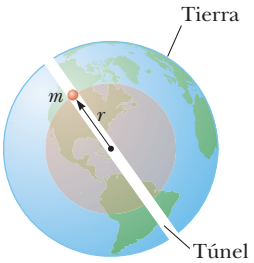


Figura P15.86

87. Un bloque de masa M está conectado a un resorte de masa m y oscila en movimiento armónico simple en una pista sin rozamiento horizontal (figura P15.87). La constante de fuerza del resorte es k y la longitud de equilibrio es ℓ. Suponga que todas las partes del resorte oscilan en fase y que la velocidad de un segmento del resorte de longitud dx es proporcional a la distancia x desde el extremo fijo; es decir, $v_x = (x/\ell)v$. También observe que la masa de un segmento del resorte es $dm = (m/\ell)dx$. Encuentre (a) la energía cinética del sistema cuando el bloque tiene una velocidad v y (b) el periodo de la oscilación.

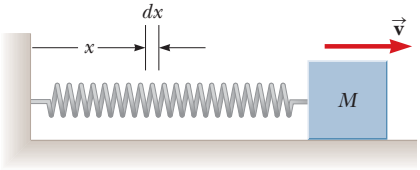


Figura P15.87

88. Problema de repaso. Un sistema consta de un resorte con constante de fuerza $k = 1\ 250$ N/m, longitud $L = 1.50$ m y un objeto de masa $m = 5.00$ kg unido al extremo (figura P15.88). El objeto se coloca en el nivel del punto de fijación con el resorte sin estirar, en posición $y_i = L$, y luego se libera de modo que balancea como un péndulo. (a) Encuentre la posición y del objeto en el punto más bajo. (b) ¿El periodo del péndulo será mayor o menor que el periodo de un péndulo simple con la misma masa m y longitud L? Explique.

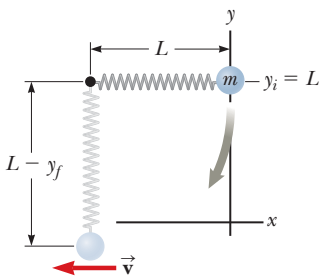


Figura P15.88

89. Un contenedor ligero cúbico de volumen a^3 inicialmente está lleno con un líquido de densidad de masa ρ, como se muestra en la figura P15.89a. El cubo es soportado inicialmente por una cuerda ligera para formar un péndulo simple de longitud L_i, medido desde el centro de masa del recipiente lleno, donde $L_i >> a$. El líquido puede fluir desde el fondo del recipiente a razón constante (dM/dt). En cualquier tiempo t el nivel del líquido en el recipiente es h y la longitud del péndulo es L (medida con respecto del centro de masa instantánea), como se muestra en la figura P15.89b. (a) Encuentre el periodo del péndulo en función del tiempo. (b) ¿Cuál es el periodo del péndulo después que el líquido sale completamente del recipiente?

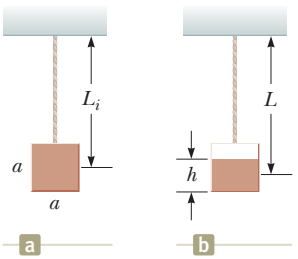


Figura P15.89

CAPÍTULO

16

Movimiento ondulatorio

16.1 Propagación de una perturbación

16.2 Análisis de modelo: onda viajera

16.3 La rapidez de ondas sobre cuerdas

16.4 Reflexión y transmisión

16.5 Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales sobre cuerdas

16.6 La ecuación de onda lineal



Salvavidas en Nueva Gales del Sur, Australia, practican el dominio de su lancha sobre grandes olas que rompen cerca de la orilla. Una onda moviéndose en la superficie del agua es un ejemplo de onda mecánica. *(Travel Ink/Gallo Images/Getty Images)*

De niños, la mayoría de las personas experimentaron lo que es una onda cuando lanzaron una piedra a un estanque. En el punto donde la piedra choca con la superficie del agua se crean ondas circulares. Estas ondas se mueven hacia fuera, a partir del punto de creación, en círculos que se expanden hasta que alcanzan la orilla. Si usted examinara con detenimiento el movimiento de un pequeño objeto que flota sobre el agua perturbada, vería que el objeto se mueve vertical y horizontalmente en torno a su posición original, sin experimentar un desplazamiento neto desde o hacia el punto donde la piedra golpea el agua. Los pequeños elementos del agua en contacto con el objeto, así como todos los otros elementos de agua sobre la superficie del estanque, se comportan de la misma forma. Es decir, la onda acuática se mueve desde el punto de origen hacia la orilla, pero el agua no se va con ella.

El mundo está lleno de ondas, los dos tipos principales son las ondas *mecánicas* y las ondas *electromagnéticas*. En el caso de ondas mecánicas, algunos medios físicos se perturban; en el ejemplo de la piedra, los elementos del agua se perturban. Las ondas electromagnéticas no requieren un medio para propagarse; algunos ejemplos de ondas electromagnéticas son la luz visible, las ondas de radio, las señales de televisión y los rayos X. En esta parte del libro se estudiarán sólo las ondas mecánicas.

Considere de nuevo el pequeño objeto que flota sobre el agua. Se hizo que el objeto se moviera en un punto en el agua al dejar caer una piedra en otra posición. El objeto ganó energía cinética a causa de esta acción, así que la energía se debió transferir desde el punto donde se dejó caer la piedra hasta la posición del objeto. Esta característica es básica en un movimiento ondulatorio: la *energía* se transfiere a través de una distancia, pero la *materia* no.

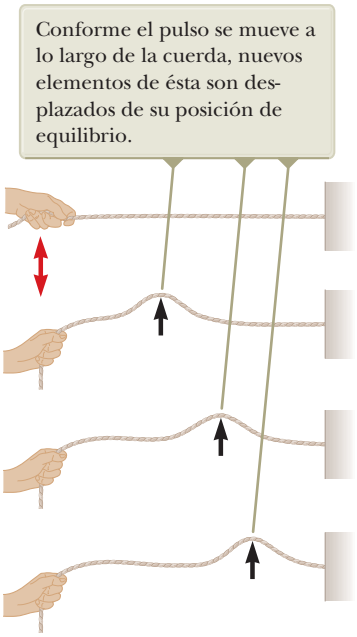


Figura 16.1 Una mano mueve una vez, hacia arriba y hacia abajo, el extremo de una cuerda estirada (flecha roja), generando un pulso que viaja a lo largo de la cuerda.

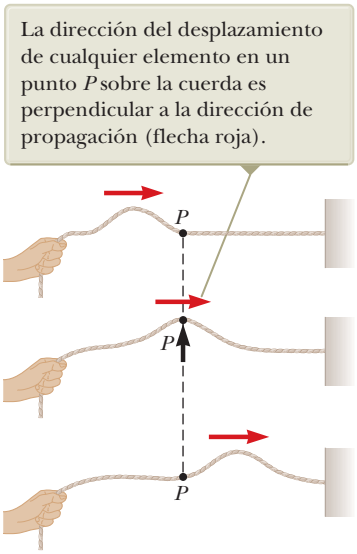


Figura 16.2 Desplazamiento de un elemento particular de la cuerda para un pulso transversal viajando en una cuerda estirada.

Figura 16.3 Un pulso longitudinal a lo largo de un resorte estirado.

16.1 Propagación de una perturbación

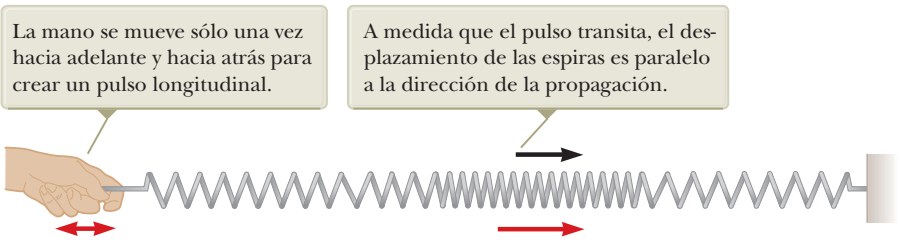
En la introducción a este capítulo se aludió a la esencia del movimiento ondulatorio: la transferencia de energía a través del espacio sin el acompañamiento de transferencia de materia. En la lista de mecanismos de transferencia de energía del capítulo 8, dos mecanismos, ondas mecánicas y radiación electromagnética, dependen de las ondas. En contraste, en otro mecanismo, la transferencia de materia, la transferencia de energía está acompañada por un movimiento de materia a través del espacio sin algún carácter ondulatorio en el proceso.

Todas las ondas mecánicas requieren (1) alguna fuente de perturbación, (2) un medio que contenga elementos que puedan ser perturbados y (3) algún mecanismo físico a partir del cual los elementos del medio puedan influirse mutuamente. Una forma de demostrar el movimiento ondulatorio es sacudir un extremo de una larga cuerda que esté bajo tensión y tenga su extremo opuesto fijo, como se muestra en la figura 16.1. De esta manera, se forma un solo chichón (llamado *pulso*) que viaja a lo largo de la cuerda con una rapidez definida. La figura 16.1 representa cuatro "instantáneas" consecutivas de la creación y propagación del pulso progresivo. La mano es la fuente de la perturbación. La cuerda es el medio a través del cual viaja el pulso, los elementos individuales de la cuerda son perturbados de su posición de equilibrio. Aún más, los elementos de la cuerda están conectados entre sí, de modo que se influyen mutuamente. El pulso tiene una altura y una rapidez de propagación definidas a lo largo del medio. La forma del pulso cambia muy poco a medida que viaja a lo largo de la cuerda.[1]

Primero estudiaremos un pulso que viaja a través de un medio. Una vez que se explore el comportamiento de un pulso, estudiaremos a una *onda*, que es una perturbación *periódica* que viaja a través de un medio. Al sacudir el extremo de la cuerda una vez se crea un pulso en ella, como en la figura 16.1. Si se moviera el extremo de la cuerda hacia arriba y hacia abajo repetidamente se crearía una onda viajera (progresiva) con características que no tiene un pulso. En la sección 16.2 se explorarán estas características.

A medida que viaja el pulso de la figura 16.1, cada elemento perturbado de la cuerda se mueve en una dirección *perpendicular* a la dirección de propagación. La figura 16.2 ilustra este punto para un elemento particular, etiquetado *P*. Observe que nunca alguna parte de la cuerda se mueve en la dirección de propagación. Una onda viajera o pulso que hace que los elementos del medio perturbado se muevan perpendiculares a la dirección de propagación se llama **onda transversal**.

Compare esta onda con otro tipo de pulso, uno que se mueve por un largo resorte estirado, como se muestra en la figura 16.3. El extremo izquierdo del resorte recibe un ligero empuje hacia la derecha y después recibe un ligero jalón hacia la izquierda. Este movimiento crea una súbita compresión de una región de las espiras. La región comprimida viaja a lo largo del resorte (a la derecha en la figura 16.3). Observe que la dirección del desplazamiento de las espiras es *paralela* a la dirección de propagación de la región comprimida. Una onda viajera o pulso que mueve a los elementos del medio en paralelo a la dirección de propagación se llama **onda longitudinal**.



[1] En realidad, el pulso cambia de forma y gradualmente se dispersa durante el movimiento. Este efecto, llamado *dispersión*, es común a muchas ondas mecánicas, así como a ondas electromagnéticas. En este capítulo no se considera la dispersión.

Las ondas sonoras, que se explicarán en el capítulo 17, son otro ejemplo de ondas longitudinales. La perturbación en una onda sonora es una serie de regiones de alta y baja presiones que viajan en el aire.

Algunas ondas en la naturaleza presentan una combinación de desplazamientos transversales y longitudinales. Las ondas en la superficie del agua son un buen ejemplo. Cuando una onda acuática viaja sobre la superficie del agua profunda, los elementos del agua en la superficie se mueven en trayectorias casi circulares, como se muestra en la figura 16.4. La perturbación tiene componentes tanto transversales como longitudinales. Los desplazamientos transversales que se ven en la figura 16.4 representan las variaciones en posición vertical de los elementos del agua. Los desplazamientos longitudinales representan elementos de agua móvil de atrás para adelante en una dirección horizontal.

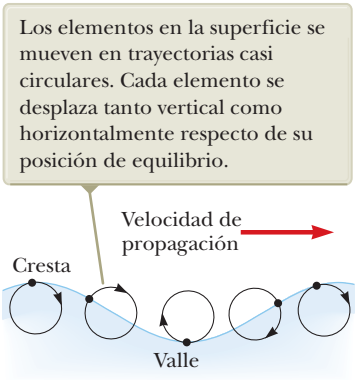


Figura 16.4 El movimiento de los elementos del agua sobre la superficie del agua profunda, en la que una onda se propaga, es una combinación de desplazamientos transversales y longitudinales.

Las ondas tridimensionales que viajan desde un punto debajo de la superficie de la Tierra, donde se presenta un terremoto, son de ambos tipos, transversales y longitudinales. Las ondas longitudinales son las más rápidas de las dos y viajan con magnitudes de rapidez en el rango de 7 a 8 km/s cerca de la superficie. Se llaman **ondas P**, donde "P" es por *primarias*, porque viajan más rápido que las ondas transversales y llegan primero a un sismógrafo (dispositivo empleado para detectar ondas debidas a terremotos). Las ondas transversales más lentas, llamadas **ondas S**, donde "S" es para *secundarias*, viajan a través de la Tierra a 4 o 5 km/s cerca de la superficie. Al registrar en un sismógrafo el intervalo de tiempo entre las llegadas de estos dos tipos de ondas, se determina la distancia desde el sismógrafo al punto de origen de las ondas. Esta distancia es el radio de una esfera imaginaria centrada en el sismógrafo. El origen de las ondas se localiza en alguna parte sobre dicha esfera. Las esferas imaginarias desde tres o más estaciones de monitoreo, ubicadas muy separadas entre sí, se intersecan en una región de la Tierra, y esta región es donde ocurrió el terremoto.

Considere un pulso que viaja hacia la derecha en una cuerda larga, como se muestra en la figura 16.5. La figura 16.5a representa la forma y posición del pulso al tiempo $t = 0$. En este instante la forma del pulso, cualquiera que sea, se puede representar mediante alguna función matemática que se escribirá como $y(x, 0) = f(x)$. Esta función describe la posición transversal y del elemento de la cuerda ubicado en cada valor de x en el tiempo $t = 0$. Ya que la rapidez del pulso es v, el pulso viajó hacia la derecha una distancia vt en el tiempo t (figura 16.5b). Se supone que la forma del pulso no cambia con el tiempo. Por lo tanto, al tiempo t la forma del pulso es la misma que tenía en $t = 0$, como en la figura 16.5a. En consecuencia, un elemento de la cuerda en x en este tiempo tiene la misma posición y que un elemento ubicado en $x - vt$ tenía en $t = 0$:

$$y(x, t) = y(x - vt, 0)$$

En general, se puede representar la posición transversal y para todas las posiciones y tiempos, medida en un marco estacionario con el origen en O, como

$$y(x, t) = f(x - vt) \qquad \textbf{(16.1)}$$

De igual modo, si el pulso viaja hacia la izquierda, las posiciones transversales de los elementos de la cuerda se describen mediante:

$$y(x, t) = f(x + vt) \qquad \textbf{(16.2)}$$

La función y, algunas veces llamada **función de onda**, depende de las dos variables x y t. Por esta razón, con frecuencia se escribe $y(x, t)$, que se lee "y como una función de x y t".

Es importante entender el significado de y. Considere un elemento de la cuerda en el punto P de la figura 16.5, identificado mediante un valor particular de su coordenada x. Mientras el pulso pasa por P, la coordenada y de este elemento aumenta, llega a un máximo y luego disminuye a cero. La función de onda $y(x, t)$ representa la coordenada y, la posición transversal, de cualquier elemento ubicado en la posición x en cualquier tiempo t. Además, si t es fijo (como en el caso de tomar una instantánea del pulso), la función de onda $y(x)$, algunas veces llamada **forma de onda**, define una curva que representa la forma geométrica del pulso en dicho tiempo.

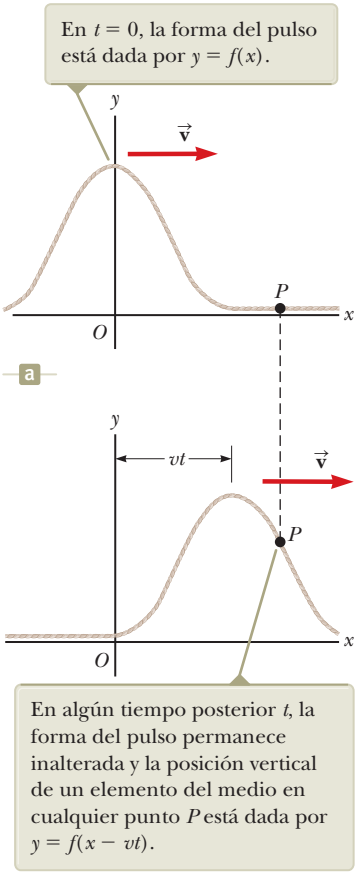


Figura 16.5 Un pulso unidimensional que viaja, con rapidez v, hacia la derecha en una cuerda.

Examen rápido 16.1 **(i)** En una larga fila de personas que esperan comprar boletos, la primera persona sale y un pulso de movimiento se presenta a medida que la gente avanza para llenar el hueco. A medida que cada persona avanza, el hueco se mueve a través de la fila. La propagación de este hueco es, ¿(a) transversal o (b) longitudinal? **(ii)** Considere la "ola" en un juego de béisbol: las personas se ponen de pie y levantan sus brazos a medida que la ola llega a sus posiciones, y el pulso resultante se mueve alrededor del estadio. Esta onda es, ¿(a) transversal o (b) longitudinal?

Ejemplo 16.1 Un pulso que se mueve hacia la derecha

Un pulso que se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x se representa mediante la función de onda

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3.0t)^2 + 1}$$

donde x y y se miden en centímetros y t en segundos. Encuentre expresiones para la función de onda en $t = 0$, $t = 1.0$ s y $t = 2.0$ s.

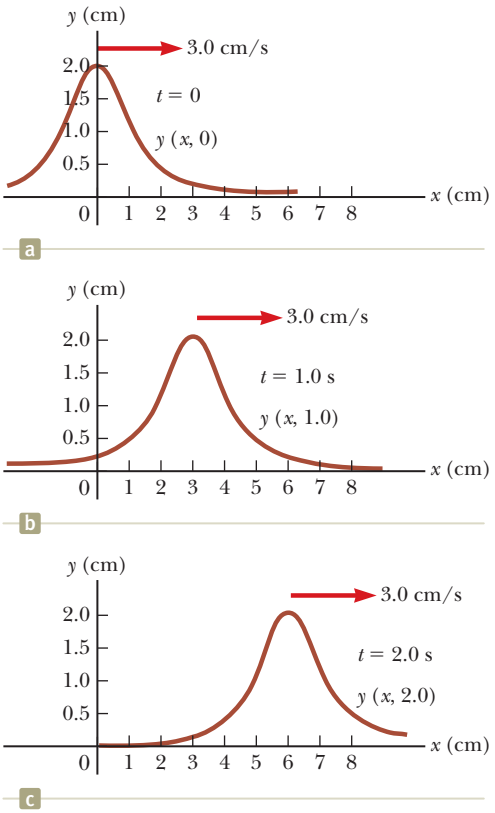


Figura 16.6 (Ejemplo 16.1) Gráficas de la función $y(x, t) = 2/[(x - 3.0t)^2 + 1]$ en (a) $t = 0$, (b) $t = 1.0$ s y (c) $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 16.6a muestra el pulso representado por esta función de onda en $t = 0$. Imagine que este pulso se mueve hacia la derecha con una rapidez de 3.0 cm/s y mantiene su forma, como sugieren las figuras 16.6b y 16.6c.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de análisis relativamente simple en el que se interpreta la representación matemática de un pulso.

Analizar La función de onda es de la forma $y = f(x - vt)$. La inspección de la expresión para $y(x, t)$ y la comparación con la ecuación 16.1 revela que la rapidez de la onda es $v = 3.0$ cm/s. Además, al hacer $x - 3.0t = 0$ se encuentra que el valor máximo de y está dado por $A = 2.0$ cm.

Escriba la expresión para la función de onda en $t = 0$: $y(x, 0) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

Escriba la expresión para la función de onda en $t = 1.0$ s: $y(x, 1.0) = \dfrac{2}{(x - 3.0)^2 + 1}$

Escriba la expresión para la función de onda en $t = 2.0$ s: $y(x, 2.0) = \dfrac{2}{(x - 6.0)^2 + 1}$

Para cada una de estas expresiones se pueden sustituir diversos valores de x y trazar la gráfica de la función de onda. Este procedimiento genera las funciones de onda mostradas en las tres partes de la figura 16.6.

Finalizar Estas instantáneas muestran que el pulso se mueve hacia la derecha sin cambiar su forma y que tiene una rapidez constante de 3.0 cm/s.

¿QUÉ PASARÍA SI? Si la función de onda fuese

$$y(x, t) = \frac{4}{(x + 3.0t)^2 + 1}$$

¿Cómo cambiaría la situación?

Respuesta Una nueva característica en esta expresión es el signo más en el denominador en lugar del signo menos. La nueva expresión representa un pulso con la misma forma que en la figura 16.6, pero que se mueve hacia la izquierda a medida que avanza el tiempo. Otra nueva característica en este caso es el numerador 4 en vez de 2. Por lo tanto, la nueva expresión representa un pulso con el doble de alto que en la figura 16.6.

16.2 Análisis de modelo: onda viajera

En esta sección se introduce una función de onda importante cuya forma se muestra en la figura 16.7. La onda representada por esta curva se llama **onda sinusoidal,** porque la curva es la misma que en la función sen θ contra θ. Una onda sinusoidal se podría generar en la cuerda de la figura 16.1 al agitar el extremo de la cuerda arriba y abajo en movimiento armónico simple.

La onda sinusoidal es el ejemplo más simple de una onda periódica continua y se puede usar para construir ondas más complejas (véase la sección 18.8). La curva café en la figura 16.7 representa una instantánea de una onda sinusoidal viajera en $t = 0$, y la curva azul representa una instantánea de la onda en algún tiempo posterior t. Imagine dos tipos de movimiento que pueden ocurrir. Primero, la forma de onda completa en la figura 16.7 se mueve hacia la derecha de modo que la curva café se mueve hacia la derecha y eventualmente llega a la posición de la curva azul. Éste es el movimiento de la *onda*. Si se concentra en un elemento del medio, como el elemento en $x = 0$, observará que cada elemento se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo del eje y en movimiento armónico simple. Éste es el movimiento de los *elementos del medio*. Es importante diferenciar entre el movimiento de la onda y el movimiento de los elementos del medio.

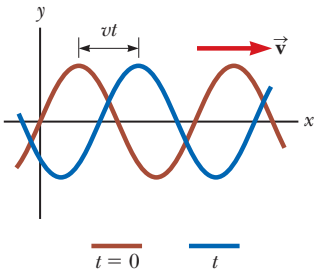


Figura 16.7 Una onda sinusoidal unidimensional que viaja hacia la derecha con una rapidez v. La curva café representa una instantánea de la onda en $t = 0$, y la curva azul presenta una instantánea en algún tiempo posterior t.

En capítulos anteriores de este libro se elaboraron varios modelos de análisis basados en tres modelos de simplificación: la partícula, el sistema y el objeto rígido. Con la introducción a las ondas se puede diseñar un nuevo modelo de simplificación, el **modelo de onda**, que permitirá explorar más modelos de análisis para resolver problemas. Una partícula ideal tiene tamaño cero. Se pueden construir objetos físicos con tamaño distinto de cero como combinaciones de partículas. Por lo tanto, la partícula se considera como un bloque de construcción básico. Una onda ideal tiene una sola frecuencia y es infinitamente larga; es decir, la onda existe en todo el Universo. (Una onda de longitud finita necesariamente debe tener una mezcla de frecuencias.) Cuando este concepto se explore en la sección 18.8 se encontrará que las ondas ideales son combinables para construir ondas complejas, tal como se combinan partículas.

En seguida se desarrollarán las características principales y representaciones matemáticas del análisis de modelo de una **onda viajera**. Este modelo se emplea cuando una onda se mueve a través del espacio sin interactuar con otras ondas o partículas.

La figura 16.8a muestra una instantánea de una onda móvil a través de un medio. La figura 16.8b muestra una gráfica de la posición de un elemento del medio como función del tiempo. Un punto en la figura 16.8a, donde el desplazamiento del elemento de su posición normal es lo más alto, se llama **cresta** de la onda. El punto más bajo se llama **valle**. La distancia de una cresta a la siguiente se llama **longitud de onda** λ (letra griega lambda). De manera más general, la longitud de onda es la distancia mínima entre dos puntos idénticos cualesquiera en ondas adyacentes, como se muestra en la figura 16.8a.

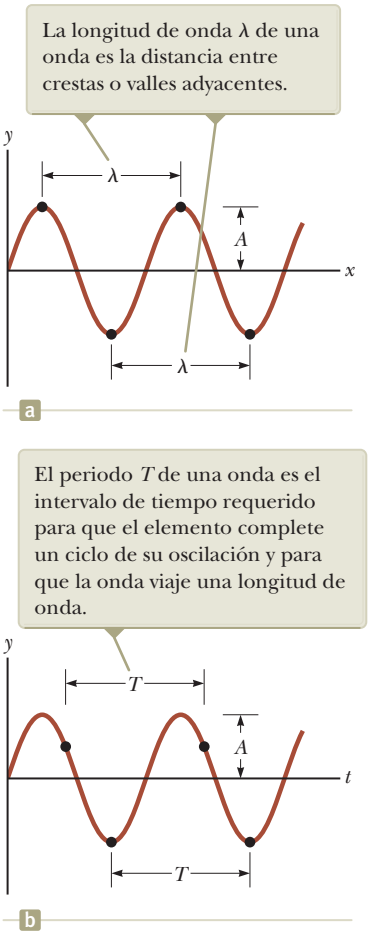


Figura 16.8 (a) Una instantánea de onda sinusoidal. (b) Posición de un elemento del medio como función del tiempo.

Si usted cuenta el número de segundos entre las llegadas de dos crestas adyacentes en un punto dado en el espacio, debe medir el **periodo** T de las ondas. En general, el periodo es el intervalo de tiempo requerido para que dos puntos idénticos de ondas adyacentes pasen por un punto, como se muestra en la figura 16.8b. El periodo de la onda es el mismo que el periodo de la oscilación armónica simple de un elemento del medio.

Es más frecuente que la misma información se dé mediante el inverso del periodo, que se llama **frecuencia** f. En general, la frecuencia de una onda periódica es el número de crestas (o valles, o cualquier otro punto sobre la onda) que pasa un punto determinado en un intervalo de tiempo unitario. La frecuencia de una onda sinusoidal se relaciona con el periodo mediante la expresión

$$f = \frac{1}{T} \tag{16.3}$$

Prevención de riesgos ocultos 16.1

¿Cuál es la diferencia entre las figuras 16.8a y 16.8b? Observe la similitud visual entre las figuras 16.8a y 16.8b. Las formas son iguales, pero (a) es una gráfica de posición vertical comparada con posición horizontal, mientras que (b) es posición vertical en función del tiempo. La figura 16.8a es una representación pictórica de la onda *para una serie de elementos del medio*; es lo que vería en un instante de tiempo. La figura 16.8b es una representación gráfica de la posición de *un elemento del medio* como función del tiempo. Que ambas figuras tengan forma idéntica representa la ecuación 16.1: una onda es la *misma* función tanto de x como de t.

La frecuencia de la onda es la misma que la frecuencia de la oscilación armónica simple de un elemento del medio. La unidad de frecuencia más común, como se aprendió en el capítulo 15, es s^{-1}, o **hertz** (Hz). La correspondiente unidad para T es segundos.

La máxima posición de un elemento del medio relativo a su posición de equilibrio se llama **amplitud** A de la onda, como se ve en la figura 16.8.

Las ondas viajan con una rapidez específica, y esta rapidez depende de las propiedades del medio perturbado. Por ejemplo, las ondas sonoras viajan a través del aire a temperatura ambiente con una rapidez aproximada de 343 m/s (781 mi/h), mientras que en la mayoría de los sólidos viajan con una rapidez mayor a 343 m/s.

Considere la onda sinusoidal de la figura 16.8a, que muestra la posición de la onda en $t = 0$. Ya que la onda es sinusoidal, se espera que la función de onda en este instante se exprese como $y(x, 0) = A \operatorname{sen} ax$, donde A es la amplitud y a es una constante a determinar. En $x = 0$ se ve que $y(0, 0) = A \operatorname{sen} a(0) = 0$, consistente con la figura 16.8a. El siguiente valor de x para el que y es cero es $x = \lambda/2$. Por lo tanto,

$$y\left(\frac{\lambda}{2}, 0\right) = A \operatorname{sen}\left(a\frac{\lambda}{2}\right) = 0$$

Para que esta ecuación sea cierta debe tener $a\lambda/2 = \pi$ o $a = 2\pi/\lambda$. En consecuencia, la función que describe las posiciones de los elementos del medio a través del que viaja la onda sinusoidal se puede escribir

$$y(x, 0) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \tag{16.4}$$

donde la constante A representa la amplitud de la onda y la constante λ es la longitud de onda. Observe que la posición vertical de un elemento del medio es la misma siempre que x aumente por un múltiplo entero de λ. De acuerdo con el análisis de la ecuación 16.1, si la onda se mueve hacia la derecha con una rapidez v, la función de onda en algún tiempo posterior t es

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \tag{16.5}$$

Si la onda viajara hacia la izquierda, la cantidad $x - vt$ se sustituiría por $x + vt$, como aprendió cuando se desarrollaron las ecuaciones 16.1 y 16.2.

Por definición, la onda viaja a través de un desplazamiento Δx igual a una longitud de onda λ en un intervalo de tiempo Δt de un periodo T. Por lo tanto, la rapidez de onda, la longitud de onda y el periodo se relacionan mediante la expresión

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} \tag{16.6}$$

Al sustituir esta expresión para v en la ecuación 16.5 se obtiene

$$y = A \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \tag{16.7}$$

Esta forma de la función de onda muestra la naturaleza *periódica* de y. Advierta que con frecuencia se utilizará y en lugar de $y(x, t)$ como una notación abreviada. En cualquier tiempo dado t, y tiene el *mismo* valor en las posiciones x, $x + \lambda$, $x + 2\lambda$ y así sucesivamente. Además, en cualquier posición dada x, el valor de y es el mismo en los tiempos t, $t + T$, $t + 2T$ y así sucesivamente.

La función de onda se puede expresar en una forma conveniente al definir otras dos cantidades, el **número de onda angular** k (por lo general simplemente llamado **número de onda**) y la *frecuencia angular* ω:

Número de onda angular ▶

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \tag{16.8}$$

Frecuencia angular ▶

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{16.9}$$

Al usar estas definiciones, la ecuación 16.7 se puede escribir en la forma más compacta

$$y = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \tag{16.10}$$

◀ Función de onda para una onda sinusoidal

Al utilizar las ecuaciones 16.3, 16.8 y 16.9, la rapidez de onda v, originalmente dada en la ecuación 16.6, se expresa en las formas alternativas siguientes:

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{16.11}$$

$$v = \lambda f \tag{16.12}$$

◀ Rapidez de una onda sinusoidal

La función de onda dada en la ecuación 16.10 supone que la posición vertical y de un elemento del medio es cero en $x = 0$ y $t = 0$. Éste no necesita ser el caso. Si no lo es, la función de onda por lo general se expresa en la forma

$$y = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi) \tag{16.13}$$

◀ Expresión general para una onda sinusoidal

donde ϕ es la **constante de fase**, tal como aprendió en el estudio del movimiento periódico en el capítulo 15. Esta constante se determina a partir de las condiciones iniciales. Las ecuaciones principales en la representación matemática del análisis de modelo de onda viajera son las ecuaciones 16.3, 16.10 y 16.12.

Examen rápido 16.2 Una onda sinusoidal de frecuencia f viaja a lo largo de una cuerda estirada. La cuerda se lleva al reposo y una segunda onda viajera con frecuencia $2f$ se establece en la cuerda. **(i)** ¿Cuál es la rapidez de onda de la segunda onda? (a) El doble de la primera onda, (b) la mitad de la primera onda, (c) la misma que la primera onda, (d) imposible de determinar. **(ii)** A partir de las mismas opciones, describa la longitud de onda de la segunda onda. **(iii)** A partir de las mismas opciones, describa la amplitud de la segunda onda.

Ejemplo 16.2 Una onda sinusoidal viajera AM

Una onda sinusoidal viajera en la dirección x positiva tiene una amplitud de 15.0 cm, longitud de onda de 40.0 cm y frecuencia de 8.00 Hz. La posición vertical de un elemento del medio en $t = 0$ y $x = 0$ también es de 15.0 cm, como se muestra en la figura 16.9

(A) Encuentre el número de onda k, periodo T, frecuencia angular v y rapidez v de la onda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 16.9 muestra la onda en $t = 0$. Imagine que esta onda se mueve hacia la derecha y mantiene su forma.

Categorizar De la descripción en el enunciado del problema, se observa que se está estudiando una onda mecánica que se mueve a través de un medio, así, este problema se clasifica con el modelo de *onda viajera*.

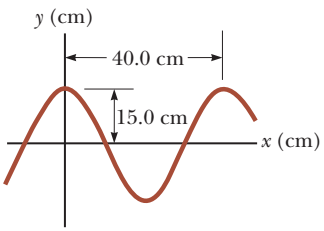


Figura 16.9 (Ejemplo 16.2) Una onda sinusoidal con longitud de onda $\lambda = 40.0$ cm y amplitud $A = 15.0$ cm.

Analizar

De la ecuación 16.8, evalúe el número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{40.0 \text{ cm}} = 15.7 \text{ rad/m}$$

De la ecuación 16.3, obtenga el periodo de la onda:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8.00 \text{ s}^{-1}} = 0.125 \text{ s}$$

Con la ecuación 16.9, determine la frecuencia angular de la onda:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(8.00 \text{ s}^{-1}) = 50.3 \text{ rad/s}$$

Mediante la ecuación 16.12, evalúe la rapidez de onda:

$$v = \lambda f = (40.0 \text{ cm})(8.00 \text{ s}^{-1}) = 3.20 \text{ m/s}$$

continúa

16.2 continuación

(B) Determine la constante de fase ϕ y escriba una expresión general para la función de onda.

SOLUCIÓN

Sustituya $A = 15.0$ cm, $y = 15.0$ cm, $x = 0$ y $t = 0$ en la ecuación 16.13:

$$15.0 = (15.0)\,\text{sen}\,\phi \;\rightarrow\; \text{sen}\,\phi = 1 \;\rightarrow\; \phi = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$$

Escriba la función de onda:

$$y = A\,\text{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos(kx - \omega t)$$

Sustituya los valores para A, k y ω en unidades SI en esta expresión:

$$y = 0.150\cos(15.7x - 50.3t)$$

Finalizar Revise los resultados cuidadosamente para asegurarse que los entiende. ¿Cómo cambiaría la gráfica de la figura 16.9 si el ángulo de fase fuera cero? ¿Cómo cambiaría la gráfica si la amplitud fuera de 30.0 cm? ¿Cómo cambiaría la gráfica si la longitud de onda fuera de 10.0 cm?

Ondas sinusoidales en cuerdas

En la figura 16.1 se demostró cómo crear un pulso al sacudir una cuerda tensa hacia arriba y hacia abajo una vez. Para crear una serie de tales pulsos, una onda, sustituya la mano con una varilla oscilatoria que vibre en movimiento armónico simple. La figura 16.10 representa instantáneas de la onda creada de esta forma a intervalos de $T/4$. Ya que el extremo de la varilla oscila en movimiento armónico simple, cada elemento de la cuerda, como el que está en P, también oscila verticalmente con movimiento armónico simple. Por lo tanto, todo elemento de la cuerda se puede tratar como un oscilador armónico simple que vibra con una frecuencia igual a la frecuencia de oscilación de la varilla.[2] Advierta que, aun cuando cada elemento oscila en la dirección y, la onda viaja en la dirección x con una rapidez v. De hecho, ésta es la definición de una onda transversal.

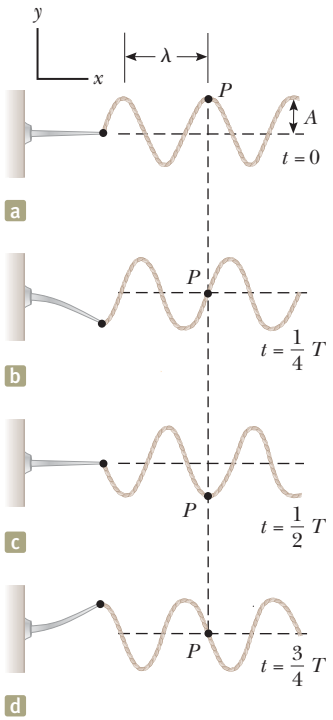


Figura 16.10 Un método para producir una onda sinusoidal sobre una cuerda. El extremo izquierdo de la cuerda se conecta a una varilla que se pone a oscilar. Cada elemento de la cuerda, como el que está en el punto P, oscila con movimiento armónico simple en la dirección vertical.

Si se define $t = 0$ como el instante en que la configuración de la cuerda es como la mostrada en la figura 16.10a, la función de onda se puede escribir como

$$y = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$$

Se puede usar esta expresión para describir el movimiento de cualquier elemento de la cuerda. Un elemento en el punto P (o cualquier otro elemento de la cuerda) se mueve sólo verticalmente, y así su coordenada x permanece constante. Por lo tanto, la **rapidez transversal** v_y (no confundir con la rapidez de onda v) y la **aceleración transversal** a_y de los elementos de la cuerda son

$$v_y = \left.\frac{dy}{dt}\right]_{x=\text{constante}} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t) \qquad \textbf{(16.14)}$$

$$a_y = \left.\frac{dv_y}{dt}\right]_{x=\text{constante}} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A\,\text{sen}\,(kx - \omega t) \qquad \textbf{(16.15)}$$

Estas expresiones incorporan derivadas parciales porque y depende tanto de x como de t. En la operación $\partial y/\partial t$, por ejemplo, se toma una derivada respecto a t mientras se mantiene x constante. Los valores máximos de la rapidez transversal y la aceleración transversal son simplemente los valores absolutos de los coeficientes de las funciones coseno y seno:

$$v_{y,\text{máx}} = \omega A \qquad \textbf{(16.16)}$$

$$a_{y,\text{máx}} = \omega^2 A \qquad \textbf{(16.17)}$$

La rapidez transversal y la aceleración transversal de los elementos de la cuerda no llegan simultáneamente a sus valores máximos. La rapidez transversal logra su valor máximo (ωA) cuando $y = 0$, mientras que la magnitud de la aceleración transver-

[2] En este arreglo, se supone que un elemento de cuerda siempre oscila en una línea vertical. La tensión en la cuerda variaría si a un elemento se le permitiera moverse hacia los lados. Tal movimiento haría el análisis muy complejo.

sal llega a su valor máximo ($\omega^2 A$) cuando $y = \pm A$. Por último, las ecuaciones 16.16 y 16.17 son idénticas en forma matemática a las correspondientes ecuaciones para movimiento armónico simple, ecuaciones 15.17 y 15.18.

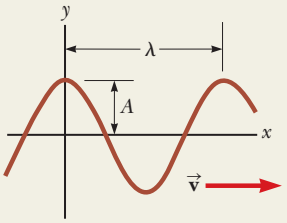
Examen rápido 16.3 La amplitud de una onda se duplica sin que se hagan otros cambios a la onda. Como resultado de esta duplicación, ¿cuál de los siguientes enunciados es correcto? **(a)** La rapidez de la onda cambia. **(b)** La frecuencia de la onda cambia. **(c)** La máxima rapidez transversal de un elemento del medio cambia. **(d)** Los enunciados del inciso (a) al (c) son todos verdaderos. **(e)** Ninguno de los enunciados del inciso (a) al (c) es verdadero.

Prevención de riesgos ocultos 16.2

Dos tipos de rapidez/velocidad No confunda v, la rapidez de la onda mientras se propaga a lo largo de la cuerda, con v_y, la velocidad transversal de un punto en la cuerda. La rapidez v es constante para un medio uniforme, mientras que v_y varía sinusoidalmente.

Análisis de modelo Onda viajera

Imagine una fuente en vibración que logra influenciar el medio con el que hace contacto. Tal fuente crea una perturbación que se propaga a través del medio. Si la fuente vibra en movimiento armónico simple con periodo T, ondas sinusoidales se propagan por el medio con una rapidez dada por



$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \qquad \textbf{(16.6, 16.12)}$$

donde λ es la **longitud de onda** de la onda y f es su **frecuencia**. Una onda sinusoidal puede expresarse como

$$y = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \qquad \textbf{(16.10)}$$

donde A es la **amplitud** de la onda, k es su **número de onda** y ω es su **frecuencia angular**.

Ejemplos:

- una varilla vibratoria unida a una cuerda genera en ésta una onda sinusoidal
- un altavoz vibra y emite ondas sonoras en el aire (capítulo 17)
- una guitarra vibra y emite ondas sonoras en el aire (capítulo 18)
- una carga eléctrica en vibración crea una onda electromagnética que se propaga en el espacio con la rapidez de la luz (capítulo 34)

16.3 La rapidez de ondas sobre cuerdas

Un aspecto del comportamiento de las ondas mecánicas *lineales* es que la rapidez de onda sólo depende de las propiedades del medio en el que viaja la onda. Las ondas con amplitud A pequeña respecto de la longitud de onda λ se pueden representar como ondas lineales (vea la sección 16.6). En esta sección se determina la rapidez de una onda transversal que viaja en una cuerda tensa.

Se utilizará un análisis mecánico para deducir la expresión para la rapidez de un pulso que se desplaza en una cuerda sujeta a una tensión T. Considere un pulso que se mueve hacia la derecha con una rapidez uniforme v, medida respecto a un marco inercial estacionario (respecto a la Tierra), como se muestra en la figura 16.11a. Las leyes de Newton son válidas en cualquier marco de referencia inercial. Por lo tanto, este pulso se observará desde un diferente marco de referencia inercial, uno que se mueve junto con el pulso y con la misma rapidez que éste, de modo que el pulso está en reposo en este nuevo marco, como en la figura 16.11b. En este marco de referencia el pulso permanece fijo y cada elemento de la cuerda se mueve hacia la izquierda a través de la forma del pulso.

Un pequeño elemento de la cuerda, de longitud Δs, forma un arco aproximado de un círculo de radio R, como se muestra en la vista amplificada de la figura 16.11b. En el marco de referencia móvil, el elemento de la cuerda se mueve hacia la izquierda con rapidez v. Conforme viaja a través del arco, el elemento se puede modelar como una partícula en movimiento circular uniforme. Este elemento tiene una aceleración centrípeta igual a v^2/R, que es proporcionada por las componentes de la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$, cuya magnitud es la tensión en la cuerda. La fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ actúa a cada lado del elemento, tangente al arco, como en la figura 16.11b. Las componentes horizontales de $\vec{\mathbf{T}}$ se cancelan entre sí, y cada componente vertical T sen θ actúa hacia abajo. Así, la magnitud de la fuerza radial total sobre el elemento es $2T$ sen θ. Ya que el elemento es pequeño, θ es pequeño y puede usarse la aproximación de ángulo pequeño sen $\theta \approx \theta$. Por lo tanto, la magnitud de la fuerza radial total es

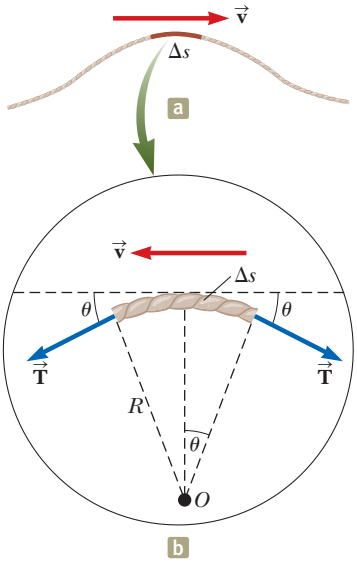


Figura 16.11 (a) En el marco de referencia de la Tierra, un pulso se mueve, con rapidez v, hacia la derecha sobre una cuerda. (b) En un marco de referencia moviéndose hacia la derecha junto con el pulso, el pequeño elemento de longitud Δs se mueve hacia la izquierda con rapidez v.

$$F_r = 2T \operatorname{sen} \theta \approx 2T\theta$$

El elemento tiene una masa $m = \mu\, \Delta s$, donde μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda. Como el elemento forma parte de un círculo y subtiende un ángulo de 2θ en el centro, $\Delta s = R(2\theta)$, y

$$m = \mu \Delta s = 2\mu R\theta$$

El elemento de la cuerda se modela como una partícula bajo una fuerza neta. Por lo tanto, la aplicación de la segunda ley de Newton a este elemento en la dirección radial da

$$F_r = \frac{mv^2}{R} \rightarrow 2T\theta = \frac{2\mu R\theta v^2}{R} \rightarrow T = \mu v^2$$

Al resolver para v se obtiene

Rapidez de una onda sobre una cuerda estirada ▶

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (16.18)$$

Observe que esta deducción se apoya en la suposición de que la altura del pulso es pequeña respecto a la longitud del pulso. Esta suposición permitió emplear la aproximación sen $\theta \approx \theta$. Además, el modelo supone que la tensión T no es afectada por la presencia del pulso, así T es la misma en todos los puntos sobre el pulso. Finalmente, esta demostración no supone alguna forma particular para el pulso. Por lo tanto, se concluye que un pulso de *cualquier forma* viaja a lo largo de la cuerda con rapidez $v = \sqrt{T/\mu}$, sin que se altere la forma del pulso.

Prevención de riesgos ocultos 16.3

Múltiples *Ts* No confunda la T en la ecuación 16.18 para la tensión con el símbolo T empleado en el capítulo para el periodo de una onda. El contexto de la ecuación debe ayudarle a identificar a cuál cantidad se hace referencia. ¡Simplemente no hay suficientes letras en el alfabeto para asignar una letra única a cada variable!

Examen rápido 16.4 Suponga que con la mano crea un pulso al mover una vez el extremo libre de una cuerda tensa hacia arriba y hacia abajo, comience en $t = 0$. La cuerda se une en su otro extremo a una pared distante. El punto alcanza la pared en el tiempo t. ¿Cuál de las siguientes acciones, tomada por sí misma, disminuye el intervalo de tiempo requerido para que el pulso llegue a la pared? Puede ser correcta más de una opción. **(a)** Mover la mano más rápidamente, pero sólo hacia arriba o hacia abajo una vez en la misma cantidad, **(b)** mover la mano más lentamente, pero sólo hacia arriba y hacia abajo por la misma cantidad, **(c)** mover la mano una mayor distancia hacia arriba y hacia abajo en la misma cantidad de tiempo, **(d)** mover la mano una menor distancia hacia arriba y hacia abajo en la misma cantidad de tiempo, **(e)** usar una cuerda más pesada de la misma longitud y bajo la misma tensión, **(f)** usar una cuerda más ligera de la misma longitud y bajo la misma tensión, **(g)** usar una cuerda de la misma densidad de masa lineal pero bajo tensión decreciente, **(h)** usar una cuerda de la misma densidad de masa lineal pero bajo tensión creciente.

Ejemplo 16.3 La rapidez de un pulso en una cuerda AM

Una cuerda uniforme tiene una masa de 0.300 kg y una longitud de 6.00 m (figura 16.12). La cuerda pasa sobre una polea y soporta un objeto de 2.00 kg. Encuentre la rapidez de un pulso que viaje a lo largo de esta cuerda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 16.12 el bloque colgante establece una tensión en la cuerda horizontal. Esta tensión determina la rapidez con que se mueve la onda sobre la cuerda.

Categorizar Para encontrar la tensión en la cuerda modele el bloque colgante como una *partícula en equilibrio*. Después use la tensión para evaluar la rapidez de la onda sobre la cuerda, aplicando la ecuación 16.18.

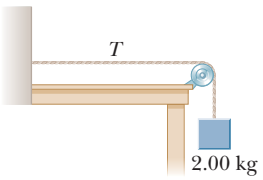


Figura 16.12 (Ejemplo 16.3) La tensión T en la cuerda se mantiene mediante el objeto suspendido. La rapidez de cualquier onda que viaje a lo largo de la cuerda está dada por $v = \sqrt{T/\mu}$.

Analizar Aplique al bloque el modelo de partícula en equilibrio: $\sum F_y = T - m_{\text{bloque}}g = 0$

Resuelva para la tensión en la cuerda: $T = m_{\text{bloque}}g$

16.3 continuación

Aplique la ecuación 16.18 para encontrar la rapidez de la onda, utilice $\mu = m_{\text{cuerda}}/\ell$ para la densidad de masa lineal de la cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{m_{\text{bloque}}\, g\ell}{m_{\text{cuerda}}}}$$

Evalúe la rapidez de la onda:

$$v = \sqrt{\frac{(2.00\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(6.00\ \text{m})}{0.300\ \text{kg}}} = 19.8\ \text{m/s}$$

Finalizar El cálculo de la tensión desprecia la pequeña masa de la cuerda. En sentido estricto, la cuerda nunca puede ser exactamente recta; por lo tanto, la tensión no es uniforme.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el bloque se balancea de atrás para adelante respecto de la vertical como un péndulo? ¿Cómo afectaría a la rapidez de onda en la cuerda?

Respuesta El bloque en balanceo se clasifica como una *partícula bajo una fuerza neta*. La magnitud de una de las fuerzas sobre el bloque es la tensión en la cuerda, la cual determina la rapidez de la onda. A medida que el bloque se balancea, la tensión cambia, así que cambia la rapidez de la onda.

Cuando el bloque está en la parte baja del balanceo, la cuerda está vertical y la tensión es mayor que el peso del bloque, porque la fuerza neta debe ser hacia arriba para proporcionar la aceleración centrípeta del bloque. Por lo tanto, la rapidez de la onda debe ser mayor que 19.8 m/s.

Cuando el bloque está en su punto más alto al final de un balanceo está en reposo momentáneo, así que no existe aceleración centrípeta en dicho instante. El bloque es una partícula en equilibrio en la dirección radial. La tensión se equilibra mediante una componente de la fuerza gravitacional sobre el bloque. Entonces, la tensión es más pequeña que el peso y la rapidez de la onda es menor que 19.8 m/s. ¿Con qué frecuencia varía la rapidez de la onda? ¿Es la misma frecuencia que tiene el péndulo?

Ejemplo 16.4 Rescate del excursionista AM

Un excursionista de 80.0 kg queda atrapado en la saliente de una montaña después de una tormenta. Un helicóptero rescata al excursionista, se mantiene sobre él y le baja un cable. La masa del cable es 8.00 kg y su longitud es de 15.0 m. El cable se amarra a un cabestrillo de 70.0 kg de masa. El excursionista se ata al cabestrillo y después el helicóptero acelera hacia arriba. Aterrorizado por colgar del cable a mitad del aire, el excursionista intenta enviar señales al piloto lanzando pulsos transversales por el cable. Un pulso tarda 0.250 s en recorrer la longitud del cable. ¿Cuál es la aceleración del helicóptero? Suponga que en el cable la tensión es uniforme.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine el efecto de la aceleración del helicóptero sobre el cable. Mientras mayor sea la aceleración hacia arriba, mayor será la tensión en el cable. A su vez, a mayor tensión, mayor la rapidez de los pulsos en el cable.

Categorizar Este problema es una combinación de uno involucrando la rapidez de los pulsos en una cuerda y de otro en donde el excursionista y el cabestrillo son modelados como una *partícula bajo una fuerza neta*.

Analizar Use el intervalo de tiempo en que el pulso viaja del excursionista al helicóptero para encontrar la rapidez de los pulsos en el cable:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{15.0\ \text{m}}{0.250\ \text{s}} = 60.0\ \text{m/s}$$

Resuelva la ecuación 16.18 para la tensión en el cable:

$$(1)\quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \rightarrow T = \mu v^2$$

Modele al excursionista y el cabestrillo como una partícula bajo una fuerza neta, y note que la aceleración de esta partícula de masa m es la misma que la aceleración del helicóptero:

$$\sum F = ma \rightarrow T - mg = ma$$

Resuelva para la aceleración y sustituya la tensión de la ecuación (1):

$$a = \frac{T}{m} - g = \frac{\mu v^2}{m} - g = \frac{m_{\text{cable}}\, v^2}{\ell_{\text{cable}}\, m} - g$$

Sustituya valores numéricos:

$$a = \frac{(8.00\ \text{kg})(60.0\ \text{m/s})^2}{(15.0\ \text{m})(150.0\ \text{kg})} - 9.80\ \text{m/s}^2 = 3.00\ \text{m/s}^2$$

continúa

16.4 continuación

Finalizar Un cable real tiene rigidez además de tensión. La rigidez tiende a regresar un alambre a su forma recta original incluso cuando no esté bajo tensión. Por ejemplo, una cuerda de piano se endereza si se le libera de una forma curva, las cuerdas de embalaje no.

La rigidez representa una fuerza restauradora además de la tensión y aumenta la rapidez de la onda. En consecuencia, para un cable real la rapidez de 60.0 m/s que se determinó muy probablemente se asocia con una aceleración menor del helicóptero.

16.4 Reflexión y transmisión

El modelo de onda viajera describe ondas que viajan a través de un medio uniforme sin interactuar con algo más en el camino. Ahora se considerará cómo una onda viajera es afectada cuando encuentra un cambio en el medio. Por ejemplo, considere un pulso que viaja en una cuerda que está rígidamente unida a un soporte en un extremo, como en la figura 16.13. Cuando el pulso llega al soporte ocurre un severo cambio en el medio: la cuerda termina. Como resultado, el pulso experimenta **reflexión**; es decir, el pulso se mueve de regreso a lo largo de la cuerda en la dirección opuesta.

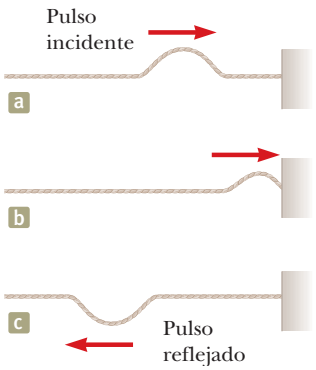


Figura 16.13 Reflexión de un pulso viajero en el extremo fijo de una cuerda estirada. El pulso reflejado está invertido, pero su forma no cambia de otra manera.

Note que el pulso reflejado está *invertido*. Esta inversión se explica como sigue. Cuando el pulso alcanza el extremo fijo de la cuerda, ésta produce una fuerza hacia arriba sobre el soporte. Por la tercera ley de Newton, el soporte debe ejercer sobre la cuerda una fuerza de reacción de igual magnitud y con dirección opuesta (hacia abajo). Esta fuerza hacia abajo hace que el pulso se invierta en la reflexión.

Ahora considere otro caso. Esta vez el pulso llega al final de una cuerda que es libre de moverse verticalmente, como en la figura 16.14. La tensión en el extremo libre se mantiene porque la cuerda está amarrada a un anillo de masa despreciable que tiene libertad para deslizarse verticalmente sobre un poste uniforme sin fricción. De nuevo el pulso se refleja, pero esta vez no se invierte. Cuando llega al poste el pulso ejerce una fuerza sobre el extremo libre de la cuerda y esto hace que el anillo acelere hacia arriba. El anillo se eleva tan alto como el pulso entrante, y luego la componente hacia abajo de la fuerza de tensión jala el anillo de vuelta hacia abajo. Este movimiento del anillo produce un pulso reflejado que no se invierte y que tiene la misma amplitud que el pulso entrante.

Por último, considere una situación en que la frontera es intermedia entre estos dos extremos. En este caso, parte de la energía en el pulso incidente se refleja y parte experimenta **transmisión**; es decir, algo de la energía pasa a través de la frontera. Por ejemplo, suponga que una cuerda ligera se une a una cuerda más pesada, como en la figura 16.15. Cuando un pulso que viaja sobre la cuerda ligera llega a la frontera entre las dos cuerdas, parte del pulso se refleja e invierte y parte se transmite a la cuerda más pesada. El pulso reflejado se invierte por las mismas razones descritas en el caso de la cuerda unida rígidamente a un soporte.

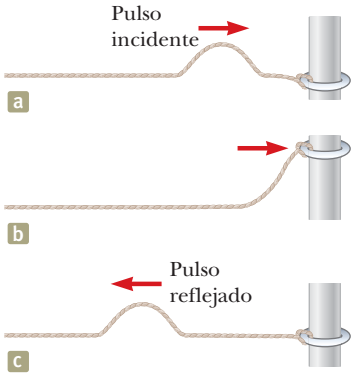


Figura 16.14 Reflexión de un pulso viajero en el extremo libre de una cuerda estirada. El pulso reflejado no está invertido.

El pulso reflejado tiene una amplitud menor que el pulso incidente. En la sección 16.5 se demostró que la energía que porta una onda se relaciona con su amplitud. De acuerdo con el principio de conservación de la energía, cuando el pulso se descompone en un pulso reflejado y un pulso transmitido en la frontera, la suma de las energías de estos dos pulsos debe ser igual a la energía del pulso incidente. Ya que el pulso reflejado sólo contiene parte de la energía del pulso incidente, su amplitud debe ser menor.

Cuando un pulso que viaja sobre una cuerda pesada golpea la frontera entre la cuerda pesada y una ligera, como en la figura 16.16; de nuevo, parte se refleja y parte se transmite. En este caso el pulso reflejado no se invierte.

En cualquier caso las alturas relativas de los pulsos reflejado y transmitido dependen de las densidades relativas de las dos cuerdas. Si las cuerdas son idénticas, no existe discontinuidad en la frontera y no se presenta reflexión.

De acuerdo con la ecuación 16.18, la rapidez de una onda sobre una cuerda aumenta a medida que disminuye la masa por unidad de longitud de la cuerda. En

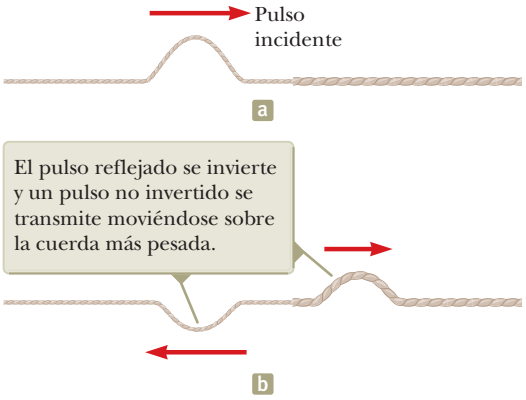


Figura 16.15 (a) Un pulso que viaja hacia la derecha sobre una cuerda ligera se aproxima a la frontera con una cuerda más pesada. (b) La situación después que el pulso llega a la frontera.

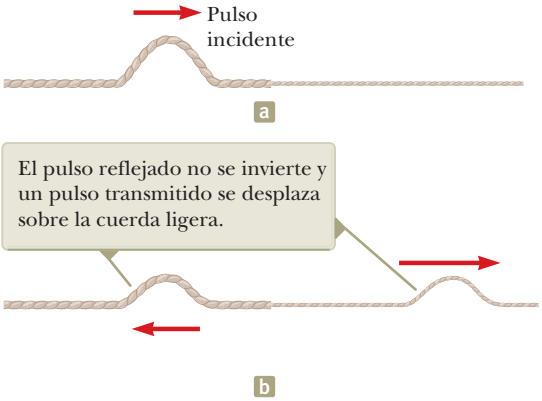


Figura 16.16 (a) Pulso que viaja hacia la derecha sobre una cuerda pesada se aproxima a la frontera con una cuerda ligera. (b) La situación después que el pulso llega a la frontera.

otras palabras, una onda viaja más rápidamente sobre una cuerda ligera que sobre una pesada si ambas están bajo la misma tensión. Las siguientes reglas generales se aplican a las ondas reflejadas: cuando una onda o pulso viaja del medio A al medio B y $v_A > v_B$ (es decir, cuando B es más denso que A), se invierte en la reflexión. Cuando una onda o pulso viaja del medio A al medio B y $v_A < v_B$ (es decir, cuando A es más denso que B), no se invierte en la reflexión.

16.5 Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales sobre cuerdas

Las ondas transportan energía a través de un medio mientras se propagan. Por ejemplo, suponga que un objeto cuelga de una cuerda estirada y se envía un pulso por la cuerda, como en la figura 16.17a. Cuando el pulso llega al objeto suspendido, éste se desplaza momentáneamente hacia arriba, como en la figura 16.17b. En el proceso se transfirió energía al objeto que aparece como un aumento en la energía potencial gravitacional del sistema objeto-Tierra. Esta sección examina la rapidez a la que se transporta la energía a lo largo de una cuerda. Se supondrá una onda sinusoidal unidimensional en el cálculo de la energía transferida.

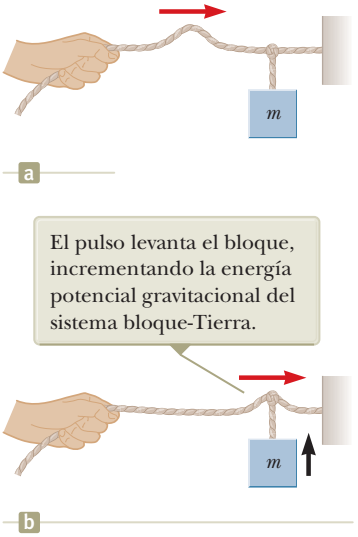


Figura 16.17 (a) Un pulso viaja hacia la derecha sobre una cuerda estirada, llevando energía con él. (b) La energía del pulso llega al bloque colgante.

Considere una onda sinusoidal que viaja sobre una cuerda (figura 16.18). La fuente de la energía es algún agente externo en el extremo izquierdo de la cuerda. Se puede considerar que la cuerda es un sistema no aislado. A medida que el agente externo realiza trabajo sobre el extremo de la cuerda, moviéndola hacia arriba y hacia abajo, entra energía al sistema de la cuerda y se propaga a lo largo de su longitud. Concentre su atención en un elemento infinitesimal de la cuerda de longitud dx y masa dm. Cada uno de tales elementos oscila verticalmente con su posición descrita por la ecuación 15.6. Por lo tanto, cada elemento de la cuerda se puede modelar como una partícula en movimiento armónico simple, con la oscilación en la dirección y. Todos los elementos tienen la misma frecuencia angular ω y la misma amplitud A. La energía cinética K asociada con una partícula móvil es $K = mv^2/2$. Si esta ecuación se aplica al elemento infinitesimal, la energía cinética dK asociada con el movimiento de subir y bajar de este elemento es

$$dK = \tfrac{1}{2}(dm)v_y^2$$

donde v_y es la rapidez transversal del elemento. Si μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda, la masa dm del elemento de longitud dx es igual a $\mu\, dx$. Por tanto, la energía cinética de un elemento de la cuerda se expresa como

$$dK = \tfrac{1}{2}(\mu\, dx)v_y^2 \qquad \textbf{(16.19)}$$

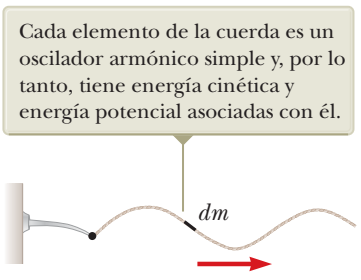


Figura 16.18 Una onda sinusoidal que viaja a lo largo del eje x sobre una cuerda estirada.

Al sustituir, con la ecuación 16.14, para la rapidez transversal general de un elemento del medio se obtiene

$$dK = \tfrac{1}{2}\mu[-\omega A \cos(kx - \omega t)]^2\, dx = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)\, dx$$

Si se toma una instantánea de la onda al tiempo $t = 0$, la energía cinética de un elemento dado es

$$dK = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2 kx\, dx$$

Al integrar esta ecuación sobre todos los elementos de cuerda en una longitud de onda de la onda resulta la energía cinética total K_λ en una longitud de onda:

$$K_\lambda = \int dK = \int_0^\lambda \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2 kx\, dx = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2 kx\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left[\tfrac{1}{2}x + \frac{1}{4k}\operatorname{sen} 2kx\right]_0^\lambda = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left[\tfrac{1}{2}\lambda\right] = \tfrac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

Además de la energía cinética hay energía potencial asociada con cada elemento de la cuerda debido a su desplazamiento de la posición de equilibrio y las fuerzas restauradoras de elementos vecinos. Un análisis similar al anterior para la energía potencial total U_A en una longitud de onda da exactamente el mismo resultado:

$$U_\lambda = \tfrac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

La energía total en una longitud de onda de la onda es la suma de las energías potencial y cinética:

$$E_\lambda = U_\lambda + K_\lambda = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda \qquad \textbf{(16.20)}$$

A medida que la onda se mueve a lo largo de la cuerda, esta cantidad de energía pasa por un punto determinado en la cuerda durante un intervalo de tiempo de un periodo de la oscilación. Por lo tanto, la potencia P, o rapidez de transferencia de energía T_{OM} asociada con la onda mecánica, es

$$P = \frac{T_{\text{OM}}}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda}{T} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left(\frac{\lambda}{T}\right)$$

Potencia de una onda ▶

$$P = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \qquad \textbf{(16.21)}$$

La ecuación 16.21 muestra que la rapidez de transferencia de energía por una onda sinusoidal en una cuerda es proporcional a (a) el cuadrado de la frecuencia, (b) el cuadrado de la amplitud y (c) la rapidez de la onda. En efecto, la rapidez de transferencia de energía en *cualquier* onda sinusoidal es proporcional al cuadrado de la frecuencia angular y al cuadrado de la amplitud.

Examen rápido 16.5 ¿Cuál de los siguientes, tomado por sí mismo, sería más efectivo para aumentar la rapidez a la que se transfiere la energía mediante una onda que viaja a lo largo de una cuerda? **(a)** Reducir a la mitad la densidad de masa lineal de la cuerda, **(b)** duplicar la longitud de onda de la onda, **(c)** duplicar la tensión en la cuerda, **(d)** duplicar la amplitud de la onda.

Ejemplo 16.5 Potencia suministrada a una cuerda en vibración

Una onda tensa para la que $\mu = 5.00 \times 10^{-2}$ kg/m está bajo una tensión de 80.0 N. ¿Cuánta potencia se debe suministrar a la cuerda para generar ondas sinusoidales a una frecuencia de 60.0 Hz y una amplitud de 6.00 cm?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere una vez más la figura 16.10 y observe que la varilla vibratoria suministra energía a la cuerda con cierta rapidez. Entonces esta energía se propaga hacia la derecha a lo largo de la cuerda.

16.5 continuación

Categorizar Se evalúan cantidades de las ecuaciones desarrolladas en el capítulo, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 16.21 para evaluar la potencia: $P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$

Aplique las ecuaciones 16.9 y 16.18 para sustituir ω y v: $P = \frac{1}{2}\mu(2\pi f)^2 A^2\left(\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right) = 2\pi^2 f^2 A^2\sqrt{\mu T}$

Sustituya valores numéricos: $P = 2\pi^2(60.0\text{ Hz})^2(0.060\,0\text{ m})^2\sqrt{(0.050\,0\text{ kg/m})(80.0\text{ N})} = 512\text{ W}$

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la cuerda debe transferir energía a una tasa de 1 000 W? ¿Cuál debe ser la amplitud requerida si todos los otros parámetros permanecen iguales?

Respuesta Establezca una razón entre las potencias nueva y la anterior que sólo refleje un cambio en la amplitud:

$$\frac{P_{\text{nueva}}}{P_{\text{anterior}}} = \frac{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A_{\text{nueva}}^2 v}{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A_{\text{anterior}}^2 v} = \frac{A_{\text{nueva}}^2}{A_{\text{anterior}}^2}$$

Al resolver para la nueva amplitud se obtiene:

$$A_{\text{nueva}} = A_{\text{anterior}}\sqrt{\frac{P_{\text{nueva}}}{P_{\text{anterior}}}} = (6.00\text{ cm})\sqrt{\frac{1\,000\text{ W}}{512\text{ W}}} = 8.39\text{ cm}$$

16.6 La ecuación de onda lineal

En la sección 16.1 se introdujo el concepto de función de onda para representar ondas que viajan sobre una cuerda. Todas las funciones de onda $y(x, t)$ representan soluciones de una ecuación llamada *ecuación de onda lineal*. Esta ecuación da una descripción completa del movimiento ondulatorio, y a partir de ella se puede deducir una expresión para la rapidez de onda. Además, la ecuación de onda lineal es básica para muchas formas de movimiento ondulatorio. En esta sección se deduce esta ecuación cuando se aplica a ondas sobre cuerdas.

Suponga que una onda viajera se propaga a lo largo de una cuerda que está bajo una tensión T. Considere un pequeño elemento de cuerda de longitud Δx (figura 16.19). Los extremos del elemento forman pequeños ángulos θ_A y θ_B con el eje x. Las fuerzas actúan sobre la cuerda en sus extremos donde ella se conecta a los elementos vecinos. Por lo tanto, el modelo se modela como una partícula bajo una fuerza neta. La fuerza neta actuando sobre el elemento en la dirección vertical es

$$\sum F_y = T\,\text{sen}\,\theta_B - T\,\text{sen}\,\theta_A = T(\text{sen}\,\theta_B - \text{sen}\,\theta_A)$$

Ya que los ángulos son pequeños, se puede emplear la aproximación $\text{sen}\,\theta \approx \tan\theta$ para expresar la fuerza neta como

$$\sum F_y \approx T(\tan\theta_B - \tan\theta_A) \qquad (16.22)$$

Imagine experimentar un desplazamiento infinitesimal hacia fuera del extremo derecho del elemento de cuerda en la figura 16.19 a lo largo de la línea azul que representa la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$. Este desplazamiento tiene componentes x y y infinitesimales y puede ser representado por el vector $dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}}$. La tangente del ángulo respecto al eje x para este desplazamiento es dy/dx. Ya que esta tangente se evalúa en un instante particular de tiempo, se le debe expresar en forma parcial como $\partial y/\partial x$. Al sustituir para las tangentes en la ecuación 16.22 se obtiene

$$\sum F_y \approx T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right] \qquad (16.23)$$

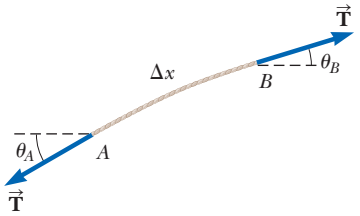


Figura 16.19 Un elemento de cuerda bajo tensión T.

Ahora, del modelo de partícula bajo una fuerza neta se aplica la segunda ley de Newton al elemento con la masa del elemento dada por $m = \mu\,\Delta x$:

$$\sum F_y = ma_y = \mu\,\Delta x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \tag{16.24}$$

Al combinar la ecuación 16.23 con la ecuación 16.24 resulta

$$\mu\,\Delta x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right]$$

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{(\partial y/\partial x)_B - (\partial y/dx)_A}{\Delta x} \tag{16.25}$$

El lado derecho de la ecuación 16.25 se expresa en una forma diferente si nota que la derivada parcial de cualquier función se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Al asociar $f(x + \Delta x)$ con $(\partial y/\partial x)_B$ y $f(x)$ con $(\partial y/\partial x)_A$, se ve que, en el límite $\Delta x \to 0$, la ecuación 16.25 se convierte en

Ecuación de onda lineal para una cuerda ▶

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{16.26}$$

Esta expresión es la ecuación de onda lineal cuando se aplica a ondas sobre una cuerda.

La ecuación de onda lineal (ecuación 16.26) con frecuencia se escribe en la forma

Ecuación de onda lineal general ▶

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{16.27}$$

En general, la ecuación 16.27 se aplica a diferentes tipos de ondas viajeras. Para ondas sobre cuerdas y representa la posición vertical de los elementos de la cuerda. Para ondas sonoras propagándose en un gas, y corresponde a la posición longitudinal de los elementos de gas desde el equilibrio o a variaciones en presión o en densidad del gas. En el caso de ondas electromagnéticas, y corresponde a las componentes de campo eléctrico o magnético.

Se demostró que la función de onda sinusoidal (ecuación 16.10) es una solución de la ecuación de onda lineal (ecuación 16.27). Aunque no se probó aquí, la ecuación de onda lineal es satisfecha por *cualquier* función de onda de la forma $y = f(x \pm vt)$. Además, se vio que la ecuación de onda lineal es una consecuencia directa del modelo de partícula bajo una fuerza neta aplicado a cualquier elemento de una cuerda que transporta una onda viajera.

Resumen

Definiciones

Una **onda sinusoidal** unidimensional es aquella para la cual las posiciones de los elementos del medio varían en forma sinusoidal. Una onda sinusoidal que viaja hacia la derecha se puede expresar con una **función de onda**

$$y(x, t) = A\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \tag{16.5}$$

donde A es la **amplitud**, λ es la **longitud de onda** y v es la **rapidez de onda**.

El **número de onda angular** k y la **frecuencia angular** ω de una onda se definen como sigue:

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \tag{16.8}$$

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{16.9}$$

donde T es el **periodo** de la onda y f es su **frecuencia**.

En una **onda transversal** los elementos del medio se mueven en una dirección *perpendicular* a la dirección de propagación.

En una **onda longitudinal** los elementos del medio se mueven en una dirección *paralela* a la dirección de propagación.

Conceptos y principios

Cualquier onda unidimensional que viaja con una rapidez v en la dirección x se representa mediante una función de onda de la forma

$$y\,(x,\,t) = f(x \pm vt) \qquad \textbf{(16.1, 16.2)}$$

donde el signo positivo se aplica a una onda que viaja en la dirección x negativa y el signo negativo se aplica a una onda que viaja en la dirección x positiva. La forma de la onda en cualquier instante en el tiempo (una instantánea de la onda) se obtiene al mantener t constante.

La rapidez de una onda que viaja sobre una cuerda tensa de masa por unidad de longitud μ y tensión T es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad \textbf{(16.18)}$$

Una onda se refleja total o parcialmente cuando llega al final del medio en el que se propaga o cuando llega a una frontera donde su rapidez cambia de manera discontinua. Si una onda que viaja sobre una cuerda alcanza un extremo fijo, la onda se refleja e invierte. Si la onda llega a un extremo libre, se refleja pero no se invierte.

La **potencia** transmitida por una onda sinusoidal sobre una cuerda estirada es

$$P = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \qquad \textbf{(16.21)}$$

Las funciones de onda son soluciones a una ecuación diferencial llamada **ecuación de onda lineal**:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \textbf{(16.27)}$$

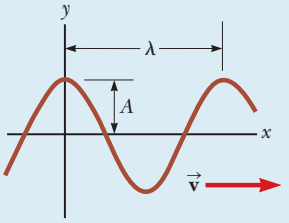
Análisis de modelos para resolver problemas

Onda viajera. La rapidez de onda de una onda sinusoidal es

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \qquad \textbf{(16.6, 16.12)}$$

Una onda sinusoidal se expresa como

$$y = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t) \qquad \textbf{(16.10)}$$



Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Si un extremo de una cuerda pesada se une a un extremo de una cuerda ligera, una onda se mueve de la cuerda pesada a la cuerda más ligera. **(i)** ¿Qué sucede con la rapidez de la onda? (a) Aumenta. (b) Disminuye. (c) Es constante. (d) Cambia de manera impredecible. **(ii)** ¿Qué sucede con la frecuencia? Elija de las mismas posibilidades. **(iii)** ¿Qué sucede con la longitud de onda? Elija entre las mismas posibilidades.

2. Si estira una manguera de hule y le da un tirón, puede observar un pulso que viaja hacia arriba y hacia abajo por la manguera. **(i)** ¿Qué sucede con la rapidez del pulso si estira la manguera con mayor firmeza? (a) Aumenta. (b) Disminuye. (c) Es constante. (d) Cambia de manera impredecible. **(ii)** ¿Qué sucede con la rapidez si llena la manguera con agua? Elija de las mismas posibilidades.

3. Clasifique las ondas representadas por las siguientes funciones, de mayor a menor, de acuerdo con **(i)** sus amplitudes, **(ii)** sus longitudes de onda, **(iii)** sus frecuencias, **(iv)** sus periodos y **(v)** sus magnitudes de velocidad. Si los valores de una cantidad son iguales para dos ondas, muéstrelas con la misma clasificación. Para todas las funciones, x y y están en metros y t está en segundos. (a) $y = 4\,\text{sen}\,(3x - 15t)$, (b) $y = 6\cos(3x + 15t - 2)$, (c) $y = 8\,\text{sen}\,(2x + 15t)$, (d) $y = 8\cos(4x + 20t)$, e) $y = 7\,\text{sen}\,(6x - 24t)$.

4. ¿Por cuál factor se debería multiplicar la tensión en una cuerda estirada para duplicar la rapidez de la onda?

Suponga que la cuerda no se estira. (a) Un factor de 8, (b) un factor de 4, (c) un factor de 2, (d) un factor de 0.5, (e) no se puede cambiar la rapidez por un factor predecible mediante un cambio en la tensión.

5. Cuando todas las cuerdas en una guitarra (figura PO16.5) se estiran a la misma tensión, ¿la rapidez de una onda a lo largo de la cuerda grave con más masa será (a) más rápida, (b) más lenta, (c) igual que la rapidez de una onda en las cuerdas más agudas? Alternativamente, (d) ¿la rapidez en la cuerda grave no necesariamente es alguna de estas respuestas?


Joseph/Getty Images

Figura PO16.5

6. ¿Cuál de los siguientes enunciados no es necesariamente cierto respecto a ondas mecánicas? (a) Son generadas por alguna fuente de perturbación. (b) Son de naturaleza sinusoidal. (c) Llevan energía. (d) Requieren un medio para su propagación. (e) La rapidez de la onda depende de las propiedades del medio de propagación.

7. (a) ¿Una onda en una cuerda puede moverse con una rapidez de onda que sea mayor que la rapidez transversal máxima $v_{y\text{máx}}$ de un elemento de la cuerda? (b) ¿La rapidez de la onda puede ser mucho mayor que la máxima rapidez del elemento? (c) ¿La rapidez de la onda puede ser igual a la máxima rapidez del elemento? (d) ¿La rapidez de la onda puede ser menor que $v_{y\text{máx}}$?

8. Una fuente vibratoria con frecuencia constante genera una onda sinusoidal en una cuerda bajo tensión constante. Si la potencia entregada a la cuerda se duplica, ¿en qué factor cambia la amplitud? (a) Un factor de 4, (b) un factor de 2, (c) un factor de $\sqrt{2}$, (d) un factor de 0.707, (e) no se puede predecir.

9. La distancia entre dos crestas sucesivas de una onda sinusoidal que viaja en una cuerda es 2 m. Si la frecuencia de esta onda es 4 Hz, ¿cuál es la rapidez de la onda? (a) 4 m/s, (b) 1 m/s, (c) 8 m/s, (d) 2 m/s, (e) imposible de responder a partir de la información dada.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. A una sustancia sólida le es posible transportar ondas longitudinales y ondas transversales, pero un fluido homogéneo sólo transporta ondas longitudinales. ¿Por qué?

2. (a) ¿Cómo crearía una onda longitudinal en un resorte estirado? (b) ¿Sería posible crear una onda transversal en un resorte?

3. Cuando un pulso viaja en una cuerda tensa, ¿siempre se invierte en la reflexión? Explique.

4. En mecánica, con frecuencia se suponen cuerdas sin masa. ¿Por qué esto no es una buena suposición al analizar ondas sobre cuerdas?

5. Si agita un extremo de una cuerda tensa de manera estable tres veces cada segundo, ¿cuál sería el periodo de la onda sinusoidal generada en la cuerda?

6. (a) Si una cuerda larga cuelga del techo y se envían ondas hacia arriba de la cuerda desde su extremo inferior, ¿por qué la rapidez de las ondas cambia conforme éstas ascienden? (b) ¿La rapidez de las ondas ascendentes se incrementa o disminuye? Explique.

7. ¿Por qué un pulso sobre una cuerda se considera transversal?

8. ¿La rapidez vertical de un segmento de una cuerda tensa horizontal, a través de la que viaja una onda, depende de la rapidez de la onda? Explique.

9. En un terremoto, desde el foco del movimiento se propagan ondas S (transversales) y P (longitudinales). El foco está en el subsuelo radialmente abajo del epicentro sobre la superficie (figura PC16.9). Suponga que las ondas se mueven en línea recta a través de material uniforme. Las ondas S viajan a través de la Tierra más lentamente que las ondas P (aproximadamente a 5 km/s comparado con 8 km/s). Al detectar el tiempo de llegada de las ondas en un sismógrafo, (a) ¿cómo se puede determinar la distancia al foco del terremoto? (b) ¿Cuántas estaciones de detección se necesitan para localizar el foco sin ambigüedades?

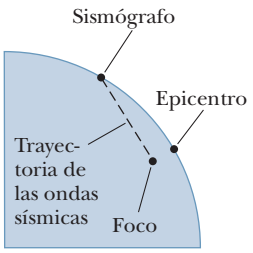


Figura PC16.9

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 16.1 Propagación de una perturbación

1. Una estación sismográfica recibe ondas S y P de un terremoto, separadas 17.3 s. Suponga que las ondas viajaron sobre la misma trayectoria con magnitudes de velocidad de 4.50 km/s y 7.80 km/s. Encuentre la distancia desde el sismógrafo al foco del terremoto.

2. Las olas en el océano con una distancia de cresta a cresta de 10.0 m se pueden describir mediante la función de onda

$$y(x, t) = 0.800 \text{ sen } [0.628(x - vt)]$$

donde x y y están en metros, t está en segundos y $v = 1.20$ m/s. (a) Bosqueje $y(x, t)$ en $t = 0$. (b) Bosqueje $y(x, t)$ en $t = 2.00$ s. (c) Compare las gráficas de los incisos (a) y (b) y explique similitudes y diferencias. (d) ¿Cómo evolucionó la onda entre estas dos gráficas?

3. En $t = 0$ se describe un pulso transversal en un alambre mediante la función

$$y = \frac{6.00}{x^2 + 3.00}$$

donde x y y están en metros. Si el pulso viaja en la dirección x positiva con una rapidez de 4.50 m/s, escriba la función $y(x, t)$ que describe este pulso.

4. Dos puntos A y B sobre la superficie de la Tierra están a la misma longitud y 60.0° separados en latitud, como se muestra en la figura P16.4. Suponga que un terremoto en el punto A crea una onda P que llega al punto B viajando en línea recta a través del cuerpo de la Tierra con una rapidez constante de 7.80 km/s. El terremoto también genera una onda Rayleigh que viaja a 4.50 km/s. Además de las ondas P y S, las ondas Rayleigh son un tercer tipo de onda sísmica que viaja sobre la *superficie* de la Tierra en lugar de hacerlo a través de su *volumen*. (a) ¿Cuál de estas dos ondas sísmicas llega primero a B? (b) ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre las llegadas de estas dos ondas a B?

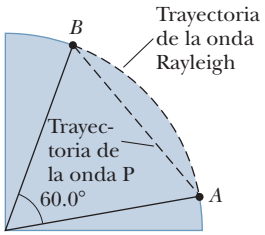


Figura P16.4

Sección 16.2 Análisis de modelo: onda viajera

5. Una onda se describe mediante $y = 0.020 \text{ sen } (kx - \omega t)$, donde $k = 2.11$ rad/m, $\omega = 3.62$ rad/s, x y y están en metros y t en segundos. Determine (a) la amplitud, (b) la longitud de onda, (c) la frecuencia y (d) la rapidez de la onda.

6. Cierta cuerda uniforme se mantiene bajo tensión constante. (a) Dibuje una instantánea lateral de una onda sinusoidal en una cuerda, como se muestra en los diagramas del texto. (b) Inmediatamente abajo del diagrama (a) dibuje la misma onda en un momento posterior de un cuarto del periodo de la onda. (c) Luego dibuje una onda con una amplitud 1.5 veces mayor que la onda en el diagrama (a). (d) A continuación dibuje una onda que difiera de la del diagrama (a) sólo por tener una longitud de onda 1.5 veces mayor. (e) Por último, dibuje una onda que difiera del diagrama (a) por tener una frecuencia 1.5 veces mayor.

7. Una onda sinusoidal viaja a lo largo de una cuerda. El oscilador que genera la onda completa 40.0 vibraciones en 30.0 s. Una cresta dada de la onda viaja 425 cm a lo largo de la cuerda en 10.0 s. ¿Cuál es la longitud de onda de la onda?

8. Para cierta onda transversal la distancia entre dos crestas sucesivas es 1.20 m y ocho crestas pasan un punto dado a lo largo de la dirección de viaje cada 12.0 s. Calcule la rapidez de la onda.

9. La función de onda para una onda viajera en una cuerda tensa es (en unidades SI)

$$y(x, t) = 0.350 \text{ sen}\left(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

(a) ¿Cuáles son la rapidez y dirección de viaje de la onda? (b) ¿Cuál es la posición vertical de un elemento de la cuerda en $t = 0$, $x = 0.100$ m? ¿Cuáles son (c) la longitud de onda y (d) la frecuencia de la onda? (e) ¿Cuál es la máxima rapidez transversal de un elemento de la cuerda?

10. Cuando un alambre particular vibra con una frecuencia de 4.00 Hz se produce una onda transversal con longitud de onda de 60.0 cm. Determine la rapidez de las ondas a lo largo del alambre.

11. La cuerda que se muestra en la figura P16.11 se impulsa a una frecuencia de 5.00 Hz. La amplitud del movimiento es $A = 12.0$ cm y la rapidez de onda es $v = 20.0$ m/s. Además, la onda es tal que $y = 0$ en $x = 0$ y $t = 0$. Determine (a) la frecuencia angular y (b) el número de onda para esta onda. (c) Escriba una expresión para la función de onda. Calcule (d) la máxima rapidez transversal y (e) la máxima aceleración transversal de un elemento de la cuerda.

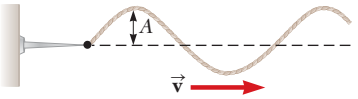


Figura P16.11

12. Considere la onda sinusoidal del ejemplo 16.2 con la función de onda

$$y = 0.150 \cos (15.7x - 50.3t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. En cierto instante, el punto A está en el origen y el punto B es el punto más cercano a A sobre el eje x, donde la onda está 60.0° fuera de fase con A. ¿Cuál es la coordenada de B?

13. Una onda sinusoidal con 2.00 m de longitud de onda y 0.100 m de amplitud viaja en una cuerda con una rapidez de 1.00 m/s. En $t = 0$ el extremo izquierdo de la cuerda está en el origen. Para esta onda, encuentre (a) la frecuencia, (b) la frecuencia angular, (c) el número de onda angular y (d) la función de onda en unidades SI. Determine la ecuación de movimiento en unidades SI para (e) el extremo izquierdo de la cuerda y (f) el punto en la cuerda en $x = 1.50$ m a la derecha del extremo izquierdo. (g) ¿Cuál es la máxima rapidez de cualquier elemento de la cuerda?

14. (a) Trace la gráfica y contra t en $x = 0$ para una onda sinusoidal de la forma $y = 0.150 \cos (15.7x - 50.3t)$, donde x y y están en metros y t en segundos. (b) Determine el periodo de vibración. (c) Argumente cómo su resultado se compara con el valor encontrado en el ejemplo 16.2.

15. Una onda transversal en una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y = 0.120 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{8} x + 4\pi t \right)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. Determine (a) la rapidez transversal y (b) la aceleración transversal en $t = 0.200$ s para un elemento de la cuerda localizado en $x = 1.60$ m. ¿Cuáles son (c) la longitud de onda, (d) el periodo y (e) la rapidez de propagación de esta onda?

16. Una onda en una cuerda se describe mediante la función de onda $y = 0.100 \text{ sen } (0.50x - 20t)$, donde x y y están en metros y t en segundos. (a) Demuestre que un elemento de la cuerda en $x = 2.00$ m ejecuta un movimiento armónico. (b) Determine la frecuencia de oscilación de este elemento particular.

17. Una onda sinusoidal se describe mediante la función de onda $y = 0.25 \text{ sen } (0.30x - 40t)$, donde x y y están en metros y t en segundos. Para esta onda determine (a) la amplitud, (b) la frecuencia angular, (c) el número de onda angular, (d) la longitud de onda, (e) la rapidez de onda y (f) la dirección de movimiento.

18. Una onda sinusoidal que viaja en la dirección x negativa (hacia la izquierda) tiene una amplitud de 20.0 cm, una longitud de onda de 35.0 cm y una frecuencia de 12.0 Hz. La posición transversal de un elemento del medio en $t = 0$, $x = 0$ es $y = -3.00$ cm, y el elemento tiene una velocidad positiva en dicha ubicación. Se desea encontrar una expresión para la función de onda que describa esta onda. (a) Bosqueje la onda en $t = 0$. (b) Encuentre el número de onda angular k a partir de la longitud de onda. (c) Encuentre el periodo T a partir de la frecuencia. Encuentre (d) la frecuencia angular ω y (e) la rapidez de onda v. (f) Con la información en $t = 0$ encuentre la constante de fase ϕ. (g) Escriba una expresión para la función de onda $y(x, t)$.

19. (a) Escriba la expresión para y como función de x y t en unidades SI para una onda sinusoidal que viaja a lo largo de una cuerda en la dirección x negativa con las siguientes características: $A = 8.00$ cm, $\lambda = 80.0$ cm, $f = 3.00$ Hz y $y(0, t) = 0$ en $t = 0$. (b) **¿Qué pasaría si?** Escriba la expresión para y como función de x y t para la onda en el inciso (a) si supone que $y(x, 0) = 0$ en el punto $x = 10.0$ cm.

20. Una onda sinusoidal transversal sobre una cuerda tiene un periodo $T = 25.0$ ms y viaja en la dirección x negativa con una rapidez de 30.0 m/s. En $t = 0$, un elemento de la cuerda en $x = 0$ tiene una posición transversal de 2.00 cm y viaja hacia abajo con una rapidez de 2.00 m/s. (a) ¿Cuál es la amplitud de la onda? (b) ¿Cuál es el ángulo de fase inicial? (c) ¿Cuál es la máxima rapidez transversal de un elemento de la cuerda? (d) Escriba la función de onda para la onda.

Sección 16.3 La rapidez de ondas sobre cuerdas

21. **Problema de repaso.** El límite elástico de un alambre de acero es 2.70×10^8 Pa. ¿Cuál es la máxima rapidez a la que pulsos de onda transversales pueden propagarse a lo largo de este alambre sin exceder este esfuerzo? (La densidad del acero es 7.86×10^3 kg/m^3.)

22. Una cuerda de piano que tiene una masa por unidad de longitud igual a 5.00×10^{-3} kg/m está bajo una tensión de 1 350 N. Encuentre la rapidez con la que una onda viaja sobre esta cuerda.

23. Ondas transversales viajan con una rapidez de 20.0 m/s sobre una cuerda bajo una tensión de 6.00 N. ¿Qué tensión se requiere para una rapidez de onda de 30.0 m/s sobre la misma cuerda?

24. Una estudiante en un examen encuentra en una hoja de referencia las dos ecuaciones

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{y} \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Ella olvidó lo que representa T en cada ecuación. (a) Use análisis dimensional para determinar las unidades requeridas para T en cada ecuación. (b) Explique cómo puede identificar, a partir de las unidades, la cantidad física que representa cada T.

25. Un cable de Ethernet tiene 4.00 m de largo. El cable tiene una masa de 0.200 kg. Un pulso transversal se produce al sacudir un extremo del cable tenso. El cable hace cuatro viajes de atrás para adelante a lo largo del cable en 0.800 s. ¿Cuál es la tensión en el cable?

26. Una onda viajera transversal en un alambre tenso tiene una amplitud de 0.200 mm y una frecuencia de 500 Hz. Viaja con una rapidez de 196 m/s. (a) Escriba una ecuación en unidades SI de la forma $y = A \text{ sen } (kx - \omega t)$ para esta onda. (b) La masa por unidad de longitud de este alambre es 4.10 g/m. Encuentre la tensión en el alambre.

27. Un alambre de acero de 30.0 m de longitud y un alambre de cobre de 20.0 m de longitud, ambos con 1.00 mm de diámetro, se conectan extremo con extremo y se estiran a una tensión de 150 N. ¿Durante qué intervalo de tiempo una onda transversal viajará toda la longitud de los dos alambres?

28. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un astronauta en la Luna está estudiando el movimiento ondulatorio mediante el aparato analizado en el ejemplo 16.3 y mostrado en la figura 16.12. Él mide el intervalo de tiempo empleado por los pulsos para viajar a lo largo del alambre horizontal. Suponga que el alambre horizontal tiene una masa de 4.00 g, una longitud de 1.60 m y que un objeto de 3.00 kg está suspendido de su extensión alrededor de la polea. El astronauta encuentra que un pulso requiere 26.1 ms para recorrer la longitud del alambre.

29. En una cuerda la tensión se establece de acuerdo con la figura P16.29. La rapidez de onda observada es $v = 24.0$ m/s cuando la masa suspendida es $m = 3.00$ kg. (a) ¿Cuál es la masa por unidad de longitud de la cuerda? (b) ¿Cuál es la rapidez de onda cuando la masa suspendida es $m = 2.00$ kg?

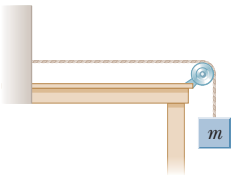


Figura P16.29
Problemas 29 y 47.

30. **Problema de repaso.** Una cuerda ligera, con una masa por unidad de longitud de 8.00 g/m, tiene sus extremos amarrados a dos paredes separadas por una distancia igual a tres cuartos la longitud de la cuerda (figura P16.30, página 503). Un objeto de masa m se suspende del centro de la

cuerda y pone tensión en ésta. (a) Encuentre una expresión para la rapidez de onda transversal en la cuerda como función de la masa del objeto colgante. (b) ¿Cuál debe ser la masa del objeto suspendido de la cuerda si la rapidez de onda es de 60.0 m/s?

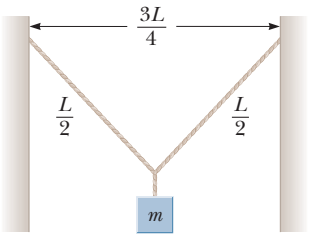


Figura P16.30

31. Pulsos transversales viajan con una rapidez de 200 m/s a lo largo de un alambre de cobre tenso cuyo diámetro es de 1.50 mm. ¿Cuál es la tensión en el alambre? (La densidad del cobre es 8.92 g/cm^3.)

Sección 16.5 Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales sobre cuerdas

32. En una región lejana del epicentro de un terremoto una onda sísmica se modela como transportadora de energía en una sola dirección sin absorción, tal como lo hace una onda en una cuerda. Suponga que la onda sísmica se mueve de granito a fango con densidad similar pero con un módulo volumétrico mucho menor. Suponga que la rapidez de la onda cae gradualmente en un factor de 25.0, con reflexión despreciable de la onda. (a) Explique si la amplitud del suelo que se agita aumentará o disminuirá. (b) ¿Cambia en un factor predecible? (Este fenómeno condujo en 1989 al colapso de parte de la autopista Nimitz en Oakland, California, durante el terremoto de Loma Prieta.)

33. En una cuerda bajo tensión se generan ondas transversales. ¿En qué factor aumenta o disminuye la potencia requerida si (a) la longitud de la cuerda se duplica y la frecuencia angular permanece constante, (b) la amplitud se duplica y la frecuencia angular se reduce a la mitad, (c) se duplican tanto la longitud de onda como la amplitud y (d) se reducen a la mitad tanto la longitud de la cuerda como la longitud de onda?

34. Ondas sinusoidales de 5.00 cm de amplitud se transmitirán a lo largo de una cuerda que tiene una densidad de masa lineal de 4.00×10^{-2} kg/m. La fuente puede entregar una potencia máxima de 300 W y la cuerda está bajo una tensión de 100 N. ¿Cuál es la frecuencia f más alta a la que puede funcionar la fuente?

35. Una onda sinusoidal en una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y = 0.15 \operatorname{sen}(0.80x - 50t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. La masa por unidad de longitud de esta cuerda es 12.0 g/m. Determine (a) la rapidez de la onda, (b) la longitud de onda, (c) la frecuencia y (d) la potencia transmitida por la onda.

36. Una cuerda tensa tiene una masa de 0.180 kg y una longitud de 3.60 m. ¿Qué potencia se debe suministrar a la cuerda para que genere ondas sinusoidales que tengan una amplitud de 0.100 m y una longitud de onda de 0.500 m y viajen con una rapidez de 30.0 m/s?

37. Un alambre largo transporta una onda; un segmento de 6.00 m de la cuerda contiene cuatro longitudes de onda completas y tiene una masa de 180 g. La cuerda vibra sinusoidalmente con una frecuencia de 50.0 Hz y un desplazamiento de cresta a valle de 15.0 cm. (La distancia "cresta a valle" es la distancia vertical desde la posición positiva más lejana hasta la posición negativa más lejana.) (a) Escriba la función que describe esta onda que viaja en la dirección x positiva. (b) Determine la potencia a suministrar a la cuerda.

38. Una cuerda horizontal puede transmitir una potencia máxima P_0 (sin romperse) si por ella viaja una onda con amplitud A y frecuencia angular ω. Para aumentar esta potencia máxima, un estudiante dobla la cuerda y usa esta "cuerda doble" como medio. Determine la potencia máxima que se puede transmitir a lo largo de la "cuerda doble" si supone que la tensión en las dos hebras juntas es la misma que la tensión original en la cuerda individual, y también que la frecuencia angular de la onda permanece constante.

39. La función de onda para una onda sobre una cuerda tensa es

$$y(x,t) = 0.350 \operatorname{sen}\left(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. Si la densidad de masa lineal de la cuerda es 75.0 g/m, (a) ¿cuál es la rapidez promedio a la que se transmite la energía a lo largo de la cuerda? (b) ¿Cuál es la energía contenida en cada ciclo de la onda?

40. Una onda acuática en dos dimensiones se dispersa en ondulaciones circulares. Demuestre que la amplitud A a una distancia r desde la perturbación inicial es proporcional a $1/\sqrt{r}$. *Sugerencia*: considere la energía que porta una ondulación que se mueve hacia fuera.

Sección 16.6 La ecuación de onda lineal

41. Demuestre que la función de onda $y = \ln[b(x - vt)]$ es una solución de la ecuación 16.27, donde b es una constante.

42. (a) Evalúe A en la igualdad escalar $4(7 + 3) = A$. (b) Evalúe A, B y C en la igualdad vectorial $700\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{k}} = A\hat{\mathbf{i}} + B\hat{\mathbf{j}} + C\hat{\mathbf{k}}$. (c) Explique las respuestas para convencer a un estudiante que cree que usted no puede resolver una sola ecuación para tres incógnitas diferentes. (d) **¿Qué pasaría si?** La igualdad funcional o identidad

$$A + B\cos(Cx + Dt + E) = 7.00\cos(3x + 4t + 2)$$

es cierta para todos los valores de las variables x y t, en metros y en segundos, respectivamente. Evalúe las constantes A, B, C, D y E. (e) Explique cómo obtuvo las respuestas al inciso (d).

43. Demuestre que la función de onda $y = e^{b(x-vt)}$ es una solución de la ecuación de onda lineal (ecuación 16.27), donde b es una constante.

44. (a) Demuestre que la función $y(x, t) = x^2 + v^2t^2$ es una solución a la ecuación de onda. (b) Demuestre que la función en el inciso (a) se puede escribir como $f(x + vt) + g(x - vt)$ y determine las formas funcionales para f y g. (c) **¿Qué pasaría si?** Repita los incisos (a) y (b) para la función $y(x, t) = \operatorname{sen}(x)\cos(vt)$.

Problemas adicionales

45. Las películas se proyectan a una frecuencia de 24.0 cuadros por segundo. Cada cuadro es una fotografía de 19.0 mm de alto, tal y como cada oscilación en una onda tiene la misma longitud. Modele la altura de un cuadro como

la longitud de onda de una onda. ¿Con qué rapidez constante pasa la película en el proyector?

46. La "ola" es un tipo particular de pulso que se puede propagar a través de una gran multitud reunida en un estadio deportivo (figura P16.46). Los elementos del medio son los espectadores, con posición cero cuando están sentados y posición máxima cuando están de pie y elevan sus brazos. Si una gran cantidad de espectadores participa en el movimiento ondulatorio se desarrolla una forma de pulso estable. La rapidez de la onda depende del tiempo de reacción de las personas, que por lo general es del orden de 0.1 s. Estime el orden de magnitud, en minutos, del intervalo de tiempo requerido para que tal pulso dé una vuelta completa en torno a un gran estadio deportivo. Establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.



Joe Klamar/AFP/Getty Images

Figura P16.46

47. Una onda sinusoidal en una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y = 0.20 \text{ sen } (0.75\pi x + 18\pi t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. La cuerda tiene una densidad de masa lineal de 0.250 kg/m. La tensión en la cuerda la proporciona un arreglo como el que se ilustra en la figura P16.29. ¿Cuál es la masa del objeto suspendido?

48. El lecho marino está sustentado por una capa de basalto que constituye la corteza, o capa superior, de la Tierra en esa región. Bajo esta corteza se encuentra roca peridotita más densa que forma el manto de la Tierra. La frontera entre esas dos capas se llama discontinuidad de Mohorovicic ("Moho" por brevedad). Si una carga explosiva se coloca en la superficie del basalto, se genera una onda sísmica que es reflejada en el Moho. Si la rapidez de esta onda en el basalto es 6.50 km/s y el tiempo de ida y vuelta es 1.85 s, ¿cuál es el espesor de esta corteza oceánica?

49. **Problema de repaso.** Un bloque de 2.00 kg cuelga de una cuerda de caucho y se sostiene de modo que la cuerda no se estira. La longitud no estirada de la cuerda es de 0.500 m y su masa es de 5.00 g. La "constante de resorte" para la cuerda es 100 N/m. El bloque se libera y se detiene momentáneamente en el punto más bajo. (a) Determine la tensión en la cuerda cuando el bloque está en este punto más bajo. (b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en esta posición "estirada"? (c) Encuentre la rapidez de una onda transversal sobre la cuerda si el bloque se mantiene en esta posición más baja.

50. **Problema de repaso.** Un bloque de masa M cuelga de una cuerda de caucho. El bloque se suspende de modo que la cuerda no se estira. La longitud no estirada de la cuerda es L_0 y su masa es m, mucho menor que M. La "constante de resorte" para la cuerda es k. El bloque se libera y se detiene momentáneamente en el punto más bajo. (a) Determine la tensión en la cuerda cuando el bloque está en el punto más bajo. (b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en la posición "estirada"? (c) Encuentre la rapidez de una onda transversal en la cuerda si el bloque se mantiene en la posición más baja.

51. Una onda transversal sobre una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y(x, t) = 0.350 \text{ sen } (1.25x + 99.6t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. Considere el elemento de la cuerda en $x = 0$. (a) ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre los primeros dos instantes cuando este elemento tiene una posición de $y = 0.175$ m? (b) ¿Qué distancia recorre la onda durante el intervalo de tiempo encontrado en el inciso (a)?

52. Una onda sinusoidal en una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y = 0.150 \text{ sen } (0.800x - 50.0t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. La masa por longitud de la cuerda es 12.0 g/m. (a) Encuentre la máxima aceleración transversal de un elemento de esta cuerda. (b) Determine la máxima fuerza transversal sobre un segmento de cuerda de 1.00 cm. (c) Establezca cómo se compara esta fuerza con la tensión en la cuerda.

53. **Problema de repaso.** Un bloque de masa M, sostenido por una cuerda, descansa sobre un plano inclinado sin fricción que forma un ángulo θ con la horizontal (figura P16.53). La longitud de la cuerda es L y su masa es $m << M$. Deduzca una expresión para el intervalo de tiempo requerido para que una onda transversal viaje de un extremo a otro de la cuerda.

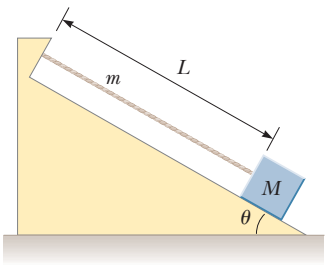


Figura P16.53

54. Un terremoto bajo el mar o un deslizamiento de Tierra puede producir una onda oceánica de corta duración transportando gran energía llamada *tsunami*. Cuando su longitud de onda es grande comparada con la profundidad del océano d, la rapidez de una onda acuática está dada aproximadamente por $v = \sqrt{gd}$. Suponga que un terremoto ocurre a lo largo de la frontera de una placa tectónica que corre de Norte a Sur y produce una cresta de onda tsunami recta que en todas partes se mueve hacia el Oeste. (a) ¿Qué cantidad física puede considerarse constante en el movimiento de cualquier cresta de onda? (b) Explique por qué la amplitud de la onda se incrementa conforme la onda se aproxima a la orilla. (c) Si la onda tiene una amplitud de 1.80 m cuando su rapidez es de 200

m/s, ¿cuál será su amplitud donde el agua tenga 9.00 m de profundidad? (d) Explique por qué se debe esperar que la amplitud sea mayor en la orilla, pero no se puede predecir significativamente mediante su modelo.

55. **Problema de repaso.** Un bloque de masa $M = 0.450$ kg se une al extremo de una cuerda de 0.003 20 kg de masa; el otro extremo de la cuerda se une a un punto fijo. El bloque rota con rapidez angular constante en un círculo sobre una mesa horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P16.55. ¿Qué ángulo rota el bloque en el intervalo de tiempo durante el cual una onda transversal viaja por la cuerda del centro del círculo al bloque?

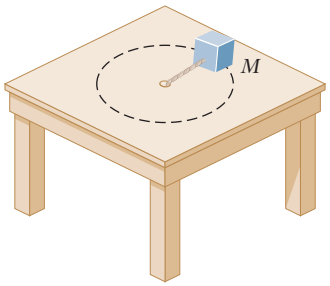


Figura P16.55 Problemas 55, 56 y 57.

56. **Problema de repaso.** Un bloque de masa $M = 0.450$ kg se une al extremo de una cuerda de masa $m = 0.003\,20$ kg; el otro extremo de la cuerda se une a un punto fijo. El bloque rota con rapidez angular constante $\omega = 10.0$ rad/s en un círculo sobre una mesa horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P16.55. ¿Qué intervalo de tiempo requiere una onda transversal para viajar por la cuerda desde el centro del círculo hasta el bloque?

57. **Problema de repaso.** Un bloque de masa M se une al extremo de una cuerda de masa m; el otro extremo de la cuerda se une a un punto fijo. El bloque rota con rapidez angular constante ω en un círculo sobre una mesa horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P16.55. ¿Qué intervalo de tiempo requiere una onda transversal para viajar por la cuerda desde el centro del círculo hasta el bloque?

58. Una cuerda con densidad lineal de 0.500 g/m se mantiene bajo tensión de 20.0 N. A medida que una onda sinusoidal transversal se propaga sobre la cuerda, los elementos de la cuerda se mueven con máxima rapidez $v_{y\text{máx}}$. (a) Determine la potencia transmitida por la onda como función de $v_{y\text{máx}}$. (b) Establezca, en palabras, la proporcionalidad entre la potencia y $v_{y\text{máx}}$. (c) Encuentre la energía contenida en una sección de cuerda de 3.00 m de largo como una función de $v_{y\text{máx}}$. (d) Exprese la respuesta al inciso (c) en términos de la masa m de esta sección. (e) Encuentre la energía que la onda transporta al pasar por un punto en 6.00 s.

59. Un alambre de densidad ρ se afila de modo que su área de sección transversal varía con x de acuerdo con

$$A = 1.00 \times 10^{-5}\, x + 1.00 \times 10^{-6}$$

donde A está en metros cuadrados y x en metros. La tensión en el alambre es T. (a) Deduzca una relación para la rapidez de una onda como función de la posición. (b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que el alambre es de aluminio y está bajo una tensión $T = 24.0$ N. Determine la rapidez de onda en el origen y en $x = 10.0$ m.

60. Una cuerda de masa total m y longitud L se suspende verticalmente. Un análisis muestra que para pulsos transversales cortos las ondas a una corta distancia arriba del extremo libre se pueden representar, con buena aproximación, mediante la ecuación de onda lineal estudiada en la sección 16.6. Demuestre que un pulso transversal recorre la longitud de la cuerda en un intervalo de tiempo dado aproximadamente por $\Delta t \approx 2\sqrt{L/g}$. *Sugerencia*: primero encuentre una expresión para la rapidez de onda en cualquier punto a una distancia x del extremo inferior, al considerar la tensión en la cuerda como resultado del peso del segmento debajo de dicho punto.

61. Un pulso que viaja a lo largo de una cuerda con densidad de masa lineal μ se describe mediante la función de onda

$$y = [A_0 e^{-bx}] \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

donde el factor entre corchetes se dice que es la amplitud. (a) ¿Cuál es la potencia $P(x)$ que porta esta onda en un punto x? (b) ¿Cuál es la potencia $P(0)$ que porta esta onda en el origen? (c) Calcule la razón $P(x)/P(0)$.

62. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Los *tsunamis* son ondas en el océano que tienen enormes longitudes de onda (100 a 200 km), y la rapidez de propagación para estas ondas es $v \approx \sqrt{g d_{\text{prom}}}$, donde d_{prom} es la profundidad promedio del agua. Un terremoto en el lecho marino en el Golfo de Alaska produce un tsunami que llega a Hilo, Hawaii, a una distancia de 4 450 km, en un intervalo de tiempo de 5.88 h. (Este método se utilizó en 1856 para estimar la profundidad promedio del océano Pacífico antes de las determinaciones directas acústicas.)

63. **Problema de repaso.** Un alambre de aluminio se sujeta fuertemente en cada extremo bajo tensión cero a temperatura ambiente. Al reducir la temperatura, lo que resulta en una disminución en la longitud de equilibrio del alambre, aumenta la tensión en éste. Considere que el área de sección transversal del alambre es 5.00×10^{-6} m^2, una densidad de 2.70×10^3 kg/m^3 y un módulo de Young de 7.00×10^{10} N/m^2, ¿qué deformación $\Delta L/L$ resulta en una rapidez de onda transversal de 100 m/s?

Problemas de desafío

64. Suponga que un objeto de masa M está suspendido de la parte baja de la cuerda de masa m y longitud L del problema 60. (a) Demuestre que el intervalo de tiempo para que un pulso transversal recorra la longitud de la cuerda es

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{L}{mg}}\left(\sqrt{M + m} - \sqrt{M}\right)$$

(b) **¿Qué pasaría si?** Demuestre que la expresión en el inciso (a) se reduce al resultado del problema 60 cuando $M = 0$. (c) Demuestre que para $m << M$, la expresión en el inciso (a) se reduce a

$$\Delta t = \sqrt{\frac{mL}{Mg}}$$

65. Una cuerda de masa total m y longitud L se suspende verticalmente. Como se probó en el problema 60, un pulso viaja desde la parte baja hasta lo alto de la cuerda en un intervalo de tiempo aproximado de $\Delta t = 2\sqrt{L/g}$ con una rapidez que varía con la posición x, medida desde el fondo de la cuerda, como $v = \sqrt{gx}$. Suponga que la ecuación de onda lineal de la sección 16.6 describe ondas en todos los puntos de la cuerda. (a) ¿Durante qué intervalo de tiempo un pulso viaja a la mitad de la cuerda? Dé su respuesta como una fracción de la cantidad $2\sqrt{L/g}$. (b) Un pulso comienza a recorrer la cuerda ¿Qué distancia viajó el pulso después de un intervalo de tiempo $\sqrt{L/g}$?

66. Una cuerda en un instrumento musical se mantiene bajo tensión T y se extiende desde el punto $x = 0$ hasta el punto $x = L$. La cuerda está devanada con alambre de tal forma que su masa por unidad de longitud $\mu(x)$ aumenta uniformemente de m_0 en $x = 0$ a μ_L en $x = L$. (a) Encuentre una expresión para $\mu(x)$ como una función de x sobre el intervalo $0 \leq x \leq L$. (b) Encuentre una expresión para el intervalo de tiempo requerido para que un pulso transversal recorra la longitud de la cuerda.

67. Si un lazo de cadena se hace girar con gran rapidez, puede rodar a lo largo del suelo como un aro circular sin colapsar. Considere una cadena con densidad de masa lineal uniforme μ cuyo centro de masa viaja hacia la derecha con gran rapidez v_0, como se muestra en la figura P16.67. (a) Determine la tensión en la cadena en términos de μ y v_0. Suponga que el peso de un eslabón individual es despreciable comparado con la tensión. (b) Si el lazo rueda sobre un borde, la deformación resultante de la cadena hace que dos pulsos transversales se propaguen a lo largo de la cadena, uno en el sentido de las manecillas del reloj y otro en sentido contrario. ¿Cuál es la rapidez de los pulsos que viajan a lo largo de la cadena? (c) ¿Qué ángulo viaja cada pulso durante el intervalo de tiempo en el que el lazo da una revolución?

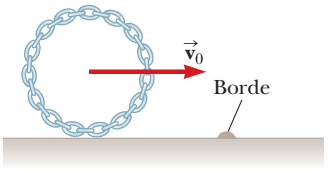


Figura P16.67

CAPÍTULO

17

Ondas sonoras



17.1 Variaciones de presión en ondas sonoras

17.2 Rapidez de ondas sonoras

17.3 Intensidad de ondas sonoras periódicas

17.4 El efecto Doppler

Tres músicos tocan el cuerno alpino en Valais, Suiza. En este capítulo se explora el comportamiento de ondas sonoras como aquellas provenientes de estos grandes instrumentos musicales. (*Stefano Cellai/AGE fotostock*)

La mayoría de las ondas estudiadas en el capítulo 16 están confinadas a moverse en un medio unidimensional. Por ejemplo, la onda en la figura 16.7 es una construcción puramente matemática moviéndose a lo largo del eje *x*. La onda en la figura 16.10 está confinada a moverse a lo largo de la longitud de la cuerda. También se han considerado ondas con movimiento a través de un medio bidimensional, como las ondulaciones en la superficie del agua en la introducción a la Parte 2, página 449, y como las ondas moviéndose sobre la superficie del océano en la figura 16.4. En este capítulo se investigan ondas mecánicas que se desplazan a través de medios tridimensionales con cierta estructura volumétrica. Por ejemplo, ondas sísmicas que parten del foco de un terremoto y viajan por el interior tridimensional de la Tierra.

Estudiaremos a las **ondas sonoras**, que viajan en cualquier material, pero es más común experimentarlas como ondas mecánicas propagándose a través del aire para generar la percepción humana de la audición. A medida que las ondas sonoras viajan a través del aire, los elementos de éste son perturbados de sus posiciones de equilibrio. Estos movimientos son acompañados por cambios en densidad y presión del aire a lo largo de la dirección de propagación de la onda. Si la fuente de las ondas sonoras vibra sinusoidalmente, las variaciones de densidad y presión también son sinusoidales. La descripción matemática de las ondas sonoras sinusoidales es muy similar a la analizada en el capítulo 16 para las ondas sinusoidales en cuerdas.

Las ondas sonoras se dividen en tres categorías que cubren diferentes intervalos de frecuencia. (1) Las *ondas audibles* se encuentran dentro del rango de sensibilidad del oído humano. Es posible generarlas en una variedad de formas mediante instrumentos musicales, voces humanas o bocinas. (2) Las *ondas infrasónicas* tienen frecuencias por abajo del intervalo audible. Los elefantes utilizan ondas infrasónicas para comunicarse entre ellos, aun cuando estén separados por varios kilómetros. (3) Las *ondas ultrasónicas* tienen frecuencias por arriba del alcance audible. Es posible que usted haya empleado silbatos "silenciosos" para llamar a su perro. Los perros escuchan con facilidad el sonido ultrasónico que emite este sil-

bato, pero los humanos no pueden detectarlo. Las ondas ultrasónicas también se aplican en la formación de imágenes médicas.

Este capítulo inicia con una discusión de las variaciones de presión en una onda sonora, la rapidez de las ondas sonoras y la intensidad de onda, la cual es una función de la amplitud de onda. Después se proporciona una descripción alternativa de la intensidad de las ondas sonoras que comprime el amplio rango de intensidades a las cuales el oído es sensible, en un rango más pequeño por conveniencia. También se investigan los efectos que el movimiento de las fuentes y los escuchas tienen sobre la frecuencia de un sonido.

17.1 Variaciones de presión en ondas sonoras

En el capítulo 16 se inició el estudio de ondas al imaginar la creación de un pulso individual viajando por una cuerda (figura 16.1) o por un resorte (figura 16.3). Se hará algo similar para el sonido. En la figura 17.1 se describe gráficamente el movimiento de un pulso sonoro longitudinal unidimensional a través de un tubo largo que contiene un gas compresible. Un pistón en el extremo izquierdo se mueve rápidamente hacia la derecha para comprimir el gas y crear el pulso. Antes de mover el pistón el gas no está perturbado y tiene densidad uniforme, como se representa mediante la región uniformemente coloreada en la figura 17.1a. Cuando el pistón se empuja hacia la derecha (figura 17.1b), el gas justo enfrente de él se comprime (indicado por la región más sombreada); la presión y la densidad en esta región ahora son mayores que sus valores antes de mover el pistón. Cuando el pistón se detiene (figura 17.1c) la región comprimida del gas continúa moviéndose hacia la derecha, lo que corresponde a un pulso longitudinal que viaja a través del tubo con rapidez v.

En el tubo con gas de la figura 17.1 se puede producir una onda sonora *periódica* unidimensional, haciendo que el pistón se mueva en movimiento armónico simple. Los resultados se muestran en la figura 17.2. En esta figura las partes más oscuras de las áreas coloreadas representan regiones en donde el gas está comprimido y la densidad y presión están por arriba de sus valores de equilibrio. Una región comprimida se forma siempre que el pistón se empuja en el tubo. Esta región comprimida, llamada **compresión**, se mueve a través del tubo y comprime continuamente la región justo enfrente de ella misma. Cuando el pistón se jala hacia atrás, el gas frente a él se

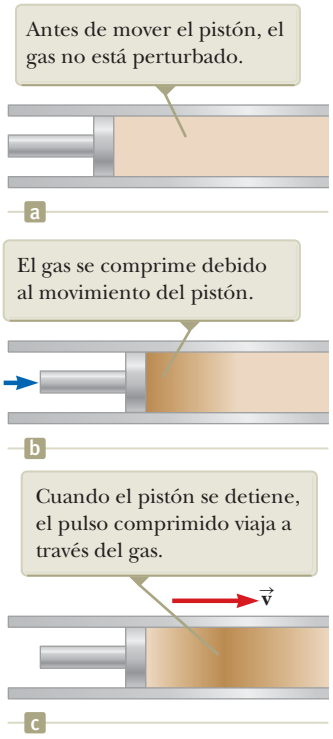


Figura 17.1 Movimiento de un pulso longitudinal a través de un gas compresible. La compresión (región más oscura) es producida por el pistón móvil.

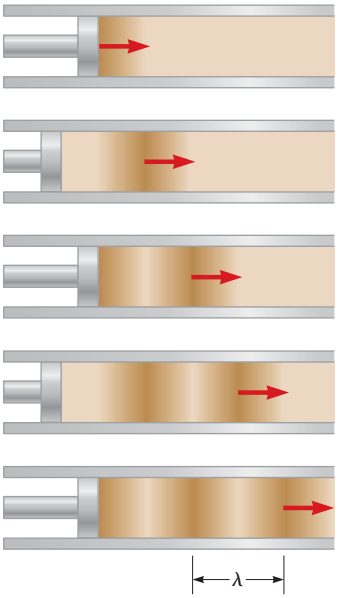


Figura 17.2 Una onda longitudinal se propaga en un tubo que contiene gas. La fuente de la onda es un pistón oscilatorio en el extremo izquierdo.

expande y la presión y la densidad en esta región disminuyen por debajo de sus valores de equilibrio (representadas por las partes más claras de las áreas coloreadas en la figura 17.2). Estas regiones de baja presión, llamadas **enrarecimientos**, también se propagan a lo largo del tubo, siguiendo las compresiones. Ambas regiones se mueven a la rapidez del sonido en el medio.

A medida que el pistón realiza oscilaciones sinusoidales se establecen continuamente regiones de compresión y enrarecimiento. La distancia entre dos compresiones sucesivas (o dos enrarecimientos sucesivos) coincide con la longitud de onda λ de la onda sonora. Como la onda sonora es longitudinal, conforme las compresiones y enrarecimientos viajan por el tubo cualquier elemento pequeño del medio ejecuta un movimiento armónico simple paralelo a la dirección de la onda. Si $s(x, t)$ es la posición de un pequeño elemento respecto a su posición de equilibrio,[1] se puede expresar esta función de posición armónica como

$$s(x, t) = s_{\text{máx}} \cos (kx - \omega t) \tag{17.1}$$

donde $s_{\text{máx}}$ es la posición máxima del elemento respecto al equilibrio. Es frecuente que este parámetro se llame **amplitud de desplazamiento** de la onda. El parámetro k es el número de onda, y ω es la frecuencia angular de la onda. Observe que el desplazamiento del elemento es a lo largo de x, en la dirección de propagación de la onda sonora.

La variación en la presión del gas ΔP, medida respecto al valor de equilibrio, también es periódica con el mismo número de onda e idéntica frecuencia angular que el desplazamiento en la ecuación 17.1. Por lo tanto, se puede escribir

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx}} \operatorname{sen} (kx - \omega t) \tag{17.2}$$

donde la **amplitud de presión** $\Delta P_{\text{máx}}$ es el cambio máximo en presión respecto al valor de equilibrio.

Observe que el desplazamiento y la presión se han expresado mediante funciones coseno y seno, respectivamente. En el procedimiento que sigue se justificará esta elección y se relacionará la amplitud de presión $P_{\text{máx}}$ con la amplitud de desplazamiento $s_{\text{máx}}$. Otra vez considere el arreglo pistón-tubo de la figura 17.1. En la figura 17.3a se pone atención a un pequeño elemento cilíndrico de gas no perturbado de longitud Δx y área A. El volumen de este elemento es $V_i = A\,\Delta x$.

La figura 17.3b muestra este elemento de gas después que la onda sonora se ha movido a una nueva posición. Las dos caras planas del cilindro se mueven distancias diferentes s_1 y s_2. El cambio en volumen ΔV del elemento en la nueva posición es igual a $A\,\Delta s$, donde $\Delta s = s_1 - s_2$.

De la definición de módulo volumétrico (vea la ecuación 12.8), la variación de la presión en el elemento de gas se puede expresar en función de su cambio en volumen:

$$\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V_i}$$

Se sustituye para el volumen inicial y el cambio en volumen del elemento:

$$\Delta P = -B \frac{A\,\Delta s}{A\,\Delta x}$$

Ahora la longitud Δx del cilindro tiende a cero, de manera que la razón $\Delta s/\Delta x$ se aproxima a una derivada parcial:

$$\Delta P = -B \frac{\partial s}{\partial x} \tag{17.3}$$

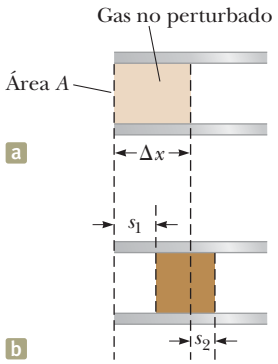


Figura 17.3 (a) Un elemento de gas no perturbado de longitud Δx en un tubo de área de sección transversal A. (b) Cuando una onda sonora se propaga a través del gas, el elemento es transferido a una nueva posición y tiene diferente longitud. Los parámetros s_1 y s_2 describen los desplazamientos de los extremos del elemento respecto a sus posiciones de equilibrio.

[1]Aquí se utiliza $s(x, t)$ en lugar de $y(x, t)$ porque el desplazamiento de los elementos del medio no es perpendicular a la dirección x.

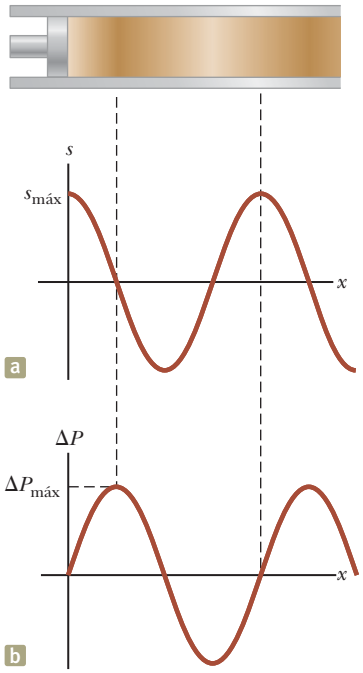


Figura 17.4 (a) Amplitud de desplazamiento y (b) amplitud de presión vs. posición para una onda longitudinal sinusoidal.

Se sustituye la función de posición dada por la ecuación 17.1:

$$\Delta P = -B\frac{\partial}{\partial x}[s_{máx}\cos(kx - \omega t)] = Bs_{máx}k\ \text{sen}(kx - \omega t)$$

De este resultado se observa que un desplazamiento descrito por una función coseno conduce a la presión descrita por una función seno. También se encuentra que las amplitudes de desplazamiento y de presión están relacionadas por

$$\Delta P_{máx} = Bs_{máx}k \tag{17.4}$$

Esta relación depende del módulo volumétrico del gas, el cual no es fácilmente disponible, como lo es la densidad del gas. En la sección 17.2 se determinará la rapidez del sonido en un gas, entonces será posible aportar una expresión que relacione $\Delta P_{máx}$ con $s_{máx}$ en términos de la densidad del gas.

Esta discusión muestra que una onda sonora puede ser descrita en términos de la presión o el desplazamiento. La comparación de las ecuaciones 17.1 y 17.2 indica que la onda de presión está 90° fuera de fase respecto a la onda de desplazamiento. En la figura 17.4 se muestran gráficas de estas funciones. La variación de presión tiene un máximo cuando es cero el desplazamiento respecto al equilibrio, y el desplazamiento relativo al equilibrio es máximo cuando es nula la variación de presión.

Examen rápido 17.1 Si usted sopla a través de la parte superior de una botella de refresco vacía, un pulso de sonido viaja a través del aire en la botella. En el momento cuando el pulso llega al fondo de la botella, ¿cuál es la descripción correcta del desplazamiento de elementos de aire desde sus posiciones de equilibrio y la presión del aire en este punto? **(a)** El desplazamiento y la presión están en un máximo. **(b)** El desplazamiento y la presión están en un mínimo. **(c)** El desplazamiento es cero y la presión es un máximo. **(d)** El desplazamiento es cero y la presión es un mínimo.

17.2 Rapidez de ondas sonoras

Ahora el estudio iniciado en la sección 17.1 se amplía para evaluar la rapidez del sonido en un gas. En la figura 17.5a considere el elemento cilíndrico de gas entre el pistón y la línea segmentada. Este elemento de gas está en equilibrio bajo la influencia de fuerzas de igual magnitud, del pistón a la izquierda y del resto del gas a la derecha. La magnitud de estas fuerzas es PA, donde P es la presión en el gas y A es el área de sección transversal del tubo.

La figura 17.5b muestra la situación después de un intervalo de tiempo Δt durante el cual el pistón se mueve hacia la derecha con rapidez constante v_x, esto debido a una fuerza desde la izquierda sobre el pistón que se ha incrementado en magnitud a $(P + \Delta P)A$. Al final del intervalo de tiempo Δt, cada porción de gas en el elemento se mueve con rapidez v_x. En general, eso no será cierto para un elemento macroscópico de gas, pero sí será correcto si la longitud del elemento se reduce a un valor infinitesimal.

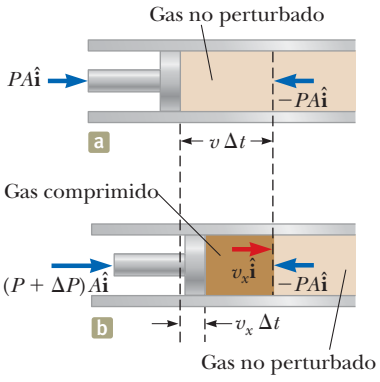


Figura 17.5 (a) Un elemento de gas no perturbado de longitud $v\,\Delta t$ en un tubo de área de sección transversal A. El elemento está en equilibrio entre fuerzas en los extremos. (b) Cuando el pistón se mueve hacia dentro con velocidad constante v_x debido a una fuerza incrementada a la izquierda, el elemento también se mueve con la misma velocidad.

Para la longitud del elemento de gas no perturbado se selecciona $v\,\Delta t$, donde v es la rapidez del sonido en el gas y Δt es el intervalo de tiempo entre las configuraciones de las figuras 17.5a y 17.5b. Por lo tanto, al final del intervalo de tiempo Δt la onda sonora justo llegará al extremo derecho del elemento cilíndrico de gas. El gas a la derecha del elemento está no perturbado porque la onda sonora todavía no lo alcanza.

El elemento de gas se modela como un sistema no aislado en términos de cantidad de movimiento. La fuerza del pistón ha proporcionado un impulso al elemento, que a su vez exhibe un cambio en cantidad de movimiento. Por lo tanto, se evalúan ambos lados del teorema impulso-cantidad de movimiento:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{I}} \tag{17.5}$$

A la derecha, el impulso es proporcionado por la fuerza constante debida al incremento de presión sobre el pistón:

$$\vec{\mathbf{I}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\,\Delta t = (A\,\Delta P\,\Delta t)\,\hat{\mathbf{i}}$$

El cambio de presión ΔP se puede relacionar con el cambio de volumen y, a su vez, con las magnitudes de velocidad v y v_x vía el módulo volumétrico:

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V_i} = -B\frac{(-v_x A\,\Delta t)}{vA\,\Delta t} = B\frac{v_x}{v}$$

Así, el impulso queda

$$\vec{\mathbf{I}} = \left(AB\frac{v_x}{v}\Delta t\right)\hat{\mathbf{i}} \tag{17.6}$$

En el lado izquierdo del teorema impulso-cantidad de movimiento (ecuación 17.5), el cambio en cantidad de movimiento del elemento de gas de masa m es como sigue:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = m\,\Delta\vec{\mathbf{v}} = (\rho V_i)(v_x\hat{\mathbf{i}} - 0) = (\rho v v_x A\,\Delta t)\,\hat{\mathbf{i}} \tag{17.7}$$

Al sustituir las ecuaciones 17.6 y 17.7 en la ecuación 17.5, se obtiene

$$\rho v v_x A\,\Delta t = AB\frac{v_x}{v}\Delta t$$

que se reduce a una expresión para la rapidez del sonido en un gas:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{17.8}$$

Es interesante comparar esta expresión con la ecuación 16.18 para la rapidez de las ondas transversales en una cuerda, $v = \sqrt{T/\mu}$. En ambos casos, la rapidez de la onda depende de una propiedad elástica del medio (módulo volumétrico B o tensión en la cuerda T) y de una propiedad inercial del medio (densidad volumétrica ρ o densidad lineal μ). En efecto, la rapidez de todas las ondas mecánicas sigue una expresión de la forma general

$$v = \sqrt{\frac{\text{propiedad elástica}}{\text{propiedad inercial}}}$$

Para ondas sonoras longitudinales en una barra sólida de material, por ejemplo, la rapidez del sonido depende del módulo de Young Y y de la densidad ρ. La tabla 17.1 (página 512) proporciona la rapidez del sonido en varios materiales diferentes.

La rapidez del sonido también depende de la temperatura del medio. Para el sonido propagándose en el aire, la relación entre rapidez de la onda y la temperatura del aire es

$$v = 331\sqrt{1 + \frac{T_C}{273}} \tag{17.9}$$

donde v está en metros/segundo; 331 m/s es la rapidez del sonido en aire a 0°C y T_C es la temperatura del aire en grados Celsius. Con esta ecuación se encuentra que, a 20°C, la rapidez del sonido en aire es aproximadamente 343 m/s.

Tabla 17.1 **Rapidez del sonido en diversos medios**

Medio	v (m/s)	Medio	v (m/s)	Medio	v (m/s)
Gases		**Líquidos a 25°C**		**Sólidos**[a]	
Hidrógeno (0°C)	1 286	Glicerol	1 904	Vidrio Pyrex	5 640
Helio (0°C)	972	Agua de mar	1 533	Hierro	5 950
Aire (20°C)	343	Agua	1 493	Aluminio	6 420
Aire (0°C)	331	Mercurio	1 450	Latón	4 700
Oxígeno (0°C)	317	Queroseno	1 324	Cobre	5 010
		Alcohol metílico	1 143	Oro	3 240
		Tetracloruro de carbono	926	Lucita	2 680
				Plomo	1 960
				Caucho	1 600

[a]Los valores dados son para la propagación de ondas longitudinales en medios volumétricos. Las magnitudes de velocidad para ondas longitudinales en barras delgadas son menores, y las magnitudes de velocidad de ondas transversales en volumen son aún más pequeñas.

Esta información proporciona una forma conveniente de estimar la distancia a una tormenta. Primero cuente el número de segundos entre ver el destello del relámpago y escuchar el trueno. Dividir este intervalo de tiempo entre 3 da la distancia aproximada al relámpago en kilómetros, porque 343 m/s es aproximadamente $\frac{1}{3}$ km/s. Dividir el intervalo de tiempo en segundos entre 5 da la distancia aproximada al relámpago en millas, porque la rapidez del sonido es aproximadamente $\frac{1}{5}$ mi/s.

Al tener una expresión (ecuación 17.8) para la rapidez del sonido, entonces se puede dar la conexión entre la amplitud de presión y la amplitud de desplazamiento para una onda sonora (ecuación 17.4):

$$\Delta P_{\text{máx}} = Bs_{\text{máx}}k = (\rho v^2)s_{\text{máx}}\left(\frac{\omega}{v}\right) = \rho v \omega s_{\text{máx}} \tag{17.10}$$

Esta expresión es un poco más útil que la ecuación 17.4, porque la densidad de un gas es más disponible que el módulo volumétrico.

17.3 Intensidad de ondas sonoras periódicas

En el capítulo 16 se demostró que una onda que viaja sobre una cuerda tensa transporta energía, consistente con la noción de transferencia de energía mediante ondas mecánicas en la ecuación 8.2. Es natural esperar que las ondas sonoras también representen una transferencia de energía. Considere el elemento de gas bajo la acción del pistón en la figura 17.5. Imagine que el pistón se mueve hacia adelante y hacia atrás en movimiento armónico simple con frecuencia angular ω. También imagine que la longitud del elemento se hace muy pequeña de manera que el elemento completo se mueve con la misma velocidad que el pistón. Entonces el elemento se puede modelar como una partícula sobre la cual el pistón realiza trabajo. La razón con la que el pistón efectúa trabajo sobre el elemento en cualquier instante de tiempo está dada por la ecuación 8.19:

$$\textit{Potencia} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_x$$

donde se ha utilizado *Potencia* en lugar de P para así ¡no confundir la potencia P con la presión P! La fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el elemento de gas está relacionada con la presión, y la velocidad $\vec{\mathbf{v}}_x$ del elemento es la derivada de la función de desplazamiento, así se encuentra que

$$\textit{Potencia} = [\Delta P(x, t)A]\hat{\mathbf{i}} \cdot \frac{\partial}{\partial t}[s(x, t)\hat{\mathbf{i}}]$$

$$= [\rho v \omega A s_{\text{máx}} \operatorname{sen}(kx - \omega t)]\left\{\frac{\partial}{\partial t}[s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)]\right\}$$

$$= [\rho v \omega A s_{\text{máx}} \operatorname{sen}(kx - \omega t)][\omega s_{\text{máx}} \operatorname{sen}(kx - \omega t)]$$

$$= \rho v \omega^2 A s_{\text{máx}}^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$$

Ahora se determina la potencia promedio en el tiempo durante un periodo de la oscilación. Para cualquier valor dado de x se puede seleccionar $x = 0$, el valor promedio de $\operatorname{sen}^2(kx - wt)$ en un periodo T es:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}^2(0 - \omega t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}^2 \omega t\, dt = \frac{1}{T}\left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{2\omega}\right)\Bigg|_0^T = \tfrac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$(Potencia)_{\text{prom}} = \tfrac{1}{2}\rho v \omega^2 A s_{\text{máx}}^2$$

Se define la **intensidad** I de una onda, o la potencia por unidad de área, como la rapidez con la cual la energía transportada por la onda se transfiere a través de una unidad de área A perpendicular a la dirección de viaje de la onda:

$$I \equiv \frac{(Potencia)_{\text{prom}}}{A} \qquad (17.11)$$

◀ **Intensidad de una onda sonora**

Por lo tanto, en este caso la intensidad es

$$I = \tfrac{1}{2}\rho v(\omega s_{\text{máx}})^2$$

En consecuencia, la intensidad de una onda sonora periódica es proporcional al cuadrado de la amplitud de desplazamiento y al cuadrado de la frecuencia angular. Esta expresión también puede escribirse en términos de la amplitud de presión $\Delta P_{\text{máx}}$; en este caso, se emplea la ecuación 17.10 para obtener

$$I = \frac{(\Delta P_{\text{máx}})^2}{2\rho v} \qquad (17.12)$$

Las ondas en una cuerda estudiadas en el capítulo 16 están confinadas a lo largo de una cuerda unidimensional, como se discutió en la introducción a este capítulo. Las ondas sonoras consideradas en las figuras de la 17.1 a la 17.3 y en la 17.5 están restringidas a moverse en una dimensión a lo largo de la longitud del tubo. Sin embargo, como se mencionó en la introducción, las ondas sonoras pueden desplazarse a través de medios tridimensionales con estructura volumétrica, así que coloque al aire libre una fuente sonora y estudie los resultados.

Considere el caso especial de una fuente puntual que emite ondas sonoras por igual en todas direcciones. Si el aire alrededor de la fuente es perfectamente uniforme, la potencia sonora radiada es la misma en todas direcciones, y también la rapidez del sonido es la misma en todas direcciones. En esta situación resulta una **onda esférica**. La figura 17.6 muestra estas ondas esféricas como una serie de arcos circulares concéntricos con la fuente. Cada arco representa una superficie sobre la cual es constante la fase de la onda. A tal superficie de fase constante se le llama **frente de onda**. La distancia radial entre frentes de onda adyacentes que tienen la misma fase es la longitud de onda λ de la onda. Las líneas radiales que se dirigen hacia fuera desde la fuente, que representan la dirección de propagación de las ondas, se llaman **rayos**.

La potencia promedio emitida por la fuente debe estar distribuida uniformemente sobre cada frente de onda esférico de área $4\pi r^2$. Por tanto, la intensidad de la onda a una distancia r de la fuente es

$$I = \frac{(Potencia)_{\text{prom}}}{A} = \frac{(Potencia)_{\text{prom}}}{4\pi r^2} \qquad (17.13)$$

La intensidad disminuye como el cuadrado de la distancia a la fuente. Esta ley inversa del cuadrado recuerda el comportamiento de la gravedad (capítulo 13).

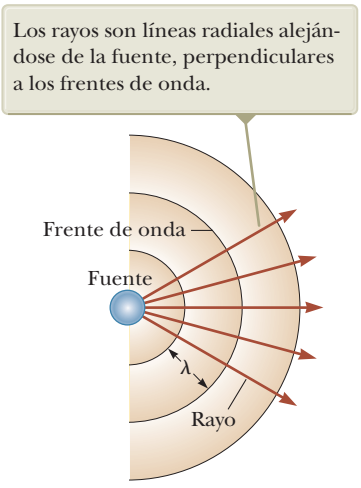


Figura 17.6 Ondas esféricas emitidas por una fuente puntual. Los arcos circulares representan los frentes de onda esféricos que son concéntricos con la fuente.

Examen rápido 17.2 Una cuerda de guitarra que vibra hace muy poco sonido si no está montada en el cuerpo de una guitarra. ¿Por qué el sonido tiene mayor intensidad si la cuerda se une al cuerpo de la guitarra? **(a)** La cuerda vibra con más energía. **(b)** La energía abandona la guitarra a mayor rapidez. **(c)** La potencia del sonido se dispersa sobre un área más grande en la posición del escucha. **(d)** La potencia del sonido se concentra en un área más pequeña en la posición del escucha. **(e)** La rapidez del sonido es mayor en el material del cuerpo de la guitarra. **(f)** Ninguna de estas respuestas es correcta

Ejemplo 17.1 Límites auditivos

Los sonidos más débiles que el oído humano puede detectar a una frecuencia de 1 000 Hz corresponden a una intensidad de aproximadamente $1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2$, que se llama *umbral de audición*. Los sonidos más fuertes que el oído tolera a esta frecuencia corresponden a una intensidad de aproximadamente $1.00\ \text{W/m}^2$, el *umbral de dolor*. Determine la amplitud de presión y la amplitud de desplazamiento asociadas con estos dos límites.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en el ambiente más tranquilo que haya experimentado alguna vez. Es probable que la intensidad del sonido, incluso en este ambiente tan tranquilo, sea mayor que el umbral de audición.

Categorizar Se dan las intensidades y se pide calcular las amplitudes de presión y desplazamiento, entonces este problema es de análisis y requiere los conceptos discutidos en esta sección.

Analizar Para obtener la amplitud de la variación de presión en el umbral de audición, utilice la ecuación 17.12, tome la rapidez de las ondas sonoras en el aire como $v = 343\ \text{m/s}$ y la densidad del aire $\rho = 1.20\ \text{kg/m}^3$:

$$\begin{aligned}\Delta P_{\text{máx}} &= \sqrt{2\rho v I} \\ &= \sqrt{2(1.20\ \text{kg/m}^3)(343\ \text{m/s})(1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2)} \\ &= 2.87 \times 10^{-5}\ \text{N/m}^2\end{aligned}$$

Con la ecuación 17.10 calcule la correspondiente amplitud de desplazamiento, y recuerde que $\omega = 2\pi f$ (ecuación 16.9):

$$\begin{aligned}s_{\text{máx}} &= \frac{\Delta P_{\text{máx}}}{\rho v \omega} = \frac{2.87 \times 10^{-5}\ \text{N/m}^2}{(1.20\ \text{kg/m}^3)(343\ \text{m/s})(2\pi \times 1\,000\ \text{Hz})} \\ &= 1.11 \times 10^{-11}\ \text{m}\end{aligned}$$

De manera similar, se encuentra que los sonidos más fuertes que puede tolerar el oído humano (el umbral de dolor) corresponden a una amplitud de presión de $28.7\ \text{N/m}^2$ y una amplitud de desplazamiento igual a $1.11 \times 10^{-5}\ \text{m}$.

Finalizar Ya que la presión atmosférica es casi $10^5\ \text{N/m}^2$, el resultado para la amplitud de presión dice que el oído es sensible a fluctuaciones de presión ¡tan pequeñas como 3 partes en 10^{10}! ¡La amplitud de desplazamiento también es un número notablemente pequeño! Si este resultado para $s_{\text{máx}}$ se compara con el tamaño de un átomo (aproximadamente $10^{-10}\ \text{m}$), se concluye que el oído es un detector extremadamente sensible de ondas sonoras.

Ejemplo 17.2 Variaciones de intensidad de una fuente puntual

Una fuente puntual emite ondas sonoras con una salida de potencia promedio de 80.0 W.

(A) Encuentre la intensidad a 3.00 m de la fuente.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una pequeña bocina que envía sonido con rapidez promedio de 80.0 W de manera uniforme en todas direcciones. Usted está de pie a 3.00 m de distancia de las bocinas. A medida que el sonido se propaga, la energía de las ondas sonoras se dispersa sobre una esfera siempre en expansión, así la intensidad del sonido disminuye con la distancia.

Categorizar Si evalúa la intensidad mediante una ecuación deducida en esta sección, entonces este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

17.2 continuación

Ya que una fuente puntual emite energía en la forma de ondas esféricas, use la ecuación 17.13 para encontrar la intensidad:

$$I = \frac{(Potencia)_{prom}}{4\pi r^2} = \frac{80.0\ \text{W}}{4\pi(3.00\ \text{m})^2} = 0.707\ \text{W/m}^2$$

Esta intensidad es cercana al umbral del dolor.

(B) Hallar la distancia a la cual la intensidad del sonido es $1.00 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2$.

SOLUCIÓN

Resuelva para r en la ecuación 17.13 y utilice el valor dado para I:

$$r = \sqrt{\frac{(Potencia)_{prom}}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{80.0\ \text{W}}{4\pi(1.00 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2)}}$$

$$= 2.52 \times 10^4\ \text{m}$$

Nivel sonoro en decibeles

El ejemplo 17.1 ilustra el amplio rango de intensidades que puede detectar el oído humano. Como este intervalo es muy amplio, es conveniente emplear una escala logarítmica, donde el **nivel sonoro** β (letra griega beta) se define mediante la ecuación

$$\beta \equiv 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad (17.14)$$

La constante I_0 es la *intensidad de referencia*, considerada como el umbral de audición ($I_0 = 1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2$) e I es la intensidad en watts por metro cuadrado a la que corresponde el nivel de sonido β, donde β se mide[2] en **decibeles** (dB). En esta escala, el umbral de dolor ($I = 1.00\ \text{W/m}^2$) corresponde a un nivel sonoro de $\beta = 10 \log [(1\ \text{W/m}^2)/(10^{-12}\ \text{W/m}^2)] = 10 \log (10^{12}) = 120$ dB, y el umbral de audición corresponde a $\beta = 10 \log [(10^{-12}\ \text{W/m}^2)/(10^{-12}\ \text{W/m}^2)] = 0$ dB.

La exposición prolongada a niveles sonoros altos puede dañar seriamente el oído humano. Siempre que los niveles sonoros superen los 90 dB, se recomienda emplear tapones de oídos. Evidencia reciente sugiere que la "contaminación acústica" puede ser un factor que contribuye a la presión arterial alta, ansiedad y nerviosismo. La tabla 17.2 da algunos niveles sonoros típicos.

Tabla 17.2

Niveles sonoros

Fuente de sonido	β (dB)
Avión jet cercano	150
Martillo neumático; ametralladora	130
Sirena; concierto de rock	120
Transporte subterráneo; podadora potente	100
Congestionamiento de tráfico	80
Aspiradora	70
Conversación normal	60
Zumbido de mosquito	40
Susurro	30
Hojas meciéndose	10
Umbral de audición	0

Examen rápido 17.3 Aumentar la intensidad de un sonido en un factor de 100 ocasiona que el nivel sonoro aumente, ¿en qué cantidad? **(a)** 100 dB, **(b)** 20 dB, **(c)** 10 dB, **(d)** 2 dB.

Ejemplo 17.3 Niveles sonoros

Dos máquinas idénticas se colocan a la misma distancia de un trabajador. La intensidad del sonido entregado por cada máquina en funcionamiento en la posición del trabajador es de $2.0 \times 10^{-7}\ \text{W/m}^2$.

(A) Halle el nivel sonoro que escucha el trabajador cuando una máquina está funcionando.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una situación en la cual una fuente de sonido está activa y se une a una segunda fuente idéntica, como una persona que habla, y entonces una segunda persona habla al mismo tiempo, o un instrumento musical que toca y después se le une un segundo instrumento.

Categorizar Este ejemplo es un problema de análisis relativamente simple que requiere la ecuación 17.14.

continúa

[2] La unidad *bel* recibe su nombre por el inventor del teléfono, Alexander Graham Bell (1847-1922). El prefijo *deci-* es el prefijo del SI que representa 10^{-1}.

17.3 continuación

Analizar Aplique la ecuación 17.14 para calcular el nivel sonoro en la posición del trabajador con una máquina en funcionamiento:

$$\beta_1 = 10 \log\left(\frac{2.0 \times 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}}{1.00 \times 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}\right) = 10 \log\left(2.0 \times 10^{5}\right) = 53\ \mathrm{dB}$$

(B) Halle el nivel sonoro que escucha el trabajador cuando dos máquinas están en funcionamiento.

SOLUTION

Aplique la ecuación 17.14 para calcular el nivel sonoro en la posición del trabajador, con el doble de intensidad:

$$\beta_2 = 10 \log\left(\frac{4.0 \times 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}}{1.00 \times 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}\right) = 10 \log\left(4.0 \times 10^{5}\right) = 56\ \mathrm{dB}$$

Finalizar Estos resultados demuestran que cuando se duplica la intensidad el nivel sonoro aumenta sólo en 3 dB. Ese incremento de 3 dB es independiente del nivel sonoro original. (¡Demuéstrelo!)

¿QUÉ PASARÍA SI? La *sonoridad* es una respuesta psicológica a un sonido. Depende tanto de la intensidad como de la frecuencia del sonido. Como regla empírica, una sonoridad duplicada se asocia aproximadamente con un aumento en el nivel sonoro de 10 dB. (Esta regla empírica es relativamente imprecisa a frecuencias muy bajas o muy altas.) Si la sonoridad de las máquinas en este ejemplo se duplica, ¿cuántas máquinas a la misma distancia del trabajador deben estar en funcionamiento?

Respuesta Con la regla empírica, un doble de sonoridad corresponde a un aumento en el nivel sonoro de 10 dB. Por lo tanto,

$$\beta_2 - \beta_1 = 10\ \mathrm{dB} = 10 \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) - 10 \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 10 \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

$$\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad I_2 = 10 I_1$$

Así, deben estar en funcionamiento diez máquinas para duplicar la sonoridad.

Sonoridad y frecuencia

La explicación del nivel sonoro en decibeles se relaciona con una medición *física* de la intensidad del sonido. Ahora se extenderá la explicación de la sección ¿Qué pasaría si? del ejemplo 17.3 concerniente a la "medición" *psicológica* de la intensidad de un sonido.

De hecho, no se tienen instrumentos en el cuerpo que puedan desplegar valores numéricos de las reacciones a los estímulos. Se tienen que "calibrar" las reacciones de algún modo para comparar diferentes sonidos con un sonido de referencia, pero esto no es fácil de lograr. Por ejemplo, antes se mencionó que la intensidad umbral es $10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$, que corresponde a un nivel de intensidad de 0 dB. En realidad, este valor es el umbral sólo para un sonido con frecuencia de 1 000 Hz, que es una frecuencia de referencia estándar en acústica. Si se realiza un experimento para medir la intensidad umbral a otras frecuencias, se encuentra una variación distinta de este umbral como función de la frecuencia. Por ejemplo, a 100 Hz, un sonido apenas audible debe tener una intensidad de ¡aproximadamente 30 dB! Por desgracia, no existe una correspondencia simple entre las mediciones físicas y las "mediciones" psicológicas. El sonido de 100 Hz y 30 dB es psicológicamente "igual" al sonido de 1 000 Hz y 0 dB (ambos son apenas audibles), pero no son físicamente iguales a nivel sonoro (30 dB ≠ 0 dB).

Mediante sujetos de prueba se ha estudiado la respuesta humana al sonido, y los resultados se muestran en el área blanca de la figura 17.7, junto con la frecuencia aproximada y los rangos de nivel sonoro de otras fuentes sonoras. La curva inferior del área blanca corresponde al umbral de audición. A partir de este diagrama, es clara su variación con la frecuencia. Note que los humanos son sensibles a frecuencias en el intervalo de casi 20 Hz hasta aproximadamente 20 000 Hz. La frontera superior del área blanca es el umbral de dolor. Aquí la frontera del área blanca parece recta por-

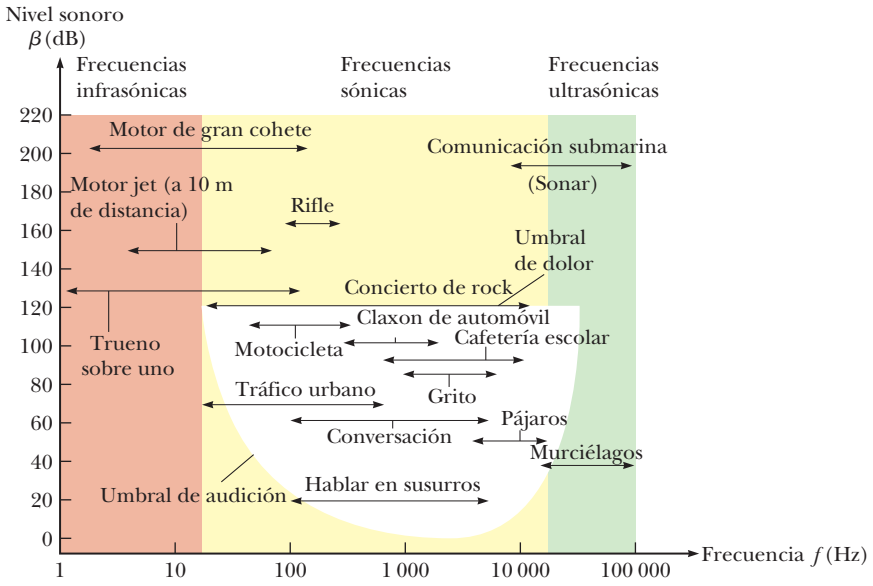


Figura 17.7 Intervalos aproximados de frecuencia y nivel sonoro de varias fuentes y la audición humana normal, mostrada por el área blanca. (Tomado de R. L. Reese, *University Physics*, Pacific Grove, Brooks/Cole, 2000.)

que la respuesta psicológica es relativamente independiente de la frecuencia a este elevado nivel sonoro.

El cambio más dramático con la frecuencia está en la región inferior izquierda del área blanca, para frecuencias bajas y niveles de intensidad bajos. Los oídos humanos son insensibles en esta región. Si usted escucha su estéreo y los sonidos graves (frecuencias bajas) y agudos (frecuencias altas) se equilibran a un volumen alto, intente bajar el volumen y escuchar de nuevo. Probablemente notará que el grave parece débil, debido a la insensibilidad del oído a frecuencias bajas en niveles sonoros bajos, como se muestra en la figura 17.7.

17.4 El efecto Doppler

Tal vez haya notado cómo varía el sonido del claxon de un vehículo a medida que éste se aleja. La frecuencia del sonido que escucha mientras el vehículo se aproxima a usted es más alta que la frecuencia que escucha mientras se aleja. Esta experiencia es un ejemplo del **efecto Doppler**.[3]

Para comprender qué causa este aparente cambio de frecuencia, imagínese en un bote anclado en un mar tranquilo donde las ondas tienen un periodo $T = 3.0$ s. Así, cada 3.0 s una cresta golpea su bote. La figura 17.8a muestra esta situación, con las ondas acuáticas moviéndose hacia la izquierda. Si usted pone su reloj en $t = 0$ justo cuando una cresta golpea, la lectura en el reloj es 3.0 s cuando llegue la siguiente cresta, 6.0 s cuando la tercera cresta golpea, y así sucesivamente. A partir de estas

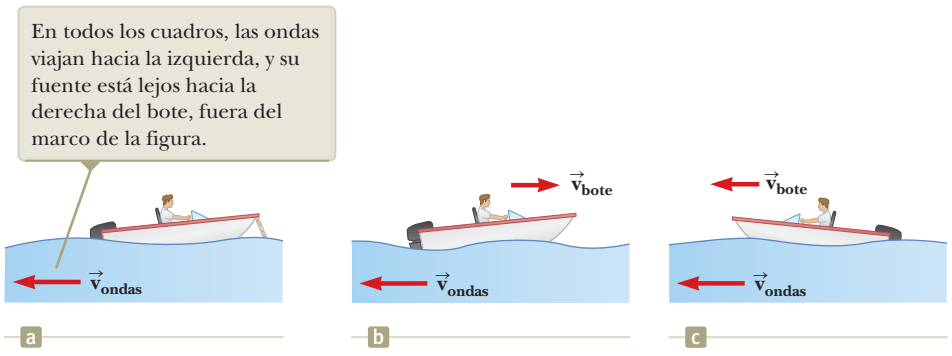


Figura 17.8 (a) Ondas moviéndose hacia un bote estacionario. (b) El bote se mueve hacia la fuente de ondas. (c) El bote se mueve alejándose de la fuente de ondas.

[3] Llamado en honor del físico austriaco Christian Johann Doppler (1803-1853), quien predijo en 1842 el efecto tanto para ondas sonoras como para ondas luminosas.

observaciones, concluye que la frecuencia de la onda es $f = 1/T = 1/(3.0\text{ s}) = 0.33$ Hz. Ahora suponga que enciende su motor y se dirige directamente hacia las ondas que se acercan, como en la figura 17.8b. Una vez más pone su reloj en $t = 0$ cuando una cresta golpea el frente (la proa) de su bote. Sin embargo, ahora, ya que se mueve hacia la cresta de onda siguiente mientras ella se mueve hacia usted, lo golpea a menos de 3.0 s después del primer golpe. En otras palabras, el periodo que ahora observa es más corto que el periodo de 3.0 s que observó cuando estaba estacionario. Ya que $f = 1/T$, observa una frecuencia ondulatoria mayor que cuando estaba en reposo.

Si usted da vuelta y se mueve en la misma dirección que las ondas (figura 17.8c), se observa el efecto opuesto. Pone su reloj en $t = 0$ cuando una cresta golpea la parte trasera del bote (la popa). Ya que ahora se mueve alejándose de la siguiente cresta, en su reloj transcurren más de 3.0 s cuando lo alcanza dicha cresta. Por lo tanto, observa una frecuencia más baja que cuando estaba en reposo.

Estos efectos se presentan porque la rapidez *relativa* entre su bote y las ondas depende de la dirección de viaje y de la rapidez de su bote. (Vea la sección 4.6.) Cuando se mueve hacia la derecha en la figura 17.8b, esta rapidez relativa es mayor que la rapidez de la onda, lo cual conduce a la observación de una frecuencia aumentada. Al dar vuelta y moverse hacia la izquierda, la rapidez relativa es menor, como lo es la frecuencia observada de las ondas acuáticas.

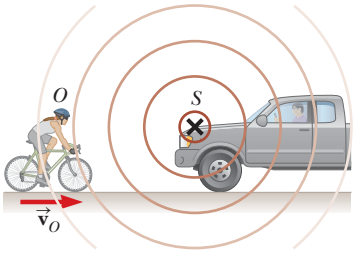


Figura 17.9 Un observador O (el ciclista) se mueve con una rapidez v_O hacia una fuente puntual estable S, el claxon de una camioneta estacionada. El observador escucha una frecuencia f' mayor que la frecuencia de la fuente.

Ahora examine una situación análoga con ondas sonoras en la cual las ondas de agua se convierten en ondas sonoras, el agua se convierte en aire y la persona en el bote ahora es un observador que escucha el sonido. En este caso, un observador O se mueve y una fuente sonora S es estacionaria. Para simplificar, se supone que el aire también es estable y que el observador va directo hacia la fuente (figura 17.9). El observador se mueve con una rapidez v_O hacia una fuente puntual estable ($v_S = 0$), donde *estable* significa en reposo respecto al medio, aire.

Si una fuente puntual emite ondas sonoras y el medio es uniforme, las ondas se mueven con la misma rapidez en todas direcciones, se alejan radialmente de la fuente; el resultado es una onda esférica, como se mencionó en la sección 17.3. La distancia entre frentes de onda adyacentes es igual a la longitud de onda λ. En la figura 17.9 los círculos son las intersecciones de estos frentes de onda tridimensionales con el papel en dos dimensiones.

Sean f la frecuencia de la fuente, λ la longitud de onda y v la rapidez del sonido en la figura 17.9. Si el observador también fuera estable detectaría frentes de onda a una frecuencia f. (Es decir, cuando $v_O = 0$ y $v_S = 0$, la frecuencia observada es igual a la frecuencia de la fuente.) Cuando el observador se mueve hacia la fuente, la rapidez de las ondas relativa al observador es $v' = v + v_O$, como en el caso del bote en la figura 17.8, pero la longitud de onda λ no se altera. Por tanto, al emplear la ecuación 16.12, $v = \lambda f$, puede decirse que la frecuencia f' que escucha el observador está *aumentada* y está dada por

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_O}{\lambda}$$

Ya que $\lambda = v/f$, f' se puede expresar como

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v}\right) f \quad \text{(observador en movimiento hacia la fuente)} \quad \textbf{(17.15)}$$

Si el observador se aleja de la fuente, la rapidez de la onda relativa al observador es $v' = v - v_O$. En este caso la frecuencia escuchada por el observador queda *reducida* y está dada por

$$f' = \left(\frac{v - v_O}{v}\right) f \quad \text{(observador alejándose de la fuente)} \quad \textbf{(17.16)}$$

Estas últimas dos ecuaciones se pueden reducir a una sola ecuación si se adopta una convención de signo. Si un observador se mueve con rapidez v_o respecto a una fuente estacionaria, la frecuencia escuchada por el observador está dada por la

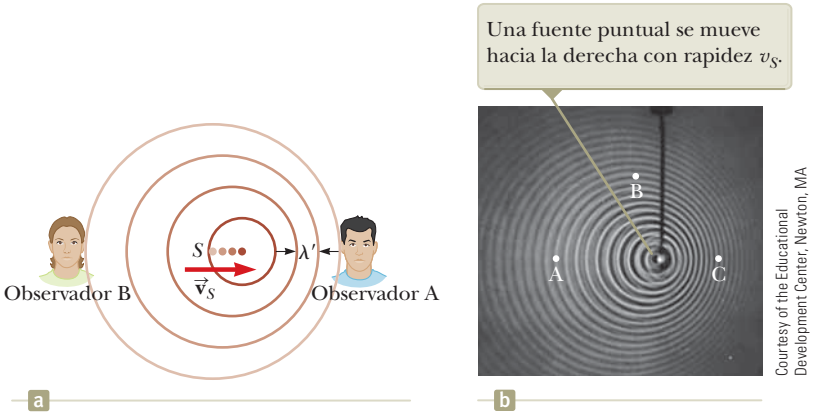


Figura 17.10 (a) Una fuente S se mueve con una rapidez v_S hacia un observador estacionario A y se aleja de un observador estable B. El observador A escucha una frecuencia aumentada, y el observador B escucha una frecuencia reducida. (b) El efecto Doppler en el agua observado en un tanque de ondas. Las letras mostradas en la fotografía se refieren al Examen rápido 17.4.

ecuación 17.15, con v_O interpretada como sigue: se emplea un valor positivo para v_O cuando el observador se mueve hacia la fuente, y se utiliza un valor negativo cuando el observador se aleja de la fuente.

Ahora suponga que la fuente está en movimiento y que el observador queda en reposo. Si la fuente avanza directo hacia el observador A en la figura 17.10a, cada nueva onda es emitida desde una posición a la derecha del origen de la onda previa. Como resultado, los frentes de onda escuchados por el observador están más juntos de lo que estarían si la fuente no se moviera. (La figura 17.10b muestra este efecto para ondas moviéndose en la superficie del agua.) Así, la longitud de onda λ' medida por el observador A es más corta que la longitud de onda λ de la fuente. Durante cada vibración, que dura un intervalo de tiempo T (el periodo), la fuente se mueve una distancia $v_S T = v_S/f$ y la longitud de onda se acorta en esta cantidad. Por lo tanto, la longitud de onda observada λ' es

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \lambda - \frac{v_S}{f}$$

Como $\lambda = v/f$, la frecuencia f' que escucha el observador A es

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda - (v_S/f)} = \frac{v}{(v/f) - (v_S/f)}$$

$$f' = \left(\frac{v}{v - v_S}\right) f \quad \text{(fuente móvil hacia el observador)} \qquad \textbf{(17.17)}$$

Es decir, la frecuencia observada *aumenta* siempre que la fuente se mueva hacia el observador.

Cuando la fuente se aleja de un observador estacionario, como es el caso del observador B en la figura 17.10a, el observador mide una longitud de onda λ' que es *mayor* que λ y escucha una frecuencia *reducida*.

$$f' = \left(\frac{v}{v + v_S}\right) f \quad \text{(fuente alejándose del observador)} \qquad \textbf{(17.18)}$$

La relación general para la frecuencia observada cuando una fuente es móvil y un observador está en reposo, se puede expresar mediante la ecuación 17.17, con la misma convención de signo aplicada a v_S como se aplicó a v_O: se emplea un valor positivo para v_S cuando la fuente se mueve hacia el observador, y un valor negativo si la fuente se aleja del observador.

Por último, al combinar las ecuaciones 17.15 y 17.17 se obtiene la siguiente relación general para la frecuencia observada que incluye las cuatro condiciones descritas en las ecuaciones 17.15 a la 17.18:

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f \qquad \textbf{(17.19)}$$

◀ **Expresión general de corrimiento Doppler**

Prevención de riesgos ocultos 17.1

El efecto Doppler no depende de la distancia Algunas personas creen que el efecto Doppler depende de la distancia entre la fuente y el observador. Aunque la *intensidad* de un sonido varía a medida que la distancia cambia, la *frecuencia* aparente sólo depende de la rapidez relativa de la fuente y el observador. Cuando usted escucha una fuente que se aproxima, detectará intensidad creciente pero frecuencia constante. Mientras la fuente pasa, escuchará que la frecuencia cae súbitamente a un nuevo valor constante y la intensidad comienza a disminuir.

En esta expresión, los signos para los valores sustituidos para v_0 y v_S dependen de la dirección de la velocidad. Se emplea un valor positivo para movimiento del observador o la fuente *hacia* el otro (asociado con un *aumento* en la frecuencia observada), y un valor negativo se utiliza para movimiento de uno *alejándose* del otro (asociado con una disminución en la frecuencia observada).

Aunque el efecto Doppler se experimenta más comúnmente con ondas sonoras, es un fenómeno típico a todas las ondas. Por ejemplo, el movimiento relativo de la fuente y el observador produce un corrimiento de frecuencia en las ondas luminosas. El efecto Doppler se usa en los sistemas de radar policiacos para medir la rapidez de los vehículos automotores. Del mismo modo, los astrónomos emplean el efecto para determinar la rapidez de estrellas, galaxias y otros objetos celestes en relación con la Tierra.

Examen rápido 17.4 Considere los detectores de ondas acuáticas en tres posiciones A, B y C de la figura 17.9b. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero? **(a)** La rapidez de onda es mayor en la posición A. **(b)** La rapidez de onda es mayor en la posición C. **(c)** La longitud de onda detectada es mayor en la posición B. **(d)** La longitud de onda detectada es mayor en la posición C. **(e)** La frecuencia detectada es mayor en la posición C. **(f)** La frecuencia detectada es mayor en la posición A.

Examen rápido 17.5 Usted está de pie sobre una plataforma en una estación de tren y escucha un tren que se aproxima a la estación con velocidad constante. Mientras el tren se aproxima, pero antes de que llegue, ¿qué escucha? **(a)** La intensidad y la frecuencia del sonido aumentan, **(b)** la intensidad y la frecuencia del sonido disminuyen, **(c)** la intensidad aumenta y la frecuencia disminuye, **(d)** la intensidad disminuye y la frecuencia aumenta, **(e)** la intensidad aumenta y la frecuencia permanece igual, **(f)** la intensidad disminuye y la frecuencia permanece igual.

Ejemplo 17.4 El radio-reloj descompuesto AM

Su radio-reloj lo despierta con un sonido estable e irritante de 600 Hz de frecuencia. Una mañana funciona mal y no se puede apagar. Frustrado, arroja el radio-reloj por la ventana de su dormitorio en el cuarto piso, a 15.0 m del suelo. Suponga que la rapidez del sonido es de 343 m/s. Mientras escucha el radio-reloj que cae, ¿qué frecuencia escucha justo antes de que lo oiga chocar con el suelo?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La rapidez del radio-reloj aumenta mientras cae. Por lo tanto, es una fuente de sonido móvil alejándose de usted con una rapidez creciente, de modo que la frecuencia que escucha debe ser menor que 600 Hz.

Categorizar Este problema se clasifica como uno en el que se combina el modelo de *partícula bajo una aceleración* constante para el radio en caída con la comprensión del corrimiento en frecuencia del sonido debido al efecto Doppler.

Analizar Ya que el radio-reloj se modela como una partícula bajo aceleración constante debida a la gravedad, use la ecuación 2.13 para expresar la rapidez de la fuente de sonido:

$$(1)\quad v_S = v_{yi} + a_y t = 0 - gt = -gt$$

Mediante la ecuación 2.16 obtenga el tiempo en que el radio-reloj golpea el suelo:

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0 + 0 - \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{-\frac{2y_f}{g}}$$

Sustituya en la ecuación (1):

$$v_S = (-g)\sqrt{-\frac{2y_f}{g}} = -\sqrt{-2gy_f}$$

Aplique la ecuación 17.19 para determinar la frecuencia de corrimiento Doppler que se escucha del radio-reloj en caída:

$$f' = \left[\frac{v + 0}{v - (-\sqrt{-2gy_f})}\right] f = \left(\frac{v}{v + \sqrt{-2gy_f}}\right) f$$

17.4 continuación

Sustituya valores numéricos:

$$f' = \left[\frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} + \sqrt{-2(9.80 \text{ m/s}^2)(-15.0 \text{ m})}}\right](600 \text{ Hz})$$
$$= 571 \text{ Hz}$$

Finalizar La frecuencia es menor que la frecuencia real de 600 Hz porque el radio-reloj se aleja. Si cayera desde un piso superior, de modo que pasara por debajo de $y = -15.0$ m, el radio-reloj continuaría acelerando y la frecuencia seguiría disminuyendo.

Ejemplo 17.5 Submarinos Doppler

Un submarino (sub A) viaja a través del agua con una rapidez de 8.00 m/s y emite una onda de sonar con una frecuencia de 1 400 Hz. La rapidez del sonido en el agua es de 1 533 m/s. Un segundo submarino (sub B) se localiza de modo que ambos submarinos viajan directamente uno hacia el otro. El segundo submarino se mueve a 9.00 m/s.

(A) ¿Qué frecuencia detecta un observador que viaja en el sub B mientras los submarinos se aproximan entre sí?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Aun cuando el problema involucra submarinos móviles en agua, hay un efecto Doppler tal como existe cuando usted está en un automóvil en movimiento y escucha un sonido que se mueve a través del aire desde otro auto.

Categorizar Ya que ambos submarinos se mueven, este problema se clasifica como uno que involucra el efecto Doppler para una fuente móvil y un observador en movimiento.

Analizar Aplique la ecuación 17.19 para hallar la frecuencia de corrimiento Doppler que escucha el observador en el sub B y tenga cuidado con los signos de las rapideces de la fuente y el observador:

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f$$
$$f' = \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (+9.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (+8.00 \text{ m/s})}\right](1\,400 \text{ Hz}) = 1\,416 \text{ Hz}$$

(B) Los submarinos apenas evitan el choque. ¿Qué frecuencia detecta un observador en el sub B mientras los submarinos se alejan uno del otro?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 17.19 para encontrar la frecuencia de corrimiento Doppler que escucha el observador en el sub B, y de nuevo sea cuidadoso con los signos asignados a las rapideces de la fuente y el observador:

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f$$
$$f' = \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (-9.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (-8.00 \text{ m/s})}\right](1\,400 \text{ Hz}) = 1\,385 \text{ Hz}$$

Note que la frecuencia disminuye de 1 416 Hz a 1 385 Hz conforme los submarinos se pasan. Este efecto es similar a la caída en frecuencia que usted escucha cuando un automóvil pasa a su lado mientras suena el claxon.

(C) Mientras los submarinos se aproximan mutuamente, algo del sonido desde el sub A se refleja desde el sub B y regresa al sub A. Si este sonido lo detectara un observador en el sub A, ¿cuál sería su frecuencia?

SOLUCIÓN

El sonido de frecuencia aparente de 1 416 Hz que encontró en la parte (A) se refleja de una fuente móvil (sub B) y después lo detecta un observador móvil (sub A). Determine la frecuencia detectada por el sub A:

$$f'' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f'$$
$$= \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (+8.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (+9.00 \text{ m/s})}\right](1\,416 \text{ Hz}) = 1\,432 \text{ Hz}$$

continúa

17.5 continuación

Finalizar Esta técnica la utilizan los oficiales de policía para medir la rapidez de un auto en movimiento. Desde la patrulla se emiten microondas que se reflejan en el auto en movimiento. Al detectar la frecuencia de corrimiento Doppler de las microondas reflejadas, el oficial de policía puede obtener la rapidez del auto.

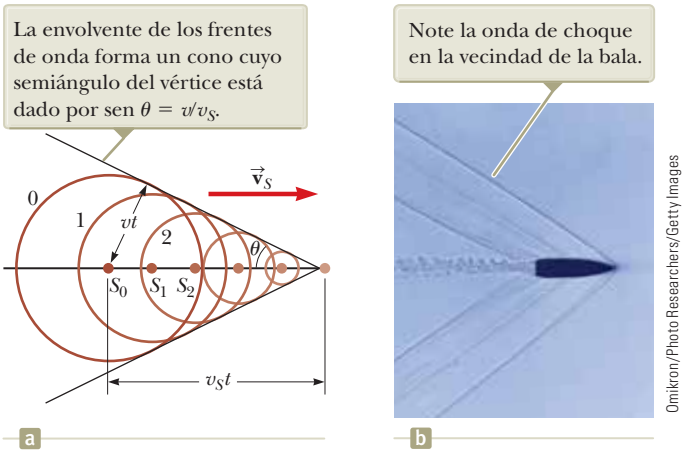


Figura 17.11 (a) Una representación de una onda de choque producida cuando una fuente se mueve de S_0 hacia la derecha con una rapidez v_S que es mayor que la rapidez de onda v en el medio. (b) Fotografía estroboscópica de una bala moviéndose con rapidez supersónica a través del aire caliente sobre una vela.

Ondas de choque

Considere ahora lo que sucede cuando la rapidez v_S de una fuente *supera* la rapidez de onda v. Esta situación se muestra gráficamente en la figura 17.11a. Los círculos representan frentes de onda esféricos emitidos por la fuente en diferentes momentos durante su movimiento. En $t = 0$, la fuente está en S_0 con desplazamiento hacia la derecha. En tiempos posteriores la fuente está en S_1, y luego en S_2 y así sucesivamente. En el tiempo t el frente de onda con centro en S_0 alcanza un radio vt. En este mismo intervalo de tiempo la fuente recorre una distancia $v_S t$. En la figura 17.11a observe que puede dibujarse una línea tangente a todos los frentes de onda generados en varios instantes. Por lo tanto, la envolvente de estos frentes de onda es un cono cuyo semiángulo de vértice θ (el "ángulo Mach") está dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{vt}{v_S t} = \frac{v}{v_S}$$

La razón v_S/v se conoce como *número de Mach*, y el frente de onda cónico que se produce cuando $v_S > v$ (rapidez supersónica) se conoce como *onda de choque*. Una analogía interesante a las ondas de choque son los frentes de onda en forma de V producidos por un bote (la onda de proa) cuando la rapidez de éste supera la rapidez de las ondas en la superficie del agua (figura 17.12).

Los aviones jet que viajan a velocidades supersónicas producen ondas de choque, que son responsables del fuerte "estampido sónico" que uno escucha. La onda de choque lleva una gran cantidad de energía concentrada en la superficie del cono, con grandes variaciones de presión correspondientes. Tales ondas de choques son desagradables de escuchar y pueden causar daño a los edificios cuando los aviones vuelan supersónicamente a bajas altitudes. En efecto, un avión que vuela con rapidez supersónica produce un doble estampido porque se forman dos ondas de choque, una desde la nariz del avión y otra desde la cola. Las personas cercanas a la trayectoria de un transbordador espacial que se aproxima a su punto de aterrizaje con frecuencia reportan escuchar lo que suena como dos crujidos de trueno muy cercanamente espaciados.



Figura 17.12 La onda de proa con forma en V de un bote se presenta porque la rapidez de éste es mayor que la rapidez de las ondas acuáticas que él genera. Una onda de proa es análoga a una onda de choque formada por un avión que viaja más rápido que el sonido.

Examen rápido 17.6 Un avión que vuela con una velocidad constante se mueve desde una masa de aire frío hacia una masa de aire caliente. ¿El número Mach **(a)** aumenta, **(b)** disminuye o **(c)** permanece igual?

Resumen

Definiciones

La **intensidad** de una onda sonora periódica, que es la potencia por unidad de área, es

$$I \equiv \frac{(Potencia)_{prom}}{A} = \frac{(\Delta P_{máx})^2}{2\rho v} \quad \textbf{(17.11, 17.12)}$$

El **nivel sonoro** de una onda sonora en decibeles es

$$\beta \equiv 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \textbf{(17.14)}$$

La constante I_0 es una intensidad de referencia que usualmente se considera como el umbral de audición (1.00×10^{-12} W/m^2), e I es la intensidad de la onda sonora en watts por metro cuadrado.

Conceptos y principios

Las ondas sonoras son longitudinales y viajan a través de un medio compresible con una rapidez que depende de las propiedades elásticas e inerciales de dicho medio. La rapidez del sonido en un gas con un módulo volumétrico B y una densidad ρ es

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \textbf{(17.8)}$$

Para ondas sonoras sinusoidales, la variación en la posición de un elemento del medio es

$$s(x, t) = s_{máx} \cos(kx - \omega t) \quad \textbf{(17.1)}$$

y la variación en presión respecto al valor de equilibrio es

$$\Delta P = \Delta P_{máx} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad \textbf{(17.2)}$$

donde $\Delta P_{máx}$ es la **amplitud de presión**. La onda de presión está 90° fuera de fase con la onda de desplazamiento. La relación entre $s_{máx}$ y $\Delta P_{máx}$ es

$$\Delta P_{máx} = \rho v \omega s_{máx} \quad \textbf{(17.10)}$$

El cambio en la frecuencia escuchada por un observador, siempre que hay movimiento relativo entre una fuente de ondas sonoras y el observador, se llama **efecto Doppler**. La frecuencia observada es

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f \quad \textbf{(17.19)}$$

En esta expresión los signos para los valores sustituidos para v_O y v_S dependen de la dirección de la velocidad. Un valor positivo para la rapidez del observador o fuente se sustituye si la velocidad de uno es hacia el otro, mientras que un valor negativo representa una velocidad de uno alejándose del otro.

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. La tabla 17.1 muestra que la rapidez del sonido por lo general tiene un orden de magnitud mayor en sólidos que en gases. ¿A qué puede atribuirse más directamente este valor más alto? (a) La diferencia en densidad entre sólidos y gases, (b) la diferencia en compresibilidad entre sólidos y gases, (c) el tamaño limitado de un objeto sólido en comparación con un gas libre, (d) la imposibilidad de mantener un gas bajo tensión significativa.
2. Dos sirenas A y B funcionan de manera que la frecuencia de A es el doble que la frecuencia de B. Comparada con la rapidez del sonido de A, la rapidez del sonido de B es (a) el doble, (b) la mitad, (c) cuatro veces más rápido, (d) un cuarto de rápido o (e) la misma.
3. Cuando usted viaja en su auto en la carretera se le aproxima una ambulancia a gran rapidez desde la parte de atrás (figura PO17.3) cuya sirena funciona a una frecuencia de 500 Hz. ¿Cuál enunciado es correcto? (a) Usted escucha una frecuencia menor que 500 Hz. (b) Escucha una frecuencia igual a 500 Hz. (c) Escucha una frecuencia mayor que 500 Hz. (d) Usted escucha una frecuencia mayor que 500 Hz, mientras que el conductor de la ambulancia escu-



Anthony Redpath/Corbis

Figura PO17.3

cha una frecuencia menor que 500 Hz. (e) Usted escucha una frecuencia menor que 500 Hz, mientras que el conductor de la ambulancia escucha una frecuencia de 500 Hz.

4. ¿Qué le ocurre a una onda sonora cuando viaja desde el aire hacia el agua? (a) Su intensidad aumenta. (b) Su longitud de onda disminuye. (c) Su frecuencia aumenta. (d) Su frecuencia no cambia. (e) Su velocidad disminuye.

5. La campana de una iglesia suena una vez. A 300 m enfrente de ésta la intensidad sonora máxima es 2 μW/m^2. A 950 m detrás de la iglesia la intensidad máxima es 0.2 μW/m^2. ¿Cuál es el motivo principal para la diferencia en intensidad? (a) La mayor parte del sonido es absorbida por el aire antes de llegar muy lejos desde la fuente. (b) La mayor parte del sonido es absorbida por el suelo mientras viaja alejándose de la fuente. (c) La campana transmite el sonido principalmente hacia el frente. (d) A mayor distancia la potencia se dispersa sobre un área más grande.

6. Si una fuente sonora de 1.00 kHz se mueve con una rapidez de 50.0 m/s hacia un escucha que se mueve a 30.0 m/s alejándose de la fuente, ¿cuál es la frecuencia aparente captada por el escucha? (a) 796 Hz, (b) 949 Hz, (c) 1 000 Hz, (d) 1 068 Hz, (e) 1 273 Hz.

7. Una onda sonora se puede caracterizar como (a) una onda transversal, (b) una onda longitudinal, (c) una onda transversal o una onda longitudinal, dependiendo de la naturaleza de su fuente, (d) una que no transporta energía, o (e) una onda que no requiere un medio para ser transmitida de un lugar a otro.

8. Suponga que un cambio en la fuente de sonido reduce la longitud de onda de una onda sonora en el aire en un factor de 2. **(i)** ¿Qué ocurre con su frecuencia? (a) Aumenta en un factor de 4. (b) Aumenta en un factor de 2. (c) No cambia. (d) Disminuye en un factor de 2. (e) Cambia por un factor impredecible. **(ii)** ¿Qué sucede con su rapidez? Elija entre las mismas posibilidades como en la parte (i).

9. Una fuente puntual transmite sonido en un medio uniforme. Si la distancia desde la fuente se triplica, ¿cómo cambia la intensidad? (a) Se convierte en un noveno. (b) Se convierte en un tercio. (c) No cambia. (d) Se vuelve tres veces más grande. (e) Se vuelve nueve veces más grande.

10. Suponga que un observador y una fuente de sonido están en reposo respecto al suelo y un fuerte viento sopla alejándose de la fuente hacia el observador. **(i)** ¿Qué efecto tiene el viento sobre la frecuencia observada? (a) Hace que aumente. (b) Hace que disminuya. (c) No genera cambios. **(ii)** ¿Qué efecto tiene el viento sobre la longitud de onda observada de la onda? Elija entre las mismas posibilidades del inciso (i). **(iii)** ¿Qué efecto tiene el viento sobre la rapidez observada de la onda? Elija entre las mismas posibilidades como en el inciso (i).

11. Una fuente de sonido vibra con frecuencia constante. Clasifique la frecuencia del sonido observado en los siguientes casos, de mayor a menor. Si dos frecuencias son iguales, muestre su igualdad en su clasificación. Todos los movimientos mencionados tienen la misma rapidez, 25 m/s. (a) La fuente y el observador son estacionarios. (b) La fuente se mueve hacia un observador estacionario. (c) La fuente se aleja de un observador estacionario. (d) El observador se mueve hacia una fuente estacionaria. (e) El observador se aleja de una fuente estacionaria.

12. Con un medidor sensible del nivel sonoro usted mide que el sonido de una araña que corre es −10 dB. ¿Qué implica el signo negativo? (a) La araña se aleja de usted. (b) La frecuencia del sonido es muy baja para ser audible a los humanos. (c) La intensidad del sonido es muy débil para ser audible a los humanos. (d) Cometió un error: los signos negativos no encajan con los logaritmos.

13. Al duplicar la potencia de salida de una fuente sonora que sólo emite una frecuencia, ¿qué incremento ocurrirá en su nivel en decibeles? (a) 0.50 dB, (b) 2.0 dB, (c) 3.0 dB, (d) 4.0 dB, (e) arriba de 20 dB.

14. De los siguientes sonidos, ¿cuál tiene más probabilidad de alcanzar un nivel sonoro de 60 dB? (a) Un concierto de rock, (b) el voltear una página de este libro, (c) una conversación en la mesa durante la cena, (d) una animada multitud en un partido de futbol.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. ¿Cómo puede un objeto moverse respecto a un observador de modo que el sonido proveniente de él no se corra en frecuencia?

2. Las antiguas cámaras de enfoque automático enviaban un pulso de sonido y medían el intervalo de tiempo requerido para que el pulso llegara al objeto, se reflejara ahí y retornara para ser detectado. ¿La temperatura del aire puede afectar el enfoque de la cámara? Las cámaras actuales utilizan un sistema infrarrojo más confiable.

3. Una amiga sentada en su automóvil, lejos en el camino, agita las manos y comienza a sonar su claxon al mismo tiempo. ¿A qué distancia debe estar para que usted calcule la rapidez del sonido a dos cifras significativas al medir el intervalo de tiempo necesario para que el sonido llegue hasta usted?

4. Al escuchar una banda u orquesta, ¿cómo puede determinar que la rapidez del sonido es la misma para todas las frecuencias?

5. Explique cómo la distancia a un relámpago (figura PC17.5) puede determinarse si se cuentan los segundos transcurridos entre el destello y el sonido del trueno?



© iStockphoto.com/Colin Orthner

Figura PC17.5

6. Usted maneja hacia un acantilado y suena el claxon. ¿Existe corrimiento Doppler del sonido cuando escucha el eco? Si así ocurre, ¿es similar a una fuente móvil o a un observador en movimiento? ¿Qué sucede si la reflexión no ocurre en el acantilado, sino en la parte delantera de una enorme nave espacial moviéndose hacia usted mientras maneja?

7. Los sistemas de radar empleados por la policía para detectar reductores de velocidad son sensibles al corrimiento Doppler de un pulso de microondas. Analice cómo esta sensibilidad puede utilizarse para medir la rapidez de un auto.
8. *El evento Tunguska.* El 30 de junio de 1908 un meteoro se quemó y explotó en la atmósfera sobre el valle del río Tunguska, en Siberia. Derribó árboles en miles de kilómetros cuadrados e inició un incendio forestal, pero no produjo cráter y aparentemente no causó pérdidas humanas. Un testigo sentado en su pórtico afuera de la zona de los árboles caídos recordó los eventos en la siguiente secuencia. Él vio una luz moverse en el cielo, más brillante que el Sol, y descender en un ángulo bajo hacia el horizonte. Sintió que su cara se calentaba. Que el suelo se sacudía. Un agente invisible lo levantó y de inmediato lo soltó aproximadamente un metro más lejos de donde había estado sentado. Escuchó un retumbar prolongado muy fuerte. Sugiera una explicación para estas observaciones y para el orden en el que ocurrieron.
9. Un vigilante sónico es un dispositivo que determina la distancia a un objeto al enviar un pulso sonoro ultrasónico y medir el intervalo de tiempo requerido para que la onda regrese por reflexión desde el objeto. Por lo general, estos dispositivos no pueden detectar confiablemente un objeto que esté a menos de medio metro del sensor. ¿Por qué es así?

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Nota: En este capítulo, las variaciones de presión ΔP se miden respecto a la presión atmosférica, 1.013×10^5 Pa.

Sección 17.1 Variaciones de presión en ondas sonoras

1. Una onda sonora sinusoidal se mueve a través de un medio y se describe mediante la función de onda de desplazamiento

$$s(x, t) = 2.00 \cos (15.7x - 858t)$$

donde s está en micrómetros, x en metros y t en segundos. Encuentre (a) la amplitud, (b) la longitud de onda y (c) la rapidez de esta onda. (d) Determine el desplazamiento instantáneo del equilibrio de los elementos del medio en la posición $x = 0.050\ 0$ m en $t = 3.00$ ms. (e) Determine la rapidez máxima del movimiento oscilatorio del elemento.

2. A medida que cierta onda sonora viaja a través del aire produce variaciones de presión (arriba y debajo de la presión atmosférica) dadas por $\Delta P = 1.27 \text{ sen } (px - 340\pi t)$ en unidades SI. Encuentre (a) la amplitud de las variaciones de presión, (b) la frecuencia, (c) la longitud de onda en el aire y (d) la rapidez de la onda sonora.

3. Escriba una expresión que describa la variación de presión como función de la posición y el tiempo para una onda sonora sinusoidal en aire. Suponga que la rapidez del sonido es 343 m/s, $\lambda = 0.100$ m y $\Delta P_{máx} = 0.200$ Pa.

Sección 17.2 Rapidez de ondas sonoras

El problema 85 del capítulo 2 también puede asignarse a esta sección.

Nota: En lo que resta de este capítulo, a menos que se especifiquen otras indicaciones, la densidad de equilibrio del aire es $\rho = 1.20$ kg/m^3 y la rapidez del sonido en aire es $v = 343$ m/s. Utilice la tabla 17.1 para encontrar la rapidez del sonido en otros medios.

4. Un experimentador quiere generar en aire una onda sonora que tenga una amplitud de desplazamiento de 5.50×10^{-6} m. La amplitud de presión estará limitada a 0.840 Pa. ¿Cuál es la longitud de onda mínima que puede tener la onda sonora?
5. Calcule la amplitud de presión de una onda sonora de 2.00 kHz en aire; suponiendo que la amplitud de desplazamiento es igual a 2.00×10^{-8} m.
6. Los terremotos en líneas de falla en la corteza terrestre crean ondas sísmicas, las cuales son longitudinales (ondas P) o transversales (ondas S). Las ondas P tienen una rapidez de aproximadamente 7 km/s. Estime el módulo volumétrico promedio de la corteza terrestre, dado que la densidad de la roca es alrededor de 2 500 kg/m^3.
7. Un delfín (figura P17.7) en agua de mar a una temperatura de 25°C emite una onda sonora dirigida hacia el lecho marino a 150 m de profundidad. ¿Qué tiempo transcurre hasta la llegada del eco?


Stephen Frink/Photographer's Choice/Getty Images

Figura P17.7

8. Una onda sonora se propaga en aire a 27°C con frecuencia de 4.00 kHz. Pasa a través de una región donde la temperatura cambia gradualmente y luego se mueve a través de aire a 0°C. Dé respuestas numéricas a las siguientes preguntas en la medida de lo posible y establezca su razonamiento sobre lo que sucede físicamente con la onda. (a) ¿Qué ocurre con la rapidez de la onda? (b) ¿Qué sucede con su frecuencia? (c) ¿Qué ocurre con su longitud de onda?
9. El ultrasonido se usa en medicina tanto para imagen diagnóstica (figura P17.9, página 526) como para terapia. Para

diagnosis, pulsos cortos de ultrasonido pasan a través del cuerpo del paciente. Se registra un eco reflejado de una estructura de interés y es posible determinar la distancia a la estructura mediante el retraso de tiempo para el retorno del eco. Para revelar detalles, la longitud de onda del ultrasonido reflejado debe ser pequeña comparada con el tamaño del objeto que refleja la onda. La rapidez del ultrasonido en el tejido humano es de aproximadamente 1 500 m/s (casi la misma que la rapidez del sonido en el agua). (a) ¿Cuál es la longitud de onda del ultrasonido con una frecuencia de 2.40 MHz? (b) En todo el conjunto de técnicas de formación de imagen se utilizan frecuencias en el rango de 1.00 a 20.0 MHz. ¿Cuál es el rango de longitudes de onda que corresponden a este intervalo de frecuencias?



B. Benoit/Photo Researchers, Inc.

Figura P17.9 Imagen de un feto en el útero realizada mediante ultrasonido.

10. Una onda sonora en el aire tiene una amplitud de presión igual a 4.00×10^{-3} Pa. Calcule la amplitud de desplazamiento de la onda a una frecuencia de 10.0 kHz.

11. Suponga que escucha un trueno 16.2 s después de ver el relámpago asociado. La rapidez de la luz en el aire es 3.00×10^8 m/s. (a) ¿Qué tan lejos está del relámpago? (b) ¿Para responder necesita conocer el valor de la rapidez de la luz? Explique.

12. Un avión de rescate vuela horizontalmente con rapidez constante en busca de un bote averiado. Cuando el avión está directamente arriba del bote, la tripulación del bote suena una gran sirena. Cuando el detector sonoro del avión recibe el sonido de la sirena, el avión ya recorrió una distancia igual a la mitad de su altura sobre el océano. Si supone que el sonido tarda 2.00 s en llegar al avión, determine (a) la rapidez del avión y (b) su altura.

13. Una maceta es derribada desde un balcón a una altura $d = 20.0$ m sobre la acera, como se muestra en la figura P17.13. Cae hacia un confiado hombre de altura $h = 1.75$ m que está de pie abajo. Suponga que el hombre requiere un intervalo de tiempo $\Delta t = 0.300$ s para responder a la advertencia. ¿Qué tan cerca de la acera puede caer la maceta antes de que sea demasiado tarde para que un grito de advertencia desde el balcón llegue a tiempo al hombre?

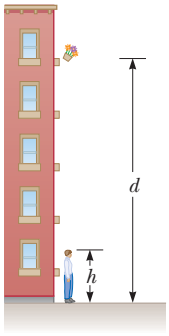


Figura P17.13 Problemas 13 y 14.

14. Una maceta es derribada desde un balcón a una altura d sobre la acera, como se muestra en la figura P17.13. Cae hacia un confiado hombre de altura h que está de pie abajo. Suponga que el hombre requiere un intervalo de tiempo Δt para responder a la advertencia. ¿Qué tan cerca de la acera puede caer la maceta antes de que sea demasiado tarde para que un grito de advertencia desde el balcón llegue a tiempo al hombre?

15. La rapidez del sonido en el aire (en metros por segundo) depende de la temperatura, de acuerdo con la expresión aproximada

$$v = 331.5 + 0.607T_C$$

donde T_C es la temperatura Celsius. En aire seco, la temperatura disminuye casi 1°C por cada 150 m de aumento en altura. (a) Suponga que este cambio es constante hasta una altura de 9 000 m. ¿Qué intervalo de tiempo se requiere para que el sonido de un avión que vuela a 9 000 m llegue al suelo en un día cuando la temperatura del suelo es de 30°C? (b) **¿Qué pasaría si?** Compare su respuesta con el intervalo de tiempo requerido si el aire estuviese uniformemente a 30°C. ¿Qué intervalo de tiempo es más largo?

16. Una onda sonora se mueve en un cilindro, como en la figura 17.2. Demuestre que la variación de la presión de la onda es descrita por $\Delta P = \pm \rho v \omega \sqrt{s_{máx}^2 - s^2}$, donde $s = s(x, t)$ está dada por la ecuación 17.1.

17. Un martillo golpea un extremo de una gruesa barra de hierro de longitud 8.50 m. Un micrófono ubicado en el extremo opuesto detecta dos pulsos de sonido, uno que viaja a través del aire y una onda longitudinal que viaja por la barra. (a) ¿Cuál pulso llega primero al micrófono? (b) Encuentre la separación, en tiempo, entre las llegadas de los dos pulsos.

18. Un vaquero está de pie sobre suelo horizontal entre dos riscos verticales paralelos. No está a la mitad entre los riscos. Dispara un tiro y escucha su eco. El segundo eco llega 1.92 s después que el primero y 1.47 s antes que el tercero. Sólo considere el sonido que viaja paralelo al suelo y se refleja de los riscos. (a) ¿Cuál es la distancia entre los riscos? (b) **¿Qué pasaría si?** Si él puede escuchar un cuarto eco, ¿en cuánto tiempo llega después del tercer eco?

Sección 17.3 Intensidad de ondas sonoras periódicas

19. Calcule el nivel sonoro (en decibeles) de una onda sonora que tiene una intensidad de 4.00 μW/m^2.

20. El área típica de un tímpano es casi 5.00×10^{-5} m^2. (a) Calcule la potencia sonora promedio incidente sobre un tímpano en el umbral de dolor, el cual corresponde a una intensidad de 1.00 W/m^2. (b) ¿Cuánta energía se transfiere al tímpano expuesto a este sonido durante 1.00 min?

21. La intensidad de una onda sonora a una distancia fija de una bocina que vibra a 1.00 kHz es de 0.600 W/m^2. (a) Determine la intensidad que resulta si la frecuencia se aumenta a 2.50 kHz mientras se mantiene una amplitud de desplazamiento constante. (b) Calcule la intensidad si la frecuencia se reduce a 0.500 kHz y se duplica la amplitud de desplazamiento.

22. La intensidad de una onda sonora a una distancia fija de una bocina que vibra a una frecuencia f es I. (a) Determine la intensidad que resulta si la frecuencia se aumenta a f' mientras se mantiene una amplitud de desplazamiento constante. (b) Calcule la intensidad si la frecuencia se reduce a $f/2$ y se duplica la amplitud de desplazamiento.

23. Una persona emplea un dispositivo auditivo que aumenta uniformemente en 30 dB el nivel sonoro de todas las frecuencias audibles de sonido. El dispositivo capta sonido a una frecuencia de 250 Hz a una intensidad de 3.0×10^{-11} W/m^2. ¿Cuál es la intensidad aportada al tímpano?

24. La intensidad del sonido a una distancia de 16 m de un ruidoso generador es de 0.25 W/m^2. ¿Cuál es la intensidad sonora a una distancia de 28 m del generador?

25. La potencia de salida de cierta bocina pública es de 6.00 W. Suponga que transmite por igual en todas direcciones. (a) ¿Desde la bocina a qué distancia el sonido sería doloroso al oído? (b) ¿A qué distancia desde la bocina el sonido sería apenas audible?

26. Una onda sonora de una sirena policiaca tiene una intensidad de 100.0 W/m^2 en un cierto punto; una segunda onda sonora proveniente de una ambulancia cercana tiene un nivel de intensidad que es 10 dB mayor que el de la onda sonora de la sirena policiaca en el mismo punto. ¿Cuál es el nivel sonoro de la onda sonora de la ambulancia?

27. Un tren suena su silbato al aproximarse a una intersección. El silbato puede ser escuchado justamente en un nivel sonoro de 50 dB por un observador a 10 km de distancia. (a) ¿Cuál es la potencia promedio generada por el silbato? (b) ¿Qué nivel de intensidad del sonido del silbato es observado por alguien en la intersección a 50 m del tren? Trate al silbato como una fuente puntual y desprecie cualquier absorción de sonido por el aire.

28. Mientras la gente canta en la iglesia, el nivel sonoro en todas partes en el interior es de 101 dB. Ningún sonido se transmite a través de las grandes paredes, pero todas las ventanas y puertas están abiertas una mañana de verano. Su área total es de 22.0 m^2. (a) ¿Cuánta energía sonora es radiada a través de las ventanas y puertas en 20.0 min? (b) Suponga que el suelo es un buen reflector y que el sonido radia, desde la iglesia, uniformemente en todas las direcciones horizontales y verticales hacia arriba. Encuentre el nivel sonoro a 1.00 km de distancia.

29. La melodía vocal más excelsa está en la Misa en Si Menor de Johann Sebastian Bach. En una sección, los bajos, tenores, altos y sopranos llevan la melodía de Do bajo a La alto. En tono de concierto, a estas notas ahora se les asignan frecuencias de 146.8 Hz y 880.0 Hz. Encuentre las longitudes de onda de (a) la nota inicial y (b) la nota final. Suponga que el coro canta la melodía con un nivel sonoro uniforme de 75.0 dB. Determine las amplitudes de presión de (c) la nota inicial y (d) la nota final. Encuentre las amplitudes de desplazamiento de (e) la nota inicial y (f) la nota final.

30. Demuestre que la diferencia entre los niveles de decibeles b_1 y b_2 de un sonido se relaciona con la razón de las distancias r_1 y r_2 desde la fuente de sonido mediante

$$\beta_2 - \beta_1 = 20 \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

31. En un estadio cerrado se realiza un espectáculo familiar en hielo. Los patinadores actúan con música a un nivel de 80.0 dB. Este nivel es muy alto para su bebé, quien llora a 75.0 dB. (a) ¿Qué intensidad sonora total absorbe usted? (b) ¿Cuál es el nivel sonoro combinado?

32. Dos bocinas pequeñas emiten ondas sonoras de diferentes frecuencias por igual en todas direcciones. La bocina A tiene una salida de 1.00 mW y la bocina B tiene una salida de 1.50 mW. Determine el nivel sonoro (en decibeles) en el punto C de la figura P17.32, si supone que (a) sólo la bocina A emite sonido, (b) sólo la bocina B emite sonido y (c) ambas bocinas emiten sonido.

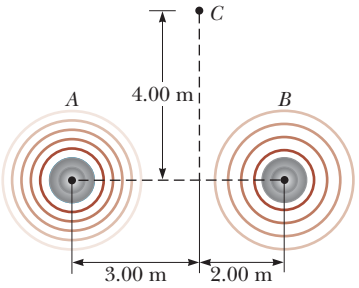


Figura P17.32

33. Una carga de explosivo se detona a muchos metros sobre el suelo. A una distancia $d_1 = 500$ m de la explosión la presión acústica alcanza un máximo de $\Delta P_{máx} = 10.0$ Pa (figura P17.33). Suponga que la rapidez del sonido es constante en 343 m/s a través de la atmósfera sobre la región considerada, que el suelo absorbe todo el sonido que cae en él y que el aire absorbe energía sonora, como se describe por la razón 7.00 dB/km. ¿Cuál es el nivel sonoro (en decibeles) a una distancia $d_2 = 4.00 \times 10^3$ m de la explosión?

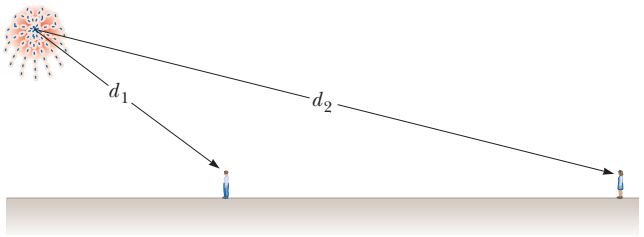


Figura P17.33

34. Un cohete explota a una altura de 100 m sobre el suelo. Un observador en el suelo, directamente debajo de la explosión, experimenta una intensidad sonora promedio de 7.00×10^{-2} W/m^2 durante 0.200 s. (a) ¿Cuál es la energía sonora total de la explosión? (b) ¿Cuál es el nivel sonoro (en decibeles) que escucha el observador?

35. El nivel sonoro a una distancia de 3.00 m de una fuente es 120 dB. ¿A qué distancia el nivel sonoro es de (a) 100 dB y (b) 10.0 dB?

36. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Temprano, un sábado en la mañana, y para su desagrado, su vecino adyacente decide cortar el césped. Cuando usted intenta dormir, su vecino del otro lado también comienza a cortar el césped con una podadora idéntica; ambos vecinos están a la misma distancia de usted. Esta situación le es

muy molesta, porque ahora el sonido total tiene el doble de sonoridad que cuando sólo un vecino corta el césped.

Sección 17.4 El efecto Doppler

37. Una ambulancia que se mueve a 42 m/s suena su sirena, cuya frecuencia es 450 Hz. Un auto se mueve en la misma dirección que la ambulancia a 25 m/s. ¿Qué frecuencia escucha una persona en el auto (a) cuando la ambulancia se aproxima al auto, y (b) después que la ambulancia pasa al auto?

38. Cuando partículas cargadas de alta energía se mueven a través de un medio transparente con una rapidez mayor que la rapidez de la luz en dicho medio se produce una onda de choque, u onda de proa, de luz. Este fenómeno se llama *efecto Cerenkov*. Cuando un reactor nuclear se blinda mediante una gran alberca de agua, la radiación Cerenkov puede verse como un brillo azul en la vecindad del núcleo del reactor debido a electrones de alta rapidez moviéndose a través del agua (figura 17.38). En un caso particular, la radiación Cerenkov produce un frente de onda con un semiángulo de vértice de 53.0°. Calcule la rapidez de los electrones en el agua. La rapidez de la luz en el agua es 2.25×10^8 m/s.


U.S. Department of Energy/Photo Researchers, Inc.

Figura P17.38

39. Un conductor viaja hacia el Norte sobre una autopista con una rapidez de 25.0 m/s. Una patrulla de caminos que viaja hacia el Sur con una rapidez de 40.0 m/s, se aproxima con su sirena funcionando a una frecuencia de 2 500 Hz. (a) ¿Qué frecuencia percibe el conductor mientras se aproxima la patrulla? (b) ¿Qué frecuencia detecta el conductor después que lo rebasa la patrulla? (c) Repita los incisos (a) y (b) para cuando la patrulla viaje hacia el Norte.

40. El submarino A viaja horizontalmente a 11.0 m/s a través del agua en el océano. Emite una señal de sonar de frecuencia $f = 5.27 \times 10^3$ Hz en la dirección hacia adelante. El submarino B está enfrente del submarino A y viaja a 3.00 m/s, respecto al agua, en la misma dirección que el submarino A. Un tripulante en el submarino B utiliza su equipo para detectar las ondas sonoras ("sonidos metálicos") del submarino A. Se desea determinar qué escucha el tripulante en el submarino B. (a) Un observador sobre qué submarino detecta una frecuencia f' como descrita por la ecuación 17.19? (b) En la ecuación 17.19, ¿el signo de v_S es positivo o negativo? (c) En la ecuación 17.19, ¿el signo de v_O es positivo o negativo? (d) En la ecuación 17.19, ¿qué rapidez de sonido debería emplearse? (e) Encuentre la frecuencia del sonido detectada por el tripulante en el submarino B.

41. **Problema de repaso.** Un bloque con una bocina atornillada a él se conecta a un resorte que tiene una constante de resorte $k = 20.0$ N/m y oscila, como se muestra en la figura P17.41. La masa total del bloque y la bocina es de 5.00 kg, y la amplitud de movimiento de esta unidad es 0.500 m. La bocina emite ondas sonoras de frecuencia 440 Hz. Determine (a) la frecuencia más alta y (b) la frecuencia más baja escuchadas por la persona a la derecha de la bocina. (c) Si el nivel sonoro máximo que escucha la persona es 60.0 dB cuando está más cerca de la bocina a una distancia $d = 1.00$ m, ¿cuál es el nivel sonoro mínimo que escucha el observador?

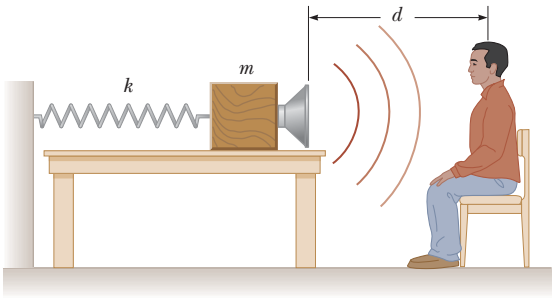


Figura P17.41 Problemas 41 y 42.

42. **Problema de repaso.** Un bloque con una bocina atornillada a él se conecta a un resorte que tiene una constante de resorte k y oscila, como se muestra en la figura P17.41. La masa total del bloque y la bocina es m, y la amplitud de movimiento de esta unidad es A. La bocina emite ondas sonoras de frecuencia f. Determine (a) la frecuencia más alta y (b) la frecuencia más baja escuchadas por la persona a la derecha de la bocina. (c) Si el nivel sonoro máximo que escucha la persona es β cuando está más cerca de la bocina a una distancia d, ¿cuál es el nivel sonoro mínimo que escucha el observador?

43. Unos padres expectantes están emocionados por escuchar el latido cardiaco de su bebé nonato, revelado por un detector ultrasónico que produce sonidos audibles en sincronización con el latido fetal. Suponga que la pared ventricular del feto realiza movimiento armónico simple con una amplitud de 1.80 mm y una frecuencia de 115 latidos por minuto. (a) Encuentre la rapidez máxima lineal de la pared cardiaca. Suponga que una fuente montada sobre el detector en contacto con el abdomen de la madre produce sonido a 2 000 000.0 Hz que viaja a través del tejido a 1.50 km/s. (b) Encuentre el máximo cambio en frecuencia entre el sonido que llega a la pared ventricular y el sonido emitido por la fuente. (c) Determine el máximo cambio en frecuencia entre el sonido reflejado recibido por el detector y el emitido por la fuente.

44. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* En los Juegos Olímpicos de Verano, una atleta corre con rapidez constante en línea recta mientras que un espectador cerca del extremo de la pista toca una nota con el silbato de frecuencia fija. Cuando la atleta rebasa el silbato, ella escucha que cae la frecuencia del silbato a la tercera menor. Es decir, la frecuencia que ella capta disminuye a cinco sextos de su valor original.

45. De pie en un crucero usted escucha una frecuencia de 560 Hz de la sirena de una ambulancia que se aproxima. Después que la ambulancia pasa, la frecuencia observada de la sirena es 480 Hz. Determine la rapidez de la ambulancia a partir de estas observaciones.

46. **Problema de repaso.** Un diapasón que vibra a 512 Hz cae desde el reposo y acelera a 9.80 m/s^2. ¿Qué tan abajo del punto de liberación se encuentra el diapasón cuando ondas de 485 Hz de frecuencia llegan al punto de liberación?

47. Un avión supersónico que viaja a Mach 3.00 a una altura de $h = 20\,000$ m está directamente arriba de una persona en el tiempo $t = 0$, como se muestra en la figura P17.47. Suponga que la rapidez promedio del sonido en aire es 335 m/s a lo largo de la trayectoria del sonido. (a) ¿En qué tiempo la persona encontrará la onda de choque debida al sonido emitido en $t = 0$? (b) ¿Dónde estará el avión cuando se escuche esta onda de choque?

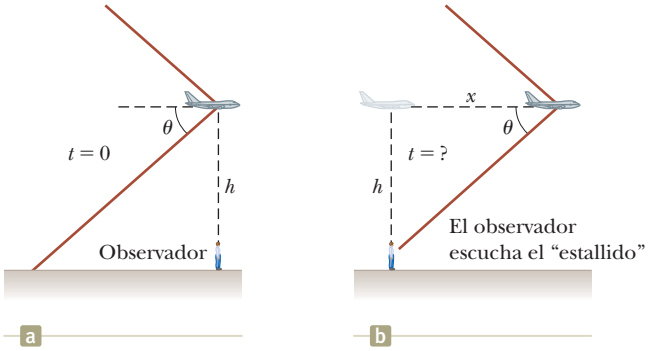


Figura P17.47

Problemas adicionales

48. Un murciélago (figura P17.48) puede detectar objetos muy pequeños, como un insecto cuya longitud es aproximadamente igual a una longitud de onda del sonido que el murciélago emite. Si un murciélago genera un chillido a una frecuencia de 60.0 kHz y la rapidez del sonido en aire es 340 m/s, ¿cuál es el insecto más pequeño que el murciélago puede detectar?


Hugh Lansdown/Shutterstock.com

Figura P17.48
Problemas 48 y 63.

49. Algunos estudios sugieren que el límite superior de frecuencia de audición está determinado por el diámetro del tímpano. El diámetro del tímpano es aproximadamente igual a la mitad de la longitud de onda de la onda sonora en este límite superior. Si esta relación es válida exactamente, ¿cuál es el diámetro del tímpano de una persona capaz de escuchar 20 000 Hz? (Suponga una temperatura corporal de 37.0°C.)

50. La nota más alta escrita para un cantante en una fuente publicada fue el Fa sostenido sobre Do alto, 1.480 kHz, para Zerbinetta en la versión original de la ópera de Richard Strauss *Ariadne auf Naxos*. (a) Encuentre la longitud de onda de este sonido en aire. (b) Suponga que las personas en la cuarta fila de asientos escuchan esta nota con un nivel de 81.0 dB. Encuentre la amplitud de desplazamiento del sonido. (c) **¿Qué pasaría si?** En respuesta a las quejas, Strauss transpuso la nota más baja a Fa sobre Do alto, 1.397 kHz. ¿En qué incremento cambió la longitud de onda?

51. Camiones que llevan basura al depósito municipal forman una procesión casi estable en un camino vecinal y todos viajan a 19.7 m/s en la misma dirección. Dos camiones llegan al depósito cada 3 min. Un ciclista también viaja hacia el depósito a 4.47 m/s. (a) ¿Con qué frecuencia los camiones pasan al ciclista? (b) **¿Qué pasaría si?** Una colina no frena a los camiones, pero el ciclista fuera de forma sí baja su rapidez a 1.56 m/s. ¿Con qué frecuencia los camiones pasan zumbando ahora al ciclista?

52. Si un vendedor afirma que una bocina le da 150 W, él se refiere a la entrada de potencia eléctrica máxima a la bocina. Suponga que una bocina con una potencia de entrada de 150 W produce sonido con un nivel de 103 dB a una distancia de 1.60 m desde su centro. (a) Encuentre su potencia sonora de salida. (b) Determine la eficiencia de la bocina, es decir, la fracción de potencia de entrada que se convierte en potencia de salida útil.

53. Una autopista interestatal se construyó a través de un vecindario en una ciudad. En la tarde, el nivel sonoro en un departamento en el vecindario es 80.0 dB cuando 100 autos pasan afuera de la ventana cada minuto. En la madrugada, el flujo de tráfico es sólo de cinco autos por minuto. ¿Cuál es el nivel sonoro promedio en la madrugada?

54. El silbato de un tren ($f = 400$ Hz) suena más alto o más bajo en frecuencia, dependiendo de si se aproxima o se aleja. (a) Demuestre que la diferencia en frecuencia del silbato, si se acerca o se aleja, es

$$\Delta f = \frac{2u/v}{1 - u^2/v^2} f$$

donde u es la rapidez del tren y v es la rapidez del sonido. (b) Calcule esta diferencia para un tren moviéndose con una rapidez de 130 km/h. Considere que la rapidez del sonido en aire es 340 m/s.

55. Una cinta ultrasónica para medir utiliza frecuencias arriba de 20 MHz para determinar dimensiones de estructuras como edificios. Hace la medición al emitir un pulso de ultrasonido en el aire y después mide el intervalo de tiempo para que retorne el eco desde una superficie reflectora cuya distancia es el objetivo a determinar. La distancia se exhibe como una lectura digital. Para una cinta ultrasónica que emite un pulso de ultrasonido con una frecuencia de 22.0 MHz, (a) ¿cuál es la distancia a un objeto desde el cual el eco retorna después de 24.0 ms cuando la temperatura del aire es 26°C? (b) ¿Cuál debería ser la duración del pulso emitido si debe incluir diez ciclos de la onda ultrasónica? (c) ¿Cuál es la longitud espacial de tal pulso?

56. El esfuerzo de tensión en una gruesa barra de cobre es 99.5% de su punto de rompimiento elástico de 13.0×10^{10} N/m^2. Si una onda sonora de 500 Hz es transmitida a través del material, (a) ¿qué amplitud de desplazamiento hará que se rompa la barra? (b) ¿Cuál es la máxima rapidez de los elementos de cobre en este momento? (c) ¿Cuál es la intensidad sonora en la barra?

57. **Problema de repaso.** Un deslizador de 150 g se mueve a $v_1 = 2.30$ m/s sobre un riel de aire hacia un deslizador de 200 g originalmente estacionario, como se muestra en la figura P17.57. Los deslizadores experimentan una colisión completamente inelástica y quedan unidos durante un intervalo de tiempo de 7.00 ms. Un estudiante sugiere que aproximadamente la mitad de la energía mecánica perdida del sistema de dos deslizadores se transfiere al ambiente en forma de sonido. ¿Esta sugerencia es razonable? Para evaluar la idea, encuentre el nivel sonoro implicado en una posición a 0.800 m de los deslizadores. Si la idea del estudiante no es razonable, sugiera una mejor idea.

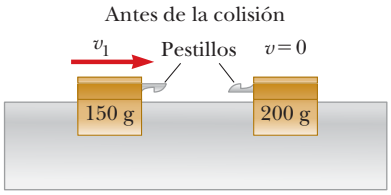


Figura P17.57

58. Considere la siguiente función de onda en unidades SI:

$$\Delta P(r, t) = \left(\frac{25.0}{r}\right) \text{sen}\,(1.36r - 2\,030t)$$

Explique cómo esta función de onda puede aplicarse a una onda que radia desde una fuente pequeña, con r como la distancia radial desde el centro de la fuente hasta cualquier punto afuera de la fuente. Dé la descripción más detallada que pueda de la onda. Incluya respuestas a preguntas como las siguientes y dé valores representativos para cualesquiera cantidades que puedan ser evaluadas. (a) ¿La onda se mueve más hacia la derecha o la izquierda? (b) Mientras se aleja de la fuente, ¿qué sucede con su amplitud?, (c) ¿su rapidez?, (d) ¿su frecuencia?, (e) ¿su longitud de onda?, (f) ¿su potencia?, (g) ¿su intensidad?

59. **Problema de repaso.** Para un cierto tipo de acero, el esfuerzo siempre es proporcional a la deformación con módulo de Young 20×10^{10} N/m^2. El acero tiene densidad 7.86×10^3 kg/m^3. Quedará permanentemente doblado si se somete a un esfuerzo compresivo mayor que su límite elástico $\sigma_y = 400$ MPa. Una barra de 80.0 cm de largo, hecha de este acero, se dispara a 12.0 m/s directo a una pared muy dura. (a) La rapidez de una onda compresiva unidimensional móvil a lo largo de la barra está dada por $v = \sqrt{Y/\rho}$, donde Y es el módulo de Young para la barra y ρ es la densidad. Calcule esta rapidez. (b) Después que el extremo frontal de la barra golpea la pared y se detiene, el extremo posterior de la barra sigue en movimiento como es descrito por la primera ley de Newton hasta que se detiene por presión excesiva en una onda sonora móvil de regreso a través de la barra. ¿Qué intervalo de tiempo transcurre antes que el extremo posterior de la barra reciba el mensaje de que debe detenerse? (c) ¿Cuánto se movió el extremo posterior de la barra en este intervalo de tiempo? Encuentre (d) la deformación y (e) el esfuerzo en la barra. (f) Si no debe fallar, ¿cuál es la máxima rapidez de impacto que un barra puede tener, en términos de σ_y, Y y ρ?

60. Un gran conjunto de gradas de futbol desocupadas tiene asientos sólidos y elevadores. Usted está de pie en el campo enfrente de las gradas y aplaude bruscamente una vez con dos tableros de madera. El pulso sonoro que produce no tiene frecuencia ni longitud de onda definidas. El sonido que escucha reflejado de las gradas tiene una frecuencia identificable y puede recordarle una breve nota de trompeta, de un zumbador o flauta de un solo agujero. (a) Explique este sonido. Calcule una estimación del orden de magnitud para (b) la frecuencia, (c) la longitud de onda y (d) la duración del sonido sobre la base de los datos que especifique.

61. Para medir su rapidez, una paracaidista porta un zumbador que emite un tono estable a 1 800 Hz. Un amigo ubicado en el suelo en el sitio de aterrizaje directamente abajo escucha el sonido amplificado que recibe. Suponga que el aire está tranquilo y que la rapidez del sonido es independiente de la altitud. Mientras la paracaidista cae con rapidez terminal, su amigo en el suelo recibe ondas de frecuencia 2 150 Hz. (a) ¿Cuál es la rapidez de descenso de la paracaidista? (b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que la paracaidista puede escuchar el sonido del zumbador reflejado del suelo. ¿Qué frecuencia recibe ella?

62. Ondas esféricas con 45.0 cm de longitud de onda se propagan hacia fuera de una fuente puntual. (a) Explique cómo la intensidad a una distancia de 240 cm se compara con la intensidad a una distancia de 60.0 cm. (b) Explique cómo la amplitud a una distancia de 240 cm se compara con la amplitud a una distancia de 60.0 cm. (c) Explique cómo la fase de la onda a una distancia de 240 cm se compara con la fase a 60.0 cm en el mismo momento.

63. Un murciélago (figura P17.48) que se mueve a 5.00 m/s persigue a un insecto volador. Si el murciélago emite un chillido de 40.0 kHz y recibe de vuelta un eco a 40.4 kHz, (a) ¿cuál es la rapidez del insecto? (b) ¿El murciélago podrá capturar al insecto? Explique.

64. Dos barcos se mueven a lo largo de una línea hacia el Este (figura P17.64). El buque trasero tiene una rapidez, relativa a un punto de observación con base en tierra, de $v_1 = 64.0$ km/h y el buque delantero tiene una rapidez de $v_2 = 45.0$ km/h relativa a ese punto. Los dos barcos están en una región del océano donde el movimiento de la corriente es uniforme hacia el Oeste a $v_{\text{corriente}} = 10.0$ km/h. El barco trasero transmite una señal de sonar a una frecuencia de 1 200 Hz a través del agua. ¿Qué frecuencia monitorea el barco delantero?



Figura P17.64

65. Una patrulla viaja hacia el Este a 40.0 m/s a lo largo de un camino recto y rebasa a un automóvil delante de ella que se mueve al Este a 30.0 m/s. A la patrulla se le descompone la sirena, que se pega a 1 000 Hz. (a) ¿Cuál sería la longitud de onda en el aire del sonido de la sirena si la patrulla estuviera en reposo? (b) ¿Cuál es la longitud de onda enfrente de la patrulla? (c) ¿Cuál es detrás de la patrulla?

(d) ¿Cuál es la frecuencia que escucha el conductor que es perseguido?

66. La rapidez de una onda compresiva unidimensional que viaja a lo largo de una barra delgada de cobre es 3.56 km/s. En un extremo de la barra se da un golpe con un martillo. Un escucha en el otro extremo de la barra capta el sonido dos veces, transmitido a través del metal y a través del aire, con un intervalo de tiempo Δt entre los dos pulsos. (a) ¿Cuál sonido llega primero? (b) Encuentre la longitud de la barra como una función de Δt. (c) Determine la longitud de la barra si $\Delta t = 127$ ms. (d) Imagine que la barra de cobre se sustituye por otro material a través del cual la rapidez del sonido es v_r. ¿Cuál es la longitud de la barra en términos de t y v_r? (e) ¿La respuesta al inciso (d) tiene un límite bien definido si la rapidez del sonido en la barra tiende a infinito? Explique su respuesta.

67. Un gran meteoroide entra a la atmósfera de la Tierra con un rapidez de 20.0 km/s y no se frena significativamente antes de entrar al océano. (a) ¿Cuál es el ángulo de Mach de la onda de choque del meteoroide en la atmósfera baja? (b) Si se supone que el meteoroide sobrevive al impacto con la superficie del océano, ¿cuál es el ángulo de Mach (inicial) de la onda de choque que produce el meteoroide en el agua?

68. Tres barras metálicas se ubican entre sí como lo muestra la figura P17.68, donde $L_3 = L_1 + L_2$. La rapidez del sonido en una barra está dada por $v = \sqrt{Y/\rho}$, donde Y es el módulo de Young para la barra y ρ es la densidad. Los valores de densidad y módulo de Young para los tres materiales son $\rho_1 = 2.70 \times 10^3$ kg/m^3, $Y_1 = 7.00 \times 10^{10}$ N/m^2, $\rho_2 = 11.3 \times 10^3$ kg/m^3, $Y_2 = 1.60 \times 10^{10}$ N/m^2, $\rho_3 = 8.80 \times 10^3$ kg/m^3 y $Y_3 = 11.0 \times 10^{10}$ N/m^2. Si $L_3 = 1.50$ m, ¿cuánto debe ser la razón L_1/L_2 si una onda sonora viaja la longitud de las barras 1 y 2 en el mismo intervalo de tiempo requerido para que la onda viaje la longitud de la barra 3?

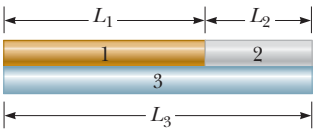


Figura P17.68

69. Con métodos experimentales particulares es posible producir y observar en una larga barra delgada tanto una onda transversal, cuya rapidez depende principalmente de la tensión en la barra, como una onda longitudinal, cuya rapidez está determinada por el módulo de Young y la densidad del material de acuerdo con la expresión $v = \sqrt{Y/\rho}$. La onda transversal se puede modelar como una onda en una cuerda estirada. Una barra metálica particular tiene 150 cm de largo y un radio de 0.200 cm y una masa de 50.9 g. El módulo de Young para el material es 6.80×10^{10} N/m^2. ¿Cuál debe ser la tensión en la barra si la razón de la rapidez de las ondas longitudinales a la rapidez de las ondas transversales es 8.00?

70. Una sirena montada en el techo de una estación de bomberos emite sonido con una frecuencia de 900 Hz. Un viento estable sopla con una rapidez de 15.0 m/s. Si considera que la rapidez del sonido en aire tranquilo es de 343 m/s, encuentre la longitud de onda del sonido (a) de la sirena a favor del viento y (b) de la sirena contra el viento. Los bomberos se aproximan a la sirena desde diferentes direcciones a 15.0 m/s. ¿Qué frecuencia escucha un bombero (c) si se aproxima desde una posición a favor del viento, de modo que se mueve en la dirección en que el viento sopla, y (d) si se aproxima desde una posición contraria al viento?

Problemas de desafío

71. La ecuación Doppler que se presentó en el texto es válida cuando el movimiento entre el observador y la fuente se presenta en línea recta, de modo que la fuente y el observador se mueven directamente uno hacia el otro o directamente uno alejándose del otro. Si esta restricción se relaja, uno debe usar la ecuación Doppler más general

$$f' = \left(\frac{v + v_O \cos\theta_O}{v - v_S \cos\theta_S}\right) f$$

donde θ_O y θ_S se definen en la figura P17.71a. Use la ecuación precedente para resolver el siguiente problema. Un tren se mueve con una rapidez constante de $v = 25.0$ m/s hacia la intersección que se muestra en la figura P17.71b. Un automóvil se detiene cerca del cruce, a 30.0 m de las vías. Si el silbato del tren emite una frecuencia de 500 Hz cuando el tren está a 40.0 m de la intersección. (a) ¿Cuál es la frecuencia que escuchan los pasajeros en el automóvil? (b) Si el tren emite este sonido continuamente y el auto está estable en esta posición antes de que el tren llegue y hasta que el tren se aleja, ¿qué rango de frecuencias escuchan los pasajeros en el automóvil? (c) Suponga que el auto tontamente quiere ganarle el paso al tren en la intersección y que viaja a 40.0 m/s hacia las vías. Cuando el automóvil está a 30.0 m de las vías y el tren está a 40.0 m de la intersección, ¿cuál es la frecuencia que ahora escuchan los pasajeros en el auto?

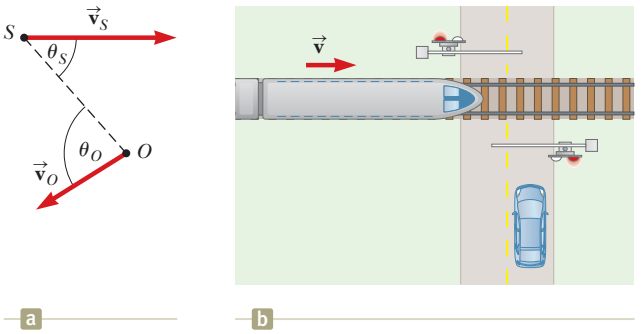


Figura P17.71

72. En la sección 17.2 se dedujo la rapidez del sonido en un gas mediante el teorema impulso-momento aplicado al cilindro de gas en la figura 17.5. Ahora se encontrará la rapidez del sonido en un gas empleando un distinto enfoque basado en el elemento de gas en la figura 17.3. Proceda como sigue. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para este elemento que muestre las fuerzas ejercidas sobre las superficies izquierda y derecha debidas a la presión del gas sobre cualquier lado del elemento. (b) Aplique la segunda ley de Newton al elemento para demostrar que

$$-\frac{\partial(\Delta P)}{\partial x} A\,\Delta x = \rho A\,\Delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

(c) Sustituya $\Delta P = -(B\,\partial s/\partial x)$ (ecuación 17.3) y obtenga la siguiente ecuación de onda para el sonido

$$\frac{B}{\rho}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

(d) Para un físico matemático esta ecuación demuestra la existencia de ondas sonoras y determina su rapidez. Como estudiante de física usted debe dar otro paso o dos. Sustituya en la ecuación de onda la solución de prueba $s(x, t) = s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$. Demuestre que esta función satisface la ecuación de onda, siempre que $\omega/k = v = \sqrt{B/\rho}$.

73. La ecuación 17.13 afirma que a una distancia r de una fuente puntual con potencia $(Potencia)_{\text{prom}}$, la intensidad de onda es

$$I = \frac{(Potencia)_{\text{prom}}}{4\pi r^2}$$

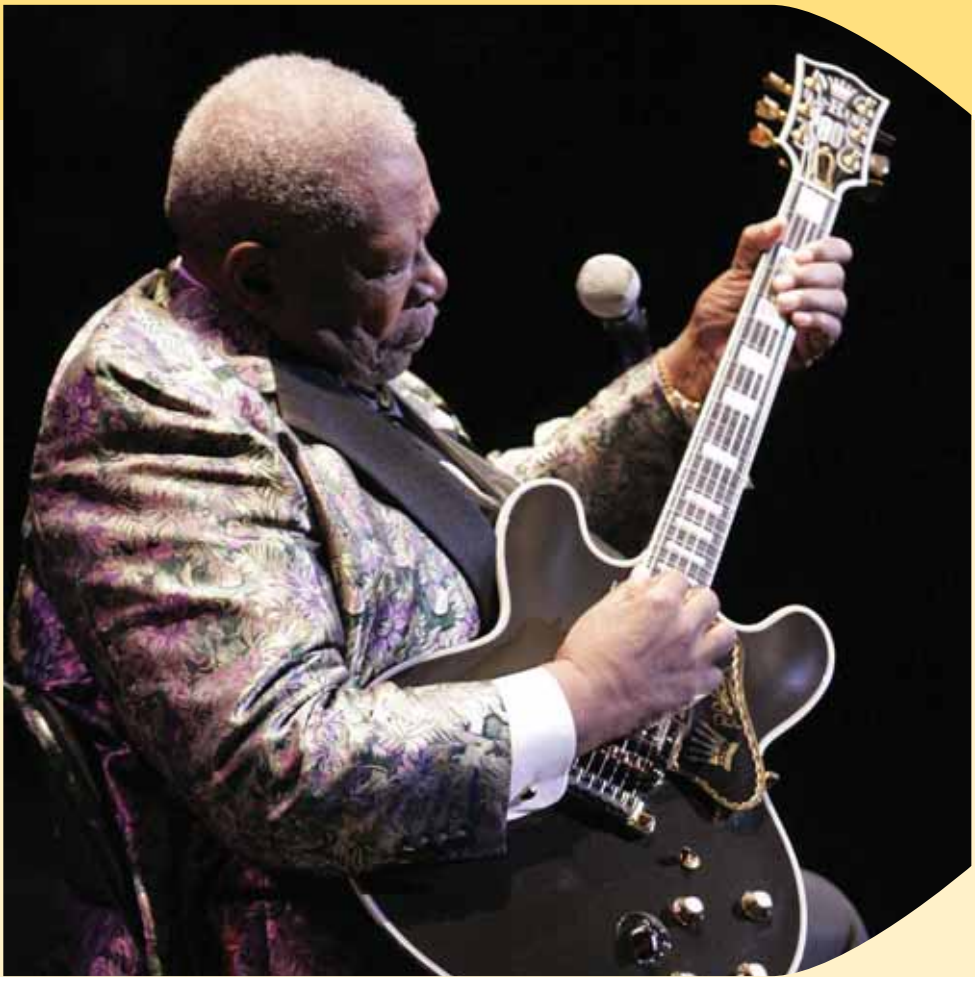
Estudie la figura 17.10 y demuestre que a una distancia r justo enfrente de una fuente puntual con potencia $(Potencia)_{\text{prom}}$ que se mueve con rapidez constante v_S, la intensidad de onda es

$$I = \frac{(Potencia)_{\text{prom}}}{4\pi r^2}\left(\frac{v - v_S}{v}\right)$$

CAPÍTULO

18

Sobreposición y ondas estacionarias



18.1 Análisis de modelo: ondas en interferencia

18.2 Ondas estacionarias

18.3 Análisis de modelo: ondas bajo condiciones de frontera

18.4 Resonancia

18.5 Ondas estacionarias en columnas de aire

18.6 Ondas estacionarias en barras y membranas

18.7 Batimientos: interferencia en el tiempo

18.8 Patrones de onda no sinusoidales

El maestro del blues, B. B. King, aprovecha las ondas estacionarias en cuerdas. Cambia a notas más altas en la guitarra presionando las cuerdas contra los trastes en el diapasón, acortando la longitud de las partes de las cuerdas que vibran. *(AP Photo/Danny Moloshok)*

El modelo ondulatorio se introdujo en los dos capítulos anteriores. Se vio que las ondas son muy diferentes de las partículas. Una partícula es de tamaño cero, mientras que una onda tiene un tamaño característico, su longitud de onda. Otra diferencia importante entre ondas y partículas es que se puede explorar la posibilidad de dos o más ondas combinadas en un punto en el mismo medio. Las partículas se combinan para formar objetos extendidos, pero las partículas deben estar en *diferentes* posiciones. En cambio, dos ondas pueden estar presentes en la misma posición. Las ramificaciones de esta posibilidad se exploran en este capítulo.

Cuando las ondas se combinan en sistemas con condiciones de frontera pueden existir sólo ciertas frecuencias permitidas y decimos que las frecuencias están *cuantizadas*. La cuantización es un concepto que está en el corazón de la mecánica cuántica, un tema que se tratará formalmente en el capítulo 40. Aquí se demuestra que el análisis de ondas bajo condiciones de frontera explica muchos de los fenómenos cuánticos. En este capítulo se usa la cuantización para comprender el comportamiento de la amplia variedad de instrumentos musicales que se basan en cuerdas y columnas de aire.

También se considera la combinación de ondas que tienen diferentes frecuencias. Cuando interfieren dos ondas sonoras que tienen casi la misma frecuencia, se escuchan variaciones

en el volumen llamadas batimientos. Por último, se analiza cómo cualquier onda periódica no sinusoidal se puede describir como una suma de funciones seno y coseno.

18.1 Análisis de modelo: ondas en interferencia

Muchos fenómenos ondulatorios interesantes en la naturaleza no se pueden describir mediante una sola onda viajera. En vez de ello se debe analizar estos fenómenos en términos de una combinación de ondas viajeras. Como se señaló en la introducción, las ondas tienen una diferencia notable de las partículas, que consiste en que las ondas se pueden combinar en el *mismo* lugar en el espacio. Para analizar tales combinaciones de onda hacemos uso del **principio de sobreposición**:

Principio de sobreposición

> Si dos o más ondas viajeras se mueven a través de un medio, el valor resultante de la función de onda en cualquier punto es la suma algebraica de los valores de las funciones de onda de las ondas individuales.

Las ondas que obedecen a este principio se llaman *ondas lineales* (vea la sección 16.6). En el caso de ondas mecánicas, las ondas lineales generalmente se caracterizan por tener las amplitudes mucho menores que sus longitudes de onda. Las ondas que violan el principio de sobreposición se llaman *ondas no lineales* y con frecuencia se caracterizan por grandes amplitudes. En este libro sólo se tratará con ondas lineales.

Prevención de riesgos ocultos 18.1

¿Las ondas realmente *interfieren*? En el uso popular el término *interferir* implica que un agente afecta una situación en alguna forma, de modo que evita que algo ocurra. Por ejemplo, en el futbol americano, *interferencia de pase* significa que un jugador defensivo afectó al receptor de modo que el receptor fue incapaz de atrapar el balón. Este uso es muy diferente del dado en física, donde las ondas pasan una a través de otra e interfieren, pero no se afectan mutuamente en forma alguna. En física, interferencia es similar al *concepto* de *combinación*, como se describe en este capítulo.

Una consecuencia del principio de la sobreposición es que dos ondas viajeras pueden pasar a través de la otra sin destruirse o alterarse. Por ejemplo, cuando se lanzan dos piedras en un estanque y golpean la superficie en diferentes lugares, las ondas circulares superficiales que se expanden desde dos ubicaciones simplemente pasan una sobre otra sin efecto permanente. El patrón complejo resultante se puede considerar como dos conjuntos independientes de círculos en expansión.

La figura 18.1 es una representación pictórica de la sobreposición de dos pulsos. La función de onda para el pulso móvil hacia la derecha es y_1, y la función de onda para el pulso moviéndose hacia la izquierda es y_2. Los pulsos tienen la misma rapidez pero diferentes formas, y el desplazamiento de los elementos del medio está en la dirección y positiva para ambos pulsos. Cuando las ondas se traslapan (figura 18.1b), la función de onda de la onda compleja resultante está dada por $y_1 + y_2$. Cuando las crestas de los pulsos coinciden (figura 18.1c), la onda resultante dada por $y_1 + y_2$ tiene una amplitud mayor que la de los pulsos individuales. Finalmente, los dos pulsos se separan y se continúan moviendo en sus direcciones originales (figura 18.1d). Advierta que las formas de pulso permanecen sin cambios después de la interacción, ¡como si los dos pulsos no se hubiesen encontrado!

La combinación de ondas separadas en la misma región del espacio para producir una onda resultante se denomina **interferencia**. Para los dos pulsos que se muestran en la figura 18.1, el desplazamiento de los elementos del medio está en la dirección y positiva para ambos pulsos, y el pulso resultante (creado cuando se sobreponen los pulsos individuales) presenta una amplitud mayor que la de cualquier pulso individual. Ya que los desplazamientos causados por los dos pulsos están en la misma dirección, nos referimos a está sobreposición como **interferencia constructiva**.

Interferencia constructiva

Ahora considere dos pulsos que viajan en direcciones opuestas en una cuerda tensa donde un pulso se invierte en relación con el otro, como se ilustra en la figura 18.2. Cuando estos pulsos se sobreponen, el pulso resultante está dado por $y_1 + y_2$, pero los valores de la función y_2 son negativos. Otra vez, los dos pulsos pasan uno a través del otro; sin embargo, ya que los desplazamientos causados por los dos pulsos están en direcciones opuestas, nos referimos a su sobreposición como **interferencia destructiva**.

Interferencia destructiva

El principio de la sobreposición es el tema central del análisis de modelo llamado **ondas en interferencia**. En muchas situaciones, tanto en acústica como en óptica, las ondas se combinan de acuerdo con este principio y presentan fenómenos interesantes con aplicaciones prácticas.

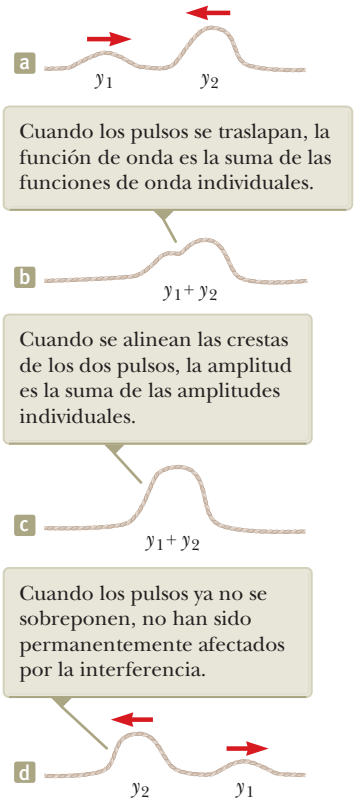


Figura 18.1 Interferencia constructiva. Dos pulsos positivos viajan sobre una cuerda estirada en direcciones opuestas y se traslapan.

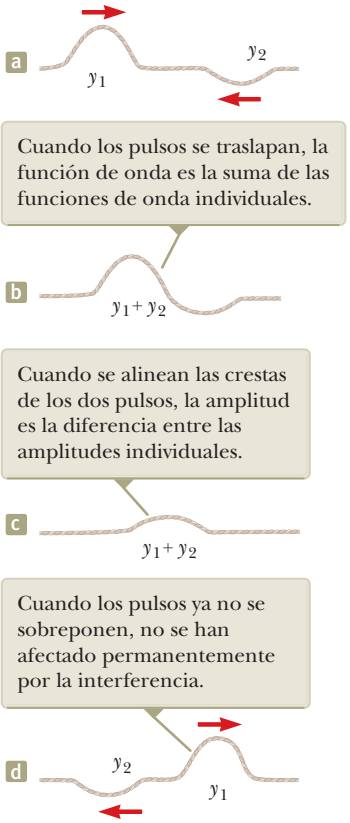


Figura 18.2 Interferencia destructiva. Dos pulsos, uno positivo y uno negativo, viajan sobre una cuerda estirada en direcciones opuestas y se traslapan.

Examen rápido 18.1 Dos pulsos se mueven en direcciones opuestas sobre una cuerda y son idénticos en forma, excepto que uno tiene desplazamientos positivos de los elementos de la cuerda y el otro tiene desplazamientos negativos. En el momento en que los dos pulsos se traslapan por completo en la cuerda, ¿qué sucede? **(a)** La energía asociada con los pulsos desaparece. **(b)** La cuerda no es móvil. **(c)** La cuerda forma una línea recta. **(d)** Los pulsos desaparecen y no reaparecerán.

Sobreposición de ondas sinusoidales

Ahora se aplicará el principio de sobreposición de dos ondas sinusoidales viajando en la misma dirección en un medio lineal. Si las dos ondas están viajando hacia la derecha y tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, pero difieren en fase, podemos expresar sus funciones de onda individuales como

$$y_1 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad y_2 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)$$

donde, como de costumbre, $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi f$, y ϕ es la constante de fase, como se analizó en la sección 16.2. Por lo tanto, la función de onda resultante es

$$y = y_1 + y_2 = A\,[\operatorname{sen}(kx - \omega t) + \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)]$$

Para simplificar esta expresión, utilizamos la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \cos\left(\frac{a - b}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

Haciendo $a = kx - \omega t$ y $b = kx - \omega t + \phi$, encontramos que la función de onda resultante y se reduce a

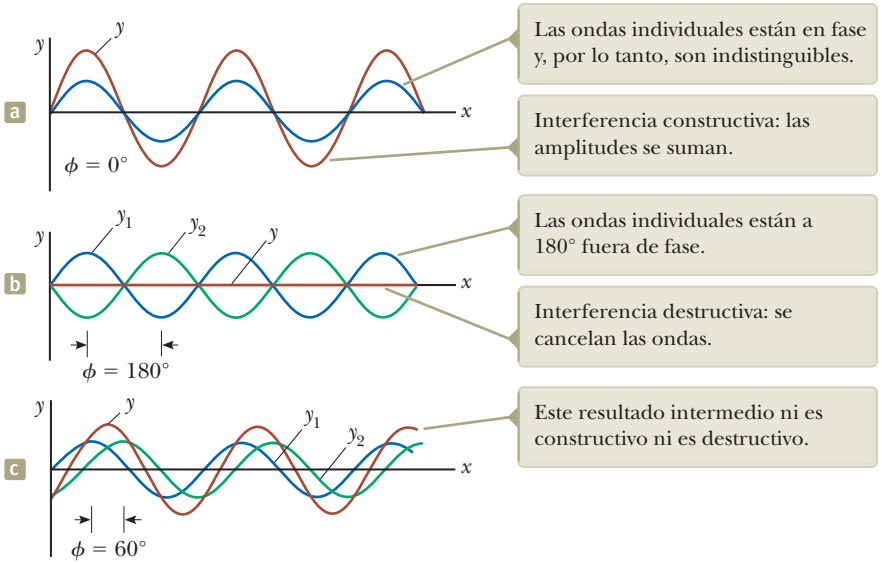


Figura 18.3 La sobreposición de dos ondas idénticas y_1 y y_2 (azul y verde, respectivamente) para producir una onda resultante (café).

Resultante de dos ondas sinusoidales viajeras ▶

$$y = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Este resultado tiene varias características importantes. La función de onda resultante y también es sinusoidal y tiene la misma frecuencia y longitud de onda que las ondas individuales debido a que la función seno incorpora los mismos valores de k y ω que aparecen en las funciones de onda originales. La amplitud de la onda resultante es $2A\cos(\phi/2)$, y su constante de fase es $\phi/2$. Si la constante de fase ϕ de la onda original es igual a 0, entonces $\cos(\phi/2) = \cos 0 = 1$ y la amplitud de la onda resultante es $2A$, dos veces la amplitud de cada onda individual. En este caso las crestas de las dos ondas están en las mismas ubicaciones en el espacio y se dice que las ondas están *en fase* en todas partes y, por lo tanto, interfieren constructivamente. Las ondas individuales y_1 y y_2 se combinan para formar la curva rojo marrón y de amplitud $2A$ que se muestra en la figura 18.3a. Puesto que las ondas individuales están en fase, son indistinguibles en la figura 18.3a, donde aparecen como una sola curva azul. En general, se produce interferencia constructiva cuando $\cos(\phi/2) = \pm 1$. Esto es cierto, por ejemplo, cuando $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ rad, es decir, cuando ϕ es un múltiplo *par* de π.

Cuando ϕ es igual a π rad o cualquier múltiplo *impar* de π, entonces $\cos(\phi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ y las crestas de una onda se producen en las mismas posiciones que los valles de la segunda onda (figura 18.3b). Por lo tanto, como consecuencia de la interferencia destructiva la onda resultante tiene amplitud cero en todas partes, como se muestra con la línea recta rojo marrón en la figura 18.3b. Por último, cuando la constante de fase tiene un valor distinto de 0 o un múltiplo entero arbitrario de π rad (figura 18.3c), la onda resultante tiene una amplitud cuyo valor está entre 0 y $2A$.

En el caso más general, en el cual las ondas tienen la misma longitud de onda pero diferentes amplitudes, los resultados son similares con las siguientes excepciones. En el caso en fase, la amplitud de la onda resultante no es dos veces el de una sola onda, sino más bien es la suma de las amplitudes de las dos ondas. Cuando las ondas están π rad fuera de fase, no se cancelan completamente, como en la figura 18.3b. El resultado es una onda cuya amplitud es la diferencia entre las amplitudes de las ondas individuales.

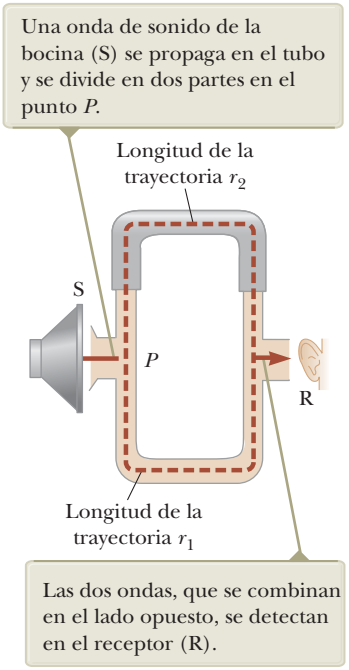


Figura 18.4 Un sistema acústico para la demostración de interferencia de ondas sonoras. Puede variar la trayectoria superior de longitud r_2 deslizando la parte superior.

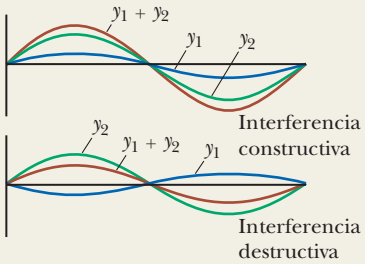
Interferencia de ondas sonoras

En la figura 18.4 se muestra un dispositivo simple para demostrar la interferencia de las ondas sonoras. El sonido de una bocina S se envía en un tubo en el punto P, donde hay una unión en forma de T. La mitad de la energía sonora viaja en

una dirección, y la otra mitad viaja en la dirección opuesta. Por lo tanto, las ondas sonoras que alcanzan el receptor R pueden viajar a lo largo de cualquiera de los dos caminos. La distancia a lo largo de cualquier camino de la bocina al receptor se llama la **longitud de trayectoria** r. El camino inferior de longitud r_1 es fijo, pero puede variar la trayectoria superior de longitud r_2 deslizando el tubo en forma de U, que es similar al de un trombón. Cuando la diferencia en las longitudes de la trayectoria $\Delta r = |r_2 - r_1|$ es entero o cero o un múltiplo de la longitud de onda λ (es decir, $\Delta r = n\lambda$, donde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$), las dos ondas que llegan al receptor en cualquier instante están en fase e interfieren constructivamente, como se muestra en la figura 18.3a. Para este caso, un máximo en la intensidad del sonido se detecta en el receptor. Si la longitud de trayectoria r_2 se ajusta de tal modo que la diferencia de trayectoria $\Delta r = \lambda/2, 3\lambda/2, \ldots, n\lambda/2$ (para n impar), las dos ondas están exactamente a π rad o 180° fuera de fase en el receptor y, por lo tanto, se anulan mutuamente. En este caso de interferencia destructiva, ningún sonido se detecta en el receptor. Este sencillo experimento demuestra que puede surgir una diferencia de fase entre dos ondas generadas por la misma fuente cuando viajan a través de senderos de longitudes desiguales. Este importante fenómeno será indispensable en la investigación de interferencia de ondas luminosas en el capítulo 37.

Análisis de modelo Ondas en interferencia

Imagine dos ondas que viajan en el mismo lugar a través de un medio. El desplazamiento de los elementos del medio se ve afectado por dos ondas. De acuerdo con el **principio de sobreposición**, el desplazamiento es la suma de los desplazamientos individuales que podría ser causado por cada onda. Cuando las ondas están en fase, se produce **interferencia constructiva** y el desplazamiento resultante es más grande que los desplazamientos individuales. Se produce **interferencia destructiva** cuando las ondas están desfasadas.



Ejemplos:

- un afinador de pianos escucha una cuerda de piano y un diapasón vibrando juntos y observa los pulsos (sección 18.7)
- se combinan ondas de luz de dos fuentes coherentes para formar un patrón de interferencia en una pantalla (capítulo 37)
- una delgada película de aceite sobre agua muestra remolinos de color (capítulo 37)
- los rayos X pasando a través de un sólido cristalino se combinan para formar un patrón de Laue (capítulo 38)

Ejemplo 18.1 Dos bocinas accionadas por la misma fuente AM

Dos bocinas idénticas colocadas con una separación de 3.00 m son accionadas por el mismo oscilador (figura 18.5). Un escucha está originalmente en el punto O, situado a 8.00 m del centro de la recta que conecta a las dos bocinas. Luego el escucha se traslada al punto P, que está a una distancia perpendicular de 0.350 m de O, y experimenta el *primer mínimo* de intensidad del sonido. ¿Cuál es la frecuencia del oscilador?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 18.4 una onda sonora entra en un tubo y después se divide *acústicamente* en dos trayectorias diferentes antes de recombinarse en el otro extremo. En este ejemplo, una señal que representa el sonido está *eléctricamente* dividida y sale a dos bocinas diferentes. Después de salir de los altavoces, las ondas sonoras se recombinan en la posición del escucha. A pesar de la diferencia en cómo se produce la división, en este caso se aplica la explicación de la diferencia de trayectoria vista en la figura 18.4.

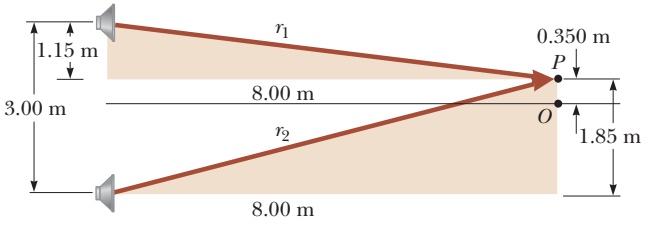


Figura 18.5 (Ejemplo 18.1) Dos bocinas idénticas emiten ondas sonoras para un escucha en P.

Categorizar Ya que las ondas sonoras de dos fuentes separadas se combinan, aplicamos el análisis de modelo de *ondas en interferencia*.

continúa

18.1 continuación

Analizar La figura 18.5 muestra la disposición física de las bocinas junto con dos triángulos rectángulos sombreados que pueden dibujarse sobre la base de las longitudes descritas en el problema. El primer mínimo se produce cuando las dos ondas que llegan al escucha en el punto P están a 180° fuera de fase, en otras palabras, cuando su diferencia de trayectoria Δr es igual a $\lambda/2$.

A partir de los triángulos sombreados, determine las longitudes de trayectoria de las bocinas al escucha:

$$r_1 = \sqrt{(8.00\ \text{m})^2 + (1.15\ \text{m})^2} = 8.08\ \text{m}$$

$$r_2 = \sqrt{(8.00\ \text{m})^2 + (1.85\ \text{m})^2} = 8.21\ \text{m}$$

Por eso, la diferencia de trayectoria es $r_2 - r_1 = 0.13$ m. Ya que esta diferencia de trayectoria debe ser igual a $\lambda/2$ para el primer mínimo, $\lambda = 0.26$ m.

Para obtener la frecuencia del oscilador utilice la ecuación 16.12, $v = \lambda f$, donde v es la rapidez del sonido en el aire, 343 m/s:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343\ \text{m/s}}{0.26\ \text{m}} = 1.3\ \text{kHz}$$

Finalizar Este ejemplo permite entender por qué se deben conectar correctamente los alambres de un sistema estéreo de bocinas. Cuando se conectan al revés, es decir, cuando el cable positivo (o rojo) está conectado al borne negativo (o negro) en una de las bocinas y la otra está conectada correctamente, se dice que las bocinas están "fuera de fase", con una bocina moviéndose hacia fuera, mientras que la otra se mueve hacia el interior. En consecuencia, la onda sonora que proviene de una bocina interfiere destructivamente con la onda proveniente de la otra en el punto O de la figura 18.5. Una región de enrarecimiento debida a una bocina se sobrepone a una región de compresión de la otra bocina. Aunque los dos sonidos probablemente no se cancelan totalmente entre sí (porque generalmente no son idénticas las señales estereofónicas derecha e izquierda), se presenta una pérdida sustancial de la calidad sonora en el punto O.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si las bocinas se conectaran fuera de fase? ¿Qué sucede en el punto P en la figura 18.5?

Respuesta En esta situación, la diferencia de trayectoria de $\lambda/2$ se combina con una diferencia de fase de $\lambda/2$ debido al cableado incorrecto para dar una diferencia de fase completa de λ. Como resultado, las ondas están en fase y hay una intensidad *máxima* en el punto P.



Figura 18.6 Dos bocinas idénticas emiten ondas sonoras una hacia la otra. Cuando se traslapan, las ondas idénticas que viajan en direcciones opuestas se combinarán para formar ondas estacionarias.

18.2 Ondas estacionarias

Las ondas sonoras del par de bocinas del ejemplo 18.1 salen de las bocinas hacia adelante y hacen interferencia en un punto enfrente de las bocinas. Suponga que da vuelta a las bocinas de modo que una quede frente a la otra y luego hace que emitan sonido a la misma frecuencia y amplitud. En esta situación dos ondas idénticas viajan en direcciones opuestas en el mismo medio, como en la figura 18.6. Dichas ondas se combinan de acuerdo con el modelo de ondas en interferencia.

Se puede analizar esta situación considerando funciones de onda para dos ondas sinusoidales transversales que tengan la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda, pero que viajen en direcciones opuestas en el mismo medio:

$$y_1 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad y_2 = A \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

donde y_1 representa una onda que viaja en la dirección $+x$ y y_2 representa una que viaja en la dirección $-x$. Al sumar estas dos funciones da la función de onda resultante y:

$$y = y_1 + y_2 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) + A \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

Cuando se usa la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) \pm \cos(a)\operatorname{sen}(b)$, esta expresión se reduce a

$$y = (2A \operatorname{sen} kx)\cos \omega t \tag{18.1}$$

La ecuación 18.1 representa la función de onda de una **onda estacionaria**. Una onda estacionaria, como la de una de las cuerdas que se muestra en la figura 18.7, es un patrón de oscilación *con un contorno estacionario* que resulta de la sobreposición de dos ondas idénticas que viajan en direcciones opuestas.

Observe que la ecuación 18.1 no contiene una función de $kx - \omega t$. Por lo tanto, no es una expresión para una sola onda viajera. Cuando usted observa una onda

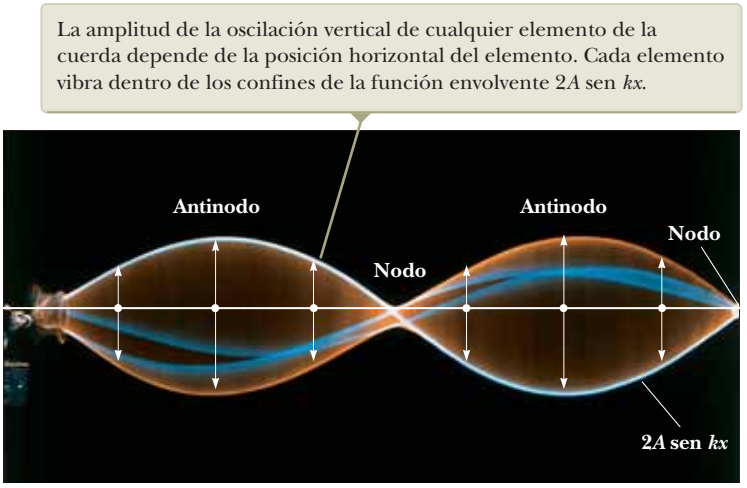


Figura 18.7 Fotografía múltiple de una onda estacionaria en una cuerda. El comportamiento temporal del desplazamiento vertical desde el equilibrio de un elemento individual de la cuerda está dado por cos ωt. Es decir, cada elemento vibra con una frecuencia angular ω.

estacionaria, no hay sentido de movimiento en la dirección de propagación de cualquier onda original. Al comparar la ecuación 18.1 con la ecuación 15.6, es clara la descripción de una clase especial de movimiento armónico simple. Cada elemento del medio oscila en movimiento armónico con la misma frecuencia angular ω (de acuerdo con el factor cos ωt en la ecuación). Sin embargo, la amplitud del movimiento armónico simple de un elemento (dada por el factor $2A$ sen kx, el coeficiente de la función coseno) depende de la ubicación x del elemento en el medio.

Si puede hallar un teléfono con un cordón enrollado, que conecte el auricular con una unidad base, podrá ver la diferencia entre una onda permanente y una onda viajera. Estire el cordón enrollado y chasquéelo con un dedo. Verá que un pulso viaja a lo largo de la cuerda. Ahora sacuda el auricular arriba y abajo y ajuste su frecuencia de sacudida hasta que cada rollo sobre la cuerda suba al mismo tiempo y luego baje. Esta es una onda estacionaria, formada por la combinación de las ondas que se alejan de su mano y que se reflejan de la unidad base hacia su mano. Observe que no hay ningún sentido del viaje a lo largo del cordón, como lo había para el pulso. Sólo ve altibajos en el movimiento de los elementos del cordón.

La ecuación 18.1 muestra que la amplitud del movimiento armónico simple de un elemento del medio tiene un valor mínimo de cero cuando x satisface la condición sen $kx = 0$, es decir, cuando

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

Ya que $k = 2\pi/\lambda$, estos valores para kx producen

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{18.2}$$

◀ **Posición de nodos**

Estos puntos de amplitud cero se llaman **nodos**.

El elemento del medio con el *mayor* desplazamiento posible desde el equilibrio tiene una amplitud de $2A$, que se define como la amplitud de la onda estacionaria. Las posiciones en el medio donde se presenta este desplazamiento máximo se llaman **antinodos**. Los antinodos se ubican en posiciones que satisfacen la condición sen $kx = \pm 1$ de la coordenada x, es decir, cuando

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

Por lo tanto, las posiciones de los antinodos se dan por

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots = \frac{n\lambda}{4} \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{18.3}$$

◀ **Posiciones de antinodos**

En la figura 18.7 se etiquetan dos nodos y dos antinodos en la onda estacionaria. La curva azul claro, etiquetada $2A$ sen kx en la figura 18.7, representa una longitud

Prevención de riesgos ocultos 18.2

Tres tipos de amplitud Es necesario distinguir con claridad entre la **amplitud de las ondas individuales**, que es A, y la **amplitud del movimiento armónico simple de los elementos del medio**, que es $2A$ sen kx. Un elemento determinado en una onda estacionaria vibra dentro de las restricciones de la función *envolvente* $2A$ sen kx, donde x es la posición en el medio de dicho elemento. Tal vibración está en contraste con las ondas sinusoidales viajeras, en las que todos los elementos oscilan con la misma amplitud y la misma frecuencia, y la amplitud A de la onda es la misma que la amplitud A del movimiento armónico simple de los elementos. Además, se puede identificar la **amplitud de la onda estacionaria** como $2A$.

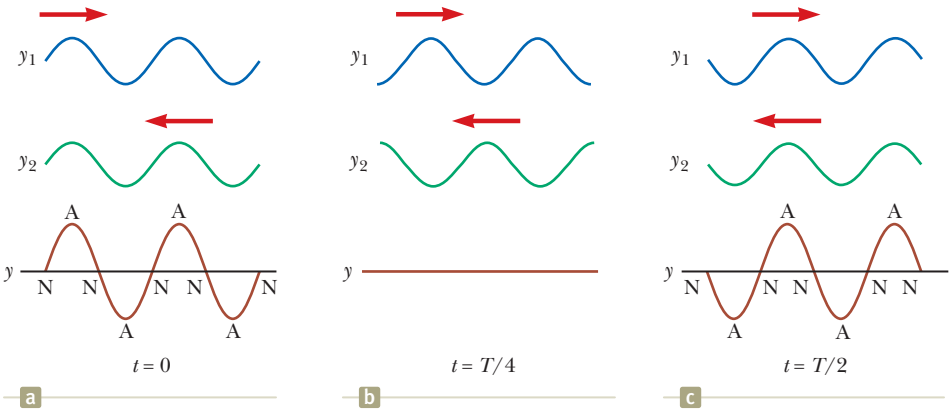


Figura 18.8 Patrones de onda estacionaria producidos en diferentes momentos por dos ondas de igual amplitud que viajan en direcciones opuestas. Para la onda resultante y, los nodos (N) son puntos de desplazamiento cero y los antinodos (A) son puntos de desplazamiento máximo.

de onda de las ondas viajeras que se combinan para formar la onda estacionaria. La figura 18.7 y las ecuaciones 18.2 y 18.3 proporcionan las siguientes características de las ubicaciones de nodos y antinodos:

La distancia entre antinodos adyacentes es igual a $\lambda/2$.
La distancia entre nodos adyacentes es igual a $\lambda/2$.
La distancia entre un nodo y un antinodo adyacente es $\lambda/4$.

En la figura 18.8 aparecen los patrones de onda de los elementos del medio producidos en diferentes momentos por dos ondas viajeras transversales que se mueven en direcciones opuestas. Las curvas azul y verde son los patrones de onda para las ondas viajeras individuales, y las curvas cafés son los patrones de onda para la onda estacionaria resultante. En $t = 0$ (figura 18.8a) las dos ondas viajeras están en fase, lo que da un patrón de onda en el que cada elemento del medio está en reposo y experimenta su máximo desplazamiento desde el equilibrio. Un cuarto de periodo después, en $t = T/4$ (figura 18.8b), las ondas viajeras se movieron un cuarto de longitud de onda (una a la derecha y la otra a la izquierda). En este momento las ondas viajeras están fuera de fase y cada elemento del medio pasa a través de la posición de equilibrio en su movimiento armónico simple. El resultado es desplazamiento cero para los elementos en todos los valores de x; es decir, el patrón de onda es una línea recta. En $t = T/2$ (figura 18.8c), las ondas viajeras de nuevo están en fase, lo que produce un patrón de onda que está invertido en relación con el patrón $t = 0$. En la onda estacionaria, los elementos del medio alternan en tiempo entre los extremos que se muestran en la figura 18.8a y c.

Examen rápido 18.2 Considere ondas en una cuerda estirada, como se muestra en la figura 18.8. Defina la velocidad de los elementos de la cuerda como positiva si se mueven hacia arriba en la figura. **(i)** En el momento que la cuerda tiene la forma que se muestra mediante la curva café en la figura 18.8a, ¿cuál es la velocidad instantánea de los elementos a lo largo de la cuerda? (a) Cero para todos los elementos, (b) positiva para todos los elementos, (c) negativa para todos los elementos, (d) varía con la posición del elemento. **(ii)** A partir de las mismas opciones, en el momento que la cuerda tiene la forma que se muestra mediante la curva café en la figura 18.8b, ¿cuál es la velocidad instantánea de los elementos a lo largo de la cuerda?

Ejemplo 18.2 Formación de una onda estacionaria

Dos ondas que viajan en direcciones opuestas producen una onda estacionaria. Las funciones de onda individuales son

$$y_1 = 4.0 \text{ sen } (3.0x - 2.0t)$$
$$y_2 = 4.0 \text{ sen } (3.0x + 2.0t)$$

donde x y y se miden en centímetros y t en segundos.

(A) Encuentre la amplitud del movimiento armónico simple del elemento del medio ubicado en $x = 2.3$ cm.

18.2 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Las ondas descritas por las ecuaciones conocidas son idénticas, excepto por sus direcciones de viaje, así que de hecho se combinan para formar una onda estacionaria, como se explicó en esta sección. Podemos representar gráficamente las ondas por las curvas azules y verdes en la figura 18.8.

Categorizar Se sustituirán valores en las ecuaciones por desarrollar en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

A partir de las ecuaciones para las ondas $A = 4.0$ cm, $k = 3.0$ rad/cm y $\omega = 2.0$ rad/s. Use la ecuación 18.1 para escribir una expresión para la onda estacionaria:

$$y = (2A \operatorname{sen} kx) \cos \omega t = 8.0 \operatorname{sen} 3.0x \cos 2.0t$$

Encuentre la amplitud del movimiento armónico simple del elemento en la posición $x = 2.3$ cm al evaluar la función seno en esta posición:

$$y_{\text{máx}} = (8.0 \text{ cm}) \operatorname{sen} 3.0x\,|_{x = 2.3}$$
$$= (8.0 \text{ cm}) \operatorname{sen} (6.9 \text{ rad}) = \boxed{4.6 \text{ cm}}$$

(B) Encuentre las posiciones de los nodos y antinodos si un extremo de la cuerda está en $x = 0$.

SOLUCIÓN

Encuentre la longitud de onda de las ondas viajeras:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3.0 \text{ rad/cm} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{3.0} \text{ cm}$$

Aplique la ecuación 18.2 para hallar las posiciones de los nodos:

$$x = n\frac{\lambda}{2} = \boxed{n\left(\frac{\pi}{3.0}\right) \text{ cm} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots}$$

Utilice la ecuación 18.3 para encontrar las posiciones de los antinodos:

$$x = n\frac{\lambda}{4} = \boxed{n\left(\frac{\pi}{6.0}\right) \text{ cm} \quad n = 1, 3, 5, 7, \ldots}$$

18.3 Análisis de modelo: ondas bajo condiciones de frontera

Considere una cuerda de longitud L fija en ambos extremos, como se muestra en la figura 18.9. Este sistema se usará como modelo para una cuerda de guitarra o piano. Las ondas pueden viajar en ambos sentidos en la cuerda. Por lo tanto, en la cuerda se pueden establecer ondas estacionarias mediante una sobreposición continua de ondas incidentes y reflejadas desde los extremos. Observe que hay una *condición de frontera* para las ondas en la cuerda. Ya que los extremos de la cuerda están fijos, necesariamente tienen desplazamiento cero y, por ende, son nodos por definición. La condición es que ambos extremos de la cuerda deben ser nodos fijos a la longitud de onda de la onda estacionaria en la cuerda de acuerdo con la ecuación 18.2, que, a su vez, determina la frecuencia de la onda. Esta condición de frontera resulta en que la cuerda tenga un número de patrones de oscilación naturales discretos, llamados **modos normales**, cada uno con una frecuencia característica que se calcula con facilidad. Esta situación, en la que sólo se permiten ciertas frecuencias de oscilación, se llama **cuantización**, la cual es un acontecimiento común cuando las ondas se someten a condiciones de frontera y es una característica central para las explicaciones de física cuántica en la versión extendida de este texto. Note que en la figura 18.8 no hay condiciones de frontera, así que se pueden establecer ondas estacionarias de *cualquier* frecuencia; no hay cuantización sin condiciones de frontera. Ya que las condiciones de frontera se presentan con tanta frecuencia para las ondas, para la explicación que sigue se identifica un análisis de modelo llamado modelo de **ondas bajo condiciones de frontera**.

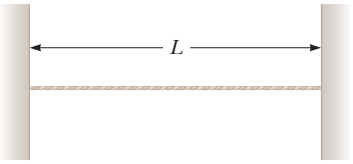


Figura 18.9 Una cuerda de longitud L fija en ambos extremos.

Los modos de oscilación normales para la cuerda de la figura 18.9 se describen al imponer las condiciones de frontera de que los extremos sean nodos y que los nodos estén separados por un medio de longitud de onda con los antinodos a la mitad

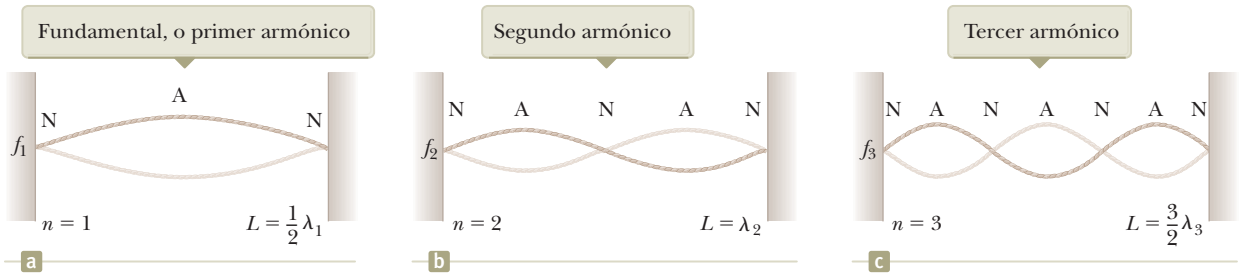


Figura 18.10 Los modos normales de vibración de la cuerda de la figura 18.9 forman una serie armónica. La cuerda vibra entre los extremos como se muestra.

entre los nodos. El primer modo normal que es consistente con estos requisitos, que se muestra en la figura 18.10a, tiene nodos en sus extremos y un antinodo en medio: es el modo de longitud de onda más larga que es consistente con las condiciones de frontera. El primer modo normal se presenta cuando la longitud de onda λ_1 es igual al doble de la longitud de la cuerda, o $\lambda_1 = 2L$. La sección de una onda estacionaria de un nodo al siguiente se llama *bucle*. En el primer modo normal, la cuerda vibra en un bucle. En el segundo modo normal (vea la figura 18.10b), la cuerda vibra en dos bucles. Cuando la mitad izquierda de la cuerda se mueve hacia arriba, la mitad izquierda lo hace hacia abajo. En este caso la longitud de onda λ_2 es igual a la longitud de la cuerda, como se expresa por $\lambda_2 = L$. El tercer modo normal (vea la figura 18.10c) corresponde al caso en que $\lambda_3 = 2L/3$ y la cuerda vibra en tres bucles. En general, las longitudes de onda de los diferentes modos normales para una cuerda de longitud L fija en ambos extremos son

Longitudes de onda en modos normales

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.4}$$

donde el índice n se refiere al n-ésimo modo normal de oscilación. Estos modos son los *posibles*. Se discuten brevemente los modos *reales* que se excitan en una cuerda.

Las frecuencias naturales asociadas con los modos de oscilación se obtienen de la relación $f = v/\lambda$, donde la rapidez de onda v es la misma para todas las frecuencias. Al usar la ecuación 18.4 se encuentra que las frecuencias naturales f_n de los modos normales son

Frecuencias naturales de modos normales como funciones de la rapidez de onda y la longitud de la cuerda

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.5}$$

Estas frecuencias naturales también se llaman *frecuencias cuantizadas* asociadas con la cuerda oscilante fija en ambos extremos.

Ya que $v = \sqrt{T/\mu}$ (vea la ecuación 16.18) para ondas sobre una cuerda, donde T es la tensión en la cuerda y μ es su densidad de masa lineal, también se expresan las frecuencias naturales de una cuerda tensa como

Frecuencias naturales de modos normales como funciones de la tensión en la cuerda y la densidad de masa lineal

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.6}$$

La frecuencia más baja de todas, f_1, que corresponde a $n = 1$, se llama **fundamental** o **frecuencia fundamental** y está dada por

Frecuencia fundamental de una cuerda tensa

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{18.7}$$

Las frecuencias de los modos restantes son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (ec. 18.5). Las frecuencias de los modos normales que exhiben una correspondencia de múltiplo entero forman una **serie armónica**, y los modos normales se llaman **armónicos**. La frecuencia fundamental f_1 es la frecuencia del primer armónico, la frecuencia $f_2 = 2f_1$ es la frecuencia del segundo armónico y la frecuencia $f_n = nf_1$ es la frecuencia del n-ésimo armónico. Otros sistemas oscilatorios, como un parche de tambor, muestran modos normales, pero las frecuencias no se relacionan como múltiplos enteros de una fundamental (vea la sección 18.6). Por lo tanto, no se usa el término armónico en asociación con estos tipos de sistemas.

Examine un poco más cómo se crean en una cuerda los diferentes armónicos. Para excitar únicamente un solo armónico, la cuerda se debe distorsionar en una forma que corresponda a la del armónico deseado. Después de liberarse, la cuerda vibra a la frecuencia de dicho armónico. Sin embargo, esta maniobra es difícil de realizar y no es como se excita la cuerda de un instrumento musical. Si la cuerda se distorsiona de tal modo que su forma no sea sólo de un armónico, la vibración resultante incluye una combinación de diferentes armónicos. Tal distorsión se presenta en instrumentos musicales cuando la cuerda se puntea (como en una guitarra), se frota (como en un chelo) o se golpea (como en un piano). Cuando la cuerda se distorsiona en una forma no sinusoidal, sólo las ondas que satisfacen las condiciones de frontera pueden persistir en la cuerda. Estas ondas son los armónicos.

La frecuencia de una cuerda que define la nota musical que se toca es la fundamental aun cuando estén otros armónicos presentes. La frecuencia de la cuerda se varía al cambiar la tensión de la cuerda o su longitud. Por ejemplo, la tensión en las cuerdas de guitarra y violín se varía mediante un mecanismo de ajuste de tornillo o clavijas de afinación ubicadas en el diapasón del instrumento. A medida que aumenta la tensión, la frecuencia de los modos normales aumenta en concordancia con la ecuación 18.6. Una vez que el instrumento se "afina", los intérpretes varían la frecuencia al mover sus dedos a lo largo del diapasón, lo que cambia la longitud de la porción oscilatoria de la cuerda. A medida que la longitud se acorta, la frecuencia aumenta porque, como especifica la ecuación 18.6, las frecuencias de modo normal son inversamente proporcionales a la longitud de la cuerda.

Examen rápido 18.3 Cuando una onda estacionaria se establece en una cuerda fija en ambos extremos, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero? **(a)** El número de nodos es igual al número de antinodos. **(b)** La longitud de onda es igual a la longitud de la cuerda dividida entre un entero. **(c)** La frecuencia es igual al número de nodos por la frecuencia fundamental. **(d)** La forma de la cuerda en cualquier instante muestra una simetría en torno al punto medio de la cuerda.

Análisis de modelo Ondas bajo condiciones de frontera

Imagine una onda que no es libre de viajar a lo largo de todo el espacio, como en el modelo de la onda viajera. Si la onda está sujeta a condiciones de frontera, deben cumplirse ciertos requisitos en localizaciones específicas en el espacio; la onda se limita a un conjunto de **modos normales** con longitudes de onda cuantizadas y frecuencias naturales cuantizadas.



Para ondas sobre una cuerda fija en ambos extremos, las frecuencias naturales son

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.6}$$

donde T es la tensión en la cuerda y m es su densidad de masa lineal.

Ejemplos:

- ondas que viajan de ida y vuelta en una cuerda de guitarra se combinan para formar una onda estacionaria
- ondas sonoras que viajan de ida y vuelta en un clarinete se combinan para formar ondas estacionarias (sección 18.5)
- una partícula microscópica confinada en una pequeña región del espacio es modelada como una onda y presenta energías cuantizadas (capítulo 41)
- la energía de Fermi de un metal está determinada por el modelado de electrones como ondas-partículas en una caja (capítulo 43)

Ejemplo 18.3 ¡Dame un Do! AM

El Do medio en un piano tiene una frecuencia fundamental de 262 Hz, y la primera La sobre el Do medio tiene una frecuencia fundamental de 440 Hz.

(A) Calcule las frecuencias de los siguientes dos armónicos de la cuerda Do.

continúa

18.3 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Recuerde que los armónicos de una cuerda vibrante tienen frecuencias que se relacionan mediante múltiplos enteros de la fundamental.

Categorizar Esta primera parte del ejemplo es un simple problema de sustitución.

Al saber que la frecuencia fundamental es $f_1 = 262$ Hz, encuentre las frecuencias de los siguientes armónicos al multiplicar por enteros:

$$f_2 = 2f_1 = \boxed{524 \text{ Hz}}$$
$$f_3 = 3f_1 = \boxed{786 \text{ Hz}}$$

(B) Si las cuerdas La y Do tienen la misma densidad de masa lineal μ y longitud L, determine la razón de tensiones en las dos cuerdas.

SOLUCIÓN

Categorizar Esta parte del ejemplo es más un problema de análisis que el inciso (A), y utiliza el modelo de *ondas bajo condiciones de frontera*.

Analizar Use la ecuación 18.7 para escribir expresiones para las frecuencias fundamentales de las dos cuerdas:

$$f_{1A} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_A}{\mu}} \quad \text{y} \quad f_{1C} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_C}{\mu}}$$

Divida la primera ecuación entre la segunda y resuelva para la razón de tensiones:

$$\frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \sqrt{\frac{T_A}{T_C}} \rightarrow \frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2 = \left(\frac{440}{262}\right)^2 = \boxed{2.82}$$

Finalizar Si las frecuencias de las cuerdas de piano estuvieran determinadas exclusivamente por la tensión, este resultado sugiere que la razón de tensiones de la cuerda más baja a la cuerda más alta en el piano sería enorme. Tales tensiones tan grandes harían difícil diseñar un marco para sostener las cuerdas. En realidad, las frecuencias de las cuerdas de piano varían debido a parámetros adicionales, incluidas la masa por unidad de longitud y la longitud de la cuerda. El siguiente ¿Qué pasaría si? explora una variación de longitud.

¿QUÉ PASARÍA SI? Si usted observa el interior de un piano real, verá que la suposición hecha en el inciso (B) sólo es parcialmente verdadera. Es probable que las cuerdas no tengan la misma longitud. Las densidades de las cuerdas son iguales, pero suponga que la longitud de la cuerda La sólo es 64% de la longitud de la cuerda Do. ¿Cuál es la razón de sus tensiones?

Respuesta Una vez más con la ecuación 18.7 se establece la razón de frecuencias:

$$\frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \frac{L_C}{L_A}\sqrt{\frac{T_A}{T_C}} \rightarrow \frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{L_A}{L_C}\right)^2\left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2$$

$$\frac{T_A}{T_C} = (0.64)^2\left(\frac{440}{262}\right)^2 = 1.16$$

Note que este resultado sólo representa 16% de aumento en tensión, comparado con 182% de aumento en el inciso (B).

Ejemplo 18.4 Cambio en la vibración de una cuerda con agua AM

Un extremo de una cuerda horizontal se amarra a una varilla oscilante y el otro extremo pasa sobre una polea, como en la figura 18.11a. Una esfera de 2.00 kg de masa cuelga en el extremo de la cuerda. La cuerda oscila en su segundo armónico. Un contenedor de agua se eleva bajo la esfera de modo que ésta se sumerge por completo. En esta configuración, la cuerda vibra en su quinto armónico, como se muestra en la figura 18.11b. ¿Cuál es el radio de la esfera?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que sucede cuando la esfera se sumerge en el agua. La fuerza de flotación actúa hacia arriba sobre la esfera, lo que reduce la tensión en la cuerda. El cambio en tensión causa un cambio en la rapidez de las ondas sobre

18.4 continuación

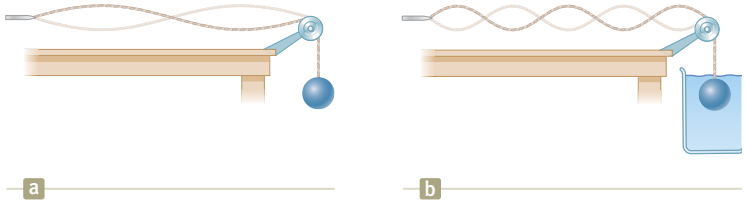


Figura 18.11 (Ejemplo 18.4) (a) Cuando la esfera cuelga en el aire, la cuerda vibra en su segundo armónico. (b) Cuando la esfera se sumerge en agua, la cuerda vibra en su quinto armónico.

la cuerda, que a su vez ocasiona un cambio en la longitud de onda. Esta longitud de onda alterada provoca que la cuerda vibre en su quinto modo normal en lugar de hacerlo en el segundo.

Categorizar La esfera colgante se modela como una *partícula en equilibrio*. Una de las fuerzas que actúan sobre ella es la fuerza de flotación del agua. También se aplica el modelo de *ondas bajo condiciones de frontera* a la cuerda.

Analizar Aplique el modelo de partícula en equilibrio a la esfera de la figura 18.11a e identifique a T_1 como la tensión en la cuerda mientras la esfera cuelga en aire:

$$\sum F = T_1 - mg = 0$$
$$T_1 = mg$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio a la esfera de la figura 18.11b, donde T_2 es la tensión en la cuerda mientras la esfera se sumerge en agua:

$$T_2 + B - mg = 0$$
$$(1)\quad B = mg - T_2$$

La cantidad deseada, el radio de la esfera, aparecerá en la expresión para la fuerza de flotación B. No obstante, antes de proceder en esta dirección debe evaluar T_2 a partir de la información acerca de la onda estacionaria.

Escriba la ecuación para la frecuencia de una onda estacionaria sobre una cuerda (ecuación 18.6) dos veces, una vez antes de que la esfera se sumerja y otra después. Note que la frecuencia f es la misma en ambos casos porque está determinada por la varilla oscilante. Además, la densidad de masa lineal μ y la longitud L de la porción oscilante de la cuerda son las mismas en ambos casos. Divida las ecuaciones:

$$f = \frac{n_1}{2L}\sqrt{\frac{T_1}{\mu}} \qquad f = \frac{n_2}{2L}\sqrt{\frac{T_2}{\mu}} \qquad \rightarrow \qquad 1 = \frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Resuelva para T_2:

$$T_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 T_1 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 mg$$

Sustituya este resultado en la ecuación (1):

$$(2)\quad B = mg - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 mg = mg\left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right]$$

Con la ecuación 14.5 exprese la fuerza de flotación en términos del radio de la esfera:

$$B = \rho_{\text{agua}}\, g V_{\text{esfera}} = \rho_{\text{agua}}\, g\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Resuelva para el radio de la esfera y sustituya de la ecuación (2):

$$r = \left(\frac{3B}{4\pi\rho_{\text{agua}}\, g}\right)^{1/3} = \left\{\frac{3m}{4\pi\rho_{\text{agua}}}\left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right]\right\}^{1/3}$$

Sustituya valores numéricos:

$$r = \left\{\frac{3(2.00\ \text{kg})}{4\pi(1\,000\ \text{kg/m}^3)}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right]\right\}^{1/3}$$
$$= 0.073\,7\ \text{m} = 7.37\ \text{cm}$$

Finalizar Note que sólo ciertos radios de la esfera resultarán en que la cuerda vibre en un modo normal; la rapidez de las ondas en la cuerda debe cambiar a un valor tal que la longitud de la cuerda sea un múltiplo entero de medias longitudes de onda. Esta limitación es una característica de la *cuantización* que se introdujo en este capítulo: los radios de la esfera que hacen vibrar la cuerda en un modo normal están *cuantizados*.

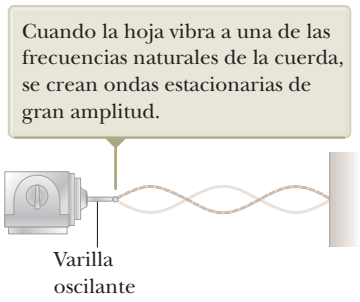


Figura 18.12 En una cuerda se establecen ondas estacionarias cuando un extremo se conecta a una varilla oscilante.

18.4 Resonancia

Se vio que un sistema como una cuerda tensa es capaz de oscilar en uno o más modos de oscilación normales. Suponga que maneja este tipo de cuerda con una varilla oscilante, como en la figura 18.12. Encontramos que si se aplica una fuerza periódica a tal sistema, la amplitud del movimiento resultante es mayor cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es igual a una de las frecuencias naturales del sistema. Este fenómeno, conocido como *resonancia*, se discutió en la sección 15.7. Aunque un sistema bloque-resorte o un péndulo simple sólo tienen una frecuencia natural, los sistemas de onda estacionaria tienen todo un conjunto de frecuencias naturales, como las dadas por la ecuación 18.6 para una cuerda. Ya que un sistema en oscilación muestra una gran amplitud cuando se activa a cualquiera de sus frecuencias naturales, a estas frecuencias por lo general se les refiere como **frecuencias de resonancia**.

Considere de nuevo la cuerda de la figura 18.12. El extremo fijo es un nodo, y el extremo conectado a la varilla es casi un nodo porque la amplitud del movimiento de la varilla es pequeña en comparación con el de los elementos de la cuerda. A medida que la varilla oscila, las ondas transversales que envía por la cuerda se reflejan desde el extremo fijo. Como aprendió en la sección 18.3, la cuerda tiene frecuencias naturales que están determinadas por su longitud, tensión y densidad de masa lineal (vea la ecuación 18.6). Cuando la frecuencia de la varilla es igual a una de las frecuencias naturales de la cuerda, se producen ondas estacionarias y la cuerda oscila con una gran amplitud. En este caso de resonancia, la onda generada por la varilla oscilante está en fase con la onda reflejada y la cuerda absorbe energía de la varilla. Si la cuerda es impulsada a una frecuencia que no es una de sus frecuencias naturales, las oscilaciones son de baja amplitud y no muestran un patrón estable. La resonancia es muy importante en la excitación de los instrumentos musicales en función de columnas de aire. Esta aplicación de la resonancia se explicará en la sección 18.5.

18.5 Ondas estacionarias en columnas de aire

Las ondas bajo condiciones de frontera también se aplican a ondas sonoras en una columna de aire como la que se encuentra en el interior de un órgano de tubos o en un clarinete. Las ondas estacionarias son resultado de la interferencia entre ondas sonoras longitudinales que viajan en direcciones opuestas.

En un tubo cerrado en un extremo, dicho extremo es un **nodo de desplazamiento** porque la barrera rígida en este extremo no permite el movimiento longitudinal del aire. Ya que la onda de presión está 90° fuera de fase con la onda de desplazamiento (vea la sección 17.1), el extremo cerrado de una columna de aire corresponde a un **antinodo de presión** (es decir, un punto de máxima variación de presión).

El extremo abierto de una columna de aire es aproximadamente un **antinodo de desplazamiento**[1] y un nodo de presión. Se puede entender por qué no se presenta variación de presión en un extremo abierto al notar que el extremo de la columna de aire está abierto a la atmósfera; por lo tanto, la presión en este extremo debe permanecer constante a presión atmosférica.

Acaso se pregunte cómo una onda sonora se refleja de un extremo abierto y por qué al parecer no ha habido cambio en el medio en este punto: el medio a través del que se mueve la onda sonora es aire, tanto dentro como fuera del tubo. Sin embargo, el sonido es una onda de presión, y una región de compresión de la onda sonora está restringida por los lados del tubo en tanto la región esté dentro del tubo. A medida que la región de compresión sale en el extremo abierto del tubo, la restricción del tubo se retira y el aire comprimido es libre de expandirse en la atmósfera. En con-

[1]En sentido estricto, el extremo abierto de una columna de aire no es exactamente un antinodo de desplazamiento. Alcanzar una compresión en el extremo abierto no se refleja hasta que pasa más allá del extremo. A la longitud de la columna de aire para un tubo de sección transversal circular, se debe agregar una corrección terminal aproximadamente igual a $0.6R$, donde R es el radio del tubo. Por eso, la longitud efectiva de la columna de aire es un poco mayor que la verdadera longitud L. En esta explicación se ignora esta corrección terminal.

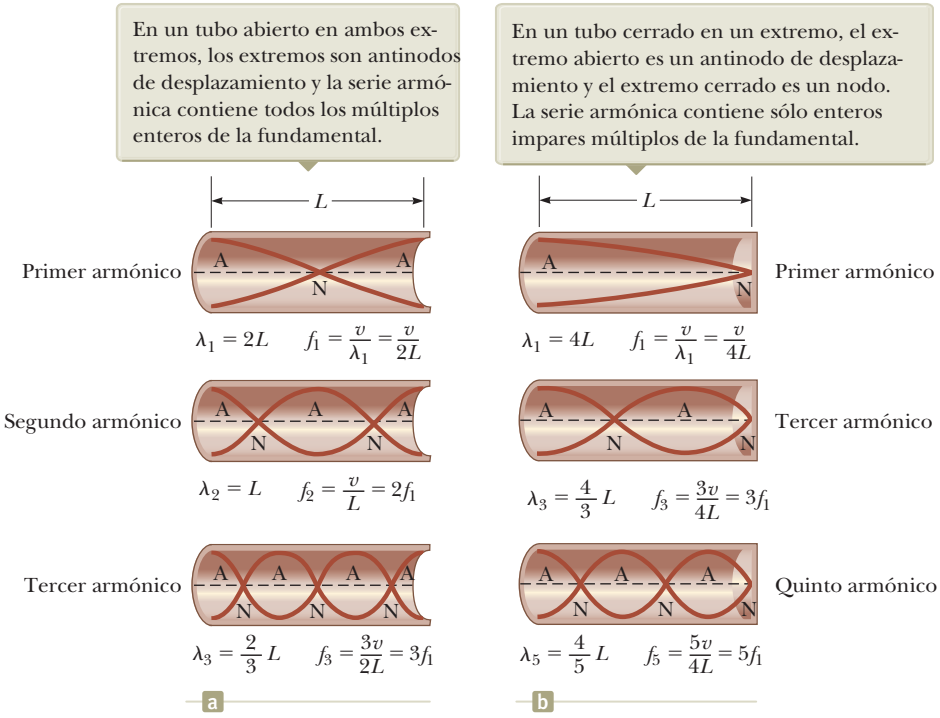


Figura 18.13 Representaciones gráficas del movimiento de elementos de aire en ondas longitudinales estacionarias en (a) una columna abierta por ambos extremos y (b) una columna cerrada por un extremo.

secuencia, hay un cambio *distintivo* del medio entre el interior del tubo y el exterior, aun cuando no haya cambio en el *material* del medio. Este cambio distintivo es suficiente para permitir cierta reflexión.

Con las condiciones de frontera de nodos o antinodos en los extremos de la columna de aire se tiene un conjunto de modos normales de oscilación, como es el caso para la cuerda fija en ambos extremos. Por lo tanto, la columna de aire tiene frecuencias cuantizadas.

En la figura 18.13a se muestran los primeros tres modos normales de oscilación de un tubo abierto en ambos extremos. Note que ambos extremos son antinodos de desplazamiento (aproximadamente). En el primer modo normal la onda estacionaria se extiende entre dos antinodos adyacentes, que es una distancia de media longitud de onda. En consecuencia, la longitud de onda tiene el doble de largo que el tubo, y la frecuencia fundamental es $f_1 = v/2L$. Como muestra la figura 18.13a, las frecuencias de los armónicos superiores son $2f_1$, $3f_1$, ...

> En un tubo abierto en ambos extremos, las frecuencias naturales de oscilación forman una serie armónica que incluye todos los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

Ya que todos los armónicos están presentes y como la frecuencia fundamental se conoce por la misma expresión que en la cuerda (vea la ecuación 18.5), las frecuencias de oscilación naturales se expresan como

$$f_n = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.8}$$

Frecuencias naturales de un tubo abierto en ambos extremos

A pesar de la similitud entre las ecuaciones 18.5 y 18.8, debe recordar que en la ecuación 18.5, v es la rapidez de las ondas en la cuerda, mientras que v en la ecuación 18.8 es la rapidez del sonido en el aire.

Si un tubo está cerrado en un extremo y abierto en el otro, el extremo cerrado es un nodo de desplazamiento (vea la figura 18.13b). En este caso, la onda estacionaria para el modo fundamental se extiende desde un antinodo hasta el nodo adyacente, que es un cuarto de longitud de onda. Por tanto, la longitud de onda para el primer modo normal es $4L$, y la frecuencia fundamental es $f_1 = v/4L$. Como muestra la figura 18.13b, las ondas de frecuencia más alta que satisfacen las condiciones son

Prevención de riesgos ocultos 18.3

Las ondas sonoras en el aire son longitudinales, no transversales En la figura 18.13 las ondas longitudinales estacionarias se dibujan como ondas transversales. Como están en la misma dirección que la propagación, es difícil dibujar desplazamientos longitudinales. Por lo tanto, es mejor interpretar las curvas en café de la figura 18.13 como una representación gráfica de las ondas (los diagramas de ondas en cuerda son representaciones gráficas), con el eje vertical que representa el desplazamiento horizontal $s(x, t)$ de los elementos del medio.

aquellas que tienen un nodo en el extremo cerrado y un antinodo en el extremo abierto; en consecuencia, los armónicos superiores tienen frecuencias $3f_1, 5f_1, \ldots$.

En un tubo cerrado en un extremo las frecuencias de oscilación naturales forman una serie armónica que incluye sólo múltiplos enteros impares de la frecuencia fundamental.

Este resultado se expresa matemáticamente como

Frecuencias naturales de un tubo cerrado en un extremo y abierto en el otro

$$f_n = n\frac{v}{4L} \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{18.9}$$

Es interesante investigar qué sucede con las frecuencias de los instrumentos en función de columnas de aire y cuerdas durante un concierto mientras sube la temperatura. Por ejemplo, el sonido emitido por una flauta se vuelve más agudo (eleva su frecuencia), ya que ésta se calienta porque la rapidez del sonido aumenta en el aire cada vez más caliente en su interior (considere la ecuación 18.8). El sonido producido por un violín se vuelve plano (disminuye en frecuencia) a medida que las cuerdas se expanden térmicamente, porque la expansión hace que su tensión disminuya (vea la ecuación 18.6).

Los instrumentos musicales en función de columnas de aire por lo general se excitan mediante resonancia. La columna de aire recibe una onda sonora que es rica en muchas frecuencias. En tal caso, la columna de aire responde con una oscilación de mayor amplitud a las frecuencias que coinciden con las frecuencias cuantizadas en su conjunto de armónicos. En muchos instrumentos de viento hechos con madera, el rico sonido inicial lo proporciona una lengüeta que vibra. En los instrumentos metálicos dicha excitación la proporciona el sonido proveniente de la vibración de los labios del intérprete. En una flauta, la excitación inicial proviene de soplar sobre un borde en la boca del instrumento, en forma similar a soplar a través de la abertura de una botella con un cuello estrecho. El sonido del aire que corre a través del borde tiene muchas frecuencias, incluida una que pone en resonancia la cavidad de aire en la botella.

Examen rápido 18.4 Un tubo abierto en ambos extremos resuena a una frecuencia fundamental f_{abierto}. Cuando un extremo se cubre y de nuevo se hace resonar el tubo, la frecuencia fundamental es f_{cerrado}. ¿Cuál de las siguientes expresiones describe cómo se comparan estas dos frecuencias resonantes? **(a)** $f_{\text{cerrado}} = f_{\text{abierto}}$, **(b)** $f_{\text{cerrado}} = \frac{1}{2} f_{\text{abierto}}$, **(c)** $f_{\text{cerrado}} = 2f_{\text{abierto}}$, **(d)** $f_{\text{cerrado}} = \frac{3}{2} f_{\text{abierto}}$.

Examen rápido 18.5 El Parque Balboa, en San Diego, tiene un órgano al aire libre. Cuando la temperatura del aire aumenta, la frecuencia fundamental de uno de los tubos del órgano (a) permanece igual, (b) baja, (c) sube o (d) es imposible de determinar.

Ejemplo 18.5 Viento en una alcantarilla

Una sección de alcantarillas de drenaje de 1.23 m de largo hace un ruido de aullido cuando el viento sopla a través de sus extremos abiertos.

(A) Determine las frecuencias de los primeros tres armónicos de la alcantarilla si tiene forma cilíndrica y está abierta en ambos extremos. Considere $v = 343$ m/s como la rapidez del sonido en el aire.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El sonido del viento que sopla a través del extremo del tubo contiene muchas frecuencias y la alcantarilla responde al sonido mediante vibración a las frecuencias naturales de la columna de aire.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

Determine la frecuencia del primer armónico de la alcantarilla, la cual se modela como una columna de aire abierta en ambos extremos:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{343 \text{ m/s}}{2(1.23 \text{ m})} = 139 \text{ Hz}$$

Encuentre los siguientes armónicos al multiplicar por enteros:

$$f_2 = 2f_1 = 279 \text{ Hz}$$
$$f_3 = 3f_1 = 418 \text{ Hz}$$

18.5 continuación

(B) ¿Cuáles son las tres frecuencias naturales más bajas de la alcantarilla si está bloqueada en un extremo?

SOLUCIÓN

Encuentre la frecuencia del primer armónico de la alcantarilla, la cual se modela como una columna de aire cerrada en un extremo.

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{4(1.23 \text{ m})} = 69.7 \text{ Hz}$$

Encuentre los siguientes dos armónicos al multiplicar por enteros impares:

$$f_3 = 3f_1 = 209 \text{ Hz}$$
$$f_5 = 5f_1 = 349 \text{ Hz}$$

Ejemplo 18.6 Medición de la frecuencia de un diapasón AM

En la figura 18.14 se ilustra un aparato simple para demostrar la resonancia en columnas de aire. Un tubo vertical abierto en ambos extremos se sumerge parcialmente en agua y un diapasón oscilante con una frecuencia desconocida se coloca cerca de la parte superior del tubo. La longitud L de la columna de aire se ajusta al mover el tubo verticalmente. Las ondas sonoras generadas por el diapasón se refuerzan cuando L corresponde a una de las frecuencias de resonancia del tubo. Para cierto tubo, el valor más pequeño de L para el que se presenta un pico en la intensidad sonora es 9.00 cm.

(A) ¿Cuál es la frecuencia del diapasón?

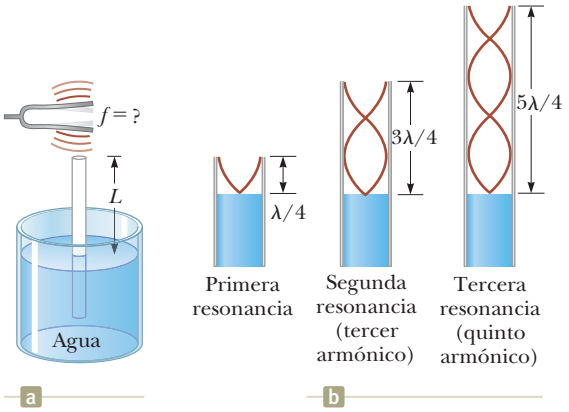


Figura 18.14 (Ejemplo 18.6) (a) Aparato para demostrar la resonancia de ondas sonoras en un tubo cerrado en un extremo. La longitud L de la columna de aire varía al mover el tubo verticalmente mientras se sumerge parcialmente en agua. (b) Primeros tres modos normales del sistema que se muestra en (a).

SOLUCIÓN

Conceptualizar Las ondas sonoras del diapasón vibratorio entran en el tubo en su extremo superior. Aunque el tubo está abierto en su extremo inferior para permitir que entre el agua, la superficie del agua actúa como una barrera. Las ondas se reflejan de la superficie del agua y se combinan con las que se mueven hacia abajo para formar una onda estacionaria.

Categorizar Debido a la reflexión de las ondas de sonido de la superficie del agua podemos modelar al tubo como abierto en el extremo superior y cerrado en el extremo inferior. Por lo tanto, podemos aplicar el modelo de *ondas bajo condiciones de frontera* a esta situación.

Analizar

Use la ecuación 18.9 para hallar la frecuencia fundamental para $L = 0.090\ 0$ m:

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{4(0.090\ 0 \text{ m})} = 953 \text{ Hz}$$

Ya que el diapasón hace que la columna de aire resuene a esta frecuencia, esta frecuencia también debe ser la del diapasón.

(B) ¿Cuáles son los valores de L para las siguientes dos condiciones de resonancia?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 16.12 para encontrar la longitud de onda de la onda sonora del diapasón:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343 \text{ m/s}}{953 \text{ Hz}} = 0.360 \text{ m}$$

Note de la figura 18.14b que la longitud de la columna de aire para la segunda resonancia es $3\lambda/4$:

$$L = 3\lambda/4 = 0.270 \text{ m}$$

Observe en la figura 18.14b que la longitud de la columna de aire para la tercera resonancia es $5\lambda/4$:

$$L = 5\lambda/4 = 0.450 \text{ m}$$

Finalizar Considere cómo difiere este problema del ejemplo anterior. En la alcantarilla la longitud es fija y la columna del aire se presentó con una mezcla de muchas frecuencias. El tubo en este ejemplo se presenta con una frecuencia única del diapasón, y se varía la longitud del tubo hasta que se alcanza una resonancia.

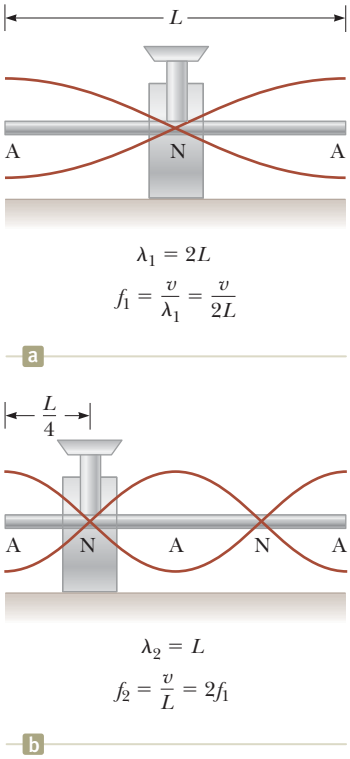


Figura 18.15 Vibraciones longitudinales de modo normal de una barra de longitud L (a) sujeta en el punto medio para producir el primer modo normal y (b) sujeta a una distancia $L/4$ desde un extremo para producir el segundo modo normal. Note que las curvas rojas representan oscilaciones paralelas a la barra (ondas longitudinales).

18.6 Ondas estacionarias en barras y membranas

Las ondas estacionarias también se presentan en barras y membranas. Una barra sujeta en la parte media y que recibe un golpe, paralelo a la barra, en un extremo, oscila como se muestra en la figura 18.15a. Las oscilaciones de los elementos de la barra son longitudinales, y por eso las curvas rojas en la figura 18.15 representan desplazamientos *longitudinales* de diferentes partes de la barra. Para tener más claridad, los desplazamientos se dibujaron en la dirección transversal, como si fuesen columnas de aire. El punto medio es un nodo de desplazamiento porque está fijo por el tornillo de banco, mientras los extremos son antinodos de desplazamiento porque tienen libertad para oscilar. Las oscilaciones en este arreglo son análogas a las de un tubo abierto en ambos extremos. Las líneas rojas en la figura 18.15a representan el primer modo normal, para el que la longitud de onda es $2L$ y la frecuencia es $f = v/2L$, donde v es la rapidez de las ondas longitudinales en la barra. Otros modos normales se excitan al sujetar la barra en diferentes puntos. Por ejemplo, el segundo modo normal (figura 18.15b) se excita al sujetar la barra a una distancia $L/4$ desde un extremo.

También es posible establecer ondas estacionarias transversales en barras. Los instrumentos musicales que dependen de ondas estacionarias transversales en barras incluyen triángulos, marimbas, xilófonos, órganos de campanas, carillones y vibráfonos. Otros dispositivos que hacen sonidos a partir de barras oscilantes incluyen las cajas musicales y los carillones de viento.

En una membrana flexible estirada sobre un aro circular, como la de un parche de tambor, se establecen oscilaciones bidimensionales. Mientras la membrana se golpea en algún punto, las ondas que llegan a la frontera fija se reflejan muchas veces. El sonido resultante no es armónico porque las ondas estacionarias tienen frecuencias que *no* se relacionan mediante números enteros. Al faltar esta relación ya no se trata de sonido sino, más correctamente, de *ruido* en lugar de música. La producción de ruido contrasta con la situación de los instrumentos de aliento y cuerda que producen sonidos que se describen como musicales.

En la figura 18.16 se muestran algunos posibles modos de oscilación normales para una membrana circular bidimensional. Mientras que los nodos son *puntos* en ondas estacionarias unidimensionales sobre cuerdas y columnas de aire, un oscilador en dos dimensiones tiene *curvas* a lo largo de las que no hay desplazamiento de los elementos del medio. El modo normal más bajo, que tiene una frecuencia f_1, sólo contiene una curva nodal; esta curva corre alrededor del borde exterior de la membrana. Los otros posibles modos normales muestran curvas nodales adicionales que son círculos y líneas rectas a través del diámetro de la membrana.

18.7 Batimientos: interferencia en el tiempo

El fenómeno de interferencia estudiado hasta el momento involucra la sobreposición de dos o más ondas que tienen la misma frecuencia. Ya que la amplitud de la oscila-

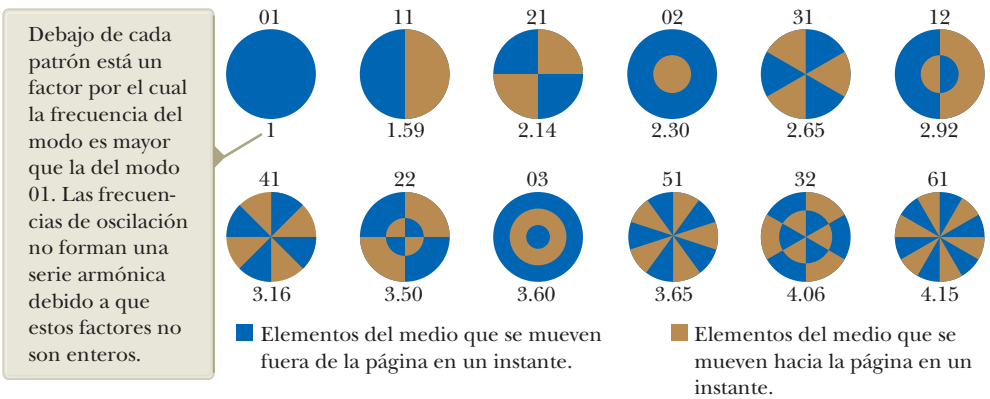


Figura 18.16 Representación de algunos de los posibles modos normales en una membrana circular fija en su perímetro. El par de números en cada patrón corresponde al número de nodos radiales y al número de nodos circulares, respectivamente. En cada diagrama, los elementos de la membrana en cualquier lado de una línea nodal se mueven en direcciones opuestas, como se indica por los colores. (*Adaptado de T. D. Rossing*, La ciencia del sonido, *3a. ed., Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publiching Co., 2001.*)

ción de los elementos del medio varía con la posición en el espacio del elemento en tal onda, a dicho fenómeno se le refiere como *interferencia espacial*. Las ondas estacionarias en cuerdas y tubos son ejemplos comunes de interferencia espacial.

Ahora considere otro tipo de interferencia, uno que resulta de la sobreposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente *diferentes*. En este caso, cuando las dos ondas se observan en un punto en el espacio, están periódicamente en y fuera de fase. Es decir: hay una alternación *temporal* (tiempo) entre interferencia constructiva y destructiva. Debido a este fenómeno se le refiere como *interferencia en el tiempo* o *interferencia temporal*. Por ejemplo, si se golpean dos diapasones de frecuencias ligeramente diferentes, uno escucha un sonido de amplitud periódicamente variable. Este fenómeno se llama **batimiento**.

El batimiento es la variación periódica en amplitud en un punto dado debido a la sobreposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes.

◀ **Definición de batimiento**

El número de máximos de amplitud que uno escucha por segundo, o la *frecuencia de batimiento*, es igual a la diferencia en frecuencia entre las dos fuentes, como se demostrará a continuación. La máxima frecuencia de batimiento que detecta el oído humano es de aproximadamente 20 batimientos/s. Cuando la frecuencia de batimiento supera este valor, los batimientos se mezclan de manera indistinguible con los sonidos que los producen.

Considere dos ondas sonoras de igual amplitud que viajan a través de un medio con frecuencias ligeramente diferentes f_1 y f_2. Usando ecuaciones similares a la ecuación 16.13 se representan las funciones de onda para estas dos ondas en un punto que identificamos como $x = 0$. También elegimos el ángulo de fase en la ecuación 16.13 como $\phi = \pi/2$:

$$y_1 = A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t\right) = A \cos\left(2\pi f_1 t\right)$$

$$y_2 = A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \omega_2 t\right) = A \cos\left(2\pi f_2 t\right)$$

Al usar el principio de sobreposición se encuentra que la función de onda resultante en este punto es

$$y = y_1 + y_2 = A\left(\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t\right)$$

La identidad trigonométrica

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a - b}{2}\right) \cos\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

permite escribir la expresión para y como

$$y = \left[2A \cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right] \cos 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t \qquad \textbf{(18.10)}$$

◀ **Resultante de dos ondas de frecuencias diferentes pero igual amplitud**

En la figura 18.17 se muestran gráficas de las ondas individuales y la onda resultante. A partir de los factores de la ecuación 18.10 se ve que la onda resultante tiene una

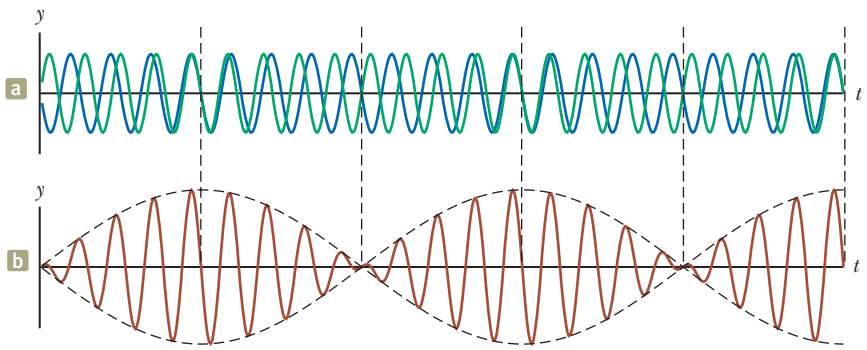


Figura 18.17 Los batimientos se forman por la combinación de dos ondas de frecuencias ligeramente diferentes. (a) Ondas individuales. (b) Onda combinada. La onda envolvente (línea discontinua) representa el batimiento de los sonidos combinados.

frecuencia efectiva igual a la frecuencia promedio $(f_1 + f_2)/2$. Esta onda se multiplica por una onda envolvente conocida por la expresión entre corchetes:

$$y_{\text{envolvente}} = 2A \cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t \tag{18.11}$$

Es decir: la amplitud y, por lo tanto, la intensidad del sonido resultante varía en el tiempo. La línea negra discontinua en la figura 18.17b es una representación gráfica de la onda envolvente en la ecuación 18.11 y es una onda seno que varía con frecuencia $(f_1 - f_2)/2$.

En la onda sonora resultante se detecta un máximo en la amplitud siempre que

$$\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t = \pm 1$$

Por tanto, existen *dos* máximos en cada periodo de la onda envolvente. Ya que la amplitud varía con la frecuencia, como $(f_1 - f_2)/2$, el número de batimientos por segundo, o la **frecuencia de batimiento** $f_{\text{batimiento}}$, es el doble de este valor. Es decir,

Frecuencia de batimiento ▶

$$f_{\text{batimiento}} = |f_1 - f_2| \tag{18.12}$$

Por ejemplo, si un diapasón vibra a 438 Hz y otro vibra después a 442 Hz, la onda sonora resultante de la combinación tiene una frecuencia de 440 Hz (la nota musical La) y una frecuencia de batimiento de 4 Hz. Un escucha oiría una onda sonora de 440 Hz que pasaría por un máximo de intensidad cuatro veces cada segundo.

Ejemplo 18.7 Las cuerdas de piano desafinadas AM

Dos cuerdas de piano idénticas, de 0.750 m de longitud, se afinan cada una exactamente a 440 Hz. La tensión en una de las cuerdas después aumenta en 1.0%. Si ahora se golpean, ¿cuál es la frecuencia de batimiento entre las fundamentales de las dos cuerdas?

SOLUCIÓN

Conceptualizar A medida que la tensión en una de las cuerdas cambia, su frecuencia fundamental cambia. Por lo tanto, cuando ambas cuerdas se tocan, tendrán diferentes frecuencias y se escucharán batimientos.

Categorizar Se debe combinar la interpretación de las *ondas bajo condiciones de frontera* para cuerdas con el reciente conocimiento de los batimientos.

Analizar Establezca una relación de las frecuencias fundamentales de las dos cuerdas con la ecuación 18.5:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{(v_2/2L)}{(v_1/2L)} = \frac{v_2}{v_1}$$

Aplique la ecuación 16.18 para sustituir las magnitudes de rapidez de onda en las cuerdas:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\sqrt{T_2/\mu}}{\sqrt{T_1/\mu}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Incorpore que la tensión en una cuerda es 1.0% mayor que la otra; es decir, $T_2 = 1.010T_1$

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{1.010T_1}{T_1}} = 1.005$$

Resuelva para la frecuencia de la cuerda tensada

$$f_2 = 1.005f_1 = 1.005(440\ \text{Hz}) = 442\ \text{Hz}$$

Encuentre la frecuencia de batimiento con la ecuación 18.12:

$$f_{\text{batimiento}} = 442\ \text{Hz} - 440\ \text{Hz} = 2\ \text{Hz}$$

Finalizar Note que una desafinación de 1.0% en la tensión conduce a una frecuencia de batimiento fácilmente audible de 2 Hz. Un afinador de piano puede usar batimientos para afinar un instrumento de cuerda al "batir" una nota contra un tono de referencia de frecuencia conocida. Después el afinador puede ajustar la tensión de la cuerda hasta que la frecuencia del sonido que emite sea igual a la frecuencia del tono de referencia. El afinador lo hace al apretar o aflojar la cuerda hasta que los batimientos producidos por ella y la fuente de referencia se vuelven prácticamente imposibles de notar.

18.8 Patrones de onda no sinusoidales

Es relativamente sencillo distinguir los sonidos que surgen de un violín y un saxofón, aun cuando ambos ejecuten la misma nota. Por otra parte, una persona no entrenada en música tendrá dificultades para distinguir una nota tocada en un clarinete de la misma nota tocada en un oboe. Se puede usar el patrón de las ondas sonoras de diferentes fuentes para explicar estos efectos.

Cuando las frecuencias, que son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental, se combinan para hacer un sonido, el resultado es un sonido *musical*. Un escucha puede asignar un tono al sonido de acuerdo con la frecuencia fundamental. El tono es una reacción psicológica a un sonido que permite al escucha colocar el sonido en una escala de bajo a alto (grave a agudo). Las combinaciones de las frecuencias que no son múltiplos enteros de una fundamental resultan en un *ruido* en lugar de un sonido musical. Es mucho más difícil para un escucha asignar un tono a un ruido que a un sonido musical.

Los patrones de onda producidos por un instrumento musical son el resultado de la sobreposición de frecuencias que son múltiplos enteros de una fundamental. Esta sobreposición resulta en la correspondiente riqueza de tonos musicales. La respuesta perceptiva humana asociada con diferentes mezclas de armónicos es la *calidad* o *timbre* del sonido. Por ejemplo, el sonido de la trompeta se percibe con una calidad "chillona" (se aprendió a asociar el adjetivo *chillón* con dicho sonido); esta calidad permite distinguir el sonido de la trompeta del propio del saxofón, cuya calidad se percibe como "alengüetada". Sin embargo, el clarinete y el oboe contienen columnas de aire excitadas por lengüetas; debido a esta similitud, tienen mezclas de frecuencias similares y es más difícil para el oído humano distinguirlas sobre la base de su calidad sonora.

Los patrones de onda sonora producidos por la mayoría de los instrumentos musicales son no sinusoidales. En la figura 18.18 se muestran los patrones característicos producidos por un diapasón, una flauta y un clarinete, cada uno tocando la misma nota. Cada instrumento tiene su propio patrón característico. Sin embargo, note que a pesar de las diferencias en los patrones, cada patrón es periódico. Este punto es importante para el análisis de estas ondas.

El problema de analizar patrones de onda no sinusoidales aparece a primera vista como una tarea formidable. Sin embargo, si el patrón de onda es periódico, se puede representar tan cercano como se desee mediante la combinación de un número suficientemente grande de ondas sinusoidales que formen una serie armónica. De hecho, cualquier función periódica se representa como una serie de términos seno y coseno con el uso de una técnica matemática en términos del **teorema de Fourier.**[2] La correspondiente suma de términos que representan el patrón de onda periódica se llama **serie de Fourier.** Sea $y(t)$ cualquier función periódica en el tiempo con un periodo T tal que $y(t + T) = y(t)$. El teorema de Fourier establece que esta función se puede escribir como

$$y(t) = \sum (A_n \operatorname{sen} 2\pi f_n t + B_n \cos 2\pi f_n t) \qquad (18.13)$$

◀ Teorema de Fourier

donde la frecuencia más baja es $f_1 = 1/T$. Las frecuencias más altas son múltiplos enteros de la fundamental, $fn = nf1$, y los coeficientes An y Bn representan las amplitudes de las diferentes ondas. La figura 18.19 de la página 554 representa un análisis armónico de los patrones de onda que se muestran en la figura 18.18. Cada barra en la gráfica representa uno de los términos en la serie en la ecuación 18.13 hasta $n = 9$. Note que un diapasón golpeado sólo produce un armónico (el primero), mientras que la flauta y el clarinete producen el primer armónico y muchos superiores.

Observe la variación en intensidad relativa de los diferentes armónicos para la flauta y el clarinete. En general, cualquier sonido musical consiste de una frecuencia

Prevención de riesgos ocultos 18.4

Tono contra frecuencia No confunda el término *tono* con *frecuencia*. La frecuencia es la medición física del número de oscilaciones por segundo. El tono es una reacción psicológica al sonido que permite a una persona colocar el sonido en una escala de alto a bajo o de agudo a grave. Por tanto, la frecuencia es el estímulo y el tono es la respuesta. Aunque el tono se relaciona principalmente (pero no por completo) con la frecuencia, no son lo mismo. Una frase como "el tono del sonido" es incorrecta, porque el tono no es una propiedad física del sonido.

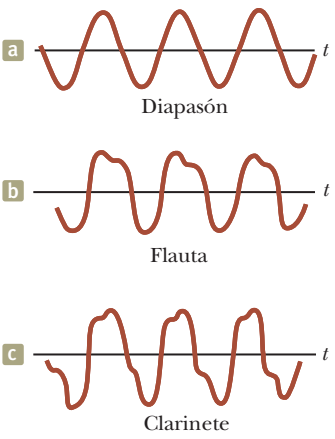


Figura 18.18 Patrones de onda sonora producidos por (a) un diapasón, (b) una flauta y (c) un clarinete, cada uno aproximadamente a la misma frecuencia.

[2] Desarrollada por Jean Baptiste Joseph Fourier (1786-1830).

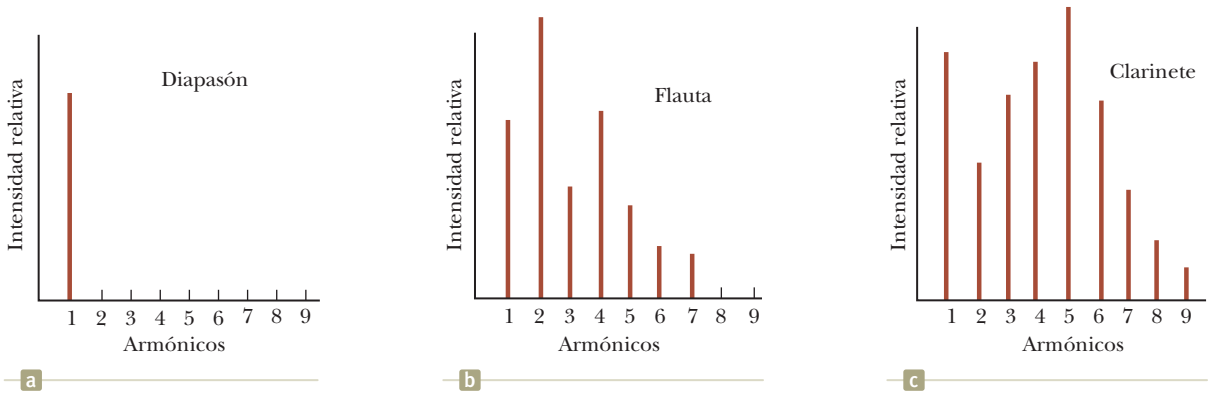


Figura 18.19 Armónicos de los patrones de onda que se muestran en la figura 18.18. Note las variaciones en intensidad de los diferentes armónicos. Los incisos (a), (b) y (c) corresponden a los de la figura 18.18.

fundamental f más otras frecuencias que son múltiplos enteros de f y todas tienen diferentes intensidades.

Se explicó el *análisis* de un patrón de onda con el uso del teorema de Fourier. El análisis implica la determinación de los coeficientes de los armónicos en la ecuación 18.13 a partir de un conocimiento del patrón de onda. El proceso inverso, llamado *síntesis de Fourier*, también se puede realizar. En este proceso, los diversos armónicos se suman para formar un patrón de onda resultante. Como ejemplo de la síntesis de Fourier, considere la construcción de una onda cuadrada, como se muestra en la figura 18.20. La simetría de la onda cuadrada sólo resulta en múltiplos impares de la frecuencia fundamental que se combina en su síntesis. En la figura 18.20a, la curva azul muestra la combinación de f y $3f$. En la figura 18.20b, se sumó $5f$ a la combinación y se obtuvo la curva verde. Observe cómo se aproxima la forma general de la onda cuadrada, aun cuando las porciones superior e inferior no son planas como debieran.

La figura 18.20c muestra el resultado de sumar frecuencias impares hasta $9f$. Esta aproximación (curva en rojo) a la onda cuadrada es mejor que las aproximaciones en las figuras 18.20a y 18.20b. Para aproximar la onda cuadrada tan cerca como sea posible se deben sumar todos los múltiplos impares de la frecuencia fundamental, hasta la frecuencia infinita.

Con el uso de tecnología moderna los sonidos musicales se pueden generar electrónicamente al mezclar diferentes amplitudes de cualquier número de armónicos. Estos sintetizadores musicales electrónicos ampliamente usados son capaces de producir una variedad infinita de tonos musicales.

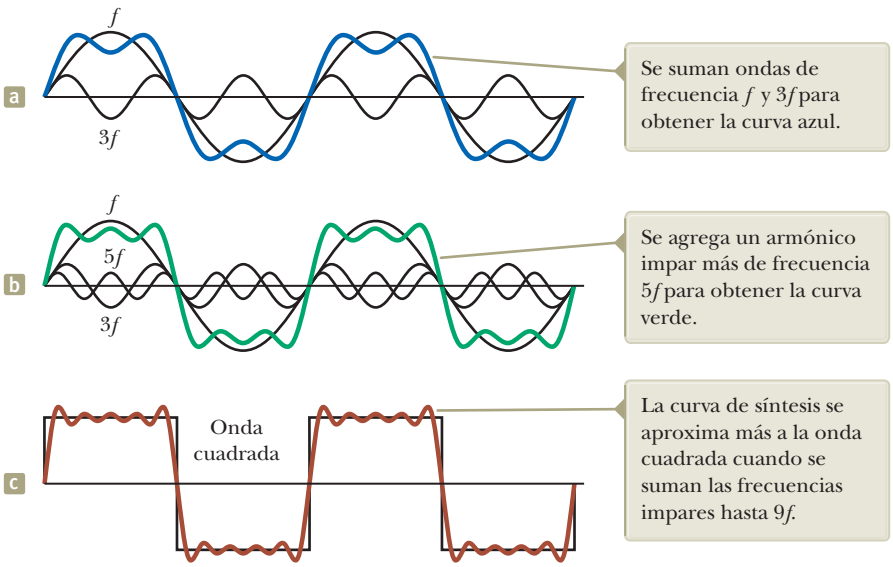


Figura 18.20 Síntesis de Fourier de una onda cuadrada que se representa mediante la suma de múltiplos impares del primer armónico, que tiene frecuencia f.

Resumen

Conceptos y principios

El **principio de sobreposición** especifica que cuando dos o más ondas se mueven a través de un medio el valor de la función de onda resultante es igual a la suma algebraica de los valores de las funciones de onda individuales.

El fenómeno de **batimiento** es la variación periódica en intensidad en un punto dado debido a la sobreposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes. La **frecuencia de batimiento** es

$$f_{\text{batimiento}} = |f_1 - f_2| \tag{18.12}$$

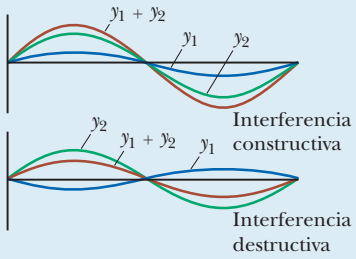
donde f_1 y f_2 son las frecuencias de las ondas individuales.

Las **ondas estacionarias** se forman a partir de la combinación de dos ondas sinusoidales que tienen la misma frecuencia, amplitud y longitud de onda, pero que viajan en direcciones opuestas. La onda estacionaria resultante se describe mediante la función de onda

$$y = (2A \operatorname{sen} kx) \cos \omega t \tag{18.1}$$

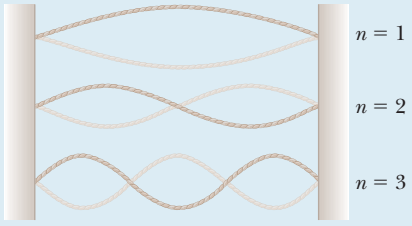
Por tanto, la amplitud de la onda estacionaria es $2A$, y la amplitud del movimiento armónico simple de cualquier partícula del medio varía de acuerdo con su posición como $2A \operatorname{sen} kx$. Los puntos de amplitud cero (llamados **nodos**) ocurren en $x = n\lambda/2$ ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$). Los puntos de amplitud máxima (llamados **antinodos**) ocurren en $x = n\lambda/4$ ($n = 1, 3, 5, \ldots$). Los antinodos adyacentes están separados por una distancia $\lambda/2$. Los nodos adyacentes también están separados por una distancia $\lambda/2$.

Análisis de modelos para resolver problemas



Ondas en interferencia. Cuando se sobreponen dos ondas viajeras que tienen igual frecuencia, la onda resultante se describe por el **principio de sobreposición** y tiene una amplitud que depende del ángulo de fase ϕ entre las dos ondas. La **interferencia constructiva** ocurre cuando las dos ondas están en fase, lo que corresponde a $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ rad. La **interferencia destructiva** se presenta cuando las dos ondas están a 180° fuera de fase, lo que corresponde a $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ rad.

Ondas bajo condiciones de frontera. Cuando una onda está sujeta a condiciones de frontera, sólo se permiten ciertas frecuencias naturales; se dice que las frecuencias están cuantizadas.



Para ondas sobre una cuerda fija en ambos extremos, las frecuencias naturales son

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.6}$$

donde T es la tensión en la cuerda y μ es su densidad de masa lineal.

Para ondas sonoras en una columna de aire abierta en ambos extremos, las frecuencias naturales son

$$f_n = n\frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{18.8}$$

Si una columna de aire está abierta en un extremo y cerrada en el otro, sólo están presentes armónicos impares y las frecuencias naturales son

$$f_n = n\frac{v}{4L} \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{18.9}$$

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. En la figura PO18.1, una onda sonora de 0.8 m de longitud de onda se divide en dos partes iguales que se recombinan para interferir constructivamente, con la diferencia original entre sus longitudes de trayectoria $|r_2 - r_1| = 0.8$ m. Clasifique las siguientes situaciones de acuerdo con la intensidad del sonido en el receptor, de mayor a menor. Suponga que las paredes del tubo no absorben energía sonora. Asigne clasificaciones idénticas a las situaciones en que la intensidad sea igual. (a) Desde su posición original la sección que se desliza se mueve 0.1 m. (b) A continuación se desliza 0.1 m adicionales. (c) Se desliza todavía otros 0.1 m. (d) Se desliza 0.1 m más.

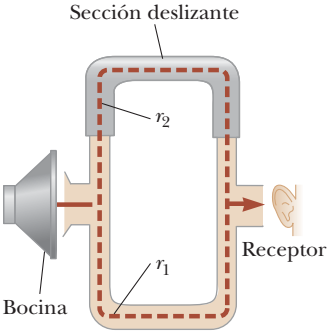


Figura PO18.1 Pregunta objetiva 1 y problema 6.

2. Una cuerda de longitud L, masa por unidad de longitud μ y tensión T está vibrando a su frecuencia fundamental. **(i)** Si la longitud de la cuerda se duplica y todos los otros factores se mantienen constantes, ¿cuál es el efecto sobre la frecuencia fundamental? (a) Se vuelve dos veces mayor. (b) Se vuelve $\sqrt{2}$ veces mayor. (c) No cambia. (d) Se vuelve $1/\sqrt{2}$ veces mayor. (e) Resulta la mitad de larga. **(ii)** Si la masa por unidad de longitud se duplica y todos los otros factores se mantienen constantes, ¿cuál es el efecto sobre la frecuencia fundamental? Elija entre las mismas posibilidades del inciso (i). **(iii)** Si la tensión se duplica y todos los otros factores se mantienen constantes, ¿cuál es el efecto sobre la frecuencia fundamental? Elija entre las mismas posibilidades del inciso (i).

3. En el ejemplo 18.1 se investigó un oscilador a 1.3 kHz que alimentaba dos bocinas idénticas lado a lado. Se encontró que un escucha en el punto O percibe el sonido con intensidad máxima, mientras que otro en el punto P percibe un mínimo. ¿Cuál es la intensidad en P? (a) Menor pero cercana a la intensidad en O, (b) la mitad de la intensidad en O, (c) muy baja pero no cero, (d) cero, (e) indeterminada.

4. Una serie de pulsos, cada uno de 0.1 m de amplitud, se envían por una cuerda que está unida a un poste en un extremo. Los pulsos se reflejan en el poste y viajan de regreso a lo largo de la cuerda sin perder amplitud. **(i)** ¿Cuál es el desplazamiento neto en un punto sobre la cuerda donde dos pulsos se cruzan? Suponga que la cuerda está firmemente unida al poste. (a) 0.4 m, (b) 0.3 m, (c) 0.2 m, (d) 0.1 m, (e) 0. **(ii)** A continuación suponga que el extremo en el que se presenta la reflexión es libre de deslizarse hacia arriba y hacia abajo. Ahora, ¿cuál es el desplazamiento neto en un punto sobre la cuerda donde dos pulsos se cruzan? Elija su respuesta entre las mismas posibilidades del inciso (i).

5. Una flauta tiene una longitud de 58.0 cm. Si la rapidez del sonido en el aire es de 343 m/s, ¿cuál es la frecuencia fundamental de la flauta, asumiendo que es un tubo cerrado en un extremo y abierto en el otro? (a) 148 Hz, (b) 296 Hz, (c) 444 Hz, (d) 591 Hz, (e) ninguna de esas respuestas.

6. Cuando dos diapasones suenan al mismo tiempo se produce una frecuencia de batimiento de 5 Hz. Si uno de los diapasones tiene una frecuencia de 245 Hz, ¿cuál es la frecuencia del otro diapasón? (a) 240 Hz, (b) 242.5 Hz, (c) 247.5 Hz, (d) 250 Hz, (e) más de una respuesta podría ser correcta.

7. Se sabe que un diapasón oscila con 262 Hz de frecuencia. Cuando se hace sonar junto con una cuerda de mandolina, se escuchan cuatro batimientos cada segundo. A continuación, en cada punta del diapasón se pone un trozo de cinta adhesiva y ahora el diapasón produce cinco batimientos por segundo, con la misma cuerda de mandolina. ¿Cuál es la frecuencia de la cuerda? (a) 257 Hz, (b) 258 Hz, (c) 262 Hz, (d) 266 Hz, (e) 267 Hz.

8. Un arquero dispara una flecha horizontalmente desde el centro de la cuerda de un arco que se mantiene vertical. Después que la flecha la deja, la cuerda del arco vibra como una sobreposición, ¿de qué armónicos de onda estacionaria? (a) Sólo vibra en el armónico número 1, el fundamental. (b) Sólo vibra en el segundo armónico. (c) Sólo vibra en los armónicos de número impar 1, 3, 5, 7, ... (d) Sólo vibra en los armónicos de número par 2, 4, 6, 8, ... (e) Vibra en todos los armónicos.

9. A medida que los pulsos de la misma forma (uno hacia arriba, el otro hacia abajo), móviles en direcciones opuestas sobre una cuerda, pasan uno sobre el otro, en un instante particular la cuerda no muestra desplazamiento de la posición de equilibrio en algún punto. ¿Qué ocurrió con la energía que portaban los pulsos en ese instante de tiempo? (a) Se usó para producir el movimiento previo. (b) Toda es energía potencial. (c) Toda es energía interna. (d) Toda es energía cinética. (e) La energía positiva de un pulso suma cero con la energía negativa del otro pulso.

10. Una onda estacionaria tiene tres nodos que se establecen en una cuerda fija en ambos extremos. Si se duplica la frecuencia de la onda, ¿cuántos antinodos tendrá? (a) 2, (b) 3, (c) 4, (d) 5, (e) 6.

11. Suponga que las seis cuerdas de una guitarra acústica se tocan sin pulsar, es decir, sin presionarlas contra los trastes. ¿Qué cantidades son iguales para las seis cuerdas? Elija toda repuesta correcta. (a) La frecuencia fundamental, (b) la longitud de onda fundamental de la onda de la cuerda, (c) la longitud de onda fundamental del sonido emitido, (d) la rapidez de la onda en la cuerda, (e) la rapidez del sonido emitido.

12. Suponga que dos ondas sinusoidales idénticas se mueven a través del mismo medio en la misma dirección. ¿Bajo qué condición la amplitud de la onda resultante será mayor que cualquiera de las dos ondas originales? (a) En todos los casos, (b) sólo si las ondas no tienen diferencia en fase, (c) sólo si la diferencia de fase es menor que 90°, (d) sólo si la diferencia de fase es menor que 120°, (e) sólo si la diferencia de fase es menor que 180°.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Un modelo burdo de la garganta humana es un tubo abierto en ambos extremos con una fuente vibrante para introducir el sonido en el tubo en un extremo. Suponiendo que la fuente vibrante produce un rango de frecuencias, analice el efecto de cambiar la longitud del tubo.

2. Cuando dos ondas interfieren constructiva o destructivamente, ¿hay alguna ganancia o pérdida en energía? Explique.

3. Explique cómo un instrumento musical, un piano, se puede afinar a partir del fenómeno de los batimientos.

4. ¿Qué limita la amplitud de movimiento de un sistema vibratorio real que es activado a una de sus frecuencias de resonancia?

5. Un diapasón por sí mismo produce un sonido débil. Explique cómo se puede usar cada uno de los siguientes cuatro métodos para obtener un sonido más fuerte de él. Explique también cualquier efecto en el intervalo de tiempo para el que el diapasón vibra de manera audible. (a) Sostenga el borde de una hoja de papel contra una punta en vibración. (b) Presione el mango del diapasón contra un pizarrón o mesa. (c) Sostenga el diapasón sobre una columna de aire de longitud adecuada, como en el ejemplo 18.6. (d) Sostenga el diapasón cerca de una ranura abierta cortada en una hoja de foamy o de cartón (con una ranura similar en tamaño y forma a una punta del diapasón y moviendo las puntas perpendiculares a la hoja).

6. Un mecánico de aviación nota que el sonido de un avión de dos motores varía rápidamente en sonoridad cuando ambos motores están en marcha. ¿Qué podría causar esta vibración de fuerte a suave?

7. A pesar de una mano razonablemente estable, con frecuencia una persona derrama su café cuando lo lleva a su asiento. Explique la resonancia como una posible causa de esta dificultad e imagine medios para evitar los derrames.

8. Una botella de refresco resuena si se sopla aire en su parte superior. ¿Qué sucede con la frecuencia de resonancia conforme el nivel de líquido en la botella disminuye?

9. ¿El fenómeno de interferencia de onda se aplica sólo a ondas sinusoidales?

Problemas

1. sencillo; 2. intermedio; 3. desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Nota: A menos que se especifique lo contrario, tome la rapidez del sonido en el aire como 343 m/s, su valor a una temperatura del aire de 20.0°C. En cualquier otra temperatura en grados Celsius T_C, la rapidez del sonido en el aire es descrita por

$$v = 331\sqrt{1 + \frac{T_C}{273}}$$

donde v está en m/s y T está en °C.

Sección 18.1 Análisis de modelo: ondas en interferencia

1. Dos ondas viajan en la misma dirección a lo largo de una cuerda estirada. Las ondas están 90.0° fuera de fase. Cada onda tiene una amplitud de 4.00 cm. Encuentre la amplitud de la onda resultante.

2. Dos pulsos A y B se mueven en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda tensa con una rapidez $v = 2.00$ cm/s. La amplitud de A es el doble de la amplitud de B. Los pulsos se muestran en la figura P18.2 en $t = 0$. Bosqueje la onda resultante en $t = 1.00$ s, 1.50 s, 2.00 s, 2.50 s y 3.00 s.

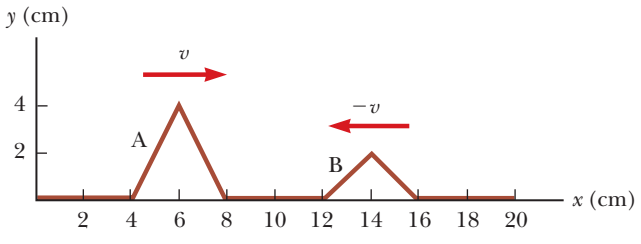


Figura P18.2

3. Dos ondas sobre una cuerda se describen mediante las funciones de onda

$$y_1 = 3.0\cos(4.0x - 1.6t) \qquad y_2 = 4.0\,\text{sen}\,(5.0x - 2.0t)$$

donde x y y están en centímetros y t está en segundos. Determine la sobreposición de las ondas $y_1 + y_2$ en los puntos (a) $x = 1.00$, $t = 1.00$; (b) $x = 1.00$, $t = 0.500$, y (c) $x = 0.500$, $t = 0$. *Nota*: recuerde que los argumentos de las funciones trigonométricas están en radianes.

4. Dos pulsos de diferentes amplitudes se acercan mutuamente, cada uno con una rapidez $v = 1.00$ m/s. La figura P18.4 muestra las posiciones de los pulsos en el tiempo $t = 0$. (a) Bosqueje la onda resultante en $t = 2.00$ s, 4.00 s, 5.00 s y 6.00 s. (b) **¿Qué pasaría si?** Si se invierte el pulso a la derecha, ¿cómo cambiarían sus dibujos de la onda resultante?

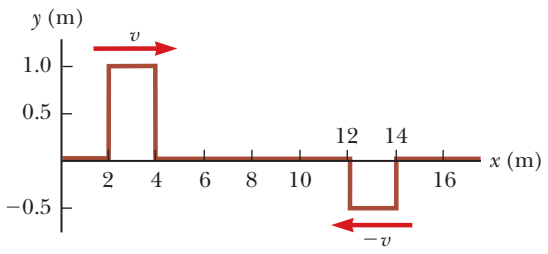


Figura P18.4

5. Un diapasón genera ondas de sonido con una frecuencia de 246 Hz. Las ondas viajan en direcciones opuestas a lo

largo de un pasillo, son reflejadas por las paredes laterales y regresan. El pasillo tiene 47.0 m de largo y el diapasón está situado a 14.0 m de uno de los extremos. ¿Cuál es la diferencia de fase entre las ondas reflejadas cuando se encuentran en el diapasón vibratorio? La rapidez del sonido en el aire es de 343 m/s.

6. El sistema acústico que se muestra en la figura PO18.1 es activado por una bocina que emite sonido de frecuencia 756 Hz. (a) Si la interferencia constructiva se produce en un lugar particular de la sección deslizante, qué distancia mínima debe deslizarse la sección moviéndose hacia arriba para que ocurra interferencia destructiva en ese lugar? (b) Qué distancia mínima desde la posición original de la sección deslizante debe deslizarse para que otra vez pueda haber interferencia constructiva?

7. Dos pulsos que viajan sobre la misma cuerda se describen mediante

$$y_1 = \frac{5}{(3x - 4t)^2 + 2} \qquad y_2 = \frac{-5}{(3x + 4t - 6)^2 + 2}$$

(a) ¿En qué dirección viaja cada pulso? (b) ¿En qué instante los dos se cancelan en todas partes? (c) ¿En qué punto los pulsos siempre se cancelan?

8. Dos bocinas idénticas se colocan en una pared separadas 2.00 m. Un escucha está de pie a 3.00 m de la pared, directamente enfrente de una de las bocinas. Un solo oscilador activa las bocinas a una frecuencia de 300 Hz. (a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos ondas cuando llegan al observador? (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la frecuencia más cercana a 300 Hz a la cual el oscilador se ajusta de tal modo que el observador escuche sonido mínimo?

9. Dos ondas sinusoidales viajeras están descritas por las funciones de onda

$$y_1 = 5.00 \text{ sen } [\pi(4.00x - 1\,200t)]$$

$$y_2 = 5.00 \text{ sen } [\pi(4.00x - 1\,200t - 0.250)]$$

donde x, y_1 y y_2 están en metros y t en segundos. (a) ¿Cuál es la amplitud de la función de onda resultante $y_1 + y_2$? (b) ¿Cuál es la frecuencia de la onda resultante?

10. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Dos bocinas idénticas se activan mediante el mismo oscilador de 200 Hz de frecuencia. Las bocinas se ubican en el suelo a una distancia de 4.00 m una de la otra. Un hombre camina directo hacia la bocina de la derecha como se muestra en la figura P18.10. Después de escuchar tres mínimos en la intensidad sonora, camina hacia el siguiente máximo y se detiene. Ignore cualquier reflexión de sonido producida por el suelo.

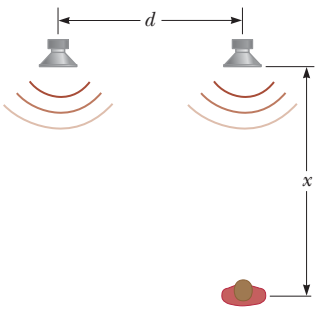


Figura P18.10

11. Dos ondas sinusoidales en una cuerda están descritas por las funciones de onda

$$y_1 = 2.00 \text{ sen } (20.0x - 32.0t) \qquad y_2 = 2.00 \text{ sen } (25.0x - 40.0t)$$

donde x, y_1 y y_2 están en centímetros y t en segundos. (a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre estas dos ondas en el punto $x = 5.00$ cm en $t = 2.00$ s? (b) ¿Cuál es el valor x positivo más cercano al origen para el que las dos fases difieran por $\pm\pi$ en $t = 2.00$ s? (Ésta es una posición donde las dos ondas suman cero.)

12. Dos ondas sinusoidales idénticas con longitudes de onda de 3.00 m viajan en la misma dirección con una rapidez de 2.00 m/s. La segunda onda se origina en el mismo punto como la primera, pero en un tiempo después. La amplitud de la onda resultante es igual a la de cada una de las dos ondas iniciales. Determine el intervalo de tiempo mínimo posible entre los momentos en que parten las dos ondas.

13. Dos bocinas idénticas separadas 10.0 m son activadas por el mismo oscilador con una frecuencia $f = 21.5$ Hz (figura P18.13) en una zona donde la rapidez del sonido es de 344 m/s. (a) Demuestre que un receptor en el punto A registra un mínimo de intensidad del sonido de las dos bocinas. (b) Si el receptor se mueve en el plano de los altavoces, muestre que la trayectoria que debe seguir para mantener en un mínimo las intensidades a lo largo de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ (mostrada en rojo en la figura P18.13). (c) ¿Puede el receptor permanecer en un mínimo y alejarse de las dos fuentes? Si es así, determine la forma limitante de la trayectoria que debe tomar. Si no es así, explique qué tanto se puede alejar.

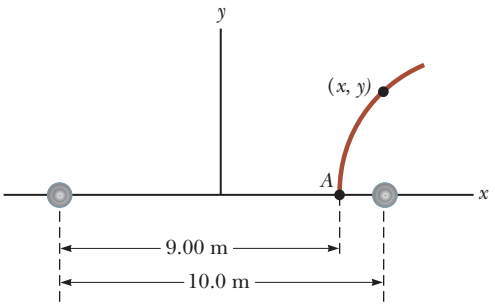


Figura P8.13

Sección 18.2 Ondas estacionarias

14. Dos ondas simultáneamente presentes sobre una cuerda larga tienen una diferencia de fase ϕ entre ellas de modo que una onda formada a partir de su combinación esté descrita por

$$y(x, t) = 2A \text{ sen } \left(kx + \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right)$$

(a) A pesar de la presencia del ángulo de fase ϕ, ¿es cierto que los nodos están separados por media longitud de onda? Explique. (b) ¿Son los nodos diferentes de alguna manera de lo que serían si ϕ fuera cero? Explique.

15. Dos ondas sinusoidales que viajan en direcciones opuestas interfieren para producir una onda estacionaria con la función de onda

$$y = 1.50 \text{ sen } (0.400x) \cos (200t)$$

donde x y y están en metros, y t en segundos. Determine (a) la longitud de onda, (b) la frecuencia y (c) la rapidez de las ondas que interfieren.

16. Verifique por sustitución directa que la función de onda para una onda estacionaria dada en la ecuación 18.1,

$$y = (2A \operatorname{sen} kx) \cos \omega t$$

es una solución de la ecuación de onda lineal general, la ecuación 16.27:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

17. Dos ondas sinusoidales transversales que se combinan en un medio se describen mediante las funciones de onda

$$y_1 = 3.00 \operatorname{sen} \pi(x + 0.600t) \qquad y_2 = 3.00 \operatorname{sen} \pi(x - 0.600t)$$

donde x, y_1 y y_2 están en centímetros, y t en segundos. Determine la máxima posición transversal de un elemento del medio en (a) $x = 0.250$ cm, (b) $x = 0.500$ cm y (c) $x = 1.50$ cm. (d) Encuentre los tres valores más pequeños de x que correspondan a antinodos.

18. Una onda estacionaria está descrita por la función de onda

$$y = 6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos(100\pi t)$$

donde x y y están en metros, y t en segundos. (a) Prepare una gráfica que muestre y como función de x para $t = 0$, para $t = 5$ ms, para $t = 10$ ms, para $t = 15$ ms y para $t = 20$ ms. (b) A partir de la gráfica identifique la longitud de onda de la onda y explique cómo lo hizo. (c) A partir de la gráfica identifique la frecuencia de la onda y explique cómo lo hizo. (d) A partir de la ecuación identifique directamente la longitud de onda de la onda y explique cómo lo hizo. (e) A partir de la ecuación identifique directamente la frecuencia y explique cómo lo hizo.

19. Dos bocinas idénticas se activan en fase mediante un oscilador común a 800 Hz y se enfrentan mutuamente a una distancia de 1.25 m. Ubique los puntos a lo largo de la línea que une las dos bocinas donde se esperarían mínimos relativos de amplitud de presión sonora.

Sección 18.3 Análisis de modelo: ondas bajo condiciones de frontera

20. Se establece una onda en una cuerda de 120 cm de longitud fijada en ambos extremos. La cuerda vibra en cuatro segmentos cuando se activa a 120 Hz. (a) Determine la longitud de onda. (b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de la cuerda?

21. Una cuerda con masa $m = 8.00$ g y longitud $L = 5.00$ m tiene un extremo unido a una pared y el otro extremo pasa sobre una pequeña polea fija a una distancia $d = 4.00$ m de la pared y se amarra a un objeto colgante con una masa $M = 4.00$ kg, como en la figura P18.21. Si la parte horizontal de la cuerda se pulsa, ¿cuál es la frecuencia fundamental de su vibración?

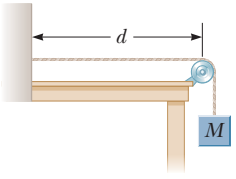


Figura P18.21

22. La cuerda superior de una guitarra tiene una frecuencia fundamental de 330 Hz cuando se le permite vibrar como un todo, a lo largo de su longitud de 64.0 cm desde el cuello al puente. Un traste se proporciona para limitar la vibración sólo a los dos tercios inferiores de la cuerda. (a) Si la cuerda se presiona en este traste y se pulsa, ¿cuál es la nueva frecuencia fundamental? (b) **¿Qué pasaría si?** El guitarrista puede pulsar un "armónico natural" al tocar suavemente la cuerda en la posición de este traste y pulsar la cuerda a aproximadamente un sexto del camino a lo largo de su longitud desde el puente. ¿Qué frecuencia se escuchará entonces?

23. La cuerda La en un chelo vibra en su primer modo normal con una frecuencia de 220 Hz. El segmento vibrante tiene 70.0 cm de largo y una masa de 1.20 g. (a) Encuentre la tensión en la cuerda. (b) Determine la frecuencia de vibración cuando la cuerda oscila en tres segmentos.

24. Una cuerda tensada tiene una longitud de 2.60 m y se fija en ambos extremos. (a) Encuentre la longitud de onda del modo fundamental de vibración de la cuerda. (b) ¿Puede encontrar la frecuencia de este modo? Explique por qué sí o por qué no.

25. Una cuerda vibrante dada en un piano tiene una longitud de 74.0 cm y forma una onda que tiene dos antinodos. (a) ¿Qué armónico representa esta onda? (b) Determine la longitud de onda de esta onda. (c) ¿Cuántos nodos hay en el patrón de onda?

26. Una cuerda que tiene 30.0 cm de largo y una masa por unidad de longitud de 9.00×10^{-3} kg/m se estira a una tensión de 20.0 N. Encuentre (a) la frecuencia fundamental y (b) las siguientes tres frecuencias que podrían causar los patrones de onda estacionaria en la cuerda.

27. En el arreglo que se muestra en la figura P18.27, un objeto se puede colgar de una cuerda (con densidad de masa lineal $\mu = 0.002\,00$ kg/m) que pasa sobre una polea ligera. La cuerda se conecta a un vibrador (de frecuencia constante f) y la longitud de la cuerda entre el punto P y la polea es $L = 2.00$ m. Cuando la masa m del objeto es 16.0 kg o 25.0 kg, se observan ondas estacionarias; sin embargo, no se observan ondas estacionarias con alguna masa entre estos valores. (a) ¿Cuál es la frecuencia del vibrador? *Nota*: mientras mayor es la tensión en la cuerda, menor es el número de nodos en la onda estacionaria. (b) ¿Cuál es la masa más grande del objeto con el cual se podrían observar ondas estacionarias?

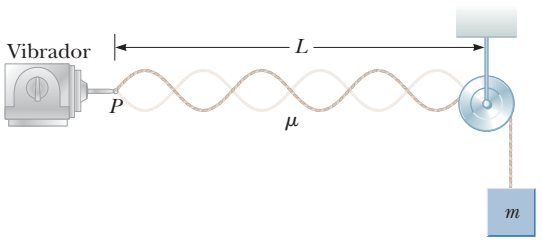


Figura P18.27 Problemas 27 y 28.

28. En el arreglo que se muestra en la figura P18.27, un objeto de masa $m = 5.00$ kg cuelga de una cuerda alrededor de una polea ligera. La longitud del cable entre la polea y el punto P es $L = 2.00$ m. (a) Cuando el vibrador se ajusta a una frecuencia de 150 Hz se forma una onda estacionaria con seis bucles. ¿Cuál debe ser la densidad de masa lineal de la cuerda? (b) ¿Cuántos bucles (si existen) se produci-

rán si m se cambia a 45.0 kg? (c) ¿Cuántos bucles (si existen) se producirá si m se cambia a 10.0 kg?

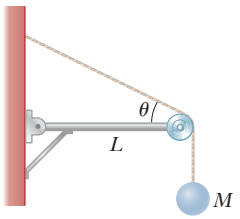


Figura P18.29
Problemas 29 y 30.

29. **Problema de repaso.** Una esfera de masa $M = 1.00$ kg se sostiene mediante una cuerda que pasa sobre una polea en el extremo de una barra horizontal ligera de longitud $L = 0.300$ m (figura P18.29). La cuerda hace un ángulo $\theta = 35°$ con la barra. La frecuencia fundamental de ondas estacionarias en la porción de la cuerda sobre la barra es $f = 60.0$ Hz. Determine la masa de esta porción de la cuerda arriba de la barra.

30. **Problema de repaso.** Una esfera de masa M se sostiene mediante una cuerda que pasa sobre una polea en el extremo de una barra horizontal ligera de longitud L (figura P18.29). La cuerda hace un ángulo θ con la barra. La frecuencia fundamental de ondas estacionarias en la porción de la cuerda sobre la barra es f. Determine la masa de esta porción de la cuerda arriba de la barra.

31. Una cuerda de violín tiene una longitud de 0.350 m y se afina en Sol concierto, con $f_G = 392$ Hz. (a) ¿Dónde debe colocar su dedo el violinista para tocar La concierto, con $f_A = 440$ Hz? (b) Si esta posición permanece correcta a un medio del ancho de un dedo (es decir, dentro de 0.600 cm), ¿cuál es el máximo cambio porcentual permisible en la tensión de la cuerda?

32. **Problema de repaso.** Un objeto de cobre cuelga en la parte baja de un alambre de acero de masa despreciable. El extremo superior del alambre está fijo. Cuando el alambre se golpea, emite sonido con una frecuencia fundamental de 300 Hz. Después el objeto de cobre se sumerge en agua de modo que la mitad de su volumen está abajo de la línea del agua. Determine la nueva frecuencia fundamental.

33. Se observa un patrón de onda estacionaria en un alambre fino con una longitud de 3.00 metros. La función de onda es

$$y = 0.002\,00 \operatorname{sen}(\pi x) \cos(100\pi t)$$

donde x y y están en metros, y t en segundos. (a) ¿Cuántos bucles muestra este patrón? (b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de vibración del alambre? (c) **¿Qué pasaría si?** Si la frecuencia original se mantiene constante y aumenta la tensión en el cable por un factor de 9, ¿cuántos bucles están presentes en el nuevo patrón?

Sección 18.4 Resonancia

34. La Bahía de Fundy, en Nueva Escocia, tiene las mareas más altas del mundo. Suponga que en medio del océano y en la boca de la bahía el gradiente de gravedad de la Luna y la rotación de la Tierra hacen que la superficie del agua oscile con una amplitud de unos cuantos centímetros y un periodo de 12 h 24 min. En el nacimiento de la bahía, la amplitud es de varios metros. Suponga que la bahía tiene una longitud de 210 km y una profundidad uniforme de 36.1 m. La rapidez de las ondas acuáticas de longitud de onda larga está dada por $v = \sqrt{gd}$, donde d es la profundidad del agua. Argumente a favor o en contra de la proposición de que la marea se amplifica por resonancia de ondas estacionarias.

35. Un terremoto puede producir un *seiche* (oscilación de un cuerpo fluido) en un lago en el que el agua se derrama de ida y vuelta de un extremo al otro con amplitud notablemente grande y periodo largo. Considere un seiche producido en el estanque rectangular de una granja. Suponga que el estanque tiene 9.15 m de largo con ancho y profundidad uniformes. Usted mide que un pulso producido en un extremo llega al otro extremo en 2.50 s. (a) ¿Cuál es la rapidez de la onda? (b) ¿Cuál debería ser la frecuencia del movimiento de tierra durante el terremoto para producir un seiche que es una onda con antinodos en cada extremo del estanque y un nodo en el centro?

36. Se puede utilizar sonido de alta frecuencia para producir vibraciones de ondas estacionarias en una copa de vino. Se observa que una onda estacionaria de vibración en un vaso de vino tiene cuatro nodos y cuatro antinodos equidistantes alrededor de la circunferencia de 20.0 cm del borde de la copa. Si las ondas transversales se mueven alrededor de la copa a 900 m/s, ¿con qué frecuencia tendría que cantar una cantante de ópera para producir un armónico alto para romper la copa con una vibración resonante, como se muestra en la figura P18.36?


Steve Bronstein/Stone/Getty Images

Figura P18.36

Sección 18.5 Ondas estacionarias en columnas de aire

37. La tráquea de una grulla blanca típica es de 5.00 pies de largo. ¿Cuál es la frecuencia resonante fundamental de la tráquea del ave, modelada como un tubo estrecho cerrado en un extremo? Tome una temperatura de 37°C.

38. Si un conducto auditivo humano puede ser pensado como que se parece a un tubo de órgano, cerrado en un extremo, que resuena en una frecuencia fundamental de 3 000 Hz, ¿cuál es la longitud del canal? Utilice una temperatura corporal normal de 37°C para determinar la rapidez del sonido en el canal.

39. Calcule la longitud de un tubo que tiene una frecuencia fundamental de 240 Hz, si supone que el tubo está (a) cerrado en un extremo y (b) abierto en ambos extremos.

40. La longitud global de un flautín es de 32.0 cm. La columna de aire resonante vibra como en un tubo abierto en ambos extremos. (a) Encuentre la frecuencia de la nota más baja que puede producir un flautín. (b) Abrir orificios en el lado acorta efectivamente la longitud de la columna resonante. Suponga que la nota más alta que un flautín puede producir es de 4 000 Hz. Encuentre la distancia entre antinodos adyacentes para este modo de vibración.

41. La frecuencia fundamental de un tubo de órgano abierto corresponde al Do medio (261.6 Hz en la escala cromática musical). La tercera resonancia de un tubo de órgano cerrado tiene la misma frecuencia. ¿Cuál es la longitud de (a) el tubo abierto? y (b) el tubo cerrado?

42. El tubo más largo en un determinado órgano mide 4.88 m. ¿Cuál es la frecuencia fundamental (a 0.00 °C) si el tubo es (a) cerrado en un extremo y (b) abierto en los dos extremos. (c) ¿Cuáles serán las frecuencias a 20.0°C?

43. Una columna de aire en un tubo de vidrio está abierta en un extremo y cerrada en el otro mediante un pistón móvil. El aire en el tubo se calienta arriba de la temperatura ambiente y un diapasón de 384 Hz se mantiene en el extremo abierto. Cuando el pistón está a $d_1 = 22.8$ cm del extremo abierto se escucha resonancia y, una vez más, cuando está a $d_2 = 68.3$ cm del extremo abierto. (a) ¿Qué rapidez de sonido se implica con estos datos? (b) ¿A qué distancia del extremo abierto estará el pistón cuando se escuche la siguiente resonancia?

44. Un diapasón con una frecuencia de $f = 512$ Hz se coloca cerca de lo alto del tubo que se muestra en la figura 18.44. El nivel del agua se baja de modo que la longitud L aumenta lentamente desde un valor inicial de 20.0 cm. Determine los siguientes dos valores de L que correspondan a modos resonantes.

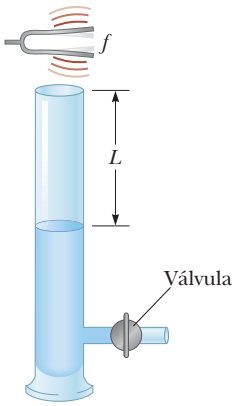


Figura P18.44

45. Con una pulsación particular, una flauta produce una nota con frecuencia de 880 Hz a 20.0°C. La flauta está abierta en ambos extremos. (a) Encuentre la longitud de la columna de aire. (b) Encuentre la frecuencia que produce la flauta al inicio del espectáculo de medio tiempo en un juego de futbol americano de final de temporada, cuando la temperatura ambiente es de −5.00°C y el músico no tiene oportunidad de calentar la flauta. Encuentre la frecuencia que produce la flauta bajo estas condiciones.

46. El casillero de una ducha tiene dimensiones de 86.0 cm × 86.0 cm × 210 cm. Suponga que el casillero actúa como un tubo cerrado en ambos extremos, con nodos en lados opuestos. Suponga que las voces de diferentes cantantes varían de 130 Hz a 2 000 Hz. Sea 355 m/s la rapidez del sonido en el aire caliente. Para alguien cantando en la ducha, qué frecuencias parecerán más ricas (debido a la resonancia).

47. Un tubo de vidrio (abierto en ambos extremos) de longitud L se coloca cerca de una bocina de audio de frecuencia $f = 680$ Hz. ¿Para qué valores de L resonará el tubo con la bocina?

48. Un túnel bajo un río tiene 2.00 km de largo. (a) ¿A qué frecuencia puede resonar el aire en el túnel? (b) Explique si sería bueno hacer una regla contra tocar el claxon de su automóvil cuando está en el túnel.

49. Como se muestra en la figura P18.49, el agua se bombea a un cilindro vertical alto con una relación de flujo volumétrico $R = 1.00$ L/min. El radio del cilindro es $r = 5.00$ cm y en la parte superior abierta del cilindro vibra un diapasón con una frecuencia $f = 512$ Hz. A medida que el agua asciende, ¿qué intervalo de tiempo transcurre entre resonancias sucesivas?

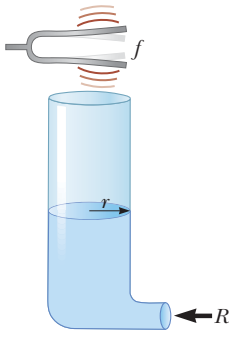


Figura P18.49
Problemas 49 y 50.

50. Como se muestra en la figura P18.49, el agua se bombea a un cilindro vertical alto con una relación de flujo volumétrico R. El radio del cilindro es r y en la parte superior abierta del cilindro vibra un diapasón con una frecuencia f. A medida que el agua asciende, ¿qué intervalo de tiempo transcurre entre resonancias sucesivas?

51. Dos frecuencias naturales adyacentes de un tubo de órgano se determinan en 550 Hz y 650 Hz. Calcule (a) la frecuencia fundamental y (b) la longitud de este tubo.

52. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un estudiante está escuchando los sonidos de una columna de aire que tiene 0.730 m de largo. No sabe si la columna está abierta en ambos extremos o abierta en un solo extremo. Oye resonancia de la columna de aire con frecuencias 235 Hz y 587 Hz.

53. Un estudiante usa un oscilador de audio de frecuencia ajustable para medir la profundidad de un pozo de agua. El estudiante reporta que escucha dos resonancias sucesivas a 51.87 Hz y 59.85 Hz. (a) ¿Qué tan profundo es el pozo? (b) ¿Cuántos antinodos hay en la onda estacionaria a 51.87 Hz?

Sección 18.6 Ondas estacionarias en barras y membranas

54. Una barra de aluminio se sujeta a una cuarta parte a lo largo de su longitud y se pone en vibración longitudinal mediante una fuente impulsora de frecuencia variable. La frecuencia más baja que produce resonancia es 4 400 Hz. La rapidez del sonido en una barra de aluminio es 5 100 m/s. Determine la longitud de la barra.

55. Una barra de aluminio de 1.60 m de largo se mantiene en su centro. Se golpea con un paño recubierto con resina para establecer una vibración longitudinal. La rapidez del sonido en una delgada barra de aluminio es de 5 100 m/s. (a) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de las ondas establecidas en la barra? (b) ¿Qué armónicos se establecen en la barra sostenida de esta forma? (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál sería la frecuencia fundamental si la barra fuese de cobre, material en el que la rapidez del sonido es de 3 560 m/s?

Sección 18.7 Batimientos: interferencia en el tiempo

56. Mientras intenta afinar la nota Do a 523 Hz, un afinador de pianos escucha 2.00 batimientos/s entre un oscilador de referencia y la cuerda. (a) ¿Cuáles son las posibles frecuencias de la cuerda? (b) Cuando aprieta la cuerda ligeramente, escucha 3.00 batimientos/s. ¿Ahora cuál es la frecuencia de la cuerda? (c) ¿En qué porcentaje el afinador debe cambiar la tensión en la cuerda para que quede afinada?

57. En ciertos intervalos de un teclado de piano, más de una cuerda se afina a la misma nota para proporcionar sonoridad adicional. Por ejemplo, la nota a 110 Hz tiene dos cuerdas a esta frecuencia. Si una cuerda se desliza de su tensión normal de 600 N a 540 N, ¿qué frecuencia de batimiento se escucha cuando el martillo golpea las dos cuerdas simultáneamente?

58. **Problema de repaso.** Jane espera en una plataforma del ferrocarril mientras dos trenes se aproximan desde la misma dirección a rapideces iguales de 8.00 m/s. Ambos trenes están soplando sus silbatos (que tienen la misma

frecuencia), y un tren está a cierta distancia detrás del otro. Después que el primer tren pasa a Jane, pero antes que el segundo tren pase, escucha batimientos de frecuencia 4.00 Hz. ¿Cuál es la frecuencia de los silbidos del tren?

59. **Problema de repaso.** Un estudiante sostiene un diapasón que oscila a 256 Hz. Camina hacia una pared con una rapidez constante de 1.33 m/s. (a) ¿Qué frecuencia de batimiento observa entre el diapasón y su eco? (b) ¿Qué tan rápido debe caminar alejándose de la pared para observar una frecuencia de batimiento de 5.00 Hz?

Sección 18.8 Patrones de onda no sinusoidales

60. Un acorde La mayor consiste de las notas llamadas La, Do sostenido y Mi. Se puede ejecutar en un piano al golpear simultáneamente las cuerdas con frecuencias fundamentales de 440.00 Hz, 554.37 Hz y 659.26 Hz. La magnífica consonancia del acorde se asocia con igualdad cercana de las frecuencias de algunos de los armónicos más altos de los tres tonos. Considere los primeros cinco armónicos de cada cuerda y determine cuáles armónicos muestran casi igualdad.

61. Suponga que un flautista ejecuta una nota Do de 523 Hz con amplitud de desplazamiento del primer armónico $A_1 = 100$ nm. A partir de la figura 18.19b, lea, por proporción, las amplitudes de desplazamiento de los armónicos del 2 al 7. Considérelos como los valores del A_2 al A_7 en el análisis de Fourier del sonido y suponga $B_1 = B_2 = \cdots = B_7 = 0$. Construya una gráfica de la forma de onda del sonido. Su forma de onda no se parecerá exactamente a la forma de onda de flauta de la figura 18.18b porque usted simplifica al ignorar los términos coseno; no obstante, produce la misma sensación a la audición humana.

Problemas adicionales

62. Un tubo abierto en ambos extremos tiene una frecuencia fundamental de 300 Hz cuando la temperatura es de 0°C. (a) ¿Cuál es la longitud del tubo? (b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental a una temperatura de 30.0°C?

63. Una cuerda tiene 0.400 m de largo y tiene una masa por unidad de longitud de 9.00×10^{-3} kg/m. ¿Cuál debe ser la tensión de la cuerda si su segundo armónico tiene la misma frecuencia que el segundo modo de resonancia de 1.75 m de un tubo largo abierto en un extremo?

64. Dos cuerdas vibran en la misma frecuencia de 150 Hz. Después que se disminuye la tensión en una de las cuerdas, un observador oye cuatro batimientos por segundo cuando las cuerdas vibran juntas. Determine la nueva frecuencia en la cuerda ajustada.

65. La lancha de la figura P18.65 viaja a lo largo de una línea recta paralela a la costa y a una distancia $d = 600$ m de ésta. El radio de la lancha recibe señales simultáneas de la misma frecuencia de antenas A y B, separadas una distancia $L = 800$ m. Las señales interfieren constructivamente en el punto C, que es equidistante de la A y B. La señal enviada por el primer mínimo en el punto D, es directamente hacia fuera de la orilla del punto B. Determine la longitud de onda de las ondas de radio.

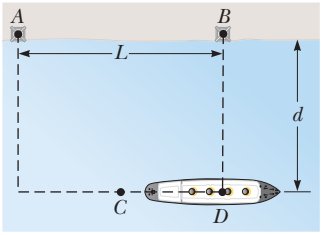


Figura P18.65

66. Un alambre de 2.00 m de largo con una masa de 0.100 kg se fija en ambos extremos. La tensión en el cable se mantiene en 20.0 N. (a) ¿Cuáles son las frecuencias de los tres primeros modos permitidos de vibración? (b) Si un nodo se observa en un punto a 0.400 m de uno de los extremos, ¿en qué modo y con qué frecuencia vibra?

67. El traste más cercano al puente en una guitarra está a 21.4 cm del puente, como se muestra en la figura P18.67. Cuando se presiona la cuerda más delgada en este primer traste, produce la frecuencia más alta que se puede tocar en la guitarra, 2 349 Hz. La siguiente nota más baja que se produce en la cuerda tiene frecuencia de 2 217 Hz. ¿A qué distancia del primer traste debe de estar el siguiente traste?

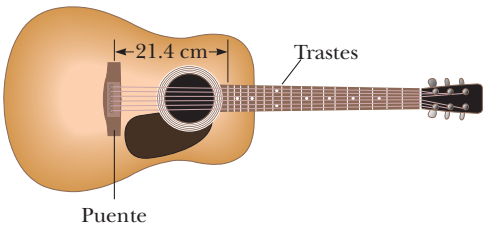


Figura P18.67

68. Una cuerda fija en ambos extremos y que tiene una masa de 4.80 g, una longitud de 2.00 m y una tensión de 48.0 N vibra en su segundo modo normal ($n = 2$). (a) ¿Es mayor o menor la longitud de onda en el aire del sonido emitido por esta cuerda vibrante que la longitud de onda de la onda en la cuerda? (b) ¿Cuál es la razón entre la longitud de onda en el aire del sonido emitido por esta cuerda vibrante y la longitud de onda de la onda en la cuerda?

69. Un reloj de cuarzo contiene un oscilador de cristal en forma de bloque de cuarzo que vibra mediante contracción y expansión. Un circuito eléctrico alimenta energía para mantener la oscilación y también cuenta los pulsos de voltaje para mantener el tiempo. Dos caras opuestas del bloque, separadas 7.05 mm, son antinodos, y se mueven de manera alterna acercándose y alejándose mutuamente. El plano a la mitad entre estas dos caras es un nodo de la vibración. La rapidez del sonido en el cuarzo es de 3.70×10^3 m/s. Encuentre la frecuencia de la vibración.

70. **Problema de repaso.** Para el arreglo que se muestra en la figura P18.70, el plano inclinado y la pequeña polea no tie-

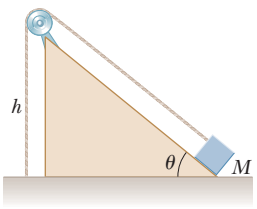


Figura P18.70

nen fricción, la cuerda soporta el objeto de masa M en el fondo del plano y la cuerda tiene masa m. El sistema está en equilibrio y la parte vertical de la cuerda tiene una longitud h. Queremos estudiar las ondas que se establecen en la sección vertical de la cuerda. (a) ¿Qué análisis de modelo describe al objeto de masa M? (b) ¿Qué análisis de modelo describe las ondas en la parte vertical de la cuerda? (c) Encuentre la tensión en la cuerda. (d) Modele la forma de la cuerda como un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Encuentre la longitud total de la cuerda. (e) Determine la masa por unidad de longitud de la cuerda. (f) Encuentre la rapidez de las ondas en la cuerda. (g) Halle la frecuencia más baja para una onda estacionaria. (h) Evalúe este resultado para $M = 1.50$ kg, $m = 0.750$ g, $h = 0.500$ m y $\theta = 30.0°$. (i) Determine el valor numérico de la frecuencia más baja para una onda en la sección inclinada de la cuerda.

71. Un alambre de 0.0100 kg, 2.00 m de largo, se fija en ambos extremos y vibra en su modo más simple bajo una tensión de 200 N. Cuando se coloca un diapasón vibrante cerca del cable se escucha una frecuencia de batimiento de 5.00 Hz. (a) ¿Cuál podría ser la frecuencia del diapasón vibratorio? (b) ¿Cuál sería la tensión en el cable si los batimientos desaparecen?

72. Dos bocinas idénticas se activan mediante el mismo oscilador de frecuencia f. Las bocinas se ubican a una distancia d una de otra sobre un poste vertical. Un hombre camina directo hacia la bocina inferior en una dirección perpendicular al poste, como se muestra en la figura P18.72 (a) ¿Cuántas veces escuchará un mínimo en la intensidad del sonido? (b) ¿A qué distancia está del poste en estos momentos? Sea v la rapidez del sonido y suponga que el suelo no refleja sonido. Los oídos del hombre están en el mismo nivel que la bocina inferior.

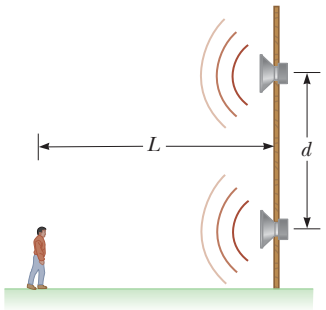


Figura P18.72

73. **Problema de repaso.** Considere el aparato que se muestra en la figura 18.11 y descrito en el ejemplo 18.4. Suponga que el número de antinodos en la figura 18.11b es un valor arbitrario n. (a) Encuentre una expresión para el radio de la esfera en el agua como una función solo de n. (b) ¿Cuál es el mínimo valor permitido de n para una esfera de tamaño distinto de cero? (c) ¿Cuál es el radio de la esfera más grande que se producirá en una onda en la cuerda? (d) ¿Qué pasa si se utiliza una esfera más grande?

74. **Problema de repaso.** El extremo superior de una cuerda de un yo-yo se mantiene en reposo. De hecho, el yo-yo es más pesado que la cuerda. Parte del reposo y se mueve hacia abajo con aceleración constante de 0.800 m/s^2 mientras se desenrolla de la cuerda. El roce de la cuerda contra el borde del yo-yo excita vibraciones de onda estacionaria transversales en la cuerda. Ambos extremos de la cuerda son nodos, incluso cuando la longitud de la cuerda aumenta. Considere el instante 1.20 s después que comienza el movimiento a partir del reposo. (a) Demuestre que la razón de cambio con el tiempo de la longitud de onda del modo fundamental de oscilación es 1.92 m/s. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿La razón de cambio de la longitud de onda del segundo armónico también es 1.92 m/s en este momento? Explique su respuesta. (c) **¿Qué pasaría si?** El experimento se repite después de agregar más masa al cuerpo del yo-yo. La distribución de masa se mantiene igual, de modo que el yo-yo todavía se mueve con aceleración hacia abajo de 0.800 m/s^2. En el punto 1.20 s, ¿la razón de cambio de la longitud de onda fundamental de la cuerda en vibración aún es igual a 1.92 m/s? Explique. (d) ¿La razón de cambio de la longitud de onda del segundo armónico es la misma que en el inciso (b)? Explique.

75. Cuando se golpea la barra de madera que reproduce un tono en una marimba (figura P18.75), vibra en una onda estacionaria transversal que tiene tres antinodos y dos nodos. La nota de frecuencia más baja es 87.0 Hz, producida por la barra de 40.0 cm de largo. (a) Encuentre la rapidez de las ondas transversales sobre la barra. (b) Un tubo resonante suspendido verticalmente bajo el centro de la barra aumenta la sonoridad del sonido emitido. Si el tubo está abierto sólo en el extremo superior, ¿cuál es la longitud del tubo requerida para resonar con la barra en el inciso (a)?



© ArenaPal/Topham/The Image Works. Reproduced by permission.

Figura P18.75

76. Una cuerda de nylon tiene 5.50 g de masa y longitud $L = 86.0$ cm. El extremo inferior se amarra al suelo y el extremo superior está unido a un pequeño conjunto de ruedas a través de una ranura en una pista en la cual se mueven las ruedas (figura P18.76). Las ruedas tienen una masa que es despreciable en comparación con la cuerda, y ruedan sin fricción en la pista para que el extremo superior de la cuerda este esencialmente libre. En equilibrio, la cuerda es vertical e inmóvil. Cuando porta una onda de pequeña amplitud, puede suponer que la cuerda está siempre bajo una tensión uniforme de 1.30 N. (a) Encuentre la rapidez de las ondas transversales en la cuerda. (b) Las posibilidades de vibración de la cuerda son un conjunto de

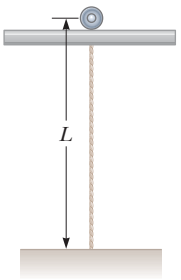


Figura P18.76

estados de onda estacionaria cada uno con un nodo en el extremo inferior fijo y un antinodo en el extremo superior libre. Determine las distancias nodo-antinodo para cada uno de los tres estados más simples. (c) Encuentre la frecuencia de cada uno de estos estados.

77. Dos silbatos de tren tienen frecuencias idénticas de 180 Hz. Cuando un tren está en reposo en la estación y el otro se mueve cerca, un viajero que está de pie en la plataforma de la estación escucha batimientos con una frecuencia de 2.00 batimientos/s, cuando los silbatos funcionan juntos. ¿Cuáles son las dos posibles magnitudes de velocidad y dirección que puede tener el tren en movimiento?

78. **Problema de repaso.** Una bocina enfrente de una habitación y una bocina idéntica en la parte trasera de la habitación se activan mediante el mismo oscilador a 456 Hz. Una estudiante camina con rapidez uniforme de 1.50 m/s a lo largo de la longitud de la habitación. Escucha un solo tono, que alternativamente es más fuerte y más débil. (a) Modele estas variaciones como batimientos entre los sonidos con el corrimiento Doppler que la estudiante recibe. Calcule el número de batimientos que escucha la estudiante cada segundo. (b) Modele las dos bocinas como productoras de una onda estacionaria en la habitación y a la estudiante como si caminara entre antinodos. Calcule el número de máximos de intensidad que la estudiante escucha cada segundo.

79. **Problema de repaso.** Considere el objeto de cobre colgando del alambre de acero en el problema 32. El extremo superior del alambre se fija. Cuando el alambre es golpeado, emite sonido con una frecuencia fundamental de 300 Hz. Luego se sumerge el objeto de cobre en agua. Si el objeto se puede colocar con cualquier fracción deseada de su volumen sumergido, ¿cuál es la nueva frecuencia fundamental más baja posible?

80. Dos alambres se sueldan juntos por los extremos. Los alambres están hechos del mismo material, pero el diámetro de uno tiene el doble del otro. Ambos están sujetos a una tensión de 4.60 N. El alambre delgado tiene una longitud de 40.0 cm y una densidad de masa lineal de 2.00 g/m. La combinación está fija en ambos extremos y vibra en tal forma que dos antinodos están presentes, con el nodo entre ellos precisamente en la soldadura. (a) ¿Cuál es la frecuencia de vibración? (b) ¿Cuál es la longitud del alambre grueso?

81. Una cuerda con 1.60 g/m de densidad lineal se estira entre dos tornillos de banco separados 48.0 cm. La cuerda no se estira apreciablemente mientras la tensión en él se eleva de manera estable de 15.0 N en $t = 0$ a 25.0 N en $t = 3.50$ s. Por lo tanto, la tensión como función del tiempo está dada por la expresión $T = 15.0 + 10.0t/3.50$. La cuerda vibra en su modo fundamental a lo largo de este proceso. Encuentre el número de oscilaciones que completa durante el intervalo de 3.50 s.

82. Se establece una onda estacionaria en una cuerda de longitud y tensión variables por medio de un vibrador de frecuencia variable. Ambos extremos de la cuerda están fijos. Cuando el vibrador tiene una frecuencia f, en una cuerda de longitud L y bajo tensión T, se establecen n antinodos en la cuerda. (a) Si la longitud de la cuerda se duplica, ¿en qué factor cambiará la frecuencia de modo que se produzca el mismo número de antinodos? (b) Si la frecuencia y longitud se mantienen constantes, ¿qué tensión producirá $n + 1$ antinodos? (c) Si la frecuencia se triplica y la longitud de la cuerda se acorta a la mitad, ¿en qué factor cambiará la tensión de modo que se produzca el doble de antinodos?

83. Dos ondas se describen mediante las funciones de onda

$$y_1(x, t) = 5.00 \text{ sen } (2.00x - 10.0t)$$

$$y_2(x, t) = 10.0 \cos (2.00x - 10.0t)$$

donde y_1, y_2 y x están en metro y t en segundos. (a) Demuestre que la onda resultante a partir de su sobreposición se puede expresar como una función sencilla. (b) Determine la amplitud y ángulo de fase de esta onda sinusoidal.

84. Una flauta está diseñada para que produzca una frecuencia de 261.6 Hz, Do medio, cuando están cubiertos todos los agujeros y la temperatura es de 20.0°C. (a) Considere la flauta como un tubo abierto en ambos extremos. Encuentre la longitud de la flauta, suponiendo que el Do medio es el fundamental. (b) Un segundo músico, cerca en un cuarto frío, también intenta tocar Do medio en una flauta idéntica. Una frecuencia de batimiento de 3.00 Hz se escucha cuando se tocan las dos flautas. ¿Cuál es la temperatura del segundo cuarto?

85. Problema **de repaso.** Un objeto de 12.0 kg cuelga en equilibrio de una cuerda con una longitud total de $L = 5.00$ m y una densidad de masa lineal $\mu = 0.001\ 00$ kg/m. La cuerda se enrolla alrededor de dos poleas ligeras sin fricción separadas una distancia $d = 2.00$ m (figura P18.85a). (a) Determine la tensión en la cuerda. (b) ¿A qué frecuencia debe vibrar la cuerda entre las poleas para formar el patrón de onda estacionaria que se muestra en la figura P18.85b?

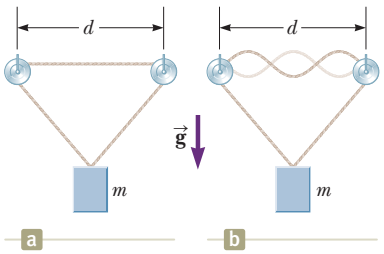


Figura P18.85 Problemas 85 y 86.

86. **Problema de repaso.** Un objeto de masa m cuelga en equilibrio de una cuerda con una longitud total L y una densidad de masa lineal μ. La cuerda se enrolla alrededor de dos poleas ligeras sin fricción separadas una distancia d (figura P18.85a). (a) Determine la tensión en la cuerda. (b) ¿A qué frecuencia debe vibrar la cuerda entre las poleas para formar el patrón de onda estacionaria que se muestra en la figura P18.85b?

Problemas de desafío

87. **Problema de repaso.** Considere el aparato que se muestra en la figura P18.87a, donde el objeto colgante tiene masa M y la cuerda está vibrando en su segundo armónico. La varilla vibrante de la izquierda mantiene una frecuencia constante. El viento empieza a soplar a la derecha, apli-

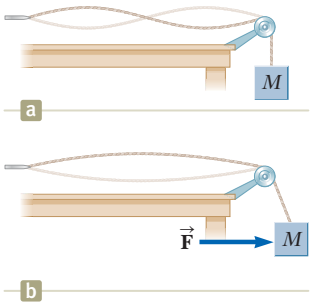


Figura P18.87

cando una fuerza horizontal constante $\vec{\mathbf{F}}$ en el objeto colgante. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que el viento debe aplicar al objeto colgante para que la cuerda vibre en su primer armónico, como se muestra en la figura 18.87b?

88. En las figuras 18.20a y 18.20b, observe que la amplitud de la onda de la componente para la frecuencia f es grande, para que $3f$ sea pequeño, y $5f$ sea más pequeño aún. ¿Cómo sabemos exactamente cuánta amplitud asignar a cada componente de frecuencia para construir una onda cuadrada? Este problema nos ayuda a encontrar la respuesta a esa pregunta. Sea que la onda cuadrada de la figura 18.20c tenga una amplitud A y sea $t = 0$ en el extremo izquierdo de la figura. Entonces, un periodo T de la onda cuadrada está descrito por

$$y(t) = \begin{cases} A & 0 < t < \dfrac{T}{2} \\ -A & \dfrac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Exprese la ecuación 18.13 con frecuencias angulares:

$$y(t) = \sum_n (A_n \operatorname{sen} n\omega t + B_n \cos n\omega t)$$

Ahora procedemos como sigue. (a) Multiplique ambos lados de la ecuación 18.13 por sen $m\omega t$ e integre ambos lados sobre un periodo T. Demuestre que el lado izquierdo de la ecuación resultante es igual a 0 si m es par y es igual a $4A/m\omega$ si m es impar. (b) Utilizando identidades trigonométricas, demuestre que todos los términos del lado derecho que contienen a B_n son iguales a cero. (c) Usando identidades trigonométricas, demuestre que todos los términos del lado derecho que tienen a A_n son igual a cero, *excepto* en el caso que $m = n$. (d) Demuestre que todo el lado derecho de la ecuación se reduce a $\frac{1}{2}A_m T$. (e) Demuestre que la expansión de la serie de Fourier de una onda cuadrada es

$$y(t) = \sum_n \frac{4A}{n\pi} \operatorname{sen} n\omega t$$

Termodinámica

PARTE 3



Una burbuja en una de las múltiples zonas de barro del Parque Nacional Yellowstone captada en el momento de estallar. Una zona de barro es una alberca de barro caliente burbujeante que muestra la existencia de procesos termodinámicos bajo la superficie de la Tierra. *(© Adambooth/Dreamstime.com)*

Ahora nos concentraremos en el estudio de la termodinámica, que implica situa- ciones en donde la temperatura o estado (sólido, líquido, gas) de un sistema cambia debido a transferencias de energía. Se verá que la termodinámica es muy exitosa al explicar las propiedades volumétricas de la materia y la correlación entre estas propiedades y la mecánica de átomos y moléculas.

Históricamente, el desarrollo de la termodinámica fue paralelo al de la teoría atómica de la materia. Hacia 1820, los experimentos químicos habían proporcionado fuerte evidencia de la existencia de átomos. En esa época los científicos reconocieron que debía existir una conexión entre la termodinámica y la estructura de la materia. En 1827, el botánico Robert Brown reportó que granos de polen suspendidos en un líquido se movían erráticamente de un lugar a otro como si estuvieran bajo agitación constante. En 1905, Albert Einstein usó la teoría cinética para explicar la causa de este movimiento errático, conocido en la actualidad como *movimiento browniano*. Einstein explicó este fenómeno al suponer que los granos están bajo bombardeo constante de moléculas "invisibles" en el líquido, y que son éstas las que se mueven erráticamente. Esta explicación inspiró a los científicos sobre el concepto de movimiento molecular y dio credibilidad a la idea de que la materia está hecha de átomos. Así se forjó una conexión entre el mundo cotidiano y los minúsculos bloques constructores invisibles que conforman este mundo.

La termodinámica también aborda cuestiones más prácticas. ¿Usted se ha preguntado cómo un refrigerador es capaz de enfriar su contenido, o qué tipos de transformaciones ocurren en una planta eléctrica o en el motor de su automóvil, o qué le sucede a la energía cinética de un objeto en movimiento cuando llega al reposo? Las leyes de la termodinámica pueden emplearse para proporcionar explicaciones de estos y otros fenómenos. ■

CAPÍTULO

19

Temperatura

19.1 Temperatura y ley cero de la termodinámica

19.2 Termómetros y escala de temperatura Celsius

19.3 Termómetro de gas a volumen constante y escala absoluta de temperatura

19.4 Expansión térmica de sólidos y líquidos

19.5 Descripción macroscópica de un gas ideal



¿Por qué alguien diseñaría una tubería que incluyera estos extraños bucles? Es frecuente que las tuberías que transportan líquidos tengan dichos bucles para permitir la expansión y contracción a medida que cambia la temperatura. En este capítulo se estudiará la expansión térmica. *(© Lowell Georgia/CORBIS)*

En el estudio de la mecánica se definieron cuidadosamente conceptos como *masa*, *fuerza* y *energía cinética* para facilitar el método cuantitativo. De igual modo, una descripción cuantitativa de los fenómenos térmicos requiere definiciones precisas de términos tan importantes como *temperatura, calor y energía interna*. Este capítulo inicia con una discusión de la temperatura.

A continuación se considera la importancia de la sustancia particular que se investiga cuando se estudian fenómenos térmicos. Por ejemplo, los gases se expanden apreciablemente cuando se calientan, mientras que los líquidos y los sólidos sólo se expanden ligeramente.

Este capítulo concluye con un estudio de los gases ideales en la escala macroscópica. Aquí se consideran las relaciones entre cantidades como presión, volumen y temperatura de un gas. En el capítulo 21 se examinarán los gases en una escala microscópica mediante un modelo que representa los componentes de un gas como partículas pequeñas.

19.1 Temperatura y ley cero de la termodinámica

Con frecuencia el concepto de temperatura se asocia con qué tan caliente o frío se siente un objeto cuando se toca. De esta forma, los sentidos proporcionan una indicación cualitativa de la temperatura. Sin embargo, los sentidos no son confiables y es frecuente que generen errores. Por ejemplo, si usted está parado, descalzo, con un

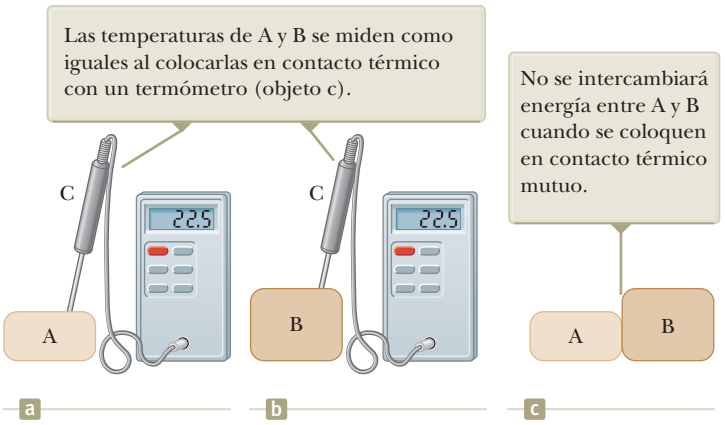


Figura 19.1 Ley cero de la termodinámica.

pie sobre la alfombra y el otro sobre un mosaico adyacente, éste se siente más frío que la alfombra *aun cuando ambos estén a la misma temperatura*. Los dos objetos se sienten diferentes porque el mosaico transfiere energía por calor a una rapidez mayor que la alfombra. Su piel "mide" la rapidez de transferencia de energía por calor y no la temperatura real. Se necesita un método confiable y reproducible para medir lo caliente o lo frío relativo de los objetos en lugar de la rapidez de transferencia de energía. Los científicos han desarrollado una variedad de termómetros para efectuar tales mediciones cuantitativas.

Dos objetos a diferentes temperaturas iniciales finalmente llegan a una temperatura intermedia cuando se colocan en contacto mutuo. Por ejemplo, cuando en una tina de baño se mezclan agua caliente y agua fría, se transfiere energía del agua caliente al agua fría y la temperatura final de la mezcla tiene un valor entre las temperaturas caliente y fría iniciales.

Imagine que dos objetos se colocan en un recipiente aislado tal que interactúan entre sí pero no con el ambiente. Si los objetos están a diferentes temperaturas, entre ellos se transfiere energía, incluso si al inicio no están en contacto físico mutuo. Los mecanismos de transferencia de energía del capítulo 8, que tratará este capítulo, son el calor y la radiación electromagnética. Para propósitos de esta discusión, suponga que dos objetos están en **contacto térmico** mutuo si entre ellos pueden intercambiar energía mediante dichos procesos debido a una diferencia de temperatura. El **equilibrio térmico** es una situación en la que dos objetos no intercambian energía, por calor o por radiación electromagnética, si se colocan en contacto térmico.

Considere dos objetos A y B, que no están en contacto térmico, y un tercer objeto C, que es un termómetro. Se quiere determinar si A y B están en equilibrio térmico entre sí. El termómetro (objeto C) primero se coloca en contacto térmico con el objeto A hasta llegar al equilibrio térmico,[1] como se muestra en la figura 19.1a. A partir de ese momento la lectura del termómetro permanece constante y se registra. Luego el termómetro se retira del objeto A y se coloca en contacto térmico con el objeto B, como se ilustra en la figura 19.1b. De nuevo, se registra la lectura después de lograr el equilibrio térmico. Si las dos lecturas son iguales, se concluye que el objeto A y el objeto B están en equilibrio entre sí. Si se colocan en contacto mutuo, como en la figura 19.1c, no hay intercambio de energía entre ellos.

Estos resultados se resumen en un enunciado conocido como **ley cero de la termodinámica** (ley de equilibrio):

> Si los objetos A y B están por separado en equilibrio térmico con un tercer objeto C, entonces A y B están en equilibrio térmico entre sí.

◀ **Ley cero de la termodinámica**

[1] Se supone una cantidad despreciable de transferencia de energía entre el termómetro y el objeto A durante el intervalo de tiempo de contacto térmico. Sin esta suposición, que también se hace para el termómetro y el objeto B, la medición de la temperatura de un objeto perturba al sistema, de modo que la temperatura medida es diferente de la temperatura inicial del objeto. En la práctica, siempre que mida una temperatura con un termómetro, usted mide el sistema perturbado, no el sistema original.

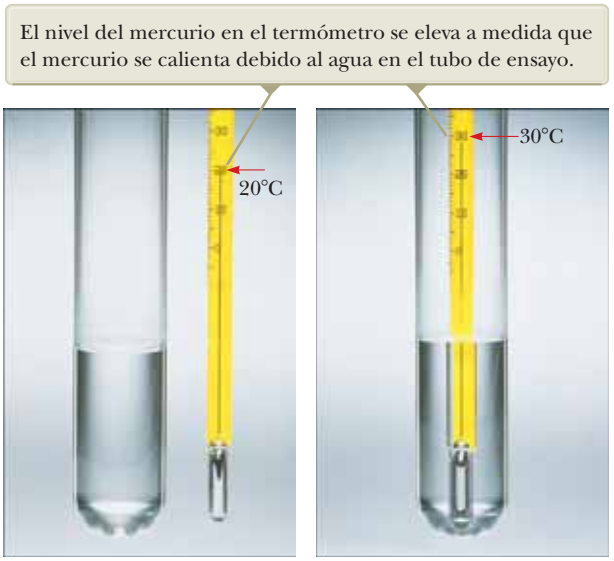
Este enunciado se prueba fácilmente de manera experimental y es muy importante porque permite definir la temperatura. Se puede considerar a la **temperatura** como la propiedad que determina si un objeto está en equilibrio térmico con otros objetos. Dos objetos que están en equilibrio térmico entre sí están a la misma temperatura. En sentido inverso, si dos objetos tienen diferentes temperaturas, no se encuentran en equilibrio térmico mutuo. Ahora se conoce que la temperatura es algo que determina si se transferirá o no energía entre dos objetos en contacto térmico. En el capítulo 21 se relacionará la temperatura con el comportamiento mecánico de las moléculas.

Examen rápido 19.1 Dos objetos, con diferentes tamaños, masas y temperaturas, se ponen en contacto térmico. ¿En qué dirección viaja la energía? **(a)** La energía viaja del objeto más grande al objeto más pequeño. **(b)** La energía viaja del objeto con más masa al que tiene menos masa. **(c)** La energía viaja del objeto con mayor temperatura al objeto con menor temperatura.

19.2 Termómetros y escala de temperatura Celsius

Los termómetros son dispositivos que sirven para medir la temperatura de un sistema. Todos los termómetros se basan en el principio de que alguna propiedad física de un sistema cambia a medida que varía la temperatura del sistema. Algunas propiedades físicas que cambian con la temperatura son (1) el volumen de un líquido, (2) las dimensiones de un sólido, (3) la presión de un gas a volumen constante, (4) el volumen de un gas a presión constante, (5) la resistencia eléctrica de un conductor y (6) el color de un objeto.

Un termómetro de uso cotidiano consiste de una masa de líquido, por lo general mercurio o alcohol, que se expande en un tubo capilar de vidrio cuando se calienta (figura 19.2). En este caso la propiedad física que cambia es el volumen de un líquido. Cualquier cambio de temperatura en el rango del termómetro se define como proporcional al cambio en longitud de la columna de líquido. El termómetro se calibra al colocarlo en contacto térmico con un sistema natural que permanezca a temperatura constante. Uno de dichos sistemas es una mezcla de hielo y agua en equilibrio térmico a presión atmosférica. En la **escala de temperatura Celsius**, esta mezcla se define que tiene una temperatura de cero grados Celsius, que se escribe como 0°C; esta temperatura se llama *punto de hielo* del agua. Otro sistema empleado comúnmente es una mezcla de agua y vapor en equilibrio térmico a presión atmosférica; su temperatura se define como 100°C, que es el *punto de vapor* del agua. Una



© Cengage Learning/Charles D. Winters

Figura 19.2 Termómetro de mercurio antes y después de incrementar su temperatura.

vez que los niveles del líquido en el termómetro se establecen en estos dos puntos, la longitud de la columna de líquido entre los dos puntos se divide en 100 segmentos iguales para crear la escala Celsius. Por lo tanto, cada segmento indica un cambio en temperatura de un grado Celsius.

Los termómetros calibrados de esta manera presentan problemas cuando se necesitan lecturas de extrema precisión. Por ejemplo, las lecturas dadas por un termómetro de alcohol calibrado en los puntos de hielo y de vapor de agua podrían coincidir con las lecturas del termómetro de mercurio sólo en los puntos de calibración. Como el mercurio y el alcohol tienen diferentes propiedades de expansión térmica, entonces cuando un termómetro lee una temperatura de, por ejemplo, 50°C, el otro puede indicar un valor ligeramente distinto. Las discrepancias entre termómetros son especialmente grandes cuando las temperaturas a medir están lejos de los puntos de calibración.[2]

Un problema adicional, que es práctico de cualquier termómetro, es el rango limitado de temperaturas en las que se puede emplear. Un termómetro de mercurio, por ejemplo, no se puede usar por abajo del punto de congelación del mercurio, que es −39°C, y un termómetro de alcohol no es útil para medir temperaturas superiores a 85°C, el punto de ebullición del alcohol. Para superar este problema se necesita un termómetro universal cuyas lecturas sean independientes de la sustancia empleada. El termómetro de gas, que se estudia en la siguiente sección, se aproxima a este requisito.

19.3 Termómetro de gas a volumen constante y escala absoluta de temperatura

Una versión de un termómetro de gas es el aparato de volumen constante que se muestra en la figura 19.3. El cambio físico que se aprovecha en este dispositivo es la variación de la presión de un volumen de gas fijo debida a la temperatura. La ampolleta se sumerge en un baño de hielo-agua, y el depósito de mercurio B se eleva o baja hasta que la parte superior del mercurio en la columna A esté en el punto cero de la escala. La altura h, la diferencia entre los niveles de mercurio en el depósito B y la columna A, indica la presión en la ampolleta a 0°C mediante la ecuación 14.4, $P = P_0 + \rho g h$.

Enseguida la ampolleta se sumerge en agua al punto de vapor. El depósito B se reajusta hasta que la parte superior del mercurio en la columna A de nuevo esté en cero en la escala, lo cual garantiza que el volumen del gas es el mismo que era cuando la ampolleta estaba en el baño de hielo (de ahí la designación de "volumen constante"). Este ajuste del depósito B da un valor para la presión de gas a 100°C. Después estos dos valores de presión y temperatura se grafican como se muestra en la figura 19.4. La línea que une los dos puntos sirve como una curva de calibración para temperaturas desconocidas. (Otros experimentos demuestran que una relación lineal entre presión y temperatura es una muy buena suposición.) Para medir la temperatura de una sustancia, el matraz de gas de la figura 19.3 se coloca en contacto térmico con la sustancia y la altura del depósito B se ajusta hasta que la parte superior de la columna de mercurio en A esté en cero en la escala. La altura de la columna de mercurio en B indica la presión del gas; al conocer la presión, la temperatura de la sustancia se encuentra mediante la gráfica de la figura 19.4.

Ahora suponga que utiliza termómetros de gas para medir las temperaturas de diferentes gases a distintas presiones iniciales. Los experimentos demuestran que las lecturas del termómetro son casi independientes del tipo de gas empleado, en tanto la presión del gas sea baja y la temperatura esté arriba del punto de licuefacción (figura 19.5). El acuerdo entre termómetros que emplean diversos gases mejora a medida que se reduce la presión.

El volumen del gas en la ampolleta se mantiene constante al elevar o bajar el depósito B para mantener constante el nivel de mercurio en la columna A.

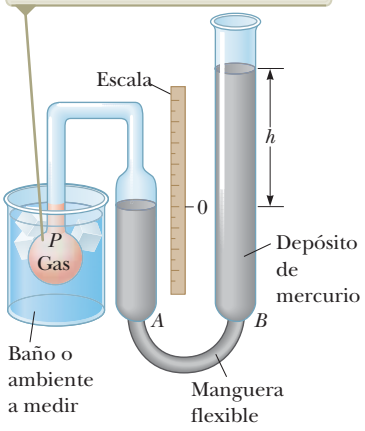


Figura 19.3 Un termómetro de gas a volumen constante mide la presión del gas contenido en la ampolleta sumergida en el baño.

Los dos puntos representan temperaturas de referencia conocidas (los puntos de hielo y vapor del agua).

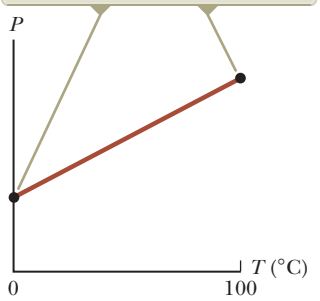


Figura 19.4 Una gráfica típica de presión contra temperatura tomada con un termómetro de gas a volumen constante.

[2] Dos termómetros que usan el mismo líquido también pueden dar lecturas diferentes, debido en parte a las dificultades en la construcción de tubos capilares de vidrio uniformes.

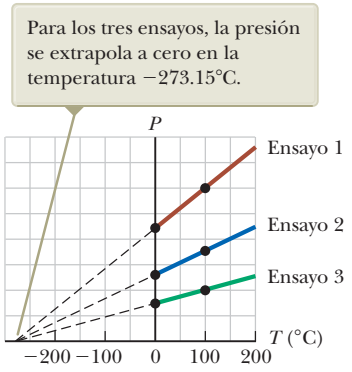


Figura 19.5 Presión contra temperatura para ensayos experimentales en gases que tienen diferentes presiones en un termómetro de gas a volumen constante.

Prevención de riesgos ocultos 19.1

Cuestión de grado Las notaciones para temperaturas en la escala Kelvin no usan el signo de grado. La unidad para una temperatura Kelvin es simplemente "kelvins" y no "grados Kelvin".

Si las líneas rectas de la figura 19.5 se extienden hacia temperaturas negativas, se encuentra un resultado notable: **¡en cada caso, la presión es cero cuando la temperatura es −273.15°C!** Este hallazgo sugiere algún papel especial que esta temperatura particular debe tener. Se usa como la base para la **escala absoluta de temperatura**, que establece −273.15°C como su punto cero. A esta temperatura usualmente se le refiere como **cero absoluto**. Se indica como cero porque a una temperatura más baja, la presión del gas sería negativa, lo que no tiene sentido. El tamaño de un grado en la escala absoluta de temperatura se elige como idéntica al tamaño de un grado en la escala Celsius. Por lo tanto, la conversión entre dichas temperaturas es

$$T_C = T - 273.15 \qquad (19.1)$$

donde T_C es la temperatura Celsius y T es la temperatura absoluta.

Ya que los puntos de hielo y vapor son experimentalmente difíciles de duplicar y dependen de la presión atmosférica, en 1954 el Comité Internacional de Pesos y Medidas adoptó una escala absoluta de temperatura en base a dos nuevos puntos fijos. El primer punto es el cero absoluto. La segunda temperatura de referencia para esta nueva escala se eligió como el **punto triple del agua**, que es la combinación única de temperatura y presión en donde el agua líquida, gaseosa y sólida (hielo) coexisten en equilibrio. Este punto triple ocurre a una temperatura de 0.01°C y una presión de 4.58 mm de mercurio. En la escala nueva, que usa la unidad *kelvin*, la temperatura del agua en el punto triple se estableció en 273.16 kelvins, abreviada 273.16 K. Esta elección se hizo de modo que la antigua escala absoluta de temperatura, basada en los puntos de hielo y vapor, concordara cercanamente con la nueva escala basada en el punto triple. Esta nueva escala absoluta de temperatura (también llamada **escala Kelvin**) emplea la unidad del SI de temperatura absoluta, el **kelvin**, que se define como 1/273.16 de la diferencia entre el cero absoluto y la temperatura del punto triple del agua.

La figura 19.6 da la temperatura absoluta de varios procesos físicos y estructuras. La temperatura del cero absoluto (0 K) no se puede lograr, aunque experimentos de laboratorio han estado muy cerca de lograrlo, alcanzando temperaturas de menos de un nanokelvin.

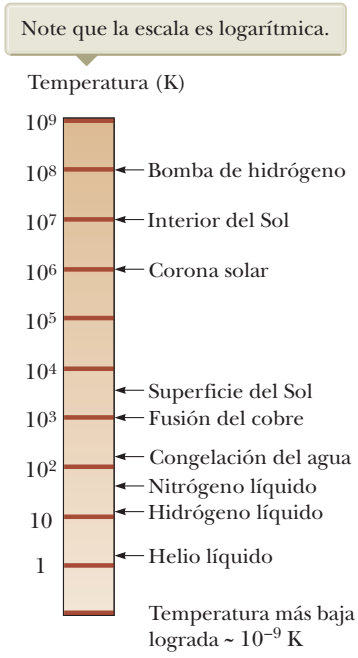


Figura 19.6 Temperaturas absolutas a las que ocurren varios procesos físicos.

Las escalas de temperatura Celsius, Fahrenheit y Kelvin[3]

La ecuación 19.1 muestra que la temperatura Celsius T_C se desplaza de la temperatura absoluta (Kelvin) T en 273.15°. Ya que el tamaño de un grado es el mismo en las dos escalas, una diferencia de temperatura de 5°C es igual a una diferencia de temperatura de 5 K. Las dos escalas sólo difieren en la elección del punto cero. Por lo tanto, la temperatura del punto hielo en la escala Kelvin, 273.15 K, corresponde a 0.00°C, y el punto de vapor en la escala Kelvin, 373.15 K, es equivalente a 100.00°C.

Una escala de temperatura común de uso cotidiano en Estados Unidos es la **escala Fahrenheit**. Dicha escala ubica la temperatura del punto de hielo en 32°F y la temperatura del punto de vapor en 212°F. La relación entre las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit es

$$T_F = \tfrac{9}{5}T_C + 32°\text{F} \qquad (19.2)$$

Mediante las ecuaciones 19.1 y 19.2 se encuentra una relación entre los cambios de temperatura en las escalas Celsius, Kelvin y Fahrenheit:

$$\Delta T_C = \Delta T = \tfrac{5}{9}\Delta T_F \qquad (19.3)$$

De estas tres escalas de temperatura, sólo la escala Kelvin se apoya en un verdadero valor cero de temperatura. Las escalas Celsius y Fahrenheit se basan en un cero arbitrario asociado con una sustancia particular, agua, en un planeta particular, la Tierra. Por lo tanto, si usted encuentra una ecuación que pida una temperatura T

[3] Llamadas en honor de Anders Celsius (1701-1744), Daniel Gabriel Fahrenheit (1686-1736) y William Thomson, lord Kelvin (1824-1907), respectivamente.

o que involucre una razón de temperaturas, *debe* convertir todas las temperaturas a kelvins. Si la ecuación contiene un cambio en temperatura ΔT, usar las temperaturas Celsius le dará la respuesta correcta, a la luz de la ecuación 19.3, pero siempre es *más seguro* convertir las temperaturas a la escala Kelvin.

Examen rápido 19.2 Considere los siguientes pares de materiales. ¿Cuál par representa dos materiales, uno de los cuales está el doble de caliente que el otro? **(a)** Agua en ebullición a 100°C, un vaso con agua a 50°C, **(b)** agua en ebullición a 100°C, metano congelado a −50°C, **(c)** un cubo de hielo a −20°C, flamas de un tragafuego de circo a 233°C, **(d)** ninguno de estos pares.

Ejemplo 19.1 Conversión de temperaturas

Un día la temperatura alcanza 50°C, ¿cuál es la temperatura en grados Celsius y en kelvins?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En Estados Unidos, una temperatura de 50°F se entiende bien. Sin embargo, en muchas otras partes del mundo esta temperatura puede no tener sentido, porque las personas están familiarizadas con la escala de temperatura Celsius.

Categorizar Este ejemplo es un simple problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 19.2 para la temperatura Celsius y sustituya valores numéricos:

$$T_C = \tfrac{5}{9}(T_F - 32) = \tfrac{5}{9}(50 - 32) = 10°C$$

Use la ecuación 19.1 para encontrar la temperatura Kelvin:

$$T = T_C + 273.15 = 10°C + 273.15 = 283\ K$$

Un conjunto de equivalentes de temperatura relacionados con el clima que conviene tener en mente es que 0°C es (literalmente) congelación a 32°F, 10°C es fresco a 50°F, 20°C es temperatura ambiente, 30°C es caliente a 86°F y 40°C es un día caluroso a 104°F.

19.4 Expansión térmica de sólidos y líquidos

El estudio del termómetro líquido utiliza uno de los cambios mejor conocidos en una sustancia: a medida que aumenta su temperatura, su volumen se incrementa. Este fenómeno, conocido como **expansión térmica**, desempeña un importante papel en numerosas aplicaciones de ingeniería. Por ejemplo, las juntas de expansión térmica, como las que se muestran en la figura 19.7, se deben incluir en edificios, autopistas



Figura 19.7 Juntas de expansión térmica en (a) puentes y (b) paredes.

de concreto, vías ferroviarias, paredes de ladrillo y puentes para compensar los cambios dimensionales que ocurren a medida que cambia la temperatura.

La expansión térmica es una consecuencia del cambio en la separación *promedio* entre los átomos en un objeto. Para entender este concepto, modele a los átomos conectados mediante resortes rígidos, como se estudió en la sección 15.3 y se observa en la figura 15.11b. A temperaturas ordinarias los átomos en un sólido oscilan respecto a sus posiciones de equilibrio con una amplitud de aproximadamente 10^{-11} m y una frecuencia cercana a 10^{13} Hz. El espaciamiento promedio entre los átomos es alrededor de 10^{-10} m. A medida que la temperatura del sólido aumenta, los átomos oscilan con mayores amplitudes; como resultado, la separación promedio entre ellos se incrementa.[4] En consecuencia, el objeto se expande.

Si la expansión térmica es suficientemente pequeña comparada con las dimensiones iniciales de un objeto, el cambio en cualquier dimensión es, en una buena aproximación, proporcional a la primera potencia del cambio de temperatura. Suponga que un objeto tiene una longitud inicial L_i a lo largo de alguna dirección en alguna temperatura, y la longitud aumenta en una cantidad ΔL para un cambio en temperatura ΔT. Es conveniente considerar el cambio fraccionario en longitud por cada grado de cambio de temperatura, entonces se define el **coeficiente de expansión lineal promedio** como

$$\alpha \equiv \frac{\Delta L / L_i}{\Delta T}$$

Los experimentos demuestran que α es constante para pequeños cambios de temperatura. Para fines de cálculo, esta ecuación por lo general se reescribe como

Expansión térmica unidimensional ▶

$$\Delta L = \alpha L_i \, \Delta T \tag{19.4}$$

o en la forma

$$L_f - L_i = \alpha L_i (T_f - T_i) \tag{19.5}$$

donde L_f es la longitud final, T_i y T_f son las temperaturas inicial y final, respectivamente, y la constante de proporcionalidad α es el coeficiente de expansión lineal promedio para un material dado y tiene unidades de $(°C)^{-1}$. La ecuación 19.4 puede emplearse para expansión térmica cuando se incrementa la temperatura del material, y también para contracción térmica cuando disminuye su temperatura.

Prevención de riesgos ocultos 19.2

¿Los hoyos se vuelven más grandes o más pequeños? Cuando se eleva la temperatura de un objeto cada dimensión lineal aumenta en tamaño. Eso incluye cualquier hoyo en el material, que se expande en la misma forma como si el hoyo estuviera lleno con el material, como se muestra en la figura 19.8.

Puede ser útil pensar en la expansión térmica como un aumento efectivo o como una ampliación fotográfica de un objeto. Por ejemplo, a medida que se calienta una rondana metálica (figura 19.8), todas las dimensiones, incluido el radio del orificio, aumentan de acuerdo con la ecuación 19.4. Una cavidad en un trozo de material se expande en la misma forma como si la cavidad estuviese llena con el material.

La tabla 19.1 contiene los coeficientes de expansión lineal promedio de diversos materiales. Para dichos materiales, α es positiva, lo que indica un aumento en longitud a temperatura creciente. Sin embargo, éste no siempre es el caso. Algunas sustancias, la calcita ($CaCO_3$) es un ejemplo, se expanden a lo largo de una dimensión (α positiva) y se contraen en otra (α negativa) a medida que sus temperaturas aumentan.

Ya que las dimensiones lineales de un objeto cambian con la temperatura, se sigue que el área superficial y el volumen cambian. El cambio en volumen es proporcional al volumen inicial V_i y al cambio en temperatura de acuerdo con la relación

Expansión térmica tridimensional ▶

$$\Delta V = \beta V_i \, \Delta T \tag{19.6}$$

donde β es el **coeficiente de expansión volumétrica promedio.** Para encontrar la relación entre β y α, suponga que el coeficiente de expansión lineal promedio del sólido es el mismo en todas direcciones; es decir, suponga que el material es *isotró-*

[4] Más precisamente, la expansión térmica surge de la naturaleza *asimétrica* de la curva de energía potencial para los átomos en un sólido, como se muestra en la figura 15.11a. Si los osciladores fueran realmente armónicos, las separaciones atómicas promedio no cambiarían, sin importar la amplitud de la vibración.

Tabla 19.1 Coeficientes de expansión promedio para algunos materiales cerca de la temperatura ambiente

Material (sólidos)	Coeficiente de expansión lineal promedio $(\alpha)(^\circ C)^{-1}$	Material (líquidos y gases)	Coeficiente de expansión volumétrica promedio $(\beta)(^\circ C)^{-1}$
Aluminio	24×10^{-6}	Acetona	1.5×10^{-4}
Latón y bronce	19×10^{-6}	Alcohol etílico	1.12×10^{-4}
Concreto	12×10^{-6}	Benceno	1.24×10^{-4}
Cobre	17×10^{-6}	Gasolina	9.6×10^{-4}
Vidrio (ordinario)	9×10^{-6}	Glicerina	4.85×10^{-4}
Vidrio (Pyrex)	3.2×10^{-6}	Mercurio	1.82×10^{-4}
Invar (aleación Ni-Fe)	0.9×10^{-6}	Trementina	9.0×10^{-4}
Plomo	29×10^{-6}	Aire[a] a 0°C	3.67×10^{-3}
Acero	11×10^{-6}	Helio[a]	3.665×10^{-3}

[a] Los gases no tienen un valor específico para el coeficiente de expansión volumétrica porque la cantidad de expansión depende del tipo de proceso por el que pasa el gas. Los valores dados aquí suponen que el gas experimenta una expansión a presión constante.

pico. Considere una caja sólida de dimensiones ℓ, w y h. Su volumen a cierta temperatura T_i es $V_i = \ell wh$. Si la temperatura cambia a $T_i + \Delta T$, su volumen cambia a $V_i + \Delta V$, donde cada dimensión cambia de acuerdo con la ecuación 19.4. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V_i + \Delta V &= (\ell + \Delta\ell)(w + \Delta w)(h + \Delta h) \\ &= (\ell + \alpha\ell\,\Delta T)(w + \alpha w\,\Delta T)(h + \alpha h\,\Delta T) \\ &= \ell wh(1 + \alpha\,\Delta T)^3 \\ &= V_i[1 + 3\alpha\,\Delta T + 3(\alpha\,\Delta T)^2 + (\alpha\,\Delta T)^3] \end{aligned}$$

Al dividir ambos lados entre V_i y despejar el término $\Delta V/V_i$, se obtiene el cambio fraccionario en volumen:

$$\frac{\Delta V}{V_i} = 3\alpha\,\Delta T + 3(\alpha\,\Delta T)^2 + (\alpha\,\Delta T)^3$$

Puesto que $\alpha\,\Delta T << 1$ para valores típicos de ΔT ($< \sim 100^\circ C$), se pueden despreciar los términos $3(\alpha\,\Delta T)^2$ y $(\alpha\,\Delta T)^3$. Al hacer esta aproximación, es claro que

$$\frac{\Delta V}{V_i} = 3\alpha\,\Delta T \quad \rightarrow \quad \Delta V = (3\alpha)V_i\,\Delta T$$

Al comparar esta expresión con la ecuación 19.6 se obtiene

$$\beta = 3\alpha$$

En forma similar puede demostrar que el cambio en área de una placa rectangular está dado por $\Delta A = 2\alpha A_i\,\Delta T$ (vea el problema 61).

Un simple mecanismo, llamado *tira bimetálica*, que se encuentra en dispositivos prácticos como termostatos, utiliza la diferencia en coeficientes de expansión para diferentes materiales. Consiste de dos tiras delgadas de metales distintos enlazados juntos. A medida que la temperatura de la tira aumenta, ambos metales se expanden por cantidades diferentes y la tira se dobla, como se muestra en la figura 19.9.

Examen rápido 19.3 Si se le pide hacer un termómetro de vidrio muy sensible, ¿cuál de los siguientes líquidos de trabajo seleccionaría? **(a)** Mercurio, **(b)** alcohol, **(c)** gasolina, **(d)** glicerina.

Examen rápido 19.4 Dos esferas se elaboran del mismo metal y tienen el mismo radio, pero una es hueca y la otra sólida. Las esferas se someten al mismo aumento de temperatura. ¿Cuál esfera se expande más? **(a)** La esfera sólida se expande más. **(b)** La esfera hueca se expande más. **(c)** Ambas se expanden en la misma cantidad. **(d)** No hay suficiente información para decirlo.

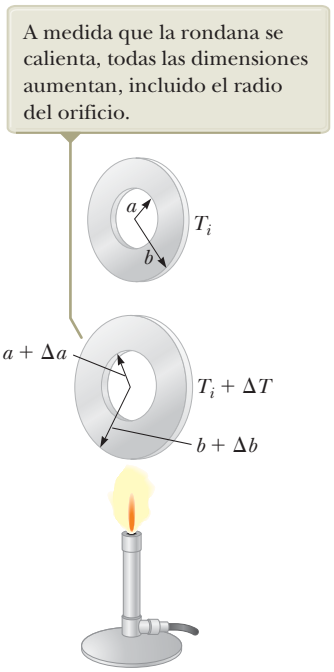
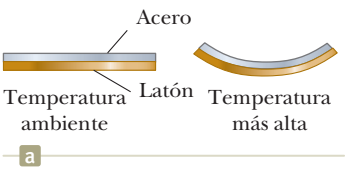


Figura 19.8 Expansión térmica de una rondana metálica homogénea. (La expansión está exagerada en esta figura.)



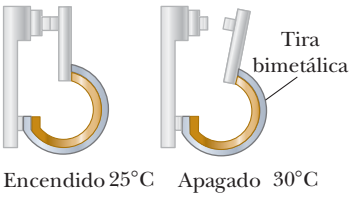


Figura 19.9 (a) Una tira bimetálica se dobla a medida que la temperatura cambia, porque los dos metales tienen diferentes coeficientes de expansión. (b) Una tira bimetálica empleada en un termostato para interrumpir o hacer contacto eléctrico.

Ejemplo 19.2 Expansión de una vía de ferrocarril

Un segmento de vía de ferrocarril de acero tiene una longitud de 30.000 m cuando la temperatura es de 0.0°C.

(A) ¿Cuál es su longitud cuando la temperatura es de 40.0°C?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La vía es relativamente larga, por lo que se espera obtener un aumento medible de longitud para un aumento de temperatura de 40°C.

Categorizar Se evaluará un aumento en longitud a partir de la discusión de esta sección, así que esta parte del ejemplo es un problema de sustitución.

Utilice la ecuación 19.4 y el valor del coeficiente de expansión lineal de la tabla 19.1:

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T = [11 \times 10^{-6}\ (^\circ\text{C})^{-1}](30.000\ \text{m})(40.0^\circ\text{C}) = 0.013\ \text{m}$$

Encuentre la nueva longitud de la vía:

$$L_f = 30.000\ \text{m} + 0.013\ \text{m} = \boxed{30.013\ \text{m}}$$

(B) Suponga que los extremos de la vía están rígidamente sujetos a 0.0°C, de modo que se evita la expansión. ¿Cuál es el esfuerzo térmico que se establece en la vía si su temperatura se eleva a 40.0°C?

SOLUCIÓN

Categorizar Esta parte del ejemplo es un problema de análisis porque es necesario emplear conceptos de otro capítulo.

Analizar El esfuerzo térmico es el mismo que el esfuerzo de tensión en la situación donde la vía se expande libremente y después se comprime con una fuerza mecánica F de regreso a su longitud original.

Encuentre el esfuerzo de tensión de la ecuación 12.6 utilizando el módulo de Young para el acero de la tabla 12.1:

$$\text{Esfuerzo de tensión} = \frac{F}{A} = Y\frac{\Delta L}{L_i}$$

$$\frac{F}{A} = (20 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2)\left(\frac{0.013\ \text{m}}{30.000\ \text{m}}\right) = \boxed{8.7 \times 10^{7}\ \text{N/m}^2}$$

Finalizar La expansión en el inciso (A) es de 1.3 cm. Esta expansión de hecho es medible, como se predijo en el paso Conceptualizar. El esfuerzo térmico en el inciso (B) se evita al dejar pequeñas aberturas de dilatación entre las vías.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la temperatura disminuye a −40.0°C? ¿Cuál es la longitud del segmento que no está sujeto?

Respuesta La expresión para el cambio de longitud en la ecuación 19.4 es la misma, ya sea que la temperatura aumente o disminuya. Por lo tanto, si hay un aumento en longitud de 0.013 m cuando la temperatura aumenta en 40°C, hay una disminución en longitud de 0.013 m cuando la temperatura disminuye en 40°C. (Se supone que α es constante sobre todo el rango de temperaturas.) La nueva longitud a la temperatura más fría es 30.000 m − 0.013 m = 29.987 m.

Ejemplo 19.3 El corto electrotérmico

Un dispositivo electrónico con diseño pobre tiene dos tornillos unidos a diferentes partes del dispositivo que casi se tocan entre sí en su interior, como en la figura 19.10. Los tornillos de acero y latón están a diferentes potenciales eléctricos y, si se tocan, se desarrollará un cortocircuito que dañará al dispositivo. (El potencial eléctrico se estudiará en el capítulo 25.) La separación inicial entre los extremos de los tornillos es de 5.0 μm a 27°C. ¿A qué temperatura se tocarán los tornillos? Suponga que la distancia entre las paredes del dispositivo no es afectada por el cambio de temperatura.

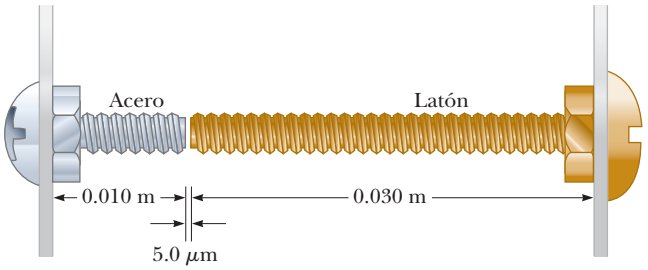


Figura 19.10 (Ejemplo 19.3) Dos tornillos unidos a diferentes partes de un dispositivo eléctrico casi se tocan cuando la temperatura es de 27°C. A medida que la temperatura aumenta, los extremos de los tornillos se mueven uno hacia el otro.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que los extremos de ambos tornillos se expanden en el espacio que existe entre ellos a medida que aumenta la temperatura.

19.3 continuación

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de expansión térmica en donde la *suma* de los cambios en longitud de los dos tornillos debe ser igual a la longitud de la separación inicial entre los extremos.

Analizar Establezca la suma de los cambios de longitud igual al ancho de la separación:

$$\Delta L_{\text{lat}} + \Delta L_{\text{ac}} = \alpha_{\text{lat}} L_{i,\text{lat}}\,\Delta T + \alpha_{\text{ac}} L_{i,\text{ac}}\,\Delta T = d$$

Resuelva para ΔT:

$$\Delta T = \frac{d}{\alpha_{\text{lat}} L_{i,\text{lat}} + \alpha_{\text{ac}} L_{i,\text{ac}}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\Delta T = \frac{5.0 \times 10^{-6}\ \text{m}}{[19 \times 10^{-6}\ (^\circ\text{C})^{-1}](0.030\ \text{m}) + [11 \times 10^{-6}\ (^\circ\text{C})^{-1}](0.010\ \text{m})} = 7.4^\circ\text{C}$$

Encuentre la temperatura a la que se tocan los tornillos:

$$T = 27^\circ\text{C} + 7.4^\circ\text{C} = 34^\circ\text{C}$$

Finalizar Esta temperatura es posible si el aire acondicionado en el alojamiento del dispositivo falla durante un largo periodo en un día de verano muy caliente.

El inusual comportamiento del agua

Por lo general, los líquidos aumentan en volumen con temperatura creciente y tienen coeficientes de expansión volumétrica promedio alrededor de diez veces mayores que los sólidos. El agua fría es una excepción a esta regla, como puede ver en la curva de densidad contra temperatura que se muestra en la figura 19.11. A medida que la temperatura aumenta de 0°C a 4°C, el agua se contrae y por lo tanto su densidad aumenta. Arriba de 4°C, el agua se expande con temperatura creciente y así su densidad disminuye. En consecuencia, la densidad del agua alcanza un valor máximo de 1.000 g/cm^3 a 4°C.

Este inusual comportamiento de expansión térmica del agua sirve para explicar por qué un estanque empieza a congelarse en la superficie, en lugar de hacerlo en el fondo. Cuando la temperatura del aire cae de, por ejemplo, 7°C a 6°C, el agua superficial también se enfría y, por lo tanto, disminuye en volumen. El agua superficial es más densa que el agua del fondo, la cual no se ha enfriado ni disminuido en volumen. Como resultado, el agua de la superficie se hunde, y agua más caliente de abajo se mueve a la superficie. Sin embargo, cuando la temperatura del aire está entre 4°C y 0°C, el agua superficial se expande mientras se enfría, y se vuelve menos densa que el agua bajo ella. El proceso de mezcla se detiene y finalmente el agua de la superficie se congela. A medida que el agua se congela el hielo permanece en la superficie, porque es menos denso que el agua. El hielo continúa acumulándose en la superficie, mientras que el agua cercana al fondo permanece a 4°C. Si éste no fuese el caso, los peces y otras formas de vida marina no sobrevivirían.

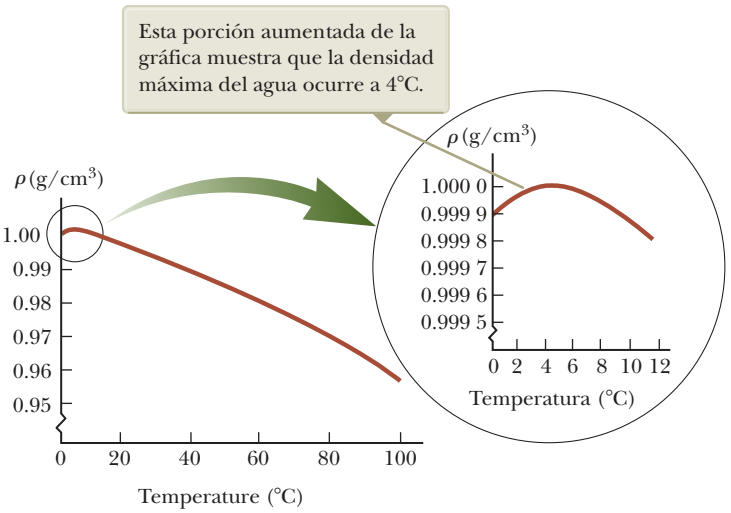


Figura 19.11 Variación de la densidad del agua a presión atmosférica con la temperatura.

19.5 Descripción macroscópica de un gas ideal

La ecuación de expansión volumétrica $\Delta V = \beta V_i \Delta T$ se basa en la suposición de que el material tiene un volumen inicial V_i antes de que ocurra un cambio de temperatura. Tal es el caso para sólidos y líquidos, porque tienen un volumen fijo a una temperatura dada.

El caso para gases es por completo diferente. Las fuerzas interatómicas dentro de los gases son muy débiles y, en muchos casos, es posible imaginar dichas fuerzas como inexistentes y aun así hacer muy buenas aproximaciones. Por lo tanto, *no hay separación de equilibrio* para los átomos ni volumen "estándar" a una temperatura determinada; el volumen depende del tamaño del recipiente. Como resultado, con la ecuación 19.6 no es posible expresar cambios en volumen ΔV en un proceso sobre un gas porque no se definió el volumen V_i al inicio del proceso. Las ecuaciones que involucran gases contienen el volumen V en lugar de un *cambio* en el volumen desde un valor inicial, como una variable.

Para un gas, es útil saber cómo se relacionan las cantidades volumen V, presión P y temperatura T para una muestra de gas de masa m. En general, la ecuación que interrelaciona estas cantidades, llamada *ecuación de estado*, es muy complicada. Sin embargo, si el gas se mantiene a una presión muy baja (o densidad baja), la ecuación de estado es muy simple y se puede determinar a partir de resultados experimentales. Tal gas de densidad baja se refiere como un **gas ideal**.[5] El **modelo de gas ideal** se puede emplear para efectuar predicciones que sean adecuadas para describir el comportamiento de gases reales a bajas presiones.

Es conveniente expresar la cantidad de gas en un volumen dado en términos del número de moles n. Un **mol** de cualquier sustancia es aquella cantidad de la sustancia que contiene un **número de Avogadro** $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ de partículas constituyentes (átomos o moléculas). El número de moles n de una sustancia se relaciona con su masa m mediante la expresión

$$n = \frac{m}{M} \tag{19.7}$$

donde M es la masa molar de la sustancia. La masa molar de cada elemento químico es la masa atómica (de la tabla periódica; consulte el Apéndice C) expresada en gramos por mol. Por ejemplo, la masa de un átomo de He es 4.00 u (unidades de masa atómica), así que la masa molar del He es 4.00 g/mol.

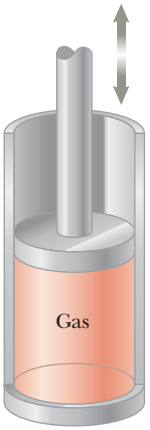


Figura 19.12 Un gas ideal confinado a un cilindro cuyo volumen puede variar mediante un pistón móvil.

Ahora suponga que un gas ideal está confinado a un recipiente cilíndrico cuyo volumen puede variar mediante un pistón móvil, como en la figura 19.12. Si supone que el cilindro no tiene fugas, la masa (o el número de moles) del gas permanece constante. Para tal sistema, los experimentos proporcionan la siguiente información:

- Cuando el gas se mantiene a una temperatura constante, su presión es inversamente proporcional al volumen. (Históricamente, este comportamiento se describe como ley de Boyle.)
- Cuando la presión del gas se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a la temperatura. (Históricamente, este comportamiento se describe como ley de Charles.)
- Cuando el volumen del gas se mantiene constante, la presión es directamente proporcional a la temperatura. (Históricamente, este comportamiento se describe como ley de Gay-Lussac.)

Estas observaciones se resumen mediante la **ecuación de estado para un gas ideal:**

Ecuación de estado para un gas ideal ▶

$$PV = nRT \tag{19.8}$$

[5] Para ser más específicos, aquí las suposiciones son que la temperatura del gas no debe ser muy baja (el gas no se debe condensar en un líquido) o muy alta, y que la presión debe ser baja. El concepto de gas ideal implica que las moléculas de gas no interactúan, excepto en colisión, y que el volumen molecular es despreciable comparado con el volumen del recipiente. En realidad, un gas ideal no existe. Sin duda, el concepto de un gas ideal es muy útil porque los gases reales a bajas presiones se modelan bien como gases ideales.

En esta expresión, también conocida como **ley de gas ideal**, n es el número de moles de gas en la muestra y R es una constante. Los experimentos en numerosos gases demuestran que conforme la presión tiende a cero, la cantidad PV/nT tiende al mismo valor R para todos los gases. Por esta razón, R se llama **constante universal de los gases**. En unidades del SI, la presión se expresa en pascales (1 Pa = 1 N/m^2) y el volumen en metros cúbicos, el producto PV tiene unidades de newton · metros, o joules, y R tiene el valor

$$R = 8.314\ \text{J/mol} \cdot \text{K} \tag{19.9}$$

Si la presión se expresa en atmósferas y el volumen en litros (1 L = 10^3 cm^3 = 10^{-3} m^3), entonces R tiene el valor

$$R = 0.082\ 06\ \text{L} \cdot \text{atm/mol} \cdot \text{K}$$

Al emplear este valor de R y la ecuación 19.8 se prueba que el volumen ocupado por 1 mol de *cualquier* gas a presión atmosférica y a 0°C (273 K) es de 22.4 L.

La ley de gas ideal afirma que si el volumen y la temperatura de una cantidad fija de gas no cambian, la presión también permanece constante. Considere una botella de champaña que se agita y luego expulsa líquido cuando se abre, como se muestra en la figura 19.13. Una concepción equivocada común es que la presión dentro de la botella aumenta cuando la botella se agita. Por el contrario, ya que la temperatura de la botella y su contenido permanecen constantes en tanto la botella esté sellada, lo mismo pasa con la presión, como se puede demostrar al cambiar el corcho por un medidor de presión. La explicación correcta es como sigue. El gas dióxido de carbono reside en el volumen entre la superficie del líquido y el corcho. La presión del gas en este volumen se establece más alta que la presión atmosférica en el proceso de embotellado. Agitar la botella desplaza parte del dióxido de carbono en el líquido, donde forma burbujas, y éstas quedan unidas en el interior de la botella. (No se genera nuevo gas al agitar.) Cuando la botella se abre la presión se reduce a presión atmosférica, lo cual causa que el volumen de las burbujas aumente súbitamente. Si las burbujas se unen a la botella (debajo de la superficie del líquido), su rápida expansión expulsa líquido de la botella. Sin embargo, si los lados y el fondo de la botella se golpean primero hasta que no queden burbujas bajo la superficie, la caída en presión no fuerza al líquido de la botella cuando la champaña se abre.

La ley de gas ideal con frecuencia se expresa en términos del número total de moléculas N. Puesto que el número de moles n es igual a la razón del número total de moléculas y el número de Avogadro N_A, la ecuación 19.8 se escribe como

$$PV = nRT = \frac{N}{N_A} RT$$

$$PV = Nk_BT \tag{19.10}$$

donde k_B es la **constante de Boltzmann**, que tiene el valor

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K} \tag{19.11}$$

Es común llamar a cantidades tales como P, V y T las **variables termodinámicas** de un gas ideal. Si la ecuación de estado se conoce, una de las variables siempre se puede expresar como alguna función de las otras dos.

Examen rápido 19.5 Un material común para acolchar objetos en los paquetes está hecho de burbujas de aire atrapadas entre hojas de plástico. ¿Este material es más efectivo para evitar que los contenidos del paquete se muevan en el interior en **(a)** un día caliente, **(b)** un día frío, **(c)** días calientes o fríos?

Examen rápido 19.6 En un día de invierno enciende su horno y la temperatura del aire dentro de su casa aumenta. Suponga que su casa tiene la cantidad normal de fuga entre el aire interior y el aire exterior. ¿El número de moles de aire en su habitación a la temperatura más alta **(a)** es mayor que antes, **(b)** es menor que antes o **(c)** es igual que antes?



Imagen copyright digitalife, 2009. Reproducida bajo licencia de Shutterstock.com

Figura 19.13 Una botella de champaña se agita y se abre. El líquido se expulsa con fuerza de la abertura. Una idea equivocada común es que la presión dentro de la botella aumenta por la sacudida.

Prevención de riesgos ocultos 19.3

Demasiadas *k* Existe una variedad de cantidades físicas para las que se usa la letra k. Dos de las que se vieron anteriormente son la constante de fuerza para un resorte (capítulo 15) y el número de onda para una onda mecánica (capítulo 16). La constante de Boltzmann es otra k, y en el capítulo 20 se verá que la k se emplea para conductividad térmica y para una constante eléctrica en el capítulo 23. Para encontrar sentido en este confuso estado de asuntos y ayudarlo a reconocer la constante de Boltzmann se utiliza un subíndice B. En este libro encontrará la constante de Boltzmann como k_B, pero en otras fuentes puede ver la constante de Boltzmann simplemente como k.

◀ **Constante de Boltzmann**

Ejemplo 19.4 Calentamiento de una lata de aerosol

Una lata de aerosol que contiene un gas propelente al doble de la presión atmosférica (202 kPa) y tiene un volumen de 125.00 cm^3 está a 22°C. Después se lanza a un fuego abierto. (*Precaución*: no realice este experimento, es muy peligroso.) Cuando la temperatura del gas en la lata alcanza 195°C, ¿cuál es la presión dentro de la lata? Suponga que cualquier cambio en el volumen de la lata es despreciable.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Por intuición, cabe esperar que la presión del gas en el recipiente aumente debido a la temperatura creciente.

Categorizar El gas en la lata se modela como ideal y se emplea la ley de gas ideal para calcular la nueva presión.

Analizar Reordene la ecuación 19.8:

$$(1)\quad \frac{PV}{T} = nR$$

No escapa aire durante la compresión, así n, y por lo tanto nR, permanecen constantes. Por ende, establezca el valor inicial del lado izquierdo de la ecuación (1) igual al valor final:

$$(2)\quad \frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f}$$

Ya que los volúmenes inicial y final del gas se suponen iguales, cancele los volúmenes:

$$(3)\quad \frac{P_i}{T_i} = \frac{P_f}{T_f}$$

Resuelva para P_f:

$$P_f = \left(\frac{T_f}{T_i}\right)P_i = \left(\frac{468\ \text{K}}{295\ \text{K}}\right)(202\ \text{kPa}) = 320\ \text{kPa}$$

Finalizar Mientras más alta sea la temperatura, mayor será la presión que ejerza el gas atrapado, como se esperaba. Si la presión aumenta lo suficiente, la lata puede explotar. Debido a esta posibilidad, nunca debe desechar las latas de aerosol en el fuego.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que se incluye un cambio de volumen debido a la expansión térmica de la lata de acero a medida que aumenta la temperatura. ¿Esto altera significativamente la respuesta para la presión final?

Respuesta Ya que el coeficiente de expansión térmica del acero es muy pequeño, no se espera un gran efecto en la respuesta final.

Encuentre el cambio en volumen de la lata mediante la ecuación 19.6 y el valor de α para el acero de la tabla 19.1:

$$\begin{aligned}\Delta V &= \beta V_i \Delta T = 3\alpha V_i \Delta T \\ &= 3[11 \times 10^{-6}\ (^\circ\text{C})^{-1}](125.00\ \text{cm}^3)(173^\circ\text{C}) = 0.71\ \text{cm}^3\end{aligned}$$

Aplique la ecuación (2) otra vez y obtenga una ecuación para la presión final:

$$P_f = \left(\frac{T_f}{T_i}\right)\left(\frac{V_i}{V_f}\right)P_i$$

Este resultado difiere de la ecuación (3) sólo en el factor V_i/V_f. Evalúe este factor:

$$\frac{V_i}{V_f} = \frac{125.00\ \text{cm}^3}{(125.00\ \text{cm}^3 + 0.71\ \text{cm}^3)} = 0.994 = 99.4\%$$

Por lo tanto, la presión final diferirá sólo por 0.6% del valor calculado sin considerar la expansión térmica de la lata. Al tomar 99.4% de la presión final previa, la presión que incluye expansión térmica es 318 kPa.

Resumen

Definiciones

Dos objetos están en **equilibrio térmico** mutuo si no intercambian energía cuando están en contacto térmico.

La **temperatura** es la propiedad que determina si un objeto está en equilibrio térmico con otros objetos. Dos objetos en equilibrio térmico mutuo están a la misma temperatura. La unidad del SI de temperatura absoluta es el **kelvin**, que se define como 1/273.16 de la diferencia entre cero absoluto y la temperatura del punto triple del agua.

Conceptos y principios

La **ley cero de la termodinámica** establece que si los objetos A y B están por separado en equilibrio térmico con un tercer objeto C, entonces los objetos A y B están en equilibrio térmico mutuo.

Cuando la temperatura de un objeto se cambia por una cantidad ΔT, su longitud cambia por una cantidad ΔL que es proporcional a ΔT y a su longitud inicial L_i:

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T \qquad (19.4)$$

donde la constante α es el **coeficiente de expansión lineal promedio**. El **coeficiente de expansión volumétrica promedio** β para un sólido es aproximadamente igual a 3α.

Un **gas ideal** es aquel para el cual PV/nT es constante. Un gas ideal se describe mediante la **ecuación de estado**,

$$PV = nRT \qquad (19.8)$$

donde n es igual al número de moles del gas, P es su presión, V su volumen, R es la contante universal de los gases (8.314 J/mol · K), y T es la temperatura absoluta del gas. Un gas real se comporta aproximadamente como un gas ideal si tiene una baja densidad.

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Las marcas para indicar la longitud se colocan en una cinta de acero en una habitación que está a una temperatura de 22°C. Las mediciones se realizan con la misma cinta en un día en que la temperatura es de 27°C. Suponga que los objetos a medir tienen un coeficiente de expansión lineal mucho menor que el acero. ¿Las mediciones son (a) muy largas, (b) muy cortas o (c) precisas?

2. Cuando a un cierto gas bajo una presión de 5.00×10^6 Pa a 25.0°C se le permite expandirse a 3.00 veces su volumen original, su presión final es 1.07×10^6 Pa. ¿Cuál es su temperatura final? (a) 450 K, (b) 233 K, (c) 212 K, (d) 191 K, (e) 115 K.

3. Si en un gas ideal su volumen y su temperatura se duplican y cuadriplican, respectivamente, la presión (a) permanece igual, (b) disminuye por un factor de 2, (c) disminuye por un factor de 4, (d) se incrementa por un factor de 2 o (e) se incrementa por un factor de 4.

4. El péndulo de cierto reloj se fabrica de latón. Cuando la temperatura aumenta, ¿qué ocurre con el periodo del reloj? (a) Se incrementa. (b) Disminuye. (c) No se altera.

5. ¿Una temperatura de 162°F a cuántos kelvins equivale? (a) 373 K, (b) 288 K, (c) 345 K, (d) 201 K, (e) 308 K.

6. Un cilindro con un pistón mantiene 0.50 m^3 de oxígeno a una temperatura absoluta de 4.0 atm. El pistón se jala e incrementa el volumen del gas hasta que la presión cae a 1.0 atm. Si la temperatura permanece constante, ¿qué nuevo volumen ocupa el gas? (a) 1.0 m^3, (b) 1.5 m^3, (c) 2.0 m^3, (d) 0.12 m^3, (e) 2.5 m^3.

7. ¿Qué ocurriría si el vidrio de un termómetro se expande más, al calentarse, que el líquido en el tubo? (a) El termómetro se rompería. (b) Sólo se podría emplear para temperaturas debajo de temperatura ambiente. (c) Tendría que sostenerlo con el bulbo en la parte superior. (d) Se invertiría la escala del termómetro, de modo que los números más grandes estarían más cerca del bulbo. (e) Los números no estarían igualmente espaciados.

8. Un cilindro con un pistón contiene una muestra de un gas ligero. El tipo de gas y el tamaño de la muestra se pueden cambiar. El cilindro se coloca en diferentes baños de temperatura constante y el pistón se mantiene en diferentes posiciones. Clasifique los siguientes casos de mayor a menor de acuerdo con la presión del gas y muestre cualquier caso de igualdad. (a) Una muestra de 0.002 mol de oxígeno se mantiene a 300 K en un recipiente de 100 cm^3. (b) Una muestra de 0.002 mol de oxígeno se mantiene a 600 K en un recipiente de 200 cm^3. (c) Una muestra de 0.002 mol de oxígeno se mantiene a 600 K en un recipiente de 300 cm^3. (d) Una muestra de 0.004 mol de helio se mantiene a 300 K en un recipiente de 200 cm^3. (e) Una muestra de 0.004 mol de helio se mantiene a 250 K en un recipiente de 200 cm^3.

9. Dos cilindros A y B a la misma temperatura contienen la misma cantidad del mismo tipo de gas. El cilindro A tiene

tres veces el volumen del cilindro B. ¿Qué puede concluir sobre las presiones que ejercen los gases? (a) No se puede concluir nada sobre las presiones. (b) La presión en A es tres veces la presión en B. (c) Las presiones deben ser iguales. (d) La presión en A debe ser un tercio de la presión en B.

10. Un globo de caucho se llena con 1 L de aire a 1 atm y 300 K y luego se pone en un refrigerador criogénico a 100 K. El caucho permanece flexible mientras se enfría. **(i)** ¿Qué ocurre con el volumen del globo? (a) Disminuye a $\frac{1}{3}$ L. (b) Disminuye a $1/\sqrt{3}$ L. (c) Es constante. (d) Se incrementa a $\sqrt{3}$ L. (e) Aumenta a 3 L. **(ii)** ¿Qué ocurre con la presión del aire en el globo? (a) Disminuye a $\frac{1}{3}$ atm. (b) Disminuye a $1/\sqrt{3}$ atm. (c) Es constante. (d) Aumenta a $\sqrt{3}$ atm. (e) Se incrementa a 3 atm.

11. El coeficiente de expansión lineal del cobre es 17×10^{-6} $(°C)^{-1}$. La Estatua de la Libertad mide 93 m de alto una mañana de verano cuando la temperatura es de 25°C. Suponga que las placas de cobre que cubren la estatua se montan borde con borde sin juntas de dilatación y no se doblan ni se empalman en el marco que las soporta a medida que el día se vuelve más caliente. ¿Cuál es el orden de magnitud del aumento de altura de la estatua? (a) 0.1 mm, (b) 1 mm, (c) 1 cm, (d) 10 cm, (e) 1 m.

12. Suponga que vacía una charola de cubos de hielo en un tazón casi lleno con agua y cubre el tazón. Después de media hora los contenidos del tazón llegan a equilibrio térmico, con más agua líquida y menos hielo que al principio. ¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera? (a) La temperatura del agua líquida es mayor que la temperatura del hielo restante. (b) La temperatura del agua líquida es la misma que la del hielo. (c) La temperatura del agua líquida es menor que la del hielo. (d) Las temperaturas comparativas del agua líquida y el hielo dependen de las cantidades presentes.

13. En una placa metálica se perfora un orificio. Cuando el metal se lleva a una temperatura más alta, ¿qué ocurre con el diámetro del orificio? (a) Disminuye. (b) Aumenta. (c) Permanece constante. (d) La respuesta depende de la temperatura inicial del metal. (e) Ninguna de esas respuestas es correcta.

14. Un día muy frío al norte de Nueva York, la temperatura es de −25°C, ¿a qué temperatura Fahrenheit equivale? (a) −46°F, (b) −77°F, (c) 18°F, (d) −25°F, (e) −13°F.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Los termómetros comunes se elaboran de una columna de mercurio en un tubo de vidrio. Con base en la operación de estos termómetros, ¿cuál tiene el mayor coeficiente de expansión lineal, el vidrio o el mercurio? (No consulte una tabla para responder esta pregunta.)

2. Un trozo de cobre se deja caer en una cubeta con agua. (a) Si la temperatura del agua se eleva, ¿qué ocurre con la temperatura del cobre? (b) ¿Bajo qué condiciones el agua y el cobre están en equilibrio térmico?

3. (a) ¿Qué predice la ley de gas ideal respecto al volumen de una muestra de gas en el cero absoluto? (b) ¿Por qué esta predicción es incorrecta?

4. Unos excursionistas se detienen en una tienda para comprar comida, incluyendo bolsas de papas fritas. Luego manejan hacia el sitio de excursión. Cuando desempacan los alimentos, notan que las bolsas de papas están infladas como globos. ¿A qué se debe esto?

5. Al describir su próximo viaje a la Luna y como lo presenta la película *Apolo 13* (Universal, 1995), el astronauta Jim Lovell dijo: "Caminaré en un lugar donde hay una diferencia de 400 grados entre la luz solar y la sombra." Suponga que un astronauta que está de pie en la Luna sostiene un termómetro en su mano enguantada. (a) ¿La lectura en el termómetro es la temperatura del vacío en la superficie de la Luna? (b) ¿Lee alguna temperatura? Si es así, ¿qué objeto o sustancia tiene dicha temperatura?

6. Las tapas metálicas en los frascos de vidrio con frecuencia se aflojan al pasar agua caliente sobre ellas. ¿Por qué funciona esto?

7. Un radiador de automóvil se llena hasta el borde con agua cuando el motor está frío. (a) ¿Qué ocurre con el agua cuando el motor está en operación y el agua se lleva a temperatura alta? (b) ¿Qué tienen los automóviles modernos en sus sistemas de enfriamiento para evitar la pérdida de refrigerante?

8. Cuando el anillo metálico y la esfera de metal de la figura PC19.8 están a temperatura ambiente, la esfera apenas puede pasar por el anillo. (a) Después que la esfera se calienta en una flama, no puede pasar por el anillo. Explique. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Y si el anillo se calienta y la esfera se deja a temperatura ambiente? ¿La esfera pasa a través del anillo?



© Cengage Learning/Charles D. Winters

Figura PC19.8

9. ¿Es posible que dos objetos estén en equilibrio térmico si no están en contacto mutuo? Explique.

10. Use una tabla periódica de los elementos (vea el Apéndice C) para determinar el número de gramos en un mol de (a) hidrógeno, que tiene moléculas diatómicas; (b) helio, y (c) monóxido de carbono.

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 19.2 Termómetros y escala de temperatura Celsius

Sección 19.3 Termómetro de gas a volumen constante y escala absoluta de temperatura

1. Una enfermera mide la temperatura de un paciente y obtiene 41.5°C. (a) ¿Cuál es la temperatura en la escala Fahrenheit? (b) ¿Usted piensa que el paciente está seriamente enfermo? Explique.

2. La diferencia de temperatura entre el interior y el exterior de una casa en un frío día de invierno es de 57.0°F. Exprese esta diferencia en (a) la escala Celsius y (b) la escala Kelvin.

3. Convierta las siguientes temperaturas a sus valores en las escalas Fahrenheit y Kelvin: (a) el punto de sublimación del hielo seco, −78.5°C; (b) temperatura del cuerpo humano, 37.0°C.

4. El punto de ebullición del hidrógeno líquido es 20.3 K a presión atmosférica. ¿Cuánto es esta temperatura en (a) la escala Celsius y (b) la escala Fahrenheit?

5. El nitrógeno líquido tiene un punto de ebullición de −195.81°C a presión atmosférica. Exprese esta temperatura (a) en grados Fahrenheit y (b) en kelvins.

6. El Valle de la Muerte tiene el récord de la más alta temperatura registrada en Estados Unidos. El 10 de julio de 1913, en un lugar llamado Rancho Furnace Creek, la temperatura alcanzó los 134°F. La temperatura más baja registrada en E.U. ocurrió en Campo Prospect Creek, Alaska, el 23 de enero de 1971, cuando la temperatura se desplomó a −79.8°F. (a) Convierta estas temperaturas a la escala Celsius. (b) Convierta las temperaturas Celsius a Kelvin.

7. En un experimento de estudiantes, un termómetro de gas a volumen constante se calibra en hielo seco (−78.5°C) y en la ebullición del alcohol etílico (78.0°C). Las presiones separadas son 0.900 atm y 1.635 atm. (a) ¿Esta calibración a qué valor de cero absoluto conduce en grados Celsius? ¿Qué presiones se encontrarían (b) en el punto de congelación y (c) en el punto de ebullición del agua? *Sugerencia*: utilice la relación lineal $P = A + BT$, donde A y B son constantes.

Sección 19.4 Expansión térmica de sólidos y líquidos

Nota: La tabla 19.1 está disponible para resolver problemas en esta sección.

8. Las secciones de concreto de cierta superautopista están diseñadas para tener una longitud de 25.0 m. Las secciones se vierten y curan a 10.0°C. ¿Qué espaciamiento mínimo debe dejar el ingeniero entre las secciones para eliminar el pandeo si el concreto alcanzará una temperatura de 50.0°C?

9. El elemento activo de cierto láser se fabrica de una barra de vidrio de 30.0 cm de largo y 1.50 cm de diámetro. Suponga que el coeficiente de expansión lineal promedio del vidrio es $9.00 \times 10^{-6}\ (°C)^{-1}$. Si la temperatura de la barra aumenta en 65.0°C, ¿cuál es el incremento en (a) su longitud, (b) su diámetro y (c) su volumen?

10. **Problema de repaso.** Dentro de la pared de una casa, una sección de tubería de agua caliente en forma de L consiste de tres partes: una pieza recta horizontal de $h = 28.0$ cm de longitud; un codo, y una pieza vertical recta de $\ell = 134$ cm de longitud (figura P19.10). Una trabe y un castillo mantienen fijos los extremos de esta sección de tubería de cobre. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento del codo cuando hay flujo de agua, lo que eleva la temperatura de la tubería de 18.0°C a 46.5°.

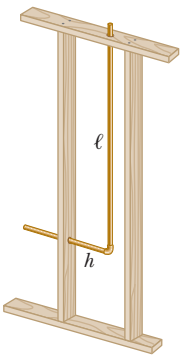


Figura P19.10

11. Un alambre telefónico de cobre en esencia no tiene comba entre postes separados 35.0 m en un día de invierno cuando la temperatura es de −20.0°C. ¿Cuánto más largo es el alambre en un día de verano cuando la temperatura es de 35.0°C?

12. Un par de monturas de gafas están elaboradas con epoxi plástico. A temperatura ambiente (20.0°C), las monturas tienen orificios circulares de 2.20 cm de radio. ¿A qué temperatura deben calentarse las monturas si lentes de 2.21 cm de radio deben insertarse en ellas? El coeficiente de expansión lineal promedio del plástico es $1.30 \times 10^{-4}\ (°C)^{-1}$.

13. La tubería Trans-Alaska tiene 1 300 km de largo, desde Bahía Prudhoe hasta Puerto de Valdez, y experimenta temperaturas de −73°C a +35°C. ¿Cuánto se expande la tubería de acero debido a la diferencia de temperatura? ¿Cómo se puede compensar esta expansión?

14. Cada año miles de niños se queman con el agua caliente del grifo. La figura P19.14 (página 584) muestra una vista de la sección transversal de un grifo antiquemaduras diseñado para prevenir tales accidentes. Dentro del dispositivo un resorte hecho de material con un alto coeficiente de expansión térmica controla un émbolo móvil. Cuando la temperatura del agua rebasa un valor

de seguridad predeterminado, la expansión del resorte hace que el émbolo detenga el flujo de agua. Suponga que la longitud inicial L de un resorte sin esfuerzo es 2.40 cm y que su coeficiente de expansión lineal es $22.0 \times 10^{-6}\ (°C)^{-1}$, entonces determine el incremento en longitud del resorte cuando la temperatura del agua se eleva en 30.0°C. (Usted encontrará que es pequeño el aumento en longitud. Por lo tanto, para proporcionar una mayor variedad en la válvula de apertura para el cambio de temperatura anticipado, los dispositivos modernos tienen un diseño mecánico más complicado.)

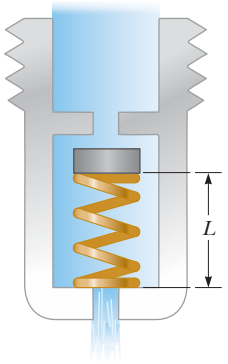


Figura P19.14

15. Un orificio cuadrado de 8.00 cm de lado se corta en una hoja de cobre. (a) Calcule el cambio en el área de este orificio causado al incrementar en 50.0 K la temperatura de la hoja. (b) ¿Este cambio representa un aumento o una disminución en el área encerrada por el orificio?

16. El coeficiente de expansión volumétrica promedio para el tetracloruro de carbono es $5.81 \times 10^{-4}\ (°C)^{-1}$. Si un recipiente de acero de 50.0 gal se llena por completo con tetracloruro de carbono cuando la temperatura es 10.0°C, ¿cuánta será su expansión cuando la temperatura se eleve a 30.0°C?

17. A 20.0°C, un anillo de aluminio tiene un diámetro interior de 5.000 0 cm, y una barra de latón tiene un diámetro de 5.050 0 cm. (a) Si sólo se calienta el anillo, ¿qué temperatura debe alcanzar, tal que apenas se deslice por la barra? (b) **¿Qué pasaría si?** Si tanto la barra como el anillo se calientan juntos, ¿qué temperatura deben alcanzar para que el anillo apenas se deslice sobre la barra? (c) ¿Funcionaría este último proceso? Explique. *Sugerencia*: consulte la tabla 20.2 en el próximo capítulo.

18. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un delgado anillo de latón tiene un diámetro interno de 10.00 cm a 20.0°C. Un cilindro sólido de aluminio tiene un diámetro de 10.02 cm a 20.0°C. Suponga que ambos metales tienen coeficientes de expansión lineal constantes. Los dos metales se enfrían juntos a una temperatura en donde el anillo puede deslizarse sobre el extremo del cilindro.

19. Un matraz volumétrico fabricado de Pyrex se calibra en 20.0°C. Se llena hasta la marca de 100 mL con acetona a 35.0°C. Después que el matraz está lleno, la acetona se enfría y el matraz se calienta de manera que la combinación acetona-matraz alcanza una temperatura uniforme de 32.0°C. Luego la combinación se enfría a 20.0°C. (a) ¿Cuál es el volumen de la acetona cuando se enfría a 20.0°C? (b) En la temperatura de 32.0°C, ¿el nivel de acetona está por arriba o por abajo de la marca de 100 mL en el matraz? Explique.

20. **Problema de repaso.** En un día en que la temperatura es de 20.0°C, un sendero de concreto se vierte en tal forma que los extremos del sendero son incapaces de moverse. Tome el módulo de Young para el concreto como $7.00 \times 10^9\ N/m^2$ y la resistencia a la compresión como $2.00 \times 10^9\ N/m^2$. (a) ¿Cuál es el esfuerzo en el cemento en un día caliente de 50.0°C? (b) ¿El concreto se fractura?

21. Un cilindro hueco de aluminio de 20.0 cm de profundidad tiene una capacidad interna de 2.000 L a 20.0°C. Se llena por completo con trementina a 20.0°C. La trementina y el cilindro de aluminio se calientan a fuego lento a 80.0°C. (a) ¿Cuánta trementina se desborda? (b) ¿Cuál es el volumen de la trementina restante en el cilindro a 80.0°C? (c) Si la combinación con esta cantidad de trementina se enfría a 20.0°C, ¿qué tan abajo del borde del cilindro retrocede la superficie de la trementina?

22. **Problema de repaso.** El puente Golden Gate en San Francisco tiene un tramo principal de 1.28 km de largo, uno de los más largos del mundo. Imagine que un alambre de acero tenso con esta longitud y área de sección transversal de $4.00 \times 10^{-6}\ m^2$ se tiende en la losa, con sus extremos unidos a las torres del puente, y que en este día de verano la temperatura del alambre es de 35.0°C. (a) Cuando llega el invierno, las torres permanecen a la misma distancia de separación y la losa del puente mantiene la misma forma mientras se abren las juntas de dilatación. Cuando la temperatura disminuye a −10.0°C, ¿cuál es la tensión en el alambre? Considere que el módulo de Young para el acero es de $20.0 \times 10^{10}\ N/m^2$. (b) Si el esfuerzo en el acero supera su límite elástico de $3.00 \times 10^8\ N/m^2$, ocurre deformación permanente. ¿A qué temperatura el alambre alcanzaría su límite elástico? (c) **¿Qué pasaría si?** Explique cómo cambiarían sus respuestas a los incisos (a) y (b) si el puente Golden Gate tuviera el doble de largo?

23. Una muestra de plomo tiene una masa de 20.0 kg y una densidad de $11.3 \times 10^3\ kg/m^3$ a 0°C. (a) ¿Cuál es la densidad del plomo a 90.0°C? (b) ¿Cuál es la masa de la muestra de plomo a 90.0°C?

24. Una muestra de una sustancia sólida tiene una masa m y una densidad ρ_0 a una temperatura T_0. (a) Encuentre la densidad de la sustancia si su temperatura se incrementa en una cantidad ΔT en términos del coeficiente de expansión volumétrica β. (b) ¿Cuál es la masa de la muestra si la temperatura se eleva una cantidad ΔT?

25. Un tanque de gasolina subterráneo puede contener 1.00×10^3 galones de gasolina a 52.0°F. Suponga que un día el tanque se está llenando cuando la temperatura externa (y la temperatura de la gasolina en un camión-tanque) es de 95.0°F. Cuando el tanque subterráneo indica que está lleno, ¿cuántos galones se han transferido desde el camión, de acuerdo con una norma de compensación en él? Suponga que la temperatura de la gasolina rápidamente se enfría de 95.0°F a 52.0°F al entrar al tanque.

Sección 19.5 Descripción macroscópica de un gas ideal

26. Un tanque rígido contiene 1.50 moles de un gas ideal. Determine el número de moles de gas que deben sacarse del tanque para bajar la presión del gas de 25.0 atm a 5.00 atm. Suponga que el volumen del tanque y la temperatura del gas permanecen constantes durante el proceso.

27. Un gas está confinado en un tanque a una presión de 11.0 atm y a una temperatura de 25.0°C. Si se sacan dos tercios del gas y la temperatura se eleva a 75.0°C, ¿cuál es la presión del gas restante en el tanque?

28. Su padre y su hermano menor se enfrentan al mismo problema. El rociador de jardín de su padre y el cañón de agua

de su hermano tienen tanques con una capacidad de 5.00 L (figura P19.28). Su padre pone una cantidad despreciable de fertilizante concentrado en su tanque. Ambos vierten 4.00 L de agua y sellan sus tanques, de modo que los tanques también contienen aire a presión atmosférica. A continuación, cada uno usa una bomba de pistón operada a mano para inyectar más aire hasta que la presión absoluta en el tanque alcanza 2.40 atm y se vuelve muy difícil mover el manubrio de la bomba. Ahora cada quien usa su dispositivo para rociar agua, no aire, hasta que el chorro se vuelve débil, cuando la presión en el tanque llega a 1.20 atm. Para lograr rociar toda el agua, cada uno encuentra que debe bombear el tanque tres veces. He aquí el problema: la mayor parte del agua se rocía como resultado del segundo bombeo. El primer y tercer bombeos parecen tan difíciles como el segundo, pero resultan en una cantidad mucho más pequeña de agua rociada. Explique este fenómeno.

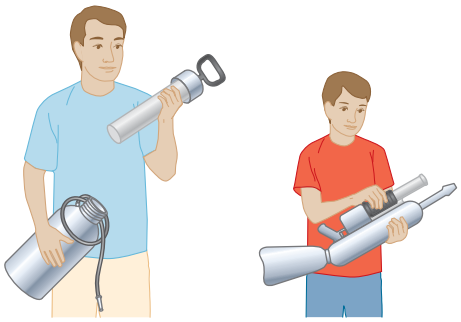


Figura P19.28

29. Un recipiente de 8.00 L contiene gas a una temperatura de 20.0°C y una presión de 9.00 atm. (a) Determine el número de moles de gas en el recipiente. (b) ¿Cuántas moléculas hay en el recipiente?

30. Un recipiente de forma cúbica con 10.0 cm por lado contiene aire (con masa molar equivalente de 28.9 g/mol) a presión atmosférica y temperatura de 300 K. Encuentre (a) la masa del gas, (b) la fuerza gravitacional ejercida sobre él y (c) la fuerza que él ejerce sobre cada cara del cubo. (d) ¿Por qué tan pequeña muestra ejerce tan grande fuerza?

31. Un auditorio tiene dimensiones de 10.0 m × 20.0 m × 30.0 m. ¿Cuántas moléculas de aire llenan el auditorio a 20.0°C y una presión de 101 kPa (1.00 atm)?

32. Un medidor de presión en un tanque registra la presión manométrica, que es la diferencia entre las presiones interior y exterior. Cuando el tanque está lleno de oxígeno (O_2), contiene 12.0 kg del gas a una presión manométrica de 40.0 atm. Determine la masa de oxígeno que se extrajo del tanque cuando la lectura de la presión es de 25.0 atm. Suponga que la temperatura del tanque permanece constante.

33. (a) Encuentre el número de moles en un metro cúbico de un gas ideal a 20.0°C y presión atmosférica. (b) Para aire, el número de Avogadro de moléculas tiene 28.9 g de masa. Calcule la masa de un metro cúbico de aire. (c) Establezca cómo se compara este resultado con la densidad tabulada del aire a 20.0°C.

34. Utilice la definición del número de Avogadro para encontrar la masa de un átomo de helio.

35. Un popular refresco de cola contiene 6.50 g de dióxido de carbono disuelto en 1.00 L de bebida suave. Si el dióxido de carbono evaporándose es atrapado en un cilindro a 1.00 atm y 20.0°C, ¿qué volumen ocupa el gas?

36. En sistemas de vacío avanzados se han logrado presiones tan bajas como 1.00×10^{-9} Pa. Calcule el número de moléculas en un recipiente de 1.00 m^3 a esta presión y una temperatura de 27.0°C.

37. La llanta de un automóvil se infla con aire originalmente a 10.0°C y presión atmosférica normal. Durante el proceso el aire se comprime a 28% de su volumen original y la temperatura aumenta a 40.0°C. (a) ¿Cuál es la presión de la llanta? (b) Después que el automóvil se maneja con gran rapidez, la temperatura en el aire de la llanta se eleva a 85.0°C y el volumen interior de la llanta aumenta en 2.00%. ¿Cuál es la nueva presión de la llanta (absoluta)?

38. **Problema de repaso.** Para medir qué tan debajo de la superficie del océano bucea un ave para capturar un pez, un científico usó un método originado por lord Kelvin. Se espolvorean los interiores de tubos de plástico con azúcar y luego se sella un extremo de cada tubo. Durante la noche se captura un pájaro y le amarra un tubo a la espalda. A la siguiente noche se captura a la misma ave para quitarle el tubo. En una prueba, y utilizando un tubo de 6.50 cm de largo, se observó que el agua había entrado para lavar el azúcar hasta una distancia de 2.70 cm desde el extremo abierto del tubo. Encuentre la mayor profundidad a la que bucea el ave, si supone que el aire en el tubo permanece a temperatura constante.

39. **Problema de repaso.** La masa de un globo de aire caliente y su carga (no incluido el aire interior) es de 200 kg. El aire exterior está a 10.0°C y 101 kPa. El volumen del globo es de 400 m^3. ¿A qué temperatura se debe calentar el aire en el globo antes que éste se eleve? (La densidad del aire a 10.0°C es de 1.244 kg/m^3.)

40. Una habitación de volumen V contiene aire con masa molar equivalente M (en g/mol). Si la temperatura de la habitación se eleva de T_1 a T_2, ¿qué masa de aire dejará la habitación? Suponga que la presión del aire en la habitación se mantiene a P_0.

41. **Problema de repaso.** A 25.0 m bajo la superficie del mar, donde la temperatura es de 5.00°C, un buzo exhala una burbuja de aire que tiene un volumen de 1.00 cm^3. Si la temperatura de la superficie del mar es 20.0°C, ¿cuál es el volumen de la burbuja justo antes de romper en la superficie?

42. Estime la masa del aire en su recámara. Establezca las cantidades que toma como datos y el valor que mide o estima para cada una.

43. Un cocinero pone 9.00 g de agua en una olla de presión de 2.00 L y la calienta a 500°C. ¿Cuál es la presión dentro del recipiente?

44. Un medidor de presión en un cilindro registra la presión manométrica, que es la diferencia entre las presiones interior y exterior P_0. La presión manométrica se denota por P_g. Cuando el tanque está lleno, la masa de gas en él es m_i a la presión manométrica P_{gi}. Suponga que la temperatura

del cilindro permanece constante, entonces demuestre que la masa del gas *restante* en el cilindro, cuando la lectura de la presión es P_{gf}, está dada por

$$m_f = m_i\left(\frac{P_{gf} + P_0}{P_{gi} + P_0}\right)$$

Problemas adicionales

45. Prolongadas misiones espaciales necesitan recuperar el oxígeno en el dióxido de carbono exhalado por la tripulación. En un método de recuperación, 1.00 mol de dióxido de carbono produce 1.00 mol de oxígeno y 1.00 mol de metano como producto adicional. El metano se almacena en un tanque bajo presión y está disponible para controlar la posición de la nave mediante ventilación controlada. Un astronauta exhala 1.09 kg de dióxido de carbono cada día. Si el metano generado en el reciclaje de la respiración de tres astronautas, durante una semana de vuelo, se almacena a −45.0°C en un tanque de 150 L originalmente vacío, ¿cuál es la presión final en el tanque?

46. Una barra de acero que se emplea en la construcción de un rascacielos tiene una longitud de 35.000 m cuando se maneja un día frío a una temperatura de 15.000°F. ¿Cuál es la longitud de la barra cuando se instala posteriormente en un día caluroso a una temperatura de 90.000°F?

47. Una esfera de acero tiene un diámetro de 2.540 cm a 25.00°C. (a) ¿Cuál es su diámetro cuando su temperatura se eleva a 100.0°C? (b) ¿Cuál es el cambio de temperatura requerido para incrementar su volumen en 1.000%?

48. Una llanta de bicicleta se infla a una presión manométrica de 2.50 atm cuando la temperatura es de 15.0°C. Mientras una persona maneja su bicicleta, la temperatura de la llanta se eleva a 45.0°C. Suponga que no cambia el volumen de la llanta, entonces determine la presión manométrica en la llanta a la temperatura superior.

49. En una planta de procesamiento químico, una cámara de reacción de volumen fijo V_0 se conecta a una cámara de depósito de volumen fijo $4V_0$ mediante un pasillo que contiene un tapón poroso térmicamente aislante. El tapón permite que las cámaras estén a diferentes temperaturas y que el gas pase de una cámara a la otra, además de asegurar que la presión sea la misma en ambas. En un punto del procesamiento, ambas cámaras contienen gas a una presión de 1.00 atm y una temperatura de 27.0°C. Las válvulas de admisión y escape hacia el par de cámaras están cerradas. El depósito se mantiene a 27.0°C mientras la cámara de reacción se calienta a 400°C. ¿Cuál es la presión en ambas cámaras después que se logran estas temperaturas?

50. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un aparato se diseñó de manera que un vapor inicialmente a $T = 150°C$, $P = 1.00$ atm y $V = 0.5000$ m^3 en un pistón cilíndrico experimente un proceso donde (1) el volumen permanezca constante y la presión baje a 0.870 atm, seguido por (2) una expansión en la cual la presión es constante y el volumen aumenta a 1.00 m^3, y después por (3) un retorno a las condiciones iniciales. Es importante que la presión del gas nunca sea menor que 0.850 atm para que el pistón sustente una parte muy delicada y costosa del aparato. Sin tal respaldo, el delicado aparato se dañaría severamente y quedaría inútil. Cuando el diseño se convierte en un prototipo funcional, entonces opera perfectamente.

51. Un termómetro de mercurio se construye como se muestra en la figura P19.51. El tubo capilar de Pyrex tiene un diámetro de 0.004 00 cm, y el bulbo tiene un diámetro de 0.250 cm. Encuentre el cambio en altura de la columna de mercurio que ocurre con un cambio en temperatura de 30.0°C.

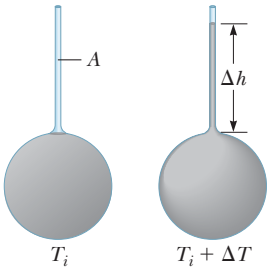


Figura P19.51
Problemas 51 y 52.

52. Un líquido con un coeficiente de expansión volumétrica β justamente llena un cascarón esférico de volumen V (figura P19.51). El cascarón y el capilar abierto de área A desde la parte superior de la esfera están elaborados de un material con un coeficiente de expansión lineal α. El líquido es libre para expandirse en la capilaridad. Suponga que la temperatura se incrementa en ΔT, encuentre la distancia Δh que se eleva el líquido en el capilar.

53. **Problema de repaso.** Un tubo de aluminio está abierto en ambos extremos y se usa como una flauta. El tubo se enfría a 5.00°C, en donde su longitud es 0.655 m. Tan pronto como comienza a tocarla, el tubo se llena con aire a 20.0°C. Después de eso, ¿en cuánto cambia su frecuencia fundamental cuando el metal eleva su temperatura a 20.0°C?

54. Dos barras metálicas se fabrican de invar y una tercera barra se elabora de aluminio. A 0°C, cada una de las tres barras se taladra con dos orificios separados 40.0 cm. A través de los orificios se ponen clavijas para ensamblar las barras en un triángulo equilátero, como en la figura P19.54. (a) Primero ignore la expansión del invar. Encuentre el ángulo entre las barras de invar como función de la temperatura Celsius. (b) ¿Su respuesta es precisa tanto para temperaturas negativas como positivas? (c) ¿Es precisa para 0°C? (d) Resuelva el problema de nuevo e incluya la expansión del invar. El aluminio se funde a 660°C y el invar a 1 427°C. Suponga que los coeficientes de expansión tabulados son constantes. ¿Cuáles son (e) el mayor y (f) el menor ángulos obtenibles entre las barras de invar?

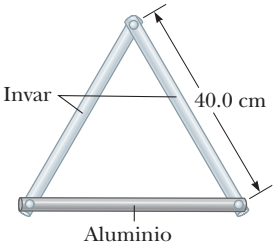


Figura P19.54

55. Un estudiante mide la longitud de una barra de latón con una cinta de acero a 20.0°C. La lectura es de 95.00 cm. ¿Qué indicará la cinta para la longitud de la barra cuando ésta y la cinta estén a (a) −15.0°C y (b) 55.0°C?

56. La densidad de la gasolina es de 730 kg/m^3 a 0°C. Su coeficiente de expansión volumétrica promedio es de 9.60×10^{-4} (°C)$^{-1}$. Suponga que 1.00 gal de gasolina ocupa 0.003 80 m^3. ¿Cuántos kilogramos adicionales de gasolina recibiría si compra 10.0 gal de gasolina a 0°C en lugar de a 20.0°C de una bomba que no tiene compensación de temperatura?

57. Un líquido tiene una densidad ρ. (a) Demuestre que el cambio fraccionario en densidad para un cambio en temperatura ΔT es $\Delta\rho/\rho = -\beta\,\Delta T$. (b) ¿Qué implica el signo negativo? (c) El agua pura tiene una densidad máxima de 1.000 0 g/cm^3 a 4.0°C. A 10.0°C, su densidad es 0.999 7 g/cm^3. ¿Cuál es el valor de β para el agua en el rango de temperatura de 0°C a 4.00°C?

58. (a) Considere que la definición del coeficiente de expansión volumétrica es

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT}\bigg|_{P=\text{constante}} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}$$

Use la ecuación de estado de un gas ideal para demostrar que el coeficiente de expansión volumétrica de un gas ideal a presión constante está dado por $\beta = 1/T$, donde T es la temperatura absoluta. (b) ¿Qué valor predice esta expresión para β a 0°C? Establezca cómo se compara este resultado con los valores experimentales para (c) helio y (d) aire en la tabla 19.1. *Nota*: estos valores son mayores que los coeficientes de expansión volumétrica para la mayoría de los líquidos y sólidos.

59. **Problema de repaso.** Un reloj con un péndulo de latón tiene un periodo de 1.000 s a 20.0°C. Si la temperatura aumenta a 30.0°C, (a) ¿en cuánto tiempo cambia el periodo y (b) cuánto tiempo gana o pierde el reloj en una semana?

60. Una tira bimetálica de longitud L está hecha de dos listones de diferentes metales acomodados juntos. (a) Primero suponga que la tira originalmente es recta. A medida que la tira se calienta, el metal con el mayor coeficiente de expansión promedio se expande más que el otro, lo que fuerza a la tira en un arco con el radio exterior que tiene mayor circunferencia (figura P19.60). Obtenga una expresión para el ángulo de doblado θ como función de la longitud inicial de las tiras, sus coeficientes de expansión lineal promedio, el cambio en temperatura y la separación de los centros de las tiras ($\Delta r = r_2 - r_1$). (b) Demuestre que el ángulo de doblado disminuye a cero cuando ΔT tiende a cero y también cuando los dos coeficientes de expansión promedio se vuelven iguales. (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué ocurre si la tira se enfría?

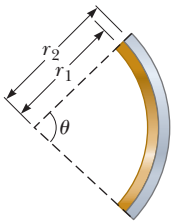


Figura P19.60

61. La placa rectangular que se muestra en la figura P19.61 tiene un área A_i igual a ℓw. Si la temperatura aumenta en ΔT, cada dimensión aumenta de acuerdo con la ecuación 19.4, donde α es el coeficiente de expansión lineal promedio. (a) Demuestre que el aumento en el área es $\Delta A = 2\alpha A_i \Delta T$. (b) ¿Qué aproximación supone esta expresión?

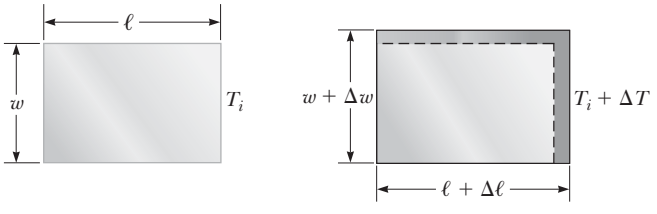


Figura P19.61

62. La medición del coeficiente de expansión volumétrica promedio β para un líquido es complicada, debido a que el recipiente también cambia de tamaño con la temperatura. La figura P19.62 muestra un medio simple para medir β a pesar de la expansión del recipiente. Con este aparato, un brazo de un tubo en U se mantiene a 0°C en un baño de agua-hielo, y el otro brazo se mantiene a una temperatura diferente T_C en un baño a temperatura constante. El tubo conector es horizontal. Una diferencia en la longitud o en el diámetro del tubo entre los dos brazos del tubo en U no tiene efecto sobre el balance de presión en el fondo del tubo debido a que la presión sólo depende de la profundidad del líquido. Obtenga una expresión para β del líquido en términos de h_0, h_t y T_C.

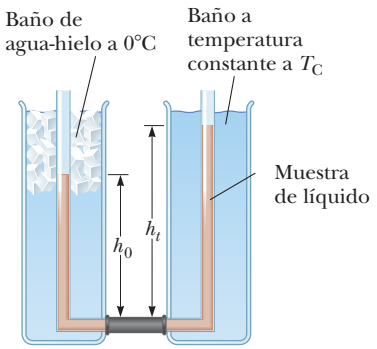


Figura P19.62

63. Una barra de cobre y una barra de acero varían en longitud en 5.00 cm a 0°C. Las barras se calientan y enfrían juntas. (a) ¿Es posible que la diferencia en longitud permanezca constante a todas las temperaturas? Explique. (b) Si así es, describa las longitudes a 0°C tan precisas como pueda. ¿Puede decir cuál barra es más larga? ¿Puede decir las longitudes de las barras?

64. Un cilindro vertical de área de sección transversal A se sella con un pistón sin fricción de gran ajuste de masa m (figura P19.64). El pistón no está restringido en su movimiento y es soportado por el gas a una presión P bajo él. La presión atmosférica es P_0. Se desea encontrar la altura h en la figura P19.64. (a) ¿Qué análisis de modelo es apropiado para describir el pistón? (b) Escriba una ecuación de fuerza apropiada para el pistón a partir de este análisis de modelo en términos de P, P_0, m, A y g. (c) Suponga que n moles de un gas ideal están en el cilindro a una temperatura T. Sustituya por P en su respuesta al inciso (b) para obtener la altura h del pistón sobre el fondo del cilindro.

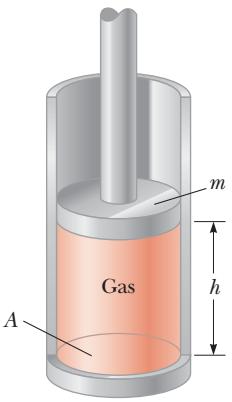


Figura P19.64

65. **Problema de repaso.** Considere un objeto con cualquiera de las formas que se muestran en la tabla 10.2. ¿Cuál es el aumento porcentual en el momento de inercia del objeto, cuando se calienta de 0°C a 100°C, si está compuesto de (a) cobre o (b) aluminio? Suponga que los coeficientes de expansión lineal promedio que se muestran en la tabla 19.1 no varían entre 0°C y 100°C. (c) ¿Por qué las respuestas a los incisos (a) y (b) son las mismas para todas las formas?

66. (a) Demuestre que la densidad de un gas ideal que ocupa un volumen V está dada por $\rho = PM/RT$, donde M es la masa molar. (b) Determine la densidad de oxígeno

gaseoso a presión atmosférica y a 20.0°C.

67. Dos losas de concreto de un puente de 250 m de largo se colocan justo en sus extremos, de modo que no se permite espacio para expansión (figura P19.67a). Si ocurre un aumento de temperatura de 20°C, ¿cuál es la altura y a la cual las losas se elevan cuando se pandean (figura P19.67b)?

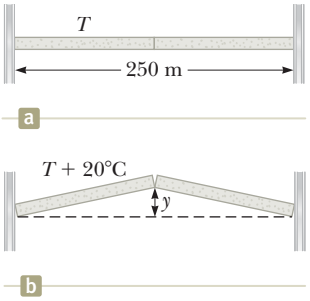


Figura P19.67
Problemas 67 y 68.

68. Dos losas de concreto que forman un puente de longitud L se colocan justo en sus extremos, de modo que no se permite espacio para expansión (figura P19.67a). Si ocurre un aumento de temperatura ΔT, ¿cuál es la altura y a la cual las losas se elevan cuando se pandean (figura P19.67b)?

69. **Problema de repaso.** (a) Obtenga una expresión para la fuerza de flotación sobre un globo esférico, sumergido en agua, como función de la profundidad h bajo la superficie, el volumen V_i del globo en la superficie, la presión P_0 en la superficie y la densidad ρ_w del agua. Suponga que la temperatura del agua no cambia con la profundidad. (b) ¿La fuerza *de flotación* aumenta o disminuye a medida que el globo se sumerge? (c) ¿A qué profundidad la fuerza de flotación es la mitad del valor en la superficie?

70. **Problema de repaso.** Después de una colisión en el espacio exterior, un disco de cobre a 850°C gira en torno a su eje con una rapidez angular de 25.0 rad/s. A medida que el disco radia luz infrarroja, su temperatura cae a 20.0°C. Ningún momento de torsión externo actúa en el disco. (a) ¿La rapidez angular cambia a medida que el disco se enfría? Explique cómo cambia o por qué no lo hace. (b) ¿Cuál es su rapidez angular a la temperatura más baja?

71. Comience con la ecuación 19.10 y demuestre que la presión total P en un recipiente lleno con una mezcla de varios gases ideales es $P = P_1 + P_2 + P_3 \cdots$, donde P_1, P_2, $\cdots$, son las presiones que cada gas ejercería si llenara sólo el recipiente. (Estas presiones individuales se llaman *presiones parciales* de los gases respectivos.) Este resultado se conoce como *ley de Dalton de presiones parciales.*

Problemas de desafío

72. **Problema de repaso.** Un alambre de acero y uno de cobre, cada uno de 2.000 mm de diámetro, se unen por los extremos. A 40.0°C cada uno tiene una longitud no estirada de 2.000 m. Los alambres se conectan entre dos soportes fijos separados 4.000 m sobre una mesa. El alambre de acero se extiende desde $x = -2.000$ m hasta $x = 0$, el alambre de cobre se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 2.000$ m y la tensión es despreciable. Después la temperatura baja a 20.0°C. Suponga que el coeficiente de expansión lineal promedio del acero es $11.0 \times 10^{-6}\ (°C)^{-1}$ y que el del cobre es $17.0 \times 10^{-6}\ (°C)^{-1}$. Tome el módulo de Young para el acero como $20.0 \times 10^{10}\ N/m^2$ y para el cobre como $11.0 \times 10^{10}\ N/m^2$. A esta temperatura más baja encuentre (a) la tensión en el alambre y (b) la coordenada x de la unión entre los alambres.

73. **Problema de repaso.** Una cuerda de guitarra hecha de acero, con un diámetro de 1.00 mm, se estira entre soportes separados 80.0 cm. La temperatura es de 0.0°C. (a) Encuentre la masa por unidad de longitud de esta cuerda. (Use el valor $7.86 \times 10^3\ kg/m^3$ para la densidad.) (b) La frecuencia fundamental de las oscilaciones transversales de la cuerda es de 200 Hz. ¿Cuál es la tensión en la cuerda? A continuación la temperatura se eleva a 30.0°C. Encuentre los valores resultantes de (c) la tensión y (d) la frecuencia fundamental. Suponga que tanto el módulo de Young de $20.0 \times 10^{10}\ N/m^2$ como el coeficiente de expansión promedio $\alpha = 11.0 \times 10^{-6}\ (°C)^{-1}$ tienen valores constantes entre 0.0°C y 30.0°C.

74. Un cilindro se cierra mediante un pistón conectado a un resorte con constante de $2.00 \times 10^3\ N/m^2$ (figura P19.74). Con el resorte relajado, el cilindro está lleno con 5.00 L de gas a una presión de 1.00 atm y una temperatura de 20.0°C. (a) Si el pistón tiene un área de sección transversal de $0.010\ 0\ m^2$ y masa despreciable, ¿a qué altura subirá cuando la temperatura se eleve a 250°C? (b) ¿Cuál es la presión del gas a 250°C?

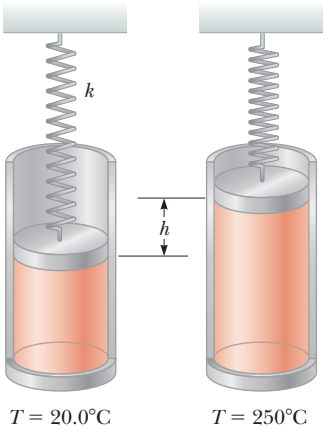


Figura P19.74

75. El helio gaseoso se vende en tanques de acero que se rompen si se les somete a un esfuerzo de tensión mayor que su límite elástico de $5 \times 10^8\ N/m^2$. Si el helio se utiliza para inflar un globo, ¿éste podría elevar el tanque esférico donde viene el helio? Justifique su respuesta. *Sugerencia*: considere un cascarón esférico de acero de radio r, grosor t y con densidad igual al hierro, y que contenga helio a presión alta y a punto de romperse en dos hemisferios.

76. Un cilindro que tiene un radio de 40.0 cm y 50.0 cm de profundidad se llena con aire a 20.0°C y 1.00 atm (figura P19.76a). Ahora en el cilindro baja un pistón de 20.0 kg y comprime el aire atrapado en el interior mientras llega a una altura de equilibrio h_i (figura P19.76b). Finalmente, un perro de 75.0 kg de pie sobre el pistón comprime más el aire, que permanece a 20°C (figura P19.76c). (a) ¿A qué distancia hacia abajo (Δh) se mueve el pistón cuando el

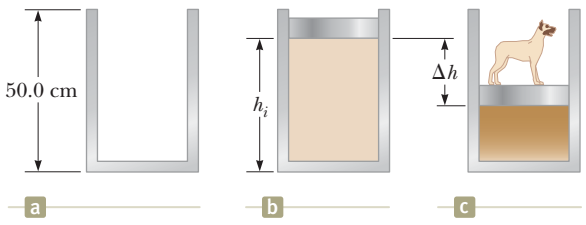


Figura P19.76

perro se para en él? (b) ¿A qué temperatura se calienta el gas para elevar el pistón y el perro de regreso a h_i?

77. La relación $L = L_i + \alpha L_i \Delta T$ es una aproximación válida cuando $\alpha \Delta T$ es pequeño. Si $\alpha \Delta T$ es grande se debe integrar la relación $dL = \alpha L \, dT$ para determinar la longitud final. (a) Suponga que el coeficiente de expansión lineal de un material es constante conforme L varía, entonces determine una expresión general para la longitud final de una barra hecha del material. Dada una barra de longitud 1.00 m y un cambio de temperatura de 100.0°C, determine el error causado por la aproximación cuando (b) $\alpha = 2.00 \times 10^{-5}$ $(°C)^{-1}$ (valor típico para un metal) y (c) cuando $\alpha = 0.020\,0$ $(°C)^{-1}$ (un valor grande, no realista, sólo para comparación). (d) Utilice la ecuación del inciso (a) y resuelva otra vez el problema 21 para obtener resultados más exactos.

78. **Problema de repaso.** El techo perfectamente plano de una casa forma un ángulo θ con la horizontal. Cuando cada día su temperatura cambia, entre T_c antes del amanecer y T_h a media tarde, el techo se expande y contrae uniformemente con un coeficiente de expansión térmica α_1. Sobre el techo hay una placa metálica rectangular plana con coeficiente de expansión α_2 mayor que α_1. La longitud de la placa es L, medida a lo largo de la pendiente del techo. La componente del peso de la placa perpendicular al techo se soporta mediante una fuerza normal distribuida uniformemente sobre el área de la placa. El coeficiente de fricción cinética entre la placa y el techo es μ_k. La placa siempre está a la misma temperatura que el techo, así, suponga que su temperatura cambia de manera continua. Debido a la diferencia en coeficientes de expansión, cada trozo de la placa se mueve en relación con el techo bajo ella, excepto por puntos a lo largo de cierta línea horizontal que corren a través de la placa llamada línea estacionaria. Si la temperatura se eleva, partes de la placa bajo la línea fija se mueven abajo en relación con el techo y sienten una fuerza de fricción cinética que actúa hacia arriba en el techo. Elementos de área arriba de la línea fija se deslizan hacia arriba del techo y sobre ellos la fricción cinética actúa hacia abajo, paralela al techo. La línea fija no ocupa área; así, suponga que sobre la placa no actúa fuerza de fricción estática mientras la temperatura cambia. La placa como un todo casi está en equilibrio, así que la fuerza de fricción neta sobre ella debe ser igual a la componente de su peso que actúa hacia abajo del plano inclinado. (a) Demuestre que la línea fija está a una distancia de

$$\frac{L}{2}\left(1 - \frac{\tan\theta}{\mu_k}\right)$$

abajo del borde superior de la placa. (b) Analice las fuerzas que actúan en la placa cuando la temperatura cae y demuestre que la línea estacionaria está a esa misma distancia sobre el borde inferior de la placa. (c) Demuestre que la placa baja del techo como un gusano moviéndose cada día una distancia

$$\frac{L}{\mu_k}(\alpha_2 - \alpha_1)(T_h - T_c)\tan\theta$$

(d) Evalúe la distancia que una placa de aluminio se mueve cada día si su longitud es de 1.20 m, la temperatura va en ciclos entre 4.00°C y 36.0°C, y el techo tiene una pendiente de 18.5°, 1.50×10^{-5} $(°C)^{-1}$ de coeficiente de expansión lineal y 0.420 de coeficiente de fricción con la placa. (e) **¿Qué pasaría si?** ¿Y si el coeficiente de expansión de la placa es menor que el del techo? ¿La placa sube lentamente por el techo?

79. Un riel de acero de 1.00 km está firmemente sujeto a ambos extremos cuando la temperatura es de 20.0°C. A medida que la temperatura aumenta el riel se pandea y toma la forma de un arco de círculo vertical. Encuentre la altura h del centro del riel cuando la temperatura es de 25.0°C. (Necesitará resolver una ecuación trascendente.)

CAPÍTULO

20

Primera ley de la termodinámica

20.1 Calor y energía interna

20.2 Calor específico y calorimetría

20.3 Calor latente

20.4 Trabajo y calor en procesos termodinámicos

20.5 Primera ley de la termodinámica

20.6 Algunas aplicaciones de la primera ley de la termodinámica

20.7 Mecanismos de transferencia de energía en procesos térmicos



En esta fotografía del Monte Baker, en el área cercana a Bellingham, Washington, se tiene evidencia del agua en sus tres fases. En el lago es agua líquida y en el suelo aparece agua sólida en forma de nieve. Las nubes en el cielo consisten en gotitas de agua líquida que se condensaron del vapor de agua en el aire. Los cambios que tiene una sustancia de una fase a otra resultan de la transferencia de energía. *(© iStockphoto.com/KingWu)*

Hasta alrededor de 1850, los campos de la termodinámica y la mecánica se consideraban como dos ramas distintas de la ciencia. El principio de conservación de la energía parecía describir únicamente ciertos tipos de sistemas mecánicos. Sin embargo, los experimentos de mediados del siglo XIX, realizados por el inglés James Joule y otros, mostraron una fuerte conexión entre la transferencia de energía mediante calor en los procesos térmicos y la transferencia de energía por trabajo en los procesos mecánicos. En la actualidad se sabe que la energía mecánica se puede transformar en energía interna, que en este capítulo se define formalmente. Una vez que se generalizó el concepto de energía, a partir de la mecánica, para incluir la energía interna, el principio de conservación de la energía discutido en el capítulo 8 surgió como una ley universal de la naturaleza.

Este capítulo se concentra en el concepto de energía interna, la primera ley de la termodinámica y algunas importantes aplicaciones de esta ley. La primera ley de la termodinámica describe sistemas en los cuales el único cambio de energía es el de la energía interna y las transferencias de energía son mediante calor y trabajo. En este capítulo una diferencia principal en la discusión del trabajo, en relación con la de la mayoría de los capítulos acerca de mecánica, es que se considerará el trabajo realizado sobre *sistemas deformables*.

20.1 Calor y energía interna

Para comenzar, es importante hacer una gran distinción entre energía interna y calor, términos que en el lenguaje popular con frecuencia se emplean de manera intercambiable, lo cual es incorrecto.

La **energía interna** es toda la energía de un sistema que se asocia con sus componentes microscópicos, átomos y moléculas, cuando se observa desde un marco de referencia en reposo respecto al centro de masa del sistema.

La última parte de esta oración asegura que cualquier energía cinética volumétrica del sistema resultante de su movimiento a través del espacio no se incluye en la energía interna. La energía interna incluye la energía cinética del movimiento aleatorio traslacional, rotacional y vibratorio de las moléculas; la energía potencial vibratoria asociada con fuerzas entre los átomos en las moléculas, y la energía potencial eléctrica asociada con fuerza entre moléculas. Es útil relacionar la energía interna con la temperatura de un objeto, pero esta correspondencia es limitada. En la sección 20.3 se demostrará que los cambios de energía interna también se presentan en ausencia de cambios de temperatura. En dicho estudio se investigará la energía interna del sistema cuando existe un *cambio físico*, con más frecuencia relacionado con un cambio de fase, como fusión o ebullición. Se asigna energía asociada con *cambios químicos*, relacionados con reacciones químicas, al término de energía potencial en la ecuación 8.2 y no a la energía interna. Por lo tanto, se discute la *energía potencial química* en, por ejemplo, un cuerpo humano (debido a las comidas previas), el tanque de gasolina de un automóvil (debido a su previa transferencia de combustible) y una batería de un circuito eléctrico (colocado en la batería durante su construcción en el proceso de manufactura).

El **calor** se define como un proceso de transferencia de energía a través de la frontera de un sistema debido a una diferencia de temperatura entre el sistema y sus alrededores. También es la cantidad de energía Q transferida mediante este proceso.

Cuando usted *calienta* una sustancia, transfiere energía hacia ella al colocarla en contacto con alrededores que tienen una mayor temperatura. Tal es el caso, por ejemplo, cuando coloca una sartén de agua fría en el quemador de una estufa. El quemador está a una temperatura mayor que el agua y, por lo tanto, el agua gana energía mediante calor.

Lea con cuidado esta definición de calor (Q en la ecuación 8.2). En particular, en las siguientes frases comunes observe lo que *no* es el calor. (1) Calor *no* es energía en una sustancia caliente. Por ejemplo, "El agua en ebullición tiene una gran cantidad de calor" es incorrecta; el punto de ebullición del agua tiene *energía interna* E_{int}. (2) Calor *no* es radiación. Por ejemplo, "Estaba muy caliente porque la acera radiaba calor" es incorrecta; la energía abandona la acera vía *radiación electromagnética*, T_{RE} en la ecuación 8.2. (3) Calor *no* es lo caliente de un ambiente. Por ejemplo, "El calor en el aire era intolerante" es incorrecta; en un día caliente, el aire tiene una elevada *temperatura* T.

Como una analogía a la distinción entre calor y energía interna, considere la distinción entre trabajo y energía mecánica discutida en el capítulo 7. El trabajo realizado sobre un sistema es una medida de la cantidad de energía transferida al sistema desde sus alrededores, mientras que la energía mecánica (energía cinética más energía potencial) de un sistema es una consecuencia del movimiento y configuración del sistema. Por lo tanto, cuando una persona efectúa trabajo sobre un sistema, la energía se transfiere desde la persona al sistema. No tiene sentido hablar acerca del trabajo *de* un sistema; sólo es posible referirse al trabajo realizado *sobre* o *por* un sistema cuando ocurrió algún proceso en donde se transfirió energía hacia o desde el sistema. Del mismo modo, carece de sentido hablar del calor *de* un sistema; sólo es posible referirse al calor cuando sucede transferencia de energía como resultado de una diferencia de temperatura. Tanto el calor como el trabajo son maneras de transferir energía entre un sistema y sus alrededores.

Unidades de calor

Los primeros estudios acerca del calor se enfocaron en el resultante aumento en temperatura de una sustancia, que con frecuencia era agua. Los conceptos iniciales de calor se basaron en un fluido llamado *calórico* que fluía de una sustancia a otra y causaba cambios en la temperatura. A partir del nombre de este fluido mítico salió

Prevención de riesgos ocultos 20.1

Energía interna, energía térmica y energía de enlace Cuando lea otros libros de física, puede ver términos como *energía térmica* y *energía de enlace*. La energía térmica se interpreta como aquella parte de la energía interna asociada con el movimiento aleatorio de las moléculas y, por lo tanto, relacionada con la temperatura. La energía de enlace es la energía potencial intermolecular. En consecuencia,

Energía interna = energía térmica + energía de enlace

No obstante que esta separación se presenta aquí para aclarar en cuanto a otros libros, no se usarán estos términos porque no hay necesidad de ellos.

Prevención de riesgos ocultos 20.2

Calor, temperatura y energía interna son diferentes Mientras lea el periódico o explore el Internet esté alerta de las frases empleadas de manera incorrecta que incluyan la palabra *calor* y piense en la palabra adecuada para utilizarse en lugar de *calor*. Los ejemplos incorrectos incluyen: "A medida que el camión frenó hasta detenerse, se generó una gran cantidad de calor por fricción" y "el calor de un día de verano . . . ."



© The Art Gallery Collection/Alamy

James Prescott Joule
Físico británico (1818-1889)
Joule recibió cierta educación formal en matemáticas, filosofía y química de John Dalton, pero en gran parte fue autodidacta. La investigación de Joule condujo al establecimiento del principio de conservación de la energía. Su estudio de la relación cuantitativa entre los efectos eléctrico, mecánico y químico del calor culminó con su anuncio, en 1843, de la cantidad de trabajo requerida para producir una unidad de energía, llamada el equivalente mecánico del calor.

una unidad de energía relacionada con los procesos térmicos, la **caloría** (**cal**), que se define como la cantidad de transferencia de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua de 14.5°C a 15.5°C.[1] (La "Caloría", escrita con C mayúscula y que se emplea para describir el contenido energético de los alimentos, es en realidad una kilocaloría.) La unidad de energía en el sistema estadounidense es la **unidad térmica británica** (**Btu**), que se define como la cantidad de transferencia de energía requerida para elevar la temperatura de 1 lb de agua de 63°F a 64°F.

Una vez que la relación entre energía en procesos térmicos y mecánicos quedó clara, no hubo necesidad de una unidad separada asociada a los procesos térmicos. El *joule* ya se definió como una unidad de energía basada en procesos mecánicos. Los científicos cada vez más se alejan de la caloría y el Btu, y emplean el joule para describir procesos térmicos. En este libro, calor, trabajo y energía interna por lo general se miden en joules.

El equivalente mecánico del calor

En los capítulos 7 y 8 se encontró que siempre que la fricción esté presente en un sistema mecánico, la energía mecánica en el sistema disminuye; en otras palabras, la energía mecánica no se conserva en presencia de fuerzas no conservativas. Varios experimentos demuestran que esta energía mecánica simplemente no desaparece, sino que se transforma en energía interna. Puede realizar tal experimento en casa al martillar un clavo en un trozo de madera. ¿Qué sucede a toda la energía cinética del martillo una vez que ha terminado? Parte de ella ahora está en el clavo como energía interna, como se demuestra por el clavo mensurablemente más caliente. Note que en este proceso *no* hay transferencia de energía mediante calor. Para el clavo y la tabla la ecuación 8.2 queda $\Delta E_{\text{int}} = W + T_{\text{OM}}$, donde W es el trabajo realizado por el martillo sobre el clavo y T_{OM} es la energía que abandona el sistema vía ondas sonoras cuando el clavo es golpeado. Aunque esta conexión entre energía mecánica e interna la sugirió por primera vez Benjamín Thompson, fue James Prescott Joule quien estableció la equivalencia de la reducción en energía mecánica y el aumento de energía interna.

En la figura 20.1 se muestra un diagrama esquemático del experimento más famoso de Joule. El sistema de interés es la Tierra, los dos bloques y el agua en un contenedor aislado térmicamente. Dentro del sistema se realiza trabajo sobre el agua mediante una rueda de paletas giratoria, que es impulsada a través de pesados bloques que caen con una rapidez constante. Si se desprecian la energía transformada en los cojinetes y la energía a través de las paredes por calor, la disminución en energía potencial del sistema conforme caen los bloques es igual al trabajo efectuado por la rueda de paletas sobre el agua y, a su vez, es igual al aumento en energía interna del agua. Si los dos bloques caen una distancia h, la pérdida de energía potencial del sistema es $2mgh$, donde m es la masa de un bloque; esta energía eleva la temperatura del agua. Al variar las condiciones del experimento, Joule encontró que la disminución en energía mecánica es proporcional al producto de la masa de agua y el aumento en la temperatura del agua. La constante de proporcionalidad que obtuvo era de aproximadamente 4.18 J/g · C. Por lo tanto, 4.18 J de energía mecánica elevan la temperatura de 1 g de agua en 1°C. Mediciones más precisas tomadas más tarde probaron que la proporcionalidad era de 4.186 J/g · °C cuando la temperatura del agua se incrementaba de 14.5°C a 15.5°C. Aquí se adopta este valor de "caloría de 15 grados":

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J} \qquad (20.1)$$

Esta igualdad se conoce, por razones meramente históricas, como el **equivalente mecánico del calor**. Un nombre más conveniente sería *equivalencia entre energía mecánica y energía interna*, pero el nombre histórico tiene mucha presencia en el lenguaje cotidiano, a pesar del uso incorrecto de la palabra *calor*.

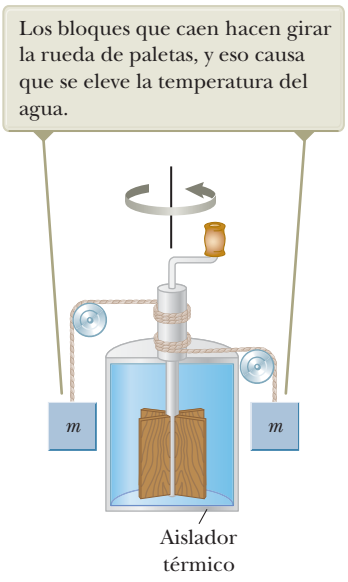


Figura 20.1 Experimento de Joule para determinar el equivalente mecánico del calor.

[1] Originalmente, la caloría se definió como la transferencia de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua en 1°C. Sin embargo, mediciones cuidadosas demostraron que la cantidad de energía requerida para producir un cambio de 1°C depende un poco de la temperatura inicial; por tanto, evolucionó una definición más precisa.

Ejemplo 20.1 Pérdida de peso por el camino difícil AM

Un estudiante ingiere alimentos cuantificados en 2 000 Calorías. Él desea hacer una cantidad equivalente de trabajo en el gimnasio y levanta una barra de 50.0 kg. ¿Cuántas veces debe levantar la barra para gastar toda esta energía? Suponga que él levanta la barra 2.00 m cada vez que la eleva y no vuelve a ganar energía cuando baja la barra.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine al estudiante levantando la barra. Él hace trabajo sobre el sistema de la barra y la Tierra, por lo que la energía sale de su cuerpo. La cantidad total de trabajo que debe hacer el estudiante es de 2 000 Calorías.

Categorizar Modele el sistema de la barra y la Tierra como un *sistema no aislado* para la *energía*.

Analizar Reduzca la ecuación de conservación de energía (ecuación 8.2), a la expresión apropiada para el sistema de la barra y la Tierra:

$$(1)\quad \Delta U_{\text{total}} = W_{\text{total}}$$

Exprese el cambio en energía potencial gravitacional del sistema después que la barra se eleva una vez:

$$\Delta U = mgh$$

Exprese la cantidad de energía total que debe transferirse al sistema mediante trabajo por levantar la barra n veces, si supone que no vuelve a ganar energía cuando la barra se baja:

$$(2)\quad \Delta U_{\text{total}} = nmgh$$

Sustituya la ecuación (2) en la ecuación (1):

$$nmgh = W_{\text{total}}$$

Despeje n:

$$n = \frac{W_{\text{total}}}{mgh}$$

Sustituya valores numéricos:

$$n = \frac{(2\,000\ \text{Cal})}{(50.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{m})}\left(\frac{1.00\times10^3\ \text{cal}}{\text{Caloría}}\right)\left(\frac{4.186\ \text{J}}{1\ \text{cal}}\right)$$

$$= 8.54\times10^3\ \text{veces}$$

Finalizar Si el estudiante está en buena forma y levanta la barra una vez cada 5 s, le tomará cerca de 12 h realizar esta proeza. Es claro que resulta mucho más fácil que el estudiante pierda peso mediante una dieta.

En realidad, el cuerpo humano no es 100% eficiente. Por lo tanto, no toda la energía de la comida transformada dentro del cuerpo se transfiere afuera del cuerpo mediante trabajo realizado sobre la barra. Parte de esta energía se utiliza para bombear sangre y efectuar otras funciones dentro del cuerpo. Así, las 2 000 Calorías se gastan en menos de 12 h cuando se incluyen estos otros requerimientos energéticos.

20.2 Calor específico y calorimetría

Cuando se le agrega energía a un sistema y no hay cambio en las energías cinética o potencial del sistema, por lo general la temperatura del sistema aumenta. (Una excepción a esta afirmación sucede cuando un sistema se somete a un cambio de estado, también llamado *transición de fase*, como se explica en la siguiente sección.) Si el sistema consiste en una muestra de una sustancia, se encuentra que la cantidad de energía requerida para elevar la temperatura de una masa determinada de la sustancia a cierta cantidad varía de una sustancia a otra. Por ejemplo, la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 kg de agua en 1°C es 4 186 J, pero la cantidad de energía requerida para elevar la temperatura de 1 kg de cobre en 1°C sólo es de 387 J. En la explicación que sigue se usará el calor como ejemplo de transferencia de energía, pero considere que la temperatura del sistema podría cambiar mediante cualquier método de transferencia de energía.

La **capacidad térmica** C de una muestra particular se define como la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de dicha muestra en 1°C. A partir de esta definición, se ve que si la energía Q produce un cambio ΔT en la temperatura de una muestra, entonces

$$Q = C\,\Delta T \qquad (20.2)$$

Tabla 20.1 Calores específicos de algunas sustancias a 25°C y presión atmosférica

Sustancia	Calor específico (J/kg · °C)	Sustancia	Calor específico (J/kg · °C)
Sólidos elementales		*Otros sólidos*	
Aluminio	900	Latón	380
Berilio	1 830	Vidrio	837
Cadmio	230	Hielo (−5°C)	2 090
Cobre	387	Mármol	860
Germanio	322	Madera	1 700
Oro	129	*Líquidos*	
Hierro	448	Alcohol (etílico)	2 400
Plomo	128	Mercurio	140
Silicio	703	Agua (15°C)	4 186
Plata	234	*Gas*	
		Vapor (100°C)	2 010

Nota: Para convertir los valores a unidades de cal/g · °C, divida entre 4 186.

El **calor específico** c de una sustancia es la capacidad térmica por unidad de masa. Por lo tanto, si a una muestra de una sustancia con masa m se le transfiere energía Q y la temperatura de la muestra cambia en ΔT, el calor específico de la sustancia es

Calor específico ▶

$$c \equiv \frac{Q}{m\,\Delta T} \tag{20.3}$$

El calor específico es en esencia una medida de qué tan insensible térmicamente es una sustancia a la adición de energía. Mientras mayor sea el calor específico de un material, más energía se debe agregar a una determinada masa del material para causar un cambio particular de temperatura. La tabla 20.1 contiene calores específicos representativos.

A partir de esta definición, es factible relacionar la energía Q transferida entre una muestra de masa m de un material y sus alrededores con un cambio de temperatura ΔT como

$$Q = mc\,\Delta T \tag{20.4}$$

Por ejemplo, la energía requerida para elevar la temperatura de 0.500 kg de agua en 3.00°C es $Q = (0.500\ \text{kg})(4\,186\ \text{J/kg} \cdot \text{°C})(3.00\text{°C}) = 6.28 \times 10^3\ \text{J}$. Note que cuando la temperatura aumenta, Q y ΔT se consideran positivos y la energía se transfiere al sistema. Cuando la temperatura disminuye, Q y ΔT se consideran negativos y la energía se transfiere afuera del sistema.

Es posible identificar $mc\,\Delta T$ como el cambio en energía interna del sistema si se ignora cualquier expansión o contracción térmica del sistema. (La expansión o contracción térmica causaría una cantidad muy pequeña de trabajo efectuado por el aire circundante sobre el sistema.) Entonces, la ecuación 20.4 es una forma reducida de la ecuación 8.2: $\Delta E_{\text{int}} = Q$. La energía interna del sistema se puede cambiar por transferencia de energía hacia el sistema por cualquier mecanismo. Por ejemplo, si el sistema es un horneado de papas en un microondas, la ecuación 8.2 se reduce análogamente a la ecuación 20.4: $\Delta E_{\text{int}} = T_{\text{RE}} = mc\,\Delta T$, donde T_{RE} es la energía transferida a las papas desde el horno de microondas mediante radiación electromagnética. Si el sistema es el aire en una bomba para bicicleta, el cual se calienta cuando se opera la bomba, la ecuación 8.2 se reduce al siguiente análogo de la ecuación 20.4: $\Delta E_{\text{int}} = W = mc\,\Delta T$, donde W es el trabajo realizado por el operador sobre la bomba. Al identificar $mc\,\Delta T$ con ΔE_{int}, se ha dado un paso hacia adelante en la comprensión de la temperatura: la temperatura está relacionada con la energía de las moléculas de un sistema. En el capítulo 21 se aprenderán más detalles de dicha relación.

Prevención de riesgos ocultos 20.3

Una desafortunada elección de terminología El nombre *calor específico* es un desafortunado vestigio de los días cuando la termodinámica y la mecánica se desarrollaron por separado. Un mejor nombre sería *transferencia específica de energía*, pero el término existente está muy arraigado como para sustituirlo.

Prevención de riesgos ocultos 20.4

La energía se puede transferir mediante cualquier método El símbolo Q representa la cantidad de energía transferida, pero considere que la transferencia de energía en la ecuación 20.4 podría ser mediante *cualquiera* de los métodos introducidos en el capítulo 8; no tiene que ser calor. Por ejemplo, doblar repetidamente un colgador de alambre para ropa eleva la temperatura en el punto de doblez mediante *trabajo*.

El calor específico varía con la temperatura. Sin embargo, si los intervalos de temperatura no son muy grandes, la variación de temperatura se ignora y c puede tratarse como una constante.[2] Por ejemplo, el calor específico del agua varía sólo en aproximadamente 1% de 0°C a 100°C a presión atmosférica. A menos que se establezca de otro modo, aquí se ignorarán tales variaciones.

Examen rápido 20.1 Imagine que tiene hierro, vidrio y agua, 1 kg de cada uno, y que las tres muestras están a 10°C. **(a)** Clasifique las muestras de mayor a menor temperatura después de agregar 100 J de energía a cada muestra. **(b)** Clasifique las muestras de mayor a menor cantidad de energía transferida mediante calor si cada muestra aumenta 20°C en temperatura.

Note de la tabla 20.1 que el agua tiene el mayor calor específico de los materiales comunes. Este alto calor específico es responsable en parte de las temperaturas moderadas que se encuentran cerca de los grandes cuerpos de agua. A medida que la temperatura de un cuerpo de agua disminuye durante el invierno, la energía se transfiere del agua fría al aire mediante calor, lo que aumenta la energía interna del aire. Debido al alto calor específico del agua, una cantidad de energía relativamente grande se transfiere al aire incluso para cambios mesurados de temperatura del agua. Los vientos predominantes en la costa oeste de Estados Unidos son hacia la tierra (hacia el Este). Por tanto, la energía liberada por el océano Pacífico mientras se enfría mantiene las áreas costeras mucho más calientes de lo que serían de otro modo. Como resultado, los estados de la Costa Oeste por lo general tienen clima invernal más favorable que los estados de la Costa Este, donde los vientos predominantes no tienden a transportar la energía hacia la tierra.

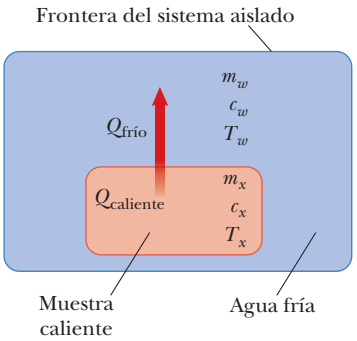


Figura 20.2 En un experimento de calorimetría, una muestra caliente cuyo calor específico se desconoce es colocada en agua fría dentro de un contenedor que aísla el sistema de los alrededores.

Calorimetría

Una técnica para medir calor específico involucra el calentamiento de una muestra en alguna temperatura conocida T_x, al colocarla en un recipiente que contenga agua de masa conocida y temperatura $T_w < T_x$, y medir la temperatura del agua después que se logra el equilibrio. Esta técnica se llama **calorimetría**, y los dispositivos donde se presenta esta transferencia de energía se llaman **calorímetros**. La figura 20.2 exhibe la muestra caliente en agua fría y la resultante transferencia de energía mediante calor desde la parte de alta temperatura del sistema hacia la parte de baja temperatura. Si el sistema de la muestra y el agua está aislado, el principio de conservación de energía requiere que la cantidad de energía Q_{caliente} que sale de la muestra (de calor específico desconocido) sea igual a la cantidad de energía $Q_{\text{frío}}$ que entra al agua.[3] La conservación de energía permite escribir la representación matemática de este enunciado energético como

$$Q_{\text{Frío}} = -Q_{\text{Caliente}} \tag{20.5}$$

Suponga que m_x es la masa de una muestra de alguna sustancia cuyo calor específico quiere determinar. Sean c_x su calor específico y T_x su temperatura inicial, como se ilustra en la figura 20.2. Del mismo modo, sean m_w, c_w y T_w los valores correspondientes para el agua. Si T_f es la temperatura final después que el sistema alcanza el equilibrio, la ecuación 20.4 indica que la transferencia de energía para el agua es $m_w c_w (T_f - T_w)$, que es positivo porque $T_f > T_w$, y que la transferencia de energía para la muestra de calor específico desconocido es $m_x c_x (T_f - T_x)$, que es negativa. Al sustituir estas expresiones en la ecuación 20.5 se obtiene

$$m_w c_w (T_f - T_w) = -m_x c_x (T_f - T_x)$$

Esta ecuación puede resolverse para el calor específico c_x desconocido.

Prevención de riesgos ocultos 20.5

Recuerde el signo negativo Es *crucial* incluir el signo negativo en la ecuación 20.5. El signo negativo es necesario en la ecuación por consistencia con la convención de signos para la transferencia de energía. La transferencia de energía Q_{caliente} tiene un valor negativo porque la energía sale de la sustancia caliente. El signo negativo en la ecuación garantiza que el lado derecho sea un número positivo, consistente con el lado izquierdo, que es positivo porque la energía entra al agua fría.

[2] La definición dada por la ecuación 20.4 supone que el calor específico no varía con la temperatura en el intervalo $\Delta T = T_f - T_i$. En general, si c varía con la temperatura en el intervalo, la expresión correcta para Q es $Q = m \int_{T_i}^{T_f} c\, dT$.

[3] Para mediciones precisas debe incluir el contenedor de agua en los cálculos porque también intercambia energía con la muestra. No obstante, hacerlo requerirá conocer la masa y composición del contenedor. Si la masa del agua es mucho mayor que la del contenedor, se pueden despreciar los efectos del contenedor.

Ejemplo 20.2 Enfriamiento de un lingote caliente

Un lingote de 0.050 kg de metal se calienta a 200.0°C y después se deja caer en un calorímetro que contiene 0.400 kg de agua inicialmente a 20.0°C. La temperatura de equilibrio final del sistema mezclado es 22.4°C. Encuentre el calor específico del metal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine el proceso que ocurre en el sistema aislado de la figura 20.2. La energía deja el lingote caliente y va hacia el agua fría, así que el lingote se enfría y el agua se calienta. Cuando ambos están a la misma temperatura, finaliza la transferencia de energía.

Categorizar Se utiliza una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 20.4 para evaluar cada lado de la ecuación 20.5:

$$m_w c_w (T_f - T_w) = -m_x c_x (T_f - T_x)$$

Resuelva para c_x:

$$c_x = \frac{m_w c_w (T_f - T_w)}{m_x (T_x - T_f)}$$

Sustituya valores numéricos:

$$c_x = \frac{(0.400\ \text{kg})(4\,186\ \text{J/kg} \cdot \text{°C})(22.4\text{°C} - 20.0\text{°C})}{(0.050\ 0\ \text{kg})(200.0\text{°C} - 22.4\text{°C})}$$

$$= 453\ \text{J/kg} \cdot \text{°C}$$

Probablemente el lingote es parecido al hierro, como puede ver al comparar este resultado con la información mostrada en la tabla 20.1. La temperatura del lingote inicialmente está arriba del punto de vapor. Por lo tanto, parte del agua se puede vaporizar cuando el lingote se deja caer en el agua. Se supone que el sistema está sellado y este vapor no escapa. Ya que la temperatura de equilibrio final es menor que el punto de vapor, cualquier vapor que resulte se vuelve a condensar de regreso en agua.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que realiza un experimento en el laboratorio que utiliza esta técnica para determinar el calor específico de una muestra y usted quiere reducir la incertidumbre global en su resultado final para c_x. De la información proporcionada en este ejemplo, para reducir la incertidumbre ¿cuál valor sería más efectivo cambiar?

Respuesta La incertidumbre experimental más grande se asocia con la pequeña diferencia en temperatura de 2.4°C para el agua. Por ejemplo, al usar las reglas para propagación de incertidumbre del Apéndice en la sección B.8, una incertidumbre de 0.1°C en T_f y T_w conduce a una incertidumbre de 8% en su diferencia. Para que esta diferencia de temperatura sea experimentalmente más grande, el cambio más efectivo es *reducir la cantidad de agua*.

Ejemplo 20.3 Momento de diversión para un vaquero AM

Un vaquero dispara una bala de plata con una rapidez de boquilla de 200 m/s en la pared de pino de una cantina. Suponga que toda la energía interna generada por el impacto permanece con la bala. ¿Cuál es el cambio de temperatura de la bala?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en experiencias similares que haya tenido en las que la energía mecánica se transforma en energía interna cuando se detiene un objeto en movimiento. Por ejemplo, como se mencionó en la sección 20.1, un clavo queda caliente después de golpearlo algunas veces con un martillo.

Categorizar La bala se modela como un *sistema aislado*. Sobre el sistema no se realiza trabajo porque la fuerza de la pared no tiene desplazamiento alguno. Este ejemplo es similar al patinador que empuja una pared en la sección 9.7. Ahí la pared no efectúa trabajo sobre el patinador y la energía potencial almacenada en el cuerpo, debida a comidas anteriores, se transforma en energía cinética. Aquí la pared no realiza trabajo sobre la bala y la energía cinética se transforma en energía interna.

Analizar Reduzca la ecuación de conservación de la energía (ecuación 8.2) a la expresión apropiada para el sistema de la bala:

$$(1)\quad \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

El cambio en la energía interna de la bala está relacionado con su cambio en temperatura:

$$(2)\quad \Delta E_{\text{int}} = mc\,\Delta T$$

Sustituya la ecuación (2) en la ecuación (1):

$$(0 - \tfrac{1}{2}mv^2) + mc\,\Delta T = 0$$

20.3 continuación

Resuelva para ΔT, con 234 J/kg · °C como el calor específico de la plata (vea la tabla 20.1):

$$(3)\quad \Delta T = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mc} = \frac{v^2}{2c} = \frac{(200\ \text{m/s})^2}{2(234\ \text{J/kg}\cdot\text{°C})} = 85.5\text{°C}$$

Finalizar Observe que el resultado no depende de la masa de la bala.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que al vaquero se le agotan las balas de plata y dispara una bala de plomo con la misma rapidez hacia la pared. ¿El cambio de temperatura de la bala será mayor o menor?

Respuesta La tabla 20.1 muestra que el calor específico del plomo es 128 J/kg · °C, el cual es menor que el de la plata. Por lo tanto, una cantidad dada de entrada de energía eleva el plomo a una temperatura más alta que la plata y la temperatura final de la bala de plomo será mayor. En la ecuación (3), sustituya el nuevo valor para el calor específico:

$$\Delta T = \frac{v^2}{2c} = \frac{(200\ \text{m/s})^2}{2(128\ \text{J/kg}\cdot\text{°C})} = 156\text{°C}$$

No es requisito que las balas de plata y plomo sean de la misma masa para determinar este cambio en temperatura. El único requisito es que tengan la misma rapidez.

20.3 Calor latente

Como se vio en secciones anteriores, una sustancia se somete a un cambio de temperatura cuando la energía se transfiere entre ella y sus alrededores. Sin embargo, en algunas ocasiones la transferencia de energía no resulta en un cambio de temperatura. Éste es el caso siempre que las características físicas de la sustancia cambian de una forma a otra; tal cambio se conoce comúnmente como **cambio de fase**. Dos cambios de fase comunes son de sólido a líquido (fusión) y de líquido a gas (ebullición); otro es un cambio en la estructura cristalina de un sólido. Todos esos cambios de fase incluyen un cambio en la energía interna del sistema pero no un cambio en su temperatura. Por ejemplo, en la ebullición el aumento en la energía interna se representa mediante el rompimiento de los enlaces entre moléculas en el estado líquido; este rompimiento de enlaces permite a las moléculas alejarse más en el estado gaseoso, con un aumento correspondiente en la energía potencial intermolecular.

Como es de esperar, diferentes sustancias responden de modo distinto a la agregación o eliminación de energía mientras cambian de fase, porque varían sus ordenamientos moleculares internos. Además, la cantidad de energía transferida durante un cambio de fase depende de la cantidad de sustancia de que se trate. (Toma menos energía fundir un cubo de hielo que derretir un lago congelado.) Cuando se estudien dos fases de un material se utilizará el término *material de fase superior* para indicar que el material está a una temperatura alta. Así, por ejemplo, si se estudian hielo y agua, el agua es el material de fase superior, mientras que el vapor es el material de fase superior en un estudio de agua y vapor. Considere un sistema que contiene una sustancia en dos fases en equilibrio, como hielo y agua. La cantidad inicial de material de fase superior, agua, en el sistema es m_i. Ahora imagine que al sistema entra la energía Q. Como resultado, la cantidad final de agua es m_f debido a la fusión de un poco de hielo. Por lo tanto, la cantidad de hielo derretido es igual a la cantidad de agua *nueva*: $\Delta m = m_f - m_i$. Para este cambio de fase, el **calor latente** se define como

$$L \equiv \frac{Q}{\Delta m} \qquad (20.6)$$

Este parámetro se llama calor latente (literalmente, el calor "oculto"), porque esta energía agregada o eliminada no resulta en un cambio de temperatura. El valor de L para una sustancia depende de la naturaleza del cambio de fase, así como de las propiedades de la sustancia. Si toda la cantidad de material de fase inferior experimenta un cambio de fase, el cambio en masa Δm del material de fase superior es igual a la masa inicial del material de fase inferior. Por ejemplo, si un cubo de hielo de masa m sobre una placa se funde completamente, el cambio en masa del agua es $m_f - 0 = m$, que es la masa de agua nueva, que también es igual a la masa inicial del cubo de hielo.

Tabla 20.2 **Calores latentes de fusión y vaporización**

Sustancia	Punto de fusión (°C)	Calor latente de fusión (J/kg)	Punto de ebullición (°C)	Calor latente de vaporización (J/kg)
Helio[a]	−272.2	5.23×10^3	−268.93	2.09×10^4
Oxígeno	−218.79	1.38×10^4	−182.97	2.13×10^5
Nitrógeno	−209.97	2.55×10^4	−195.81	2.01×10^5
Alcohol etílico	−114	1.04×10^5	78	8.54×10^5
Agua	0.00	3.33×10^5	100.00	2.26×10^6
Azufre	119	3.81×10^4	444.60	3.26×10^5
Plomo	327.3	2.45×10^4	1 750	8.70×10^5
Aluminio	660	3.97×10^5	2 450	1.14×10^7
Plata	960.80	8.82×10^4	2 193	2.33×10^6
Oro	1 063.00	6.44×10^4	2 660	1.58×10^6
Cobre	1 083	1.34×10^5	1 187	5.06×10^6

[a] El helio no se solidifica a presión atmosférica. El punto de fusión dado aquí corresponde a una presión de 2.5 MPa.

De la definición de calor latente, y de nuevo al elegir el calor como el mecanismo de transferencia de energía, la energía requerida para cambiar la fase de una sustancia pura es

Energía transferida por una sustancia durante un cambio de fase

$$Q = L\,\Delta m \tag{20.7}$$

donde Δm es el cambio en masa del material de fase superior.

Calor latente de fusión L_f es el término que se aplica cuando el cambio de fase es de sólido a líquido (*derretir* significa "combinar mediante fusión"), y **calor latente de vaporización** L_v es el término que se usa cuando el cambio de fase es de líquido a gas (el líquido se "vaporiza").[4] Los calores latentes de diferentes sustancias varían considerablemente, como se muestra en la tabla 20.2. Cuando entra energía a un sistema, lo que causa fusión o vaporización, se incrementa la cantidad de material de fase superior, entonces Δm es positivo y Q también es positivo, consistente con la convención de signos. Cuando se extrae energía de un sistema, lo que origina congelación o condensación, disminuye la cantidad de material de fase superior, así Δm es negativo y Q también es negativo, en acuerdo con la convención de signos. Mantenga en mente que Δm en la ecuación 20.7 siempre se refiere al material de fase superior.

Para entender el papel del calor latente en los cambios de fase, considere la energía requerida para convertir un sistema que consiste de un cubo de hielo de 1.00 g a −30.0°C en vapor a 120.0°C. La figura 20.3 indica los resultados experimentales obtenidos cuando al cubo se le agrega gradualmente energía. Los resultados se presentan como una gráfica de temperatura del sistema contra energía agregada al sistema. Examine cada porción de la curva en rojo, dividida desde la parte A hasta la parte E.

Prevención de riesgos ocultos 20.6

Los signos son cruciales Los errores de signo ocurren con mucha frecuencia cuando los estudiantes aplican ecuaciones de calorimetría. Para cambios de fase, recuerde que Δm en la ecuación 20.7 siempre es el cambio en masa del material de fase superior. En la ecuación 20.4, asegúrese de que su ΔT *siempre* sea la temperatura final menos la temperatura inicial. Además, *siempre* debe incluir el signo negativo en el lado derecho de la ecuación 20.5.

Parte A. En esta porción de la curva la temperatura del sistema cambia de −30.0°C a 0.0°C. La ecuación 20.4 indica que la temperatura varía linealmente con la energía agregada, así el resultado experimental es una línea recta sobre la gráfica. El calor específico del hielo es 2 090 J/kg · °C, entonces se puede calcular la cantidad de energía agregada mediante el uso de la ecuación 20.4:

$$Q = m_i c_i\,\Delta T = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(2\,090\ \text{J/kg} \cdot \text{°C})(30.0\text{°C}) = 62.7\ \text{J}$$

Parte B. Cuando la temperatura del sistema alcanza 0.0°C, la mezcla hielo-agua permanece a esta temperatura, aun cuando se agregue energía, hasta que todo el hielo se funde. La energía requerida para fundir 1.00 g de hielo a 0.0°C es, de la ecuación 20.7,

$$Q = L_f\,\Delta m_w = L_f m_i = (3.33 \times 10^5\ \text{J/kg})(1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg}) = 333\ \text{J}$$

En este punto, se está en la marca de 396 J (= 62.7 J + 333 J) sobre el eje de energía de la figura 20.3.

[4] Cuando un gas se enfría, eventualmente se *condensa*, es decir, regresa a la fase líquida. La energía proporcionada por unidad de masa se llama *calor latente de condensación* y es numéricamente igual al calor latente de vaporización. Del mismo modo, cuando un líquido se enfría, al final se solidifica, y el *calor latente de solidificación* es numéricamente igual al calor latente de fusión.

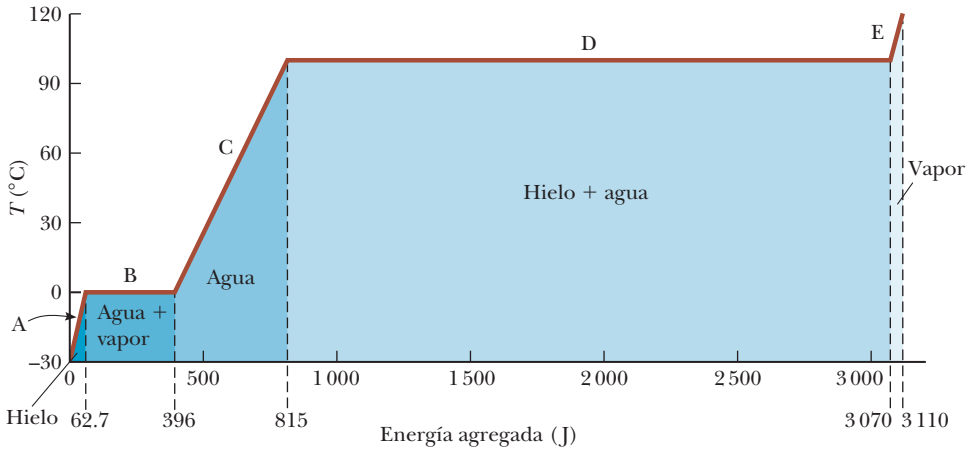


Figura 20.3 Gráfica de temperatura contra energía agregada cuando un sistema que inicialmente contiene 1.00 g de hielo a −30.0°C se convierte en vapor a 120.0°C.

Parte C. Entre 0.0°C y 100.0°C no ocurre nada sorprendente. No hay cambio de fase y así toda la energía agregada al sistema, que ahora es agua, se emplea para incrementar su temperatura. La cantidad de energía necesaria para aumentar la temperatura de 0.0°C a 100.0°C es

$$Q = m_w c_w \Delta T = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(4.19 \times 10^{3}\ \text{J/kg} \cdot {}^\circ\text{C})(100.0^\circ\text{C}) = 419\ \text{J}$$

donde m_w es la masa del agua en el sistema, que es igual a la masa m_i del hielo original.

Parte D. A 100.0°C ocurre otro cambio de fase conforme el sistema cambia de agua a 100.0°C a vapor a 100.0°C. Similar a la mezcla hielo-agua en la parte B, la mezcla agua-vapor permanece a 100.0°C, aun cuando se agrega energía, hasta que todo el líquido se convierte en vapor. La energía necesaria para convertir 1.00 g de agua vapor a 100.0°C es

$$Q = L_v \Delta m_s = L_v m_w = (2.26 \times 10^{6}\ \text{J/kg})(1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg}) = 2.26 \times 10^{3}\ \text{J}$$

Parte E. En esta porción de la curva, como en las partes A y C, no se presenta cambio de fase; por lo tanto, toda la energía agregada se utiliza para incrementar la temperatura del sistema, que ahora es vapor. La energía que debe agregarse para elevar la temperatura del vapor de 100.0°C a 120.0°C es

$$Q = m_s c_s \Delta T = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(2.01 \times 10^{3}\ \text{J/kg} \cdot {}^\circ\text{C})(20.0^\circ\text{C}) = 40.2\ \text{J}$$

La cantidad total de energía que se debe agregar para cambiar 1 g de hielo a −30.0°C a vapor a 120.0°C es la suma de los resultados de las cinco partes de la curva, que es 3.11×10^3 J. Inversamente, para enfriar 1 g de vapor a 120.0°C a hielo a −30.0°C, se deben quitar 3.11×10^3 J de energía.

Advierta en la figura 20.3 la cantidad de energía relativamente grande que se transfiere al agua para vaporizarla. Imagine invertir este proceso, con una gran cantidad de energía transferida del vapor para condensarlo en agua líquida. A esto se debe que una quemada de piel por vapor a 100°C sea mucho más dañina que la exposición de su piel a agua a 100°C. Una gran cantidad de energía entra a su piel desde el vapor, y éste permanece a 100°C durante mucho tiempo mientras se condensa. Por lo contrario, cuando su piel tiene contacto con agua a 100°C, el agua de inmediato comienza a bajar de temperatura a medida que transfiere energía del agua a su piel.

Si el agua líquida se mantiene perfectamente inmóvil en un contenedor muy limpio, es posible que el agua descienda por debajo de 0°C sin congelarse en hielo. Este fenómeno, llamado **subenfriamiento**, surge porque el agua requiere una perturbación de cierto tipo para que las moléculas se separen y comiencen a formar la gran estructura abierta del hielo, por la cual la densidad del hielo es menor que la del agua, como se explicó en la sección 19.4. Si el agua subenfriada se perturba, súbitamente se congela. El sistema desciende a la configuración de energía más baja de las moléculas ligadas de la estructura del hielo, y la energía liberada eleva la temperatura de regreso a 0°C.

Los calentadores de manos comerciales consisten en acetato de sodio líquido en una bolsa plástica sellada. La solución en la bolsa está en un estado subenfriado estable. Cuando sus dedos presionan un disco en la bolsa, el líquido se solidifica y la temperatura aumenta, tal como el agua subenfriada recién mencionada. Sin embargo, en este caso el punto de congelación del líquido es mayor que la temperatura corporal, así que la bolsa se siente caliente al tacto. Para reutilizar el calentador de manos, la bolsa se debe hervir hasta que el sólido se licue. Entonces, a medida que se enfría, pasa por debajo de su punto de congelación hacia el estado subenfriado.

También es posible crear **sobrecalentamiento**. Por ejemplo, agua limpia en una taza muy limpia colocada en un horno de microondas a veces puede elevar su temperatura más allá de 100°C sin hervir, porque la formación de una burbuja de vapor en el agua requiere raspones en la taza o algún tipo de impureza en el agua para servir como sitio de nucleación. Cuando la taza se saca del horno de microondas el agua sobrecalentada se vuelve explosiva, pues de inmediato se forman burbujas y el agua caliente sube fuera de la taza.

Examen rápido 20.2 Suponga que se realiza el mismo proceso de agregar energía al cubo de hielo como se señaló con anterioridad, pero en vez de ello se grafica la energía interna del sistema como una función de la energía de entrada. ¿Cómo sería esta gráfica?

Ejemplo 20.4 Enfriamiento de vapor AM

¿Qué masa de vapor, inicialmente a 130°C, se necesita para calentar 200 g de agua en un contenedor de vidrio de 100 g, de 20.0°C a 50.0°C?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine colocar agua y vapor en un contenedor aislado y cerrado. Eventualmente el sistema alcanza un estado uniforme de agua con una temperatura final de 50.0°C.

Categorizar Con base en la conceptualización de esta situación, este ejemplo se clasifica como uno que involucra calorimetría en donde ocurre un cambio de fase. El calorímetro es un *sistema aislado* para *energía*: la energía se transfiere entre los componentes del sistema, pero no cruza la frontera entre el sistema y el entorno.

Analizar Escriba la ecuación 20.5 para describir el proceso de calorimetría: (1) $Q_{\text{frío}} = -Q_{\text{caliente}}$

El vapor experimenta tres procesos: primero una disminución en temperatura a 100°C, luego una condensación en agua líquida y finalmente una disminución en temperatura del agua a 50.0°C. Encuentre la transferencia de energía en el primer proceso utilizando la masa desconocida m_s del vapor: $Q_1 = m_s c_s \Delta T_s$

Encuentre la transferencia de energía en el segundo proceso: $Q_2 = L_v \Delta m_s = L_v(0 - m_s) = -m_s L_v$

Encuentre la transferencia de energía en el tercer proceso: $Q_3 = m_s c_w \Delta T_{\text{agua caliente}}$

Sume las transferencias de energía en estas tres etapas: (2) $Q_{\text{caliente}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = m_s(c_s \Delta T_s - L_v + c_w \Delta T_{\text{agua caliente}})$

El agua a 20.0°C y el vidrio sólo se someten a un proceso, un aumento en temperatura a 50.0°C. Encuentre la transferencia de energía en este proceso: (3) $Q_{\text{fría}} = m_w c_w \Delta T_{\text{agua caliente}} + m_g c_g \Delta T_{\text{vidrio}}$

Sustituya las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1):

$$m_w c_w \Delta T_{\text{agua fría}} + m_g c_g \Delta T_{\text{vidrio}} = -m_s(c_s \Delta T_s - L_v + c_w \Delta T_{\text{agua caliente}})$$

Resuelva para m_s:

$$m_s = -\frac{m_w c_w \Delta T_{\text{agua fría}} + m_g c_g \Delta T_{\text{vidrio}}}{c_s \Delta T_s - L_v + c_w \Delta T_{\text{agua caliente}}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$m_s = -\frac{(0.200\ \text{kg})(4\,186\ \text{J/kg}\cdot\text{°C})(50.0\text{°C} - 20.0\text{°C}) + (0.100\ \text{kg})(837\ \text{J/kg}\cdot\text{°C})(50.0\text{°C} - 20.0\text{°C})}{(2\,010\ \text{J/kg}\cdot\text{°C})(100\text{°C} - 130\text{°C}) - (2.26 \times 10^6\ \text{J/kg}) + (4\,186\ \text{J/kg}\cdot\text{°C})(50.0\text{°C} - 100\text{°C})}$$

$$= 1.09 \times 10^{-2}\ \text{kg} = \boxed{10.9\ \text{g}}$$

20.4 continuación

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el estado final del sistema es agua a 100°C? ¿Necesitaría más o menos vapor? ¿Cómo cambiaría el análisis anterior?

Respuesta Necesitaría más vapor para elevar la temperatura del agua y el vidrio a 100°C en lugar de a 50.0°C. Habría dos cambios principales en el análisis. Primero, no tendría un término Q_3 para el vapor, porque el agua que se condensa del vapor no se enfría por debajo de 100°C. Segundo, en $Q_{\text{frío}}$ el cambio de temperatura sería 80.0°C en lugar de 30.0°C. Para practicar, demuestre que el resultado es una masa de vapor requerida de 31.8 g.

20.4 Trabajo y calor en procesos termodinámicos

En termodinámica el *estado* de un sistema se describe con variables tales como presión, volumen, temperatura y energía interna. Como resultado, estas cantidades pertenecen a una categoría llamada **variables de estado**. Para cualquier configuración dada del sistema es posible identificar valores de las variables de estado. (Para sistemas mecánicos las variables de estado incluyen energía cinética K y energía potencial U.) Un estado de un sistema se especifica sólo si el sistema está en equilibrio térmico interno. En el caso de un gas en un contenedor, el equilibrio térmico interno requiere que cada parte del gas esté a la misma presión y temperatura.

Una segunda categoría de variables en situaciones que involucran energía es la de **variables de transferencia**. Estas variables son las que aparecen en el lado derecho de la ecuación de conservación de la energía, la ecuación 8.2. Una variable tal tiene un valor distinto de cero si ocurre un proceso donde la energía se transfiera a través de la frontera del sistema. La variable de transferencia es positiva o negativa, esto depende de si la energía entra o sale del sistema. Ya que una transferencia de energía a través de la frontera representa un cambio en el sistema, las variables de transferencia no se asocian con un estado determinado del sistema, sino con un *cambio* en el estado del sistema.

En las secciones previas se explicó el calor como una variable de transferencia. En esta sección se estudia otra importante variable de transferencia para sistemas termodinámicos, el trabajo. El trabajo efectuado sobre las partículas se ilustró con amplitud en el capítulo 7, y aquí se investiga el trabajo realizado sobre un sistema deformable, un gas. Considere un gas contenido en un cilindro ajustado con un pistón móvil (figura 20.4). En equilibrio, el gas ocupa un volumen V y ejerce una presión uniforme P sobre las paredes del cilindro y sobre el pistón. Si el pistón tiene un área de sección transversal A, la magnitud de la fuerza ejercida por el gas sobre el pistón es $F = PA$. Por la tercera ley de Newton, la magnitud de la fuerza ejercida por el pistón sobre el gas también es PA. Ahora suponga que el pistón se empuja hacia dentro y comprime el gas **cuasi estáticamente**, es decir, con la suficiente lentitud para permitir que el sistema permanezca esencialmente en equilibrio térmico interno en todo momento. La cara inferior del pistón es el punto de aplicación de la fuerza sobre el gas. A medida que el pistón se empuja hacia abajo mediante una fuerza externa $\vec{\mathbf{F}} = -F\hat{\mathbf{j}}$ a través de un desplazamiento de $d\vec{\mathbf{r}} = dy\,\hat{\mathbf{j}}$ (figura 20.4b), el trabajo realizado sobre el gas es, de acuerdo con la definición de trabajo en el capítulo 7,

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -F\hat{\mathbf{j}} \cdot dy\,\hat{\mathbf{j}} = -F\,dy = -PA\,dy$$

En esta discusión se supone que la masa del pistón es despreciable. Dado que $A dy$ es el cambio en volumen del gas dV, el trabajo efectuado sobre el gas se expresa como

$$dW = -P\,dV \qquad \textbf{(20.8)}$$

Si el gas se comprime, dV es negativo y el trabajo realizado sobre el gas es positivo. Si el gas se expande, dV es positivo y el trabajo efectuado sobre el gas es negativo. Si el volumen permanece constante, el trabajo realizado sobre el gas es cero. El trabajo total efectuado sobre el gas, a medida que su volumen cambia de V_i a V_f, está dado por la integral de la ecuación 20.8:

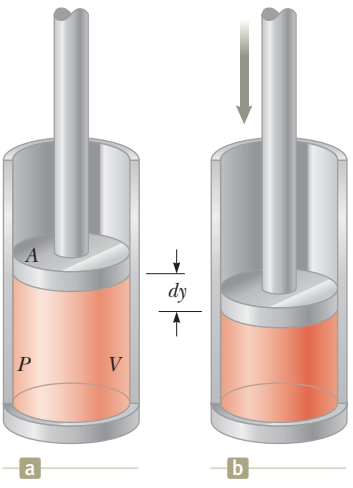


Figura 20.4 Se realiza trabajo sobre un gas, contenido en un cilindro a una presión P, conforme el pistón se empuja hacia abajo para comprimir el gas.

Trabajo realizado sobre un gas ▶

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV \qquad (20.9)$$

El trabajo efectuado sobre un gas es igual al negativo del área bajo la curva *PV*. Aquí el área es negativa, porque el volumen disminuye, y el trabajo es positivo.

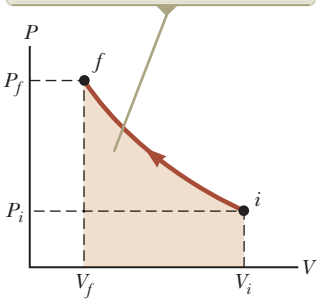


Figura 20.5 Se comprime un gas cuasiestáticamente (con lentitud) desde el estado *i* hasta el estado *f*. Un agente externo debe hacer trabajo positivo sobre el gas para comprimirlo.

Para evaluar esta integral, debe conocer cómo varía la presión con el volumen durante el proceso.

En general, la presión no es constante durante un proceso seguido por un gas, depende del volumen y la temperatura. Si la presión y el volumen se conocen en cada paso del proceso, entonces es posible graficar el estado del gas en cada etapa mediante una importante representación gráfica llamada **diagrama *PV***, como en la figura 20.5. Este tipo de diagrama permite visualizar un proceso experimentado por un gas. La curva en un diagrama *PV* se llama *trayectoria* entre los estados inicial y final.

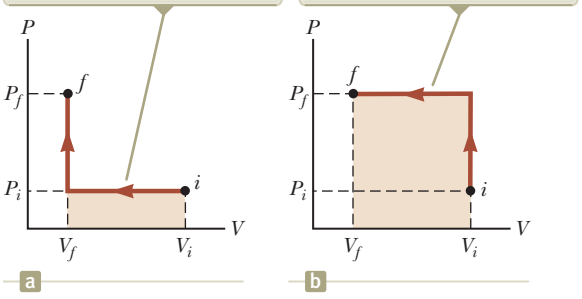
Advierta que la integral en la ecuación 20.9 es igual al área bajo una curva en un diagrama *PV*. Por lo tanto, se identifica un uso importante para los diagramas *PV*:

El trabajo realizado sobre un gas en un proceso cuasiestático que lleva al gas de un estado inicial a un estado final es el negativo del área bajo la curva en un diagrama *PV*, evaluada entre dichos estados.

Para el proceso de comprimir un gas en un cilindro, el trabajo efectuado depende de la trayectoria particular tomada entre los estados inicial y final, como sugiere la figura 20.5. Para ilustrar este importante punto, considere varias trayectorias diferentes que conectan *i* y *f* (figura 20.6). En el proceso que se muestra en la figura 20.6a el volumen del gas primero se reduce de V_i a V_f a presión constante P_i y la presión del gas después aumenta de P_i a P_f al calentar a volumen constante V_f. El trabajo efectuado sobre el gas a lo largo de esta trayectoria es $-P_i(V_f - V_i)$. En la figura 20.6b la presión del gas aumenta de P_i a P_f a volumen constante V_i y enseguida el volumen del gas se reduce de V_i a V_f a presión constante P_f. El trabajo realizado sobre el gas es $-P_f(V_f - V_i)$. Este valor es mayor que el del proceso descrito en la figura 20.6a porque el pistón se movió a través del mismo desplazamiento mediante una fuerza mucho más grande. Por último, para el proceso descrito en la figura 20.6c, donde tanto *P* como *V* cambian de manera continua, el trabajo efectuado sobre el gas tiene algún valor entre los obtenidos en los primeros dos procesos. En este caso, para evaluar el trabajo se debe conocer la función *P*(*V*), de modo que pueda determinarse la integral en la ecuación 20.9.

Una compresión a presión constante seguida por un proceso a volumen constante.

Un proceso a volumen constante seguido por una compresión a presión constante.



Una compresión arbitraria.

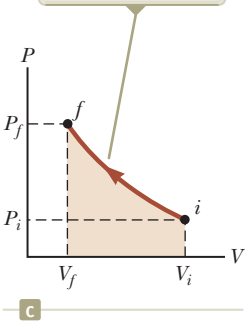


Figura 20.6 El trabajo realizado sobre un gas, a medida que se lleva desde un estado inicial hasta un estado final, depende de la trayectoria entre dichos estados.

La transferencia de energía *Q* adentro o afuera de un sistema mediante calor también depende del proceso. Considere las situaciones que se presentan en la figura 20.7. En cada caso, el gas tiene el mismo volumen, temperatura y presión iniciales, y se supone que es ideal. En la figura 20.7a el gas se aísla térmicamente de sus alrededores, excepto en el fondo de la región llena por el gas, donde está en contacto térmico con un depósito de energía. Un *depósito de energía* es una fuente de energía que se considera tan grande que una transferencia de energía finita hacia o desde el depósito no cambia su temperatura. El pistón se mantiene en su posición inicial mediante un agente externo, como una mano. Cuando la fuerza que mantiene al pistón se reduce un poco, éste se eleva con lentitud a su posición final en la figura 20.7b. Ya que el pistón se mueve hacia arriba, el gas hace trabajo sobre el pistón. Durante esta expansión al volumen final V_f se transfiere la suficiente energía por calor del depósito al gas para mantener una temperatura constante T_i.

Ahora considere el sistema completamente aislado térmicamente, como se muestra en la figura 20.7c. Cuando la membrana se rompe, el gas se expande rápidamente en el vacío

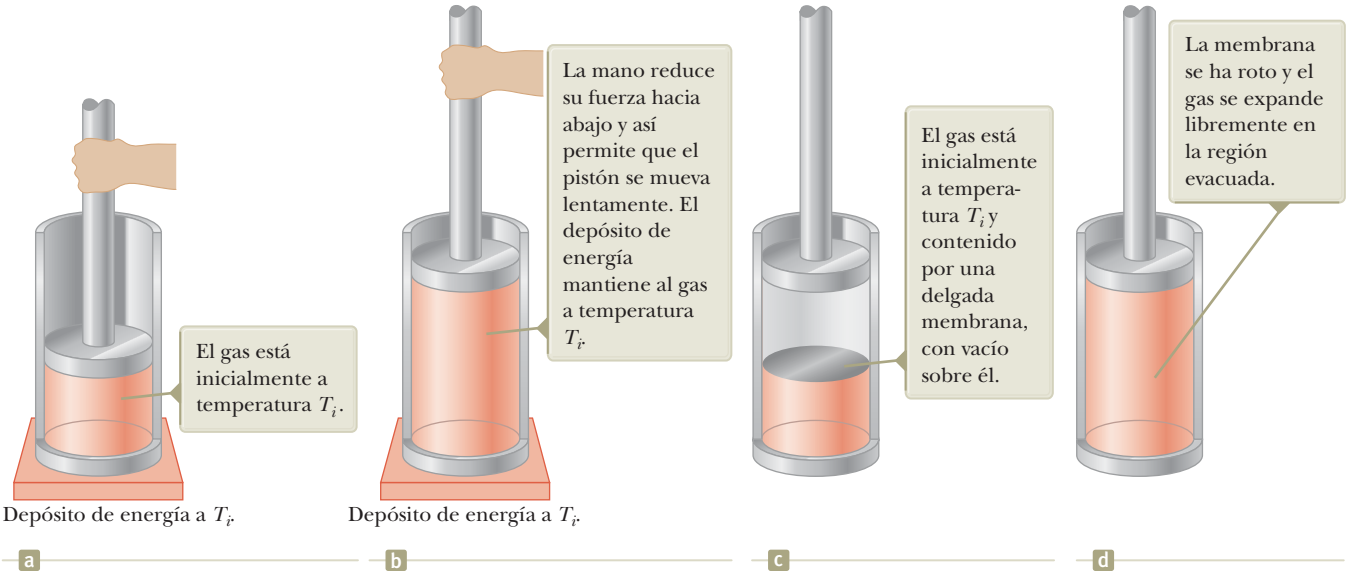


Figura 20.7 Un gas en un cilindro. (a) El gas está en contacto con un depósito de energía. Las paredes del cilindro son aislantes perfectos, pero la base en contacto con el depósito es conductora. (b) El gas se expande lentamente a un volumen mayor. (c) El gas está contenido por una membrana a la mitad de un volumen, con vacío en la otra mitad. El cilindro completo está perfectamente aislado. (d) El gas se expande libremente en el volumen más grande.

hasta que ocupa un volumen V_f y está a una presión P_f. En la figura 20.7d se indica el estado final del gas. En este caso el gas no realiza trabajo, porque no aplica una fuerza; no se requiere una fuerza para expandirlo en un vacío. Además, no se transfiere energía mediante calor a través de la pared aislante.

Como se discutió en la sección 20.5, los experimentos muestran que la temperatura del gas ideal no cambia en el proceso indicado en las figuras 20.7c y 20.7d. Por lo tanto, los estados inicial y final del gas ideal en las figuras 20.7a y 20.7b son idénticos a los estados inicial y final en las figuras 20.7c y 20.7d, pero las trayectorias son diferentes. En el primer caso, el gas efectúa trabajo sobre el pistón y se transfiere energía lentamente al gas mediante calor. En el segundo caso, no se transfiere energía mediante calor y el trabajo realizado es cero. Así, la transferencia de energía por calor, al igual que el trabajo efectuado, depende del proceso particular que ocurre en el sistema. En otras palabras, puesto que el calor y el trabajo dependen de la trayectoria seguida en un diagrama PV entre los estados inicial y final, ninguna cantidad está determinada exclusivamente por los puntos extremos de un proceso termodinámico.

20.5 Primera ley de la termodinámica

Cuando se introdujo la ley de conservación de energía en el capítulo 8, se estableció que el cambio en la energía de un sistema es igual a la suma de todas las transferencias de energía a través de la frontera del sistema (ecuación 8.2). La **primera ley de la termodinámica** es un caso especial de la ley de conservación de energía que describe procesos que sólo cambian la energía interna[5] y donde sólo se transfiere energía mediante calor y trabajo:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W \tag{20.10}$$

◀ **Primera ley de la termodinámica**

Revise la ecuación 8.2 para ver que la primera ley de la termodinámica está contenida en esa ecuación más general.

[5]Es un accidente desafortunado de la historia que el símbolo tradicional para energía interna sea U, que también es el símbolo tradicional para energía potencial, como se presentó en el capítulo 7. Para evitar confusión entre energía potencial y energía interna, en este libro se usa el símbolo E_{int} para energía interna. Sin embargo, si usted toma un curso avanzado de termodinámica, esté preparado para ver U como el símbolo para la energía interna en la primera ley.

Prevención de riesgos ocultos 20.7

Convenciones de signo duales Algunos libros de física e ingeniería presentan la primera ley como $\Delta E_{int} = Q - W$, con un signo menos entre el calor y el trabajo. La razón es que el trabajo se define en estos tratamientos como el trabajo realizado *por* el gas en lugar de *sobre* el gas, como en el tratamiento de este texto. La ecuación equivalente a la ecuación 20.9 en estos tratamientos define el trabajo como $W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV$. Por lo tanto, si el gas realiza trabajo positivo, la energía sale del sistema, lo que conduce al signo negativo en la primera ley.

En sus estudios en otros cursos de química o ingeniería, o al leer otros libros de física, asegúrese de notar cuál convención de signo se usa para la primera ley.

Prevención de riesgos ocultos 20.8

La primera ley Con la aproximación a la energía de este libro, la primera ley de la termodinámica es un caso especial de la ecuación 8.2. Algunos físicos argumentan que la primera ley es la ecuación general para la conservación de la energía, equivalente a la ecuación 8.2. En este método, la primera ley se aplica a un sistema cerrado (de modo que no hay transferencia de materia); el calor se interpreta de modo que incluya radiación electromagnética, y el trabajo de modo que incluya transmisión eléctrica ("trabajo eléctrico") y ondas mecánicas ("trabajo molecular"). Tenga esto presente cuando revise la primera ley en su lectura de otros libros de física.

A continuación se investigan algunos casos especiales en los que se aplica la primera ley. Primero considere un *sistema aislado*, es decir, que no interactúa con sus alrededores, como ya se ha visto. En este caso no tiene lugar transferencia de energía por calor y el trabajo realizado sobre el sistema es cero; así que la energía interna permanece constante. Es decir, $Q = W = 0$, entonces se sigue que $\Delta E_{int} = 0$; por lo tanto, $E_{int,i} = E_{int,f}$. Se concluye que la energía interna E_{int} de un sistema aislado permanece constante.

Ahora considere el caso de un sistema que puede intercambiar energía con sus alrededores y se lleva a través de un **proceso cíclico**, es decir, un proceso que inicia y finaliza en el mismo estado. En este caso el cambio en la energía interna de nuevo debe ser cero, porque E_{int} es una variable de estado; por lo tanto, la energía Q agregada al sistema debe ser igual al negativo del trabajo W efectuado sobre el sistema durante el ciclo. Es decir, en un proceso cíclico,

$$\Delta E_{int} = 0 \quad \text{y} \quad Q = -W \quad \text{(proceso cíclico)}$$

En un diagrama PV para un gas, un proceso cíclico aparece como una curva cerrada. (Los procesos descritos en la figura 20.6 se representan mediante curvas abiertas porque los estados inicial y final difieren.) Se puede demostrar que en un proceso cíclico para un gas, el trabajo neto realizado sobre el sistema por ciclo es igual al área encerrada por la trayectoria que representa el proceso en un diagrama PV.

20.6 Algunas aplicaciones de la primera ley de la termodinámica

En esta sección se consideran aplicaciones adicionales de la primera ley a procesos a través de los cuales se lleva un gas. Como un modelo, considere la muestra de gas contenida en el aparato pistón-cilindro en la figura 20.8. Esta figura muestra el trabajo realizado sobre el gas y la energía que se transfiere mediante calor, así la energía interna del gas se eleva. En la siguiente discusión de varios procesos, consulte esta figura y altere mentalmente las direcciones de la transferencia de energía para reflejar lo que sucede en el proceso.

Antes de aplicar la primera ley de la termodinámica a sistemas específicos, es útil definir primero algunos procesos termodinámicos idealizados. Un **proceso adiabático** es aquel donde no entra ni sale energía del sistema por calor; es decir, $Q = 0$. Un proceso adiabático se puede lograr al aislar térmicamente las paredes del sistema o al realizar el proceso rápidamente, de modo que haya un tiempo despreciable para que la energía se transfiera por calor. Al aplicar la primera ley de la termodinámica a un proceso adiabático se obtiene

$$\Delta E_{int} = W \quad \text{(proceso adiabático)} \tag{20.11}$$

Este resultado muestra que si un gas se comprime adiabáticamente de modo que W sea positivo, entonces ΔE_{int} es positivo y la temperatura del gas aumenta. Inversamente, la temperatura de un gas disminuye cuando el gas se expande adiabáticamente.

Los procesos adiabáticos son muy importantes en la práctica de la ingeniería. Algunos ejemplos comunes son la expansión de los gases calientes en un motor de combustión interna, la licuefacción de los gases en un sistema de enfriamiento y la carrera de compresión en un motor diesel.

El proceso descrito en las figuras 20.7c y 20.7d, llamado **expansión adiabática libre**, es único. El proceso es adiabático porque tiene lugar en un contenedor aislado. El gas se expande en un vacío, entonces no aplica una fuerza sobre un pistón, como lo hace el gas en las figuras 20.7a y 20.7b, así no se realiza trabajo sobre o por el gas. Por lo tanto, en este proceso adiabático, $Q = 0$ y $W = 0$. Como resultado, $\Delta E_{int} = 0$ para este proceso, como se puede ver a partir de la primera ley. Es decir, las energías internas inicial y final de un gas son iguales en una expansión adiabática libre. En el capítulo 21 se verá que la energía interna de un gas ideal sólo depende de su tem-

peratura. Por lo tanto, no se espera cambio en temperatura durante una expansión adiabática libre. Esta predicción está de acuerdo con los resultados de los experimentos efectuados a presiones bajas. (Los experimentos realizados a presiones altas para gases reales exhiben un ligero cambio de temperatura después de la expansión debida a interacciones intermoleculares, lo que representa una desviación del modelo de un gas ideal.)

Un proceso que ocurre a presión constante se llama **proceso isobárico**. En la figura 20.8 se podría establecer un proceso isobárico al permitir que el pistón se mueva libremente de modo que siempre esté en equilibrio entre la fuerza neta del gas que empuja hacia arriba y el peso del pistón más la fuerza debida a la presión atmosférica que empujan hacia abajo. El primer proceso en la figura 20.6a y el segundo proceso en la figura 20.6b son isobáricos.

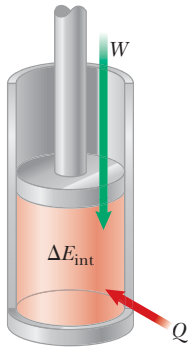


Figura 20.8 La primera ley de la termodinámica iguala el cambio en energía interna E_{int} en un sistema con la transferencia de energía neta al sistema mediante calor Q y trabajo W. En la situación que se muestra aquí, la energía interna del gas aumenta.

◀ **Proceso isobárico**

En tal proceso, los valores del calor y el trabajo por lo general son distintos de cero. El trabajo efectuado sobre el gas en un proceso isobárico es simplemente

$$W = -P(V_f - V_i) \quad \text{(proceso isobárico)} \tag{20.12}$$

donde P es la presión constante del gas durante el proceso.

Un proceso que ocurre a volumen constante se llama **proceso isovolumétrico**. En la figura 20.8, sujetar el pistón en una posición fija aseguraría un proceso isovolumétrico. El segundo proceso en la figura 20.6a y el primer proceso en la figura 20.6b son isovolumétricos.

Ya que el volumen del gas no cambia en tal proceso, el trabajo dado por la ecuación 20.9 es cero. Así, de la primera ley se ve que, en un proceso isovolumétrico, como $W = 0$,

$$\Delta E_{int} = Q \quad \text{(proceso isovolumétrico)} \tag{20.13}$$

◀ **Proceso isovolumétrico**

Esta expresión especifica que si se agrega energía mediante calor a un sistema que se mantiene a volumen constante, toda la energía transferida permanece en el sistema como un aumento en su energía interna. Por ejemplo, cuando una lata de pintura en aerosol se lanza al fuego, la energía entra al sistema (el gas en la lata) mediante calor a través de las paredes metálicas del envase. En consecuencia, la temperatura, y por lo tanto la presión en la lata, aumentan hasta que ésta posiblemente explote.

Un proceso que ocurre a temperatura constante se llama **proceso isotérmico**. Este proceso se establece al sumergir el cilindro de la figura 20.8 en un baño de hielo-agua o al poner el cilindro en contacto con algún otro depósito a temperatura constante. Una gráfica de P contra V a temperatura constante para un gas ideal conduce a una curva hiperbólica llamada *isoterma*. La energía interna de un gas ideal sólo es una función de la temperatura. Así, como la temperatura no cambia en un proceso isotérmico que involucra un gas ideal, entonces se debe tener $\Delta E_{int} = 0$. Para un proceso isotérmico, de la primera ley se concluye que la transferencia de energía Q debe ser igual al negativo del trabajo realizado sobre el gas; es decir, $Q = -W$. Cualquier energía que entra al sistema por calor se transfiere afuera del sistema por trabajo; entonces, en un proceso isotérmico no ocurre cambio en la energía interna del sistema.

◀ **Proceso isotérmico**

Examen rápido 20.3 En las últimas tres columnas de la siguiente tabla, llene los recuadros con los signos correctos (−, + o 0) para Q, W y ΔE_{int}. Para cada situación se identifica el sistema a considerar.

Situación	Sistema	Q	W	ΔE_{int}
(a) Bombear rápidamente una llanta de bicicleta	Aire en la bomba			
(b) Sartén con agua a temperatura ambiente en una estufa caliente	Agua en la sartén			
(c) Aire que sale rápidamente de un globo	Aire originalmente en el globo			

Prevención de riesgos ocultos 20.9

***Q* ≠ 0 en un proceso isotérmico** No caiga en la trampa común de pensar que no debe haber transferencia de energía por calor si la temperatura no cambia, como es el caso en un proceso isotérmico. Ya que la causa del cambio de temperatura puede ser calor *o* trabajo, la temperatura puede permanecer constante incluso si entra energía al gas por calor, que sólo ocurriría si la energía que entra al gas por calor sale por trabajo.

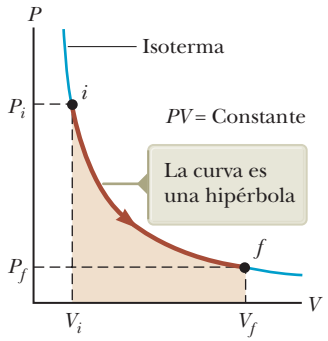


Figura 20.9 Diagrama *PV* para una expansión isotérmica de un gas ideal desde un estado inicial hasta un estado final.

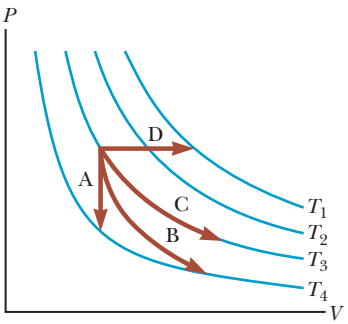


Figura 20.10 (Examen rápido 20.4) Identifique la naturaleza de las trayectorias A, B, C y D.

Expansión isotérmica de un gas ideal

Suponga que le permite a un gas ideal expandirse cuasiestáticamente a temperatura constante. Este proceso se describe mediante el diagrama *PV* que se muestra en la figura 20.9. La curva es una hipérbola (vea el Apéndice B, ecuación B.23) y la ley del gas ideal (ecuación 19.8) con *T* constante indica que la ecuación de esta curva es $PV = nRT =$ constante.

Calcule el trabajo realizado sobre el gas en la expansión desde el estado *i* al estado *f*. El trabajo efectuado sobre el gas está dado por la ecuación 20.9. Ya que el gas es ideal y el proceso es cuasiestático, la ley del gas ideal es válida para cada punto sobre la trayectoria. Por lo tanto,

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\,dV$$

En este caso, *T* es constante y se puede sacar de la integral junto con *n* y *R*:

$$W = -nRT\int_{V_i}^{V_f}\frac{dV}{V} = -nRT\ln V\Big|_{V_i}^{V_f}$$

Para calcular la integral, use $\int(dx/x) = \ln x$. (Vea el Apéndice B.) Al evaluar la integral en los volúmenes inicial y final se obtiene

$$W = nRT\ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right) \qquad (20.14)$$

Numéricamente, este trabajo *W* es igual al negativo del área sombreada bajo la curva *PV* que se exhibe en la figura 20.9. El gas se expande, entonces $V_f > V_i$ y el valor para el trabajo realizado sobre el gas es negativo, como se esperaba. Si el gas se comprime, se tiene $V_f < V_i$ y el trabajo sobre el gas es positivo.

Examen rápido 20.4 Caracterice las trayectorias en la figura 20.10 como isobárica, isovolumétrica, isotérmica o adiabática. Para la trayectoria B, $Q = 0$. Las curvas azules son isotermas.

Ejemplo 20.5 Una expansión isotérmica

Una muestra de 1.0 mol de un gas ideal se mantiene a 0.0°C durante una expansión de 3.0 L a 10.0 L.

(A) ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el gas durante la expansión?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Represente el proceso en su mente: el cilindro en la figura 20.8 se sumerge en un baño de hielo-agua, y el pistón se mueve hacia fuera de modo que el volumen del gas aumenta. También puede emplear la representación gráfica en la figura 20.9 para conceptualizar el proceso.

Categorizar Se evaluarán los parámetros con las ecuaciones desarrolladas en las secciones anteriores, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución. La temperatura del gas es fija, el proceso es isotérmico.

Sustituya los valores dados en la ecuación 20.14:

$$W = nRT\ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right)$$

$$= (1.0\text{ mol})(8.31\text{ J/mol}\cdot\text{K})(273\text{ K})\ln\left(\frac{3.0\text{ L}}{10.0\text{ L}}\right)$$

$$= -2.7\times10^3\text{ J}$$

(B) ¿Cuánta transferencia de energía por calor ocurre entre el gas y sus alrededores en este proceso?

SOLUCIÓN

Encuentre el calor a partir de la primera ley: $\Delta E_{int} = Q + W$, entonces $0 = Q + W$

$Q = -W = 2.7\times10^3\text{ J}$

20.5 continuación

(C) Si el gas regresa al volumen original mediante un proceso adiabático, ¿cuánto trabajo se realiza sobre el gas?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 20.12. La presión no se proporciona, así que incorpore la ley de gas ideal:

$$W = -P(V_f - V_i) = -\frac{nRT_i}{V_i}(V_f - V_i)$$
$$= -\frac{(1.0\ \text{mol})(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(273\ \text{K})}{10.0\times10^{-3}\ \text{m}^3}(3.0\times10^{-3}\ \text{m}^3 - 10.0\times10^{-3}\ \text{m}^3)$$
$$= \boxed{1.6\times10^{3}\ \text{J}}$$

La temperatura y volumen iniciales se emplearon para calcular el trabajo efectuado, porque la temperatura final es desconocida. El trabajo realizado sobre el gas es positivo, porque el gas se comprimió.

Ejemplo 20.6 Agua hirviendo

Suponga que 1.00 g de agua se vaporiza isobáricamente a presión atmosférica (1.013×10^5 Pa). Su volumen en el estado líquido es $V_i = V_{\text{líquido}} = 1.00\ \text{cm}^3$, y su volumen en el estado de vapor es $V_f = V_{\text{vapor}} = 1\,671\ \text{cm}^3$. Encuentre el trabajo realizado en la expansión y el cambio en energía interna del sistema. Ignore cualquier mezcla del vapor y el aire circundante; imagine que el vapor simplemente empuja al aire circundante fuera del camino.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Advierta que la temperatura del sistema no se altera. Hay un cambio de fase que ocurre a medida que el agua se convierte en vapor.

Categorizar La expansión tiene lugar a presión constante, entonces el proceso se clasifica como isobárico. Se usarán las ecuaciones desarrolladas en las secciones precedentes, así este ejemplo se categoriza como un problema de sustitución.

Utilice la ecuación 20.12 para encontrar el trabajo realizado sobre el sistema a medida que el aire se empuja fuera del camino:

$$W = -P(V_f - V_i)$$
$$= -(1.013\times10^5\ \text{Pa})(1\,671\times10^{-6}\ \text{m}^3 - 1.00\times10^{-6}\ \text{m}^3)$$
$$= \boxed{-169\ \text{J}}$$

Aplique la ecuación 20.7 y el calor latente de vaporización del agua para encontrar la energía transferida hacia el sistema por calor:

$$Q = L_v\,\Delta m_s = m_s L_v = (1.00\times10^{-3}\ \text{kg})(2.26\times10^6\ \text{J/kg})$$
$$= 2\,260\ \text{J}$$

Use la primera ley para encontrar el cambio en energía interna del sistema:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W = 2\,260\ \text{J} + (-169\ \text{J}) = \boxed{2.09\ \text{kJ}}$$

El valor positivo para ΔE_{int} indica que la energía interna del sistema aumenta. La fracción más grande de la energía (2 090 J/2 260 J = 93%) transferida al líquido aumenta la energía interna del sistema. El restante 7% de la energía transferida sale del sistema mediante trabajo realizado por el vapor sobre la atmósfera circundante.

Ejemplo 20.7 Calentamiento de un sólido

Una barra de cobre de 1.0 kg se calienta a presión atmosférica de modo que su temperatura aumenta de 20°C a 50°C.

(A) ¿Cuál es el trabajo efectuado sobre la barra de cobre por la atmósfera circundante?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este ejemplo involucra un sólido, mientras que los dos ejemplos precedentes trataron líquidos y gases. Para un sólido, el cambio en volumen debido a expansión térmica es muy pequeño.

Categorizar La expansión tiene lugar a presión atmosférica constante, entonces el proceso se clasifica como isobárico.

continúa

20.7 continuación

Analizar Encuentre el trabajo efectuado sobre la barra de cobre, use la ecuación 20.12:

$$W = -P\,\Delta V$$

Exprese el cambio en volumen empleando la ecuación 19.6 y que $\beta = 3\alpha$:

$$W = -P(\beta V_i\ \Delta T) = -P(3\alpha V_i\ \Delta T) = -3\alpha P V_i\ \Delta T$$

Sustituya para el volumen en términos de la masa y la densidad del cobre:

$$W = -3\alpha P\left(\frac{m}{\rho}\right)\Delta T$$

Sustituya valores numéricos:

$$W = -3[1.7 \times 10^{-5}\,(°C)^{-1}](1.013 \times 10^5\ N/m^2)\left(\frac{1.0\ kg}{8.92 \times 10^3\ kg/m^3}\right)(50°C - 20°C)$$

$$= -1.7 \times 10^{-2}\ J$$

El trabajo es negativo, así el trabajo es realizado *por* la barra de cobre sobre la atmósfera.

(B) ¿Cuánta energía se transfiere a la barra de cobre por calor?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 20.4 y el calor específico del cobre de la tabla 20.1:

$$Q = mc\,\Delta T = (1.0\ kg)(387\ J/kg \cdot °C)(50°C - 20°C)$$

$$= 1.2 \times 10^4\ J$$

(C) ¿Cuál es el aumento en energía interna de la barra de cobre?

SOLUCIÓN

Use la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta E_{int} = Q + W = 1.2 \times 10^4\ J + (-1.7 \times 10^{-2}\ J)$$

$$= 1.2 \times 10^4\ J$$

Finalizar La mayor parte de la energía transferida al sistema por calor aumenta la energía interna de la barra de cobre. La fracción de energía empleada para realizar trabajo sobre la atmósfera circundante sólo es de casi 10^{-6}. En consecuencia, cuando se analiza la expansión térmica de un sólido o un líquido, por lo general se ignora la pequeña cantidad de trabajo efectuada sobre o por el sistema.

20.7 Mecanismos de transferencia de energía en procesos térmicos

En el capítulo 8 se presentó un enfoque global al análisis energético de procesos físicos a través de la ecuación 8.1, $\Delta E_{sistema} = \Sigma\ T$, donde T representa transferencia de energía, que puede ocurrir mediante varios mecanismos. Antes, en este capítulo, se explicaron dos de los términos en el lado derecho de esta ecuación, trabajo W y calor Q. En esta sección se exploran más detalles acerca del calor como un medio de transferencia de energía y otros dos métodos de transferencia de energía relacionados con cambios de temperatura: convección (una forma de transferencia de materia T_{TM}) y radiación electromagnética T_{ER}.

Conducción térmica

El proceso de transferencia de energía por calor (Q en la ecuación 8.2) también se llama **conducción** o **conducción térmica**. En este proceso la transferencia se puede representar a escala atómica como un intercambio de energía cinética entre partículas microscópicas, moléculas, átomos y electrones libres, en donde las partículas menos energéticas ganan energía en colisiones con partículas más energéticas. Por ejemplo, si usted sostiene un extremo de una larga barra metálica e inserta el otro extremo en una flama, encontrará que la temperatura del metal en su mano aumenta pronto. La energía llega a su mano mediante conducción. Al inicio, antes que la barra se inserte en la flama, las partículas microscópicas en el metal vibran en

torno a sus posiciones de equilibrio. A medida que la flama aumenta la temperatura de la barra, las partículas cerca de la flama comienzan a vibrar con mayor y mayor amplitud. Estas partículas, a su vez, chocan con sus vecinas y transfieren algo de su energía en las colisiones. En forma lenta, las amplitudes de vibración de los átomos y electrones metálicos más alejados de la flama aumentan y eventualmente aquellos en el metal cercanos a su mano resultan afectados. Esta vibración aumentada se detecta mediante un incremento en la temperatura del metal y de su mano potencialmente quemada.

La rapidez de conducción térmica depende de las propiedades de la sustancia a calentar. Por ejemplo, es posible sostener un trozo de asbesto en una flama de manera indefinida, lo que implica que muy poca energía se conduce a través del asbesto. En general, los metales son buenos conductores térmicos y los materiales como asbesto, corcho, papel y fibra de vidrio son conductores pobres. Los gases también son conductores pobres, porque la distancia de separación entre las partículas es muy grande. Los metales son buenos conductores térmicos, porque contienen gran cantidad de electrones que son comparativamente libres para moverse a través del metal y, por tanto, transportan energía a lo largo de grandes distancias. Por lo tanto, en un buen conductor, como el cobre, la conducción tiene lugar mediante la vibración de los átomos y el movimiento de electrones libres.

La conducción se presenta sólo si hay una diferencia en temperatura entre dos partes del medio de conducción. Considere una placa de material de espesor Δx y área de sección transversal A. Una cara de la placa está a una temperatura T_c y la otra está a una temperatura $T_h > T_c$ (figura 20.11). Experimentalmente, se encuentra que la energía Q se transfiere en un intervalo de tiempo Δt desde la cara más caliente hacia la más fría. La rapidez $P = Q/\Delta t$ a la que ocurre esta transferencia de energía se encuentra que es proporcional al área de sección transversal y a la diferencia de temperatura $\Delta T = T_h - T_c$, e inversamente proporcional al espesor:

$$P = \frac{Q}{\Delta t} \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Observe que P tiene unidades de watts cuando Q está en joules y Δt en segundos. Esto no debe sorprender porque P es potencia, la rapidez de transferencia de energía por calor. Para una placa de espesor infinitesimal dx y diferencia de temperatura dT, se escribe la **ley de conducción térmica** como

$$P = kA\left|\frac{dT}{dx}\right| \qquad (20.15)$$

donde la constante de proporcionalidad k es la **conductividad térmica** del material y $|dT/dx|$ es el **gradiente de temperatura** (la rapidez a la que varía la temperatura con la posición).

Sustancias que son buenos conductores térmicos tienen grandes valores de conductividad térmica, mientras que buenos aislantes térmicos tienen bajos valores de conductividad térmica. La tabla 20.3 contiene conductividades térmicas para varias sustancias. Note que en general los metales son mejores conductores térmicos que los no metales.

Suponga que una larga barra uniforme de longitud L se aísla térmicamente de modo que la energía no puede escapar por calor de su superficie, excepto en los extremos, como se muestra en la figura 20.12 (página 610). Un extremo está en contacto térmico con un depósito de energía a temperatura T_c, y el otro extremo está en contacto térmico con un depósito a temperatura $T_h > T_c$. Cuando se logra un estado estable, la temperatura en cada punto a lo largo de la barra es constante en el tiempo. En este caso, si se supone que k no es una función de la temperatura, el gradiente de temperatura es el mismo en todas partes a lo largo de la barra y es

$$\left|\frac{dT}{dx}\right| = \frac{T_h - T_c}{L}$$

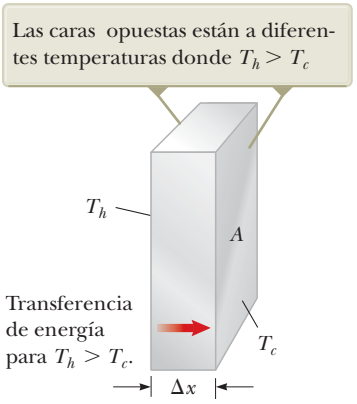


Figura 20.11 Transferencia de energía a través de una placa conductora con un área de sección transversal A y un espesor Δx.

Tabla 20.3 Conductividades térmicas

Sustancia	Conductividad térmica (W/m · °C)
Metales (at 25°C)	
Aluminio	238
Cobre	397
Oro	314
Hierro	79.5
Plomo	34.7
Plata	427
No metales (valores aproximados)	
Asbesto	0.08
Concreto	0.8
Diamante	2 300
Vidrio	0.8
Hielo	2
Caucho	0.2
Agua	0.6
Madera	0.08
Gases (a 20°C)	
Aire	0.023 4
Helio	0.138
Hidrógeno	0.172
Nitrógeno	0.023 4
Oxígeno	0.023 8

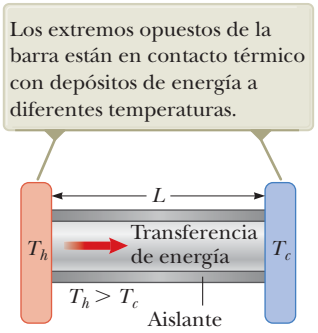


Figura 20.12 Conducción de energía a través de una barra uniforme de longitud L.

Por lo tanto, la rapidez de transferencia de energía por conducción a través de la barra es

$$P = kA\left(\frac{T_h - T_c}{L}\right) \tag{20.16}$$

Para una placa compuesta que contenga varios materiales de espesores L_1, L_2, … y conductividades térmicas k_1, k_2, …, la rapidez de transferencia de energía a través de la placa en estado estacionario es

$$P = \frac{A(T_h - T_c)}{\sum_i (L_i/k_i)} \tag{20.17}$$

donde T_c y T_h son las temperaturas de las superficies exteriores (que se mantienen constantes) y la suma es sobre todas las placas. El ejemplo 20.8 muestra cómo la ecuación 20.17 resulta de una consideración de dos espesores de materiales.

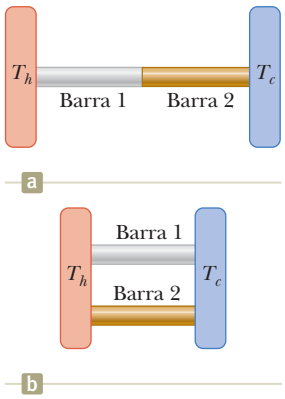


Figura 20.13 (Examen rápido 20.5) ¿En cuál caso la rapidez de transferencia de energía es mayor?

Examen rápido 20.5 Tiene dos barras de la misma longitud y diámetro, pero están formadas de diferentes materiales. Las barras se usan para conectar dos regiones a distintas temperaturas de modo que las transferencias de energía a través de las barras son por calor. Las barras se conectan en serie, como en la figura 20.13a, o en paralelo, como en la figura 20.13b. ¿En cuál caso la rapidez de transferencia de energía por calor es mayor? **(a)** La rapidez es mayor cuando las barras están en serie. **(b)** La rapidez es mayor cuando las barras están en paralelo. **(c)** La rapidez es la misma en ambos casos.

Ejemplo 20.8 Transferencia de energía a través de dos placas

Dos placas de espesores L_1 y L_2, y conductividades térmicas k_1 y k_2 están en contacto térmico una con otra, como se muestra en la figura 20.14. Las temperaturas de sus superficies exteriores son T_c y T_h, respectivamente, y $T_h > T_c$. Determine la temperatura en la interfaz y la rapidez de transferencia de energía por conducción a través de las placas en la condición de estado estable.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Note la frase "en la condición de estado estable". A partir de dicha frase se entiende que las transferencias de energía a través de la placa compuesta son a la misma rapidez en todos los puntos. De otro modo, la energía se acumularía o desaparecería en algún punto. Además, la temperatura varía con la posición en las dos placas, muy probablemente a diferentes velocidades en cada parte de la placa compuesta. Cuando el sistema queda en estado estable, la interfaz está a alguna temperatura fija T.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de conducción térmica y se impone la condición de que la potencia es la misma en ambas placas de material.

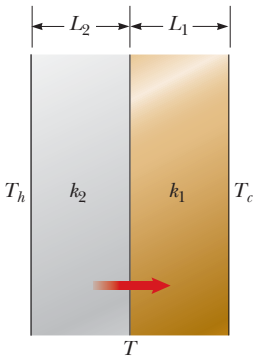


Figura 20.14 (Ejemplo 20.8) Transferencia de energía por conducción a través de dos placas en contacto térmico mutuo. En estado estable, la rapidez de transferencia de energía a través de la placa 1 es igual a la rapidez de transferencia de energía a través de la placa 2.

20.8 continuación

Analizar Aplique la ecuación 20.16 para expresar la rapidez a la que se transfiere energía a través de un área A de la placa 1:

$$(1)\quad P_1 = k_1 A\left(\frac{T - T_c}{L_1}\right)$$

Exprese la rapidez a la que se transfiere energía a través de la misma área de la placa 2:

$$(2)\quad P_2 = k_2 A\left(\frac{T_h - T}{L_2}\right)$$

Iguale estas dos relaciones para representar la situación de estado estacionario:

$$k_1 A\left(\frac{T - T_c}{L_1}\right) = k_2 A\left(\frac{T_h - T}{L_2}\right)$$

Resuelva para T:

$$(3)\quad T = \frac{k_1 L_2 T_c + k_2 L_1 T_h}{k_1 L_2 + k_2 L_1}$$

Sustituya la ecuación (3) en la ecuación (1) o en la ecuación (2):

$$(4)\quad P = \frac{A(T_h - T_c)}{(L_1/k_1) + (L_2/k_2)}$$

Finalizar La extensión de este procedimiento a varias placas de materiales conduce a la ecuación 20.17.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que usted construye un contenedor aislado con dos capas de aislante y la rapidez de transferencia de energía determinada por la ecuación (4) resulta ser muy alta. Tiene suficiente espacio para aumentar el espesor de una de las dos capas en 20%. ¿Cómo decidiría cuál capa elegir?

Respuesta Para reducir la potencia tanto como sea posible, debe aumentar lo más posible el denominador en la ecuación (4). Cualquier espesor que elija aumentar, L_1 o L_2, aumentará el correspondiente término L/k en el denominador en 20%. Para que este cambio porcentual represente el mayor cambio absoluto, usted quiere tomar 20% del término más grande. Por lo tanto, debe aumentar el espesor de la capa que tenga el valor más grande de L/k.

Aislamiento casero

En la práctica de ingeniería, el término L/k para una sustancia particular se conoce como el **valor *R*** del material. Por lo tanto, la ecuación 20.17 se reduce a

$$P = \frac{A(T_h - T_c)}{\sum_i R_i} \qquad (20.18)$$

donde $R_i = L_i/k_i$. En la tabla 20.4 se proporcionan los valores R de algunos materiales de construcción comunes. En Estados Unidos, las propiedades aislantes de los

Tabla 20.4 **Valores *R* para algunos materiales de construcción comunes**

Material	Valor *R* ($ft^2 \cdot °F \cdot h/Btu$)
Recubrimiento de madera dura (1 pulgada de espesor)	0.91
Tejas de madera (traslapadas)	0.87
Ladrillo (4 pulgadas de espesor)	4.00
Bloque de concreto (núcleo relleno)	1.93
Aislamiento de fibra de vidrio (3.5 pulgadas de espesor)	10.90
Aislamiento de fibra de vidrio (6 pulgadas de espesor)	18.80
Tablero de fibra de vidrio (1 pulgada de espesor)	4.35
Fibra de celulosa (1 pulgada de espesor)	3.70
Vidrio plano (0.125 pulgadas de espesor)	0.89
Vidrio aislante (0.25 pulgadas de espacio)	1.54
Espacio de aire (3.5 pulgadas de espesor)	1.01
Capa de aire estancado	0.17
Muro seco (0.5 pulgadas de espesor)	0.45
Revestimiento (0.5 pulgadas de espesor)	1.32

materiales empleados en la construcción por lo general se expresan en unidades usuales estadounidenses, no en unidades SI. Por lo tanto, en la tabla 20.4 los valores R están como una combinación de unidades térmicas británicas, pies, horas y grados Fahrenheit.

En cualquier superficie vertical abierta al aire, una capa estancada muy delgada de aire se adhiere a la superficie. Uno debe considerar esta capa cuando determine el valor R para una pared. El espesor de esta capa estancada en una pared exterior depende de la rapidez del viento. La transferencia de energía a través de las paredes de una casa en un día tempestuoso es mayor que la de un día con aire tranquilo. Un valor R representativo para esta capa estancada de aire se da en la tabla 20.4.

Ejemplo 20.9 El valor *R* de una pared típica

Calcule el valor R total de una pared construida como se muestra en la figura 20.15a. Desde el exterior de la casa (hacia el frente en la figura) y moviéndose hacia el interior, la pared consiste en 4 pulgadas de ladrillo, 0.5 pulgadas de revestimiento, un espacio de aire de 3.5 pulgadas de grueso y 0.5 pulgadas de muro seco.

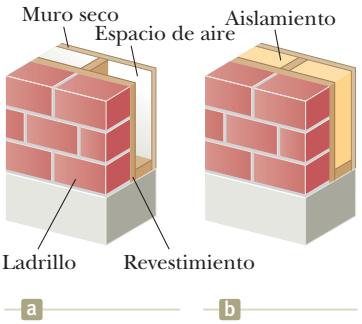


Figura 20.15 (Ejemplo 20.9) Una pared exterior de una casa que contiene (a) un espacio de aire y (b) aislamiento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Use la figura 20.15 para ayudarse a formar ideas de la estructura de la pared. No olvide las capas de aire estancado adentro y afuera de la casa.

Categorizar Para el aislamiento casero se usarán ecuaciones específicas desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Utilice la tabla 20.4 para hallar el valor R de cada capa:

$$R_1 \text{ (capa de aire estancado exterior)} = 0.17\ \text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$
$$R_2 \text{ (ladrillo)} = 4.00\ \text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$
$$R_3 \text{ (revestimiento)} = 1.32\ \text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$
$$R_4 \text{ (espacio de aire)} = 1.01\ \text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$
$$R_5 \text{ (muro seco)} = 0.45\ \text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$
$$R_6 \text{ (capa de aire estancado interior)} = 0.17\ \text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$

Sume los valores R para obtener el valor R total para la pared:

$$R_{\text{total}} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 = 7.12\ \text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$$

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que no está contento con este valor R total para la pared. No puede cambiar la estructura completa, pero le es posible llenar el espacio de aire, como en la figura 20.15b. Para *maximizar* el valor R total, ¿qué material debe elegir para llenar el espacio de aire?

Respuesta Al observar la tabla 20.4 se ve que 3.5 pulgadas de aislamiento de fibra de vidrio son diez veces más efectivas que 3.5 pulgadas de aire. Por lo tanto, debe llenar el espacio de aire con aislamiento de fibra de vidrio. El resultado es que se agregan 10.90 $\text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$ de valor R y se pierden 1.01 $\text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$ debido al espacio de aire que se sustituyó. El nuevo valor R total es igual a 7.12 $\text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$ + 9.89 $\text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$ = 17.01 $\text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \cdot \text{h/Btu}$.

Convección

En un momento u otro ha calentado sus manos al mantenerlas sobre una flama abierta. En esta situación, el aire que está arriba de la flama se calienta y expande. Como resultado, la densidad de este aire disminuye y el aire se eleva. Este aire caliente abriga sus manos mientras circula. Se dice que la energía transferida por el movimiento de una sustancia caliente se transfiere por **convección**, que es una forma de transferencia de materia, T_{TM} en la ecuación 8.2. Aun cuando resulte por diferencias en densidad, como con el aire alrededor de un fuego, el proceso se conoce como *convección natural*. El flujo de aire en una playa es un ejemplo de con-

vección natural, como lo es la mezcla que ocurre a medida que el agua superficial en un lago se enfría y se hunde (vea la sección 19.4). Cuando la sustancia calentada se obliga a moverse mediante un ventilador o bomba, como en algunos sistemas de calefacción de aire caliente y agua caliente, el proceso se llama *convección forzada*.

Sin las corrientes de convección sería muy difícil hervir agua. A medida que el agua se calienta en una tetera, las capas inferiores se calientan primero. Esta agua se expande y eleva hasta lo alto porque su densidad es baja. Al mismo tiempo, el agua fría más densa en la superficie se hunde hasta el fondo de la tetera y se calienta.

El mismo proceso se presenta cuando una habitación se calienta mediante un radiador. Éste calienta el aire en las regiones más bajas de la habitación. El aire caliente se expande y eleva hasta el techo debido a su densidad más baja. El aire más frío y denso de arriba se hunde, y se establece el patrón continuo de corriente de aire que se muestra en la figura 20.16.

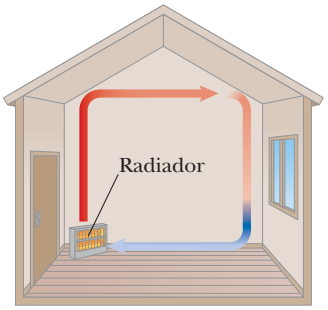


Figura 20.16 Corrientes de convección en una habitación calentada por un radiador.

Radiación

El tercer medio de transferencia de energía que se analizará es la **radiación térmica**, T_{RE} en la ecuación 8.2. Todos los objetos continuamente radian energía en la forma de ondas electromagnéticas (vea el capítulo 34) producidas por vibraciones térmicas de las moléculas. Es probable que esté familiarizado con la radiación electromagnética en la forma de brillo anaranjado del quemador de una estufa eléctrica, un calentador eléctrico o las bobinas de un tostador.

La rapidez a la que un objeto radia energía es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta de la superficie. Conocida como **ley de Stefan**, este comportamiento se expresa en forma de ecuación como

$$P = \sigma A e T^4 \qquad (20.19)$$

◀ Ley de Stefan

donde P es la potencia en watts de las ondas electromagnéticas radiadas de la superficie del objeto, σ es una constante igual a $5.669\ 6 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$, A es el área superficial del objeto en metros cuadrados, e es la **emisividad** y T es la temperatura superficial en kelvins. El valor de e puede variar entre cero y la unidad, depende de las propiedades de la superficie del objeto. La emisividad es igual a la **absortividad**, que es la fracción de la radiación entrante que absorbe la superficie. Un espejo tiene muy baja absortividad porque refleja casi toda la luz incidente. Por lo tanto, la superficie de un espejo también tiene una emisividad muy baja. En el otro extremo, una superficie negra tiene alta absortividad y alta emisividad. Un **absorbedor ideal** se define como un objeto que absorbe toda la energía incidente sobre él y, para tal objeto, $e = 1$. Un objeto para el cual $e = 1$ con frecuencia se conoce como **cuerpo negro**. En el capítulo 40 se investigarán enfoques experimentales y teóricos a la radiación de un cuerpo negro.

Cada segundo, aproximadamente 1 370 J de radiación electromagnética del Sol pasan perpendicularmente a través de cada m^2 en lo alto de la atmósfera de la Tierra. Esta radiación es principalmente visible y es acompañada de luz infrarroja y una cantidad significativa de radiación ultravioleta. En el capítulo 34 se estudiarán con detalle estos tipos de radiación. A la superficie de la Tierra llega cada día suficiente energía como para cubrir cientos de veces todas las necesidades de energía; el problema es capturarla y usarla de manera eficiente. El crecimiento en Estados Unidos del número de hogares impulsados por energía solar refleja los crecientes esfuerzos que se hacen por emplear esta energía abundante.

Otro ejemplo de los efectos de transferencia de energía por radiación es lo que ocurre con la temperatura atmosférica en la noche. Si hay una cubierta de nubes sobre la Tierra, el vapor de agua en las nubes absorbe parte de la radiación infrarroja emitida por la Tierra y la remite de regreso a la superficie. En consecuencia, los niveles de temperatura en la superficie permanecen moderados. En ausencia de esta cubierta de nubes, queda muy poco en el camino para evitar que escape esta radiación al espacio; por lo tanto, la temperatura disminuye más en una noche clara que en una llena de nubes.

Mientras un objeto radia energía a una rapidez dada por la ecuación 20.19, también absorbe radiación electromagnética de los alrededores, que consisten de otros objetos que radian energía. Si el último proceso no ocurre, un objeto al final radiaría toda su energía y su temperatura alcanzaría el cero absoluto. Si un objeto está a una temperatura T y sus alrededores están a una temperatura promedio T_0, la rapidez neta de energía ganada o perdida por el objeto como resultado de la radiación es

$$P_{\text{neta}} = \sigma A e (T^4 - T_0^4) \qquad \textbf{(20.20)}$$

Cuando un objeto está en equilibrio con sus alrededores, radia y absorbe energía a la misma rapidez y su temperatura permanece constante. Cuando un objeto está más caliente que sus alrededores, radia más energía que la que absorbe y su temperatura disminuye.

La botella Dewar

La *botella Dewar*[6] es un recipiente diseñado para minimizar las transferencias de energía por conducción, convección y radiación. Tal recipiente se usa para almacenar líquidos fríos o calientes durante largos periodos. (Una botella aislada, como un termo, es un equivalente casero común de una botella Dewar.) La construcción estándar (figura 20.17) consiste de un vaso de vidrio Pyrex de doble pared con paredes plateadas. El espacio entre las paredes se vacía para minimizar la transferencia de energía por conducción y convección. Las superficies plateadas minimizan la transferencia de energía por radiación, porque la plata es un muy buen reflector y tiene muy baja emisividad. Una reducción adicional en pérdida de energía se obtiene al reducir el tamaño del cuello. Las botellas Dewar se usan comúnmente para almacenar nitrógeno líquido (punto de ebullición 77 K) y oxígeno líquido (punto de ebullición 90 K).

Para confinar helio líquido (punto de ebullición 4.2 K), que tiene un calor de vaporización muy bajo, con frecuencia es necesario usar un doble sistema Dewar, en el que la botella Dewar que contiene el líquido se rodee con una segunda botella Dewar. El espacio entre las dos botellas se llena con nitrógeno líquido.

Diseños más nuevos de contenedores emplean "superaislamiento", que consiste de muchas capas de material reflector separadas por fibra de vidrio. Todo este material está en un vacío y no se necesita nitrógeno líquido en este diseño.

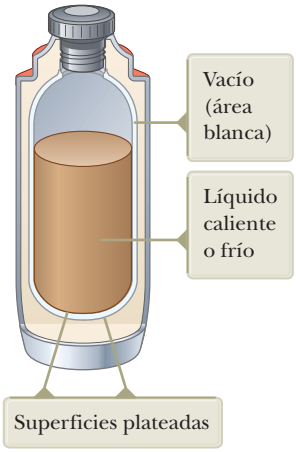


Figura 20.17 Vista transversal de una botella Dewar, que se usa para almacenar sustancias calientes o frías.

[6] Inventada por Sir James Dewar (1842-1923).

Resumen

Definiciones

La **energía interna** es una energía del sistema asociada con su temperatura y su estado físico (sólido, líquido, gas). La energía interna incluye energía cinética de traslación, rotación y vibración aleatoria de moléculas; energía potencial vibratoria dentro de las moléculas, y energía potencial entre moléculas.

Calor es el proceso de transferencia de energía a través de la frontera de un sistema, que resulta de una diferencia de temperatura entre el sistema y sus alrededores. El símbolo Q representa la cantidad de energía transferida por este proceso.

Una **caloría** es la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua de 14.5°C a 15.5°C.

La **capacidad térmica** C de cualquier muestra es la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de la muestra en 1°C.

El **calor específico** c de una sustancia es la capacidad térmica por unidad de masa:

$$c \equiv \frac{Q}{m\,\Delta T} \qquad \textbf{(20.3)}$$

El **calor latente** de una sustancia se define como la razón de la entrada de energía al cambio en masa del material de fase superior:

$$L \equiv \frac{Q}{\Delta m} \qquad \textbf{(20.6)}$$

Conceptos y principios

La energía Q que se requiere para cambiar la temperatura de una masa m de una sustancia en una cantidad ΔT es

$$Q = mc\,\Delta T \qquad (20.4)$$

donde c es el calor específico de la sustancia.

La energía necesaria para cambiar la fase de una sustancia pura es

$$Q = L\,\Delta m \qquad (20.7)$$

donde L es el calor latente de la sustancia, que depende de la naturaleza del cambio de fase y de la sustancia, y Δm es el cambio en masa del material de fase superior.

El **trabajo** realizado sobre un gas a medida que su volumen cambia de algún valor inicial V_i a algún valor final V_f es

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV \qquad (20.9)$$

donde P es la presión del gas, que puede variar durante el proceso. Para evaluar W, el proceso debe estar completamente especificado; es decir, P y V se deben conocer durante cada etapa. El trabajo efectuado depende de la trayectoria que se sigue entre los estados inicial y final.

La **primera ley de la termodinámica** es una reducción específica de la ecuación de conservación de la energía (ecuación 8.2) y establece que cuando un sistema experimenta un cambio de un estado a otro, el cambio en su energía interna es

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W \qquad (20.10)$$

donde Q es la energía transferida al sistema por calor y W es el trabajo realizado sobre el sistema. Aunque Q y W dependen de la trayectoria tomada del estado inicial al estado final, la cantidad ΔE_{int} no depende de la trayectoria.

En un **proceso cíclico** (uno que se origina y termina en el mismo estado), $\Delta E_{\text{int}} = 0$ y por lo tanto $Q = -W$. Es decir, la energía transferida al sistema por calor es igual al negativo del trabajo realizado sobre el sistema durante el proceso.

En un **proceso adiabático** no se transfiere energía por calor entre el sistema y sus alrededores ($Q = 0$). En este caso, la primera ley da $\Delta E_{\text{int}} = W$. En la **expansión adiabática libre** de un gas, $Q = 0$ y $W = 0$, así $\Delta E_{\text{int}} = 0$. Es decir, la energía interna del gas no cambia en tal proceso.

Un **proceso isobárico** es el que ocurre a presión constante. El trabajo efectuado sobre un gas en tal proceso es $W = -P(V_f - V_i)$.

Un **proceso isovolumétrico** es el que sucede a volumen constante. En tal proceso no se realiza trabajo, así $\Delta E_{\text{int}} = Q$.

Un **proceso isotérmico** es el que ocurre a temperatura constante. El trabajo efectuado sobre un gas ideal durante un proceso isotérmico es

$$W = nRT \ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right) \qquad (20.14)$$

La **conducción** se puede ver como un intercambio de energía cinética entre moléculas o electrones que colisionan. La rapidez de transferencia de energía por conducción a través de una placa de área A es

$$P = kA\left|\frac{dT}{dx}\right| \qquad (20.15)$$

donde k es la **conductividad térmica** del material del que está hecha la placa y $|dT/dx|$ es el **gradiente de temperatura**.

En la **convección**, una sustancia caliente transfiere energía de una ubicación a otra.

Todos los objetos emiten **radiación térmica**, en la forma de ondas electromagnéticas, a la rapidez

$$P = \sigma A e T^4 \qquad (20.19)$$

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Un gas ideal se comprime a la mitad de su volumen inicial mediante varios procesos posibles. ¿Cuál de los siguientes procesos da el máximo trabajo realizado sobre el gas? (a) Isotérmico, (b) adiabático, (c) isobárico. (d) El trabajo efectuado es independiente del proceso.

2. Un atizador es una barra no flamable que se usa para empujar leños ardientes en una hoguera. Para facilidad su uso y seguridad, el atizador debe estar fabricado de un material con (a) alto calor específico y alta conductividad térmica, (b) bajo calor específico y baja conductividad tér-

mica, (c) bajo calor específico y alta conductividad térmica o (d) alto calor específico y baja conductividad térmica.

3. Suponga que mide el calor específico de una muestra de metal originalmente caliente mediante un calorímetro que contiene agua. Su calorímetro no está perfectamente aislado, entonces la energía se puede transferir por calor entre los contenidos del calorímetro y la habitación. Para obtener el resultado más preciso para el calor específico del metal, ¿debe emplear agua a qué temperatura inicial? (a) Ligeramente menor que la temperatura ambiente, (b) igual que la temperatura ambiente, (c) ligeramente mayor que la temperatura ambiente, (d) cualquiera que se desee porque la temperatura inicial no hace diferencia.

4. Una cierta cantidad de energía se agrega al hielo y su temperatura se eleva de −10°C a −5°C. Una cantidad mayor de energía se adiciona a la misma masa de agua y su temperatura se eleva de 15°C a 20°C. De estos resultados, ¿qué se puede concluir? (a) Para superar el calor latente de fusión del hielo se requiere una entrada de energía. (b) El calor latente de fusión del hielo entrega alguna energía al sistema. (c) El calor específico del hielo es menor que el del agua. (d) El calor específico del hielo es mayor que el del agua. (e) Se necesita más información para poder emitir alguna conclusión.

5. ¿Cuánta energía se necesita para elevar la temperatura de 5.00 kg de plomo de 20.0°C a su punto de fusión de 327°C? El calor específico del plomo es 128 J/kg · °C. (a) 4.04×10^5 J, (b) 1.07×10^5 J, (c) 8.15×10^4 J, (d) 2.13×10^4 J, (e) 1.96×10^5 J.

6. El alcohol etílico tiene aproximadamente la mitad del calor específico del agua. Suponga que iguales cantidades de energía se transfieren por calor a muestras de líquido de igual masa de alcohol y agua en contenedores aislados separados. El agua eleva su temperatura en 25°C. ¿Cuánto elevará el alcohol su temperatura? (a) La elevará en 12°C. (b) La elevará en 25°C. (c) La elevará en 50°C. (d) Depende de la rapidez de transferencia de energía. (e) No elevará su temperatura.

7. El calor específico de la sustancia A es mayor que el de la sustancia B. Tanto A como B están a la misma temperatura inicial cuando se les adicionan cantidades iguales de energía. Si supone que no ocurre fusión o vaporización, ¿qué de lo siguiente puede concluirse respecto a la temperatura final T_A de la sustancia A y la temperatura final T_B de la sustancia B? (a) $T_A > T_B$, (b) $T_A < T_B$, (c) $T_A = T_B$. (d) Se necesita más información.

8. El berilio tiene aproximadamente la mitad del calor específico del agua líquida (H_2O). Clasifique las cantidades de entrada de energía requerida para producir los siguientes cambios de mayor a menor. En su clasificación anote cualquier caso de igualdad. (a) Elevar la temperatura de 1 kg de H_2O de 20°C a 26°C, (b) elevar la temperatura de 2 kg de H_2O de 20°C a 23°C, (c) elevar la temperatura de 2 kg de H_2O de 1°C a 4°C, (d) elevar la temperatura de 2 kg de berilio de −1°C a 2°C, (e) elevar la temperatura de 2 kg de H_2O de −1°C a 2°C.

9. Una persona agita durante algunos minutos una botella aislada y sellada que contiene café caliente. **(i)** ¿Cuál es el cambio en la temperatura del café? (a) Una gran reducción, (b) una ligera reducción, (c) no hay cambio, (d) un ligero aumento, (e) un gran aumento. **(ii)** ¿Cuál es el cambio en la energía interna del café? Elija de las mismas posibilidades.

10. Un pedazo de cobre de 100 g, inicialmente a 95.0°C, se coloca en 200 g de agua contenida en una lata de aluminio de 280 g; el agua y la lata inicialmente están a 15.0°C. ¿Cuál es la temperatura final del sistema? (Los calores específicos del cobre y del aluminio son 0.092 y 0.215 cal/g · °C, respectivamente.) (a) 16°C, (b) 18°C, (c) 24°C, (d) 26°C, (e) ninguna de esas respuestas.

11. La estrella *A* tiene dos veces el radio y dos veces la temperatura superficial que la estrella *B*. Se puede suponer que ambas estrellas tienen emisividad igual a 1. ¿Cuál es la razón de las potencias de salida de la estrella *A* a la estrella *B*? (a) 4, (b) 8, (c) 16, (d) 32, (e) 64.

12. Si un gas se comprime isotérmicamente, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero? (a) La energía se transfiere al gas por calor. (b) No se realiza trabajo sobre el gas. (c) Aumenta la temperatura del gas. (d) La energía interna del gas permanece constante. (e) Ninguno de esos enunciados es correcto.

13. Cuando un gas experimenta una expansión adiabática, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero? (a) La temperatura del gas no cambia. (b) El gas no efectúa trabajo. (c) No se transfiere energía al gas por calor. (d) La energía interna del gas no cambia. (e) La presión aumenta.

14. Si un gas experimenta un proceso isobárico, ¿cuál de los siguientes enunciados es cierto? (a) La temperatura del gas no cambia. (b) Existe trabajo realizado sobre o por el gas. (c) No se transfiere energía por calor hacia o desde el gas. (d) El volumen del gas permanece constante. (e) La presión del gas disminuye uniformemente.

15. ¿Qué tiempo necesita un calentador de 1 000 W para derretir 1.00 kg de hielo a −20.0°C, suponiendo que toda la energía del calentador es absorbida por el hielo? (a) 4.18 s, (b) 41.8 s, (c) 5.55 min, (d) 6.25 min, (e) 38.4 min.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Frote la palma de su mano sobre una superficie metálica durante 30 segundos. Coloque la palma de su otra mano sobre una porción no frotada de la superficie y después sobre la parte frotada. Ésta se sentirá más caliente. Ahora repita este proceso sobre una superficie de madera. ¿Por qué la diferencia de temperatura entre las partes frotada y no frotada en la madera parece ser mayor que en el caso de la superficie metálica?

2. Necesita agarrar una olla muy caliente en su cocina. Tiene un par de agarraderas. Para poder tomar la cazuela de manera cómoda, ¿debe mojar las agarraderas en agua fría o mantenerlas secas?

3. Qué está equivocado en el siguiente enunciado: "Dados dos cuerpos arbitrarios, el que tenga mayor temperatura contiene más calor".

4. ¿Por qué a una persona le es posible quitar, con los dedos desnudos, un pedazo de papel aluminio seco en un refractario caliente, mientras que puede resultar con una quemadura si el papel está húmedo?

5. Con la primera ley de la termodinámica explique por qué la energía *total* de un sistema aislado siempre es constante.

6. En 1801, Humphry Davy frotó piezas de hielo dentro de un iglú. Se aseguró de que nada en el ambiente estuviera a una temperatura mayor que las piezas frotadas. Observó la producción de gotas de agua líquida. Elabore una tabla que enliste este y otros experimentos o procesos para ilustrar cada una de las siguientes situaciones. (a) Un sistema puede absorber energía por calor, aumento en energía interna e incremento en temperatura. (b) Un sistema puede absorber energía por calor y aumento en energía interna sin aumento en temperatura. (c) Un sistema puede absorber energía por calor sin aumentar en temperatura o en energía interna. (d) Un sistema puede aumentar en energía interna y en temperatura sin absorber energía por calor. (e) Un sistema puede aumentar en energía interna sin absorber energía por calor o aumentar en temperatura.

7. Es la mañana de un día que se prevé caluroso. Acaba de comprar bebidas para un picnic y las carga, con hielo, en un baúl en la parte trasera de su auto. (a) El baúl lo cubre con una manta de lana. ¿Hacerlo le ayuda a mantener las bebidas frías o esperaría que la manta de lana las caliente? Explique su respuesta. (b) Su hermana más joven sugiere que la envuelva con otra manta de lana para mantenerla fresca durante el día caluroso al igual que el baúl. Explique su respuesta a su hermana.

8. En climas usualmente calientes que experimentan una fuerte helada, los productores de fruta rocían con agua los árboles frutales, esperando que se forme una capa de hielo sobre la fruta. ¿Cuál es la utilidad o ventaja de esa capa?

9. Suponga que sirve café caliente a sus invitados y uno de ellos quiere beberlo con crema, muchos minutos después, y tan caliente como sea posible. Para tener el café más caliente, ¿la persona debe agregar la crema justo después que se sirve el café o justo antes de beberlo? Explique.

10. Cuando acampa en un cañón en una noche serena, un campista nota que tan pronto como el sol golpea los picos circundantes, comienza a sentirse una brisa. ¿Qué causa la brisa?

11. Los pioneros almacenaban frutas y vegetales en bodegas subterráneas. En invierno, ¿por qué los pioneros colocaban un barril abierto con agua junto a sus productos?

12. ¿Es posible convertir energía interna en energía mecánica? Explique con ejemplos.

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 20.1 Calor y energía interna

1. Una mujer de 55.0 kg ingiere una dona de jalea de 540 Calorías (540 kcal) en el desayuno. (a) ¿Cuántos joules de energía son equivalentes a una dona de jalea? (b) ¿Cuántos escalones debe subir la mujer en una escalera muy alta para cambiar la energía potencial gravitacional del sistema mujer-Tierra, en un valor equivalente a la energía alimenticia en una dona de jalea? Suponga que la altura de un solo escalón es 15.0 cm. (c) Si el cuerpo humano sólo es 25% eficiente en convertir la energía potencial química en energía mecánica, ¿cuántos escalones debe subir la mujer para compensar su desayuno?

Sección 20.2 Calor específico y calorimetría

2. Considere el aparato de Joule descrito en la figura 20.1. La masa de cada uno de los dos bloques es 1.50 kg y el tanque aislado está lleno con 200 g de agua. ¿Cuál es el aumento en la temperatura del agua después que los bloques caen una distancia de 3.00 m?

3. Una combinación de 0.250 kg de agua a 20.0°C, 0.400 kg de aluminio a 26.0°C y 0.100 kg de cobre a 100°C se mezclan en un contenedor aislado y se les permite llegar a equilibrio térmico. Ignore cualquier transferencia de energía hacia o desde el contenedor. ¿Cuál es la temperatura final de la mezcla?

4. La cascada más alta en el mundo se llama Salto Ángel, en Venezuela. Su más elevada caída tiene una altura de 807 m. Si el agua en lo alto de la cascada está a 15.0°C, ¿cuál es la máxima temperatura del agua en el fondo de la caída? Suponga que toda la energía cinética del agua conforme alcanza el fondo se invierte al elevar su temperatura.

5. ¿Qué masa de agua a 25.0°C debe llevarse al equilibrio térmico con un cubo de aluminio de 1.85 kg inicialmente a 150°C, para así bajar la temperatura del aluminio a 65.0°C? Suponga que toda agua evaporada se condensa posteriormente.

6. La temperatura de una barra de plata se eleva 10.0°C cuando absorbe 1.23 kJ de energía por calor. La masa de la barra es 525 g. A partir de estos datos, determine el calor específico de la plata.

7. En climas fríos, incluyendo la parte norte de Estados Unidos, una casa puede construirse con grandes ventanas orientadas hacia el Sur para aprovechar el calor solar. Durante el día, la luz del Sol se absorbe en el suelo, las paredes interiores y los objetos en la habitación, lo que eleva su temperatura a 38.0°C. Si la casa está bien aislada, puede modelarla con una pérdida de energía por calor estable a la rapidez de 6 000 W por día en abril, cuando la temperatura exterior promedio es de 4°C y el sistema de calefacción convencional no se usa. Durante el periodo

entre 5:00 p.m. y 7:00 a.m. la temperatura de la casa cae y se requiere una "masa térmica" suficientemente grande para evitar que caiga demasiado. La masa térmica puede ser una gran cantidad de piedra (con calor específico 850 J/kg · °C) en el suelo y las paredes interiores expuestas a la luz solar. ¿Qué masa de piedra se requiere si la temperatura no debe caer por debajo de 18.0°C durante la noche?

8. Una muestra de cobre de 50.0 g está a 25.0°C. Si 1 200 J de energía se adicionan por calor al cobre, ¿cuál es la temperatura final de éste?

9. Una taza de aluminio de 200 g de masa contiene 800 g de agua en equilibrio térmico a 80.0°C. La combinación de taza y agua se enfría uniformemente de modo que la temperatura disminuye en 1.50°C por minuto. ¿A qué rapidez se retira energía por calor? Exprese su respuesta en watts.

10. Si agua de masa m_h y temperatura T_h se vierte en una taza de aluminio de masa m_{Al} que contiene agua de masa m_c a T_c, donde $T_h > T_c$, ¿cuál es la temperatura de equilibrio del sistema?

11. Una herradura de hierro de 1.50 kg, inicialmente a 600°C, se deja caer en una cubeta que contiene 20.0 kg de agua a 25.0°C. ¿Cuál es la temperatura final del sistema agua-herradura? Ignore la capacidad térmica del contenedor y suponga que hierve una cantidad despreciable de agua.)

12. Un taladro eléctrico, con una broca de acero de masa $m = 27.0$ g y 0.635 cm de diámetro, se usa para taladrar un bloque cúbico de acero de masa $M = 240$ g. Suponga que el acero tiene las mismas propiedades que el hierro. Puede modelar que el proceso de corte ocurre en un punto sobre la circunferencia de la broca. Este punto se mueve en una hélice con rapidez tangencial constante de 40.0 m/s y ejerce una fuerza de magnitud constante de 3.20 N sobre el bloque. Como se muestra en la figura P20.12, un surco en la broca lleva las virutas a la parte superior del bloque, donde forman una pila alrededor del orificio. El taladro gira y actúa sobre el bloque durante un intervalo de tiempo de 15.0 s. Suponga que este intervalo es lo suficientemente largo para conducción dentro del acero para llevarlo por completo a una temperatura uniforme. Además, suponga que los objetos de acero pierden una cantidad despreciable de energía por conducción, convección y radiación a sus alrededores. (a) Suponga que la broca está afilada y corta tres cuartos del camino a través del bloque durante 15.0 s. Encuentre el cambio de temperatura de toda la cantidad de acero. (b) **¿Qué pasaría si?** Ahora suponga que la broca está mellada y sólo corta un octavo del camino a través del bloque durante 15.0 s. Identifique el cambio de temperatura de toda la cantidad de acero en este caso. (c) ¿Qué fragmentos de información, si los hay, no son necesarios para la solución? Explique.

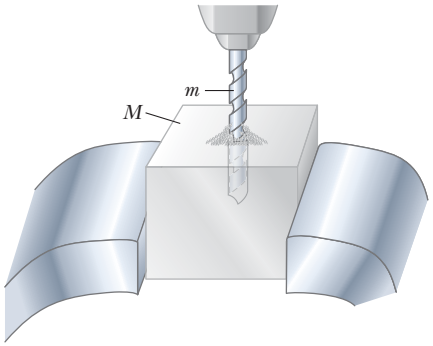


Figura P20.12

13. Un calorímetro de aluminio con una masa de 100 g contiene 250 g de agua. El calorímetro y el agua están en equilibrio térmico a 10.0°C. Dos bloques metálicos se colocan en el agua. Uno es un trozo de cobre de 50.0 g a 80.0°C. El otro tiene una masa de 70.0 g y originalmente está a una temperatura de 100°C. Todo el sistema se estabiliza a una temperatura final de 20.0°C. (a) Determine el calor específico de la muestra desconocida. (b) Con los datos de la tabla 20.1, ¿puede hacer una identificación positiva del material desconocido? ¿Puede identificar un material posible? (c) Explique sus respuestas al inciso (b).

14. Una moneda de cobre de 3.00 g a 25.0°C cae 50.0 m al suelo. (a) Si supone que 60.0% del cambio en energía potencial del sistema moneda-Tierra participa en el aumento de energía interna de la moneda, determine la temperatura final de ésta. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿El resultado depende de la masa de la moneda? Explique.

15. Dos recipientes térmicamente aislados se conectan mediante un estrecho tubo ajustado con una válvula que inicialmente está cerrada, como se muestra en la figura P20.15. Un recipiente de 16.8 L de volumen contiene oxígeno a una temperatura de 300 K y una presión de 1.75 atm. El otro recipiente, de 22.4 L de volumen, contiene oxígeno a una temperatura de 450 K y una presión de 2.25 atm. Cuando la válvula se abre, los gases en los dos recipientes se mezclan y la temperatura y la presión se vuelven uniformes en todas sus partes. (a) ¿Cuál es la temperatura final? (b) ¿Cuál es la presión final?

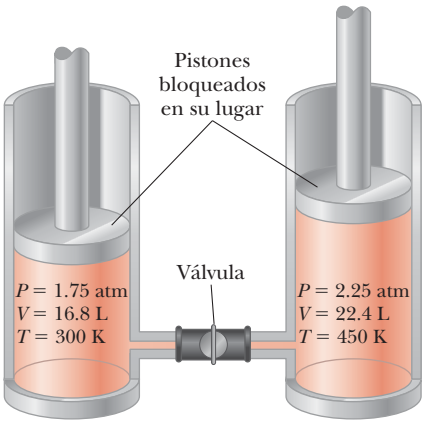


Figura P20.15

Sección 20.3 Calor latente

16. Un calorímetro de cobre de 50.0 g contiene 250 g de agua a 20.0°C. ¿Cuánto vapor a 100°C debe condensarse en el agua si la temperatura final del sistema deberá ser 50.0°C?

17. Un esquiador a campo traviesa de 75.0 kg se mueve sobre nieve, como lo ilustra la figura P20.17. El coeficiente de

fricción entre los esquíes y la nieve es de 0.200. Suponga que toda la nieve bajo sus esquíes está a 0°C y que toda la energía interna generada por fricción se adiciona a la nieve, que se pega a sus esquíes hasta que se funde. ¿Qué distancia deberá esquiar para fundir 1.00 kg de nieve?



Figura P20.17

18. ¿Cuánta energía se requiere para cambiar un cubo de hielo de 40.0 g, de hielo a −10.0°C a vapor, a 110°C?

19. Un cubo de hielo de 75.0 g a 0°C se coloca en 825 g de agua a 25.0°C. ¿Cuál es la temperatura final de la mezcla?

20. Una bala de plomo de 3.00 g a 30.0°C se dispara con una rapidez de 240 m/s en un gran bloque de hielo a 0°C, en donde queda incrustada. ¿Qué cantidad de hielo se derrite?

21. Vapor a 100°C se agrega a hielo a 0°C. (a) Encuentre la cantidad de hielo derretido y la temperatura final cuando la masa de vapor es 10.0 g y la masa de hielo es 50.0 g. (b) **¿Qué pasaría si?** Repita cuando la masa de vapor es 1.00 g y la masa de hielo es 50.0 g.

22. Un bloque de cobre de 1.00 kg a 20.0°C se deja caer en un gran recipiente de nitrógeno líquido a 77.3 K. ¿Cuántos kilogramos de nitrógeno hierven para cuando el cobre alcanza 77.3 K? (El calor específico del cobre es 0.092 cal/g · °C. El calor latente de vaporización del nitrógeno es 48.0 cal/g.)

23. En un recipiente aislado, 250 g de hielo a 0°C se agregan a 600 g de agua a 18.0°C. (a) ¿Cuál es la temperatura final del sistema? (b) ¿Cuánto hielo permanece cuando el sistema alcanza el equilibrio?

24. Un automóvil tiene una masa de 1 500 kg y sus frenos de aluminio tienen una masa global de 6.00 kg. (a) Suponga que toda la energía mecánica que se transforma en energía interna cuando el auto se detiene se deposita en los frenos, y que no se transfiere energía afuera de los frenos por calor. Los frenos originalmente están a 20.0°C. ¿Cuántas veces se puede detener el automóvil desde 25.0 m/s antes de que los frenos comiencen a fundirse? (b) Identifique algunos efectos ignorados en el inciso (a) que son importantes en una valoración más realista del calentamiento de los frenos.

Sección 20.4 Trabajo y calor en procesos termodinámicos

25. Un gas ideal se encierra en un cilindro con un pistón móvil encima de él. El pistón tiene una masa de 8 000 g y un área de 5.00 cm^2, y es libre para deslizarse hacia arriba y hacia abajo, manteniendo constante la presión del gas. ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el gas a medida que la temperatura de 0.200 moles del gas se eleva de 20.0°C a 300°C?

26. Un gas ideal se encierra en un cilindro con un pistón móvil encima de él. El pistón tiene una masa m y un área A, y es libre para deslizarse hacia arriba y hacia abajo, manteniendo constante la presión del gas. ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el gas a medida que la temperatura de n moles del gas se eleva de T_1 a T_2?

27. Un mol de un gas ideal se calienta lentamente de modo que va del estado PV (P_i, V_i) al ($3P_i$, $3V_i$), en tal forma que la presión del gas es directamente proporcional al volumen. (a) ¿Cuánto trabajo se efectúa sobre el gas en este proceso? (b) ¿Cómo se relaciona la temperatura del gas con su volumen durante este proceso?

28. (a) Determine el trabajo realizado sobre un gas que se expande de i a f, como se indica en la figura P20.28. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuánto trabajo se efectúa sobre el gas si se comprime de f a i a lo largo de la misma trayectoria?

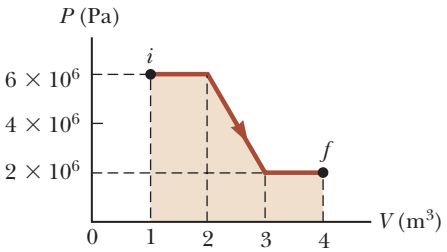


Figura P20.28

29. Un gas ideal se lleva por un proceso cuasiestático descrito por $P = \alpha V^2$, con $\alpha = 5.00$ atm/m^6, como se muestra en la figura P20.29. El gas se expande al doble de su volumen original de 1.00 m^3. ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el gas en expansión en este proceso?

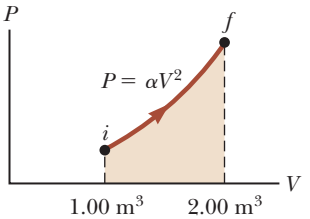


Figura P20.29

Sección 20.5 Primera ley de la termodinámica

30. Un gas se lleva a través del proceso cíclico descrito en la figura P20.30. (a) Encuentre la energía neta transferida al sistema por calor durante un ciclo completo. (b) **¿Qué pasaría si?** Si el ciclo se invierte (es decir, el proceso sigue la trayectoria *ACBA*), ¿cuál es la energía neta de entrada por calor en cada ciclo?

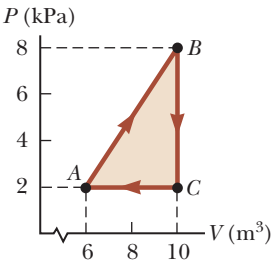


Figura P20.30
Problemas 30 y 31.

31. Considere el proceso cíclico que se bosqueja en la figura P20.30. Si Q es negativo para el proceso BC y ΔE_{int} es negativa para el proceso CA, ¿cuáles son los signos de Q, W y ΔE_{int} asociados con cada uno de los tres procesos?

32. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un gas ideal experimenta un proceso con los siguientes parámetros: $Q = 10.0\ \text{J}$, $W = 12.0\ \text{J}$ y $\Delta T = -2.00°\text{C}$.

33. Un sistema termodinámico experimenta un proceso donde su energía interna disminuye 500 J. Durante el mismo intervalo de tiempo se efectúa un trabajo de 220 J sobre el sistema. Encuentre la energía transferida desde él por calor.

34. Una muestra de un gas ideal pasa por el proceso que se indica en la figura P20.34. De A a B el proceso es adiabático; de B a C es isobárico con 345 kJ de energía entrando al sistema por calor; de C a D el proceso es isotérmico, y de D a A es isobárico con 371 kJ de energía que sale del sistema por calor. Determine la diferencia en energía interna $E_{int,B} - E_{int,A}$.

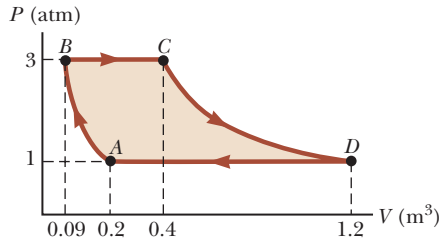


Figura P20.34

Sección 20.6 Algunas aplicaciones de la primera ley de la termodinámica

35. Una muestra de 2.00 moles de gas helio, inicialmente a 300 K y 0.400 atm, se comprime isotérmicamente a 1.20 atm. Si nota que el helio se comporta como un gas ideal, encuentre (a) el volumen final del gas, (b) el trabajo realizado sobre el gas y (c) la energía transferida por calor.

36. (a) ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el vapor cuando 1.00 mol de agua a 100°C hierve y se convierte en 1.00 mol de vapor a 100°C a 1.00 atm de presión? Suponga que el vapor se comporta como un gas ideal. (b) Determine el cambio en energía interna del sistema del agua y vapor a medida que el agua se vaporiza.

37. Un gas ideal inicialmente a 300 K experimenta una expansión isobárica a 2.50 kPa. Si el volumen aumenta de 1.00 m^3 a 3.00 m^3 y se transfieren 12.5 kJ al gas por calor, ¿cuáles son (a) el cambio en su energía interna y (b) su temperatura final?

38. Un mol de un gas ideal realiza 3 000 J de trabajo sobre sus alrededores a medida que se expande isotérmicamente hasta una presión final de 1.00 atm y 25.0 L de volumen. Determine (a) el volumen inicial y (b) la temperatura del gas.

39. Un bloque de aluminio de 1.00 kg se calienta a presión atmosférica de modo que su temperatura aumenta de 22.0°C a 40.0°C. Encuentre (a) el trabajo realizado sobre el aluminio, (b) la energía agregada a él por calor y (c) el cambio en su energía interna.

40. En la figura P20.40 el cambio en energía interna de un gas que se lleva de A a C a lo largo de la trayectoria azul es +800 J. El trabajo efectuado sobre el gas a lo largo de la trayectoria roja ABC es −500 J. (a) ¿Cuánta energía se debe agregar al sistema por calor a medida que va de A a B a C? (b) Si la presión en el punto A es cinco veces la del punto C, ¿cuál es el trabajo efectuado sobre el sistema al ir de C a D? (c) ¿Cuál es la energía que se intercambia con los alrededores por calor a medida que el gas va de C a A a lo largo de la trayectoria verde? (d) Si el cambio en energía interna al ir del punto D al punto A es +500 J, ¿cuánta energía se debe agregar al sistema por calor a medida que va del punto C al punto D?

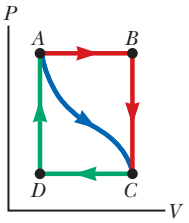


Figura P20.40

41. Un gas ideal inicialmente en P_i, V_i y T_i se lleva por un ciclo, como se muestra en la figura P20.41. (a) Encuentre el trabajo neto realizado sobre el gas por ciclo para 1.00 mol de gas inicialmente a 0°C. (b) ¿Cuál es la energía neta agregada por calor al gas por ciclo?

42. Un gas ideal inicialmente en P_i, V_i y T_i se lleva por un ciclo, como se muestra en la figura P20.41. (a) Encuentre el trabajo neto realizado sobre el gas por ciclo. (b) ¿Cuál es la energía neta agregada por calor al sistema por ciclo?

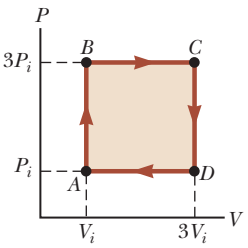


Figura P20.41
Problemas 41 y 42.

Sección 20.7 Mecanismos de transferencia de energía en procesos térmicos

43. En una casa, un ventanal tiene 0.620 cm de espesor y dimensiones de 1.00 m × 2.00 m. Un cierto día la temperatura de la superficie interior del vidrio es 25.0°C y la temperatura de la superficie exterior es 0°C. (a) ¿A qué rapidez se transfiere energía por calor a través del vidrio? (b) ¿Cuánta energía se transfiere por la ventana en un día, suponiendo constantes las temperaturas en las superficies?

44. Una placa de concreto tiene 12.0 cm de espesor y un área de 5.00 m^2. Bobinas de calentamiento eléctrico se instalan bajo la placa para derretir el hielo sobre la superficie en los meses de invierno. ¿Qué potencia mínima debe proporcionarse a las bobinas para mantener una diferencia de temperatura de 20.0°C entre el fondo de la placa y su superficie? Suponga que toda la energía transferida es a través de la placa.

45. Un estudiante intenta decidir qué vestir. Su recámara está a 20.0°C. La temperatura de su piel es de 35.0°C. El área de su piel expuesta es de 1.50 m^2. Hay personas en el planeta que tienen piel que es oscura en el infrarrojo, con emisividad aproximada de 0.900. Encuentre la pérdida de energía neta de su cuerpo por radiación en 10.0 min.

46. La superficie del Sol tiene una temperatura aproximada de 5 800 K. El radio del Sol es de 6.96×10^8 m. Calcule la energía total radiada por el Sol cada segundo. Suponga que la emisividad del Sol es 0.986.

47. El filamento de tungsteno de cierto foco de 100 W radia 2.00 W de luz. (Los otros 98 W se dispersan mediante convección y conducción.) El filamento tiene un área superfi-

cial de 0.250 mm^2 y una emisividad de 0.950. Encuentre la temperatura del filamento. (El punto de fusión del tungsteno es 3 683 K.)

48. A mediodía, el Sol entrega 1 000 W a cada metro cuadrado de una carretera con recubrimiento negro. Si el asfalto caliente pierde energía sólo por radiación, ¿cuál es su temperatura en estado estable?

49. Dos focos tienen filamentos cilíndricos mucho más grandes en longitud que en diámetro. Los focos evacuados son idénticos, excepto que uno opera a una temperatura de filamento de 2 100°C y el otro opera a 2 000°C. (a) Encuentre la razón de la potencia emitida por el foco más caliente a la emitida por el foco más frío. (b) Con los focos operando a las mismas temperaturas respectivas, el foco más frío es alterado haciendo más grueso su filamento para que así emita la misma potencia que el foco más caliente. ¿En qué factor debe aumentarse el radio de este filamento?

50. El cuerpo humano debe mantener su temperatura central dentro de una angosta franja alrededor de 37°C. Los procesos metabólicos, especialmente el esfuerzo muscular, convierten energía química en energía interna profunda en el interior. Desde éste, la energía debe fluir a la piel o pulmones para ser expulsada al medio ambiente. Durante ejercicio moderado un hombre de 80 kg puede metabolizar energía alimenticia a una rapidez de 300 kcal/h, al hacer 60 kcal/h de trabajo mecánico y liberando las restantes 240 kcal/h de energía por calor. La mayor parte de la energía es llevada desde el interior del cuerpo a la piel y forzada por convección (como diría un fontanero), por lo cual la sangre es calentada en el interior y entonces es enfriada en la piel, que es pocos grados más fría que el núcleo del cuerpo. Sin flujo de sangre el tejido vivo es un buen aislante térmico, con una conductividad térmica de 0.210 W/m · °C. Demuestre que el flujo sanguíneo es esencial para enfriar el cuerpo del hombre, calculando la rapidez de conducción de energía en kcal/h a través de la capa de tejido bajo su piel. Suponga que su área es 1.40 m^2, su espesor es 2.50 cm y es mantenida a 37.0°C en un lado y a 34.0°C en el otro lado.

51. Una barra de cobre y una barra de aluminio de igual diámetro se unen extremo por extremo en buen contacto térmico. La temperatura del extremo libre de la barra de cobre se mantiene constante a 100°C y el extremo alejado de la barra de aluminio se mantiene a 0°C. Si la barra de cobre tiene una longitud de 0.150 m, ¿cuál debe ser la longitud de la barra de aluminio tal que la temperatura en la unión sea 50.0°C?

52. Una caja con un área superficial total de 1.20 m^2 y un espesor de pared de 4.00 cm está hecha de un material aislante. Dentro de la caja, un calentador eléctrico de 10.0 W mantiene una temperatura interior de 15.0°C por arriba de la temperatura exterior. Encuentre la conductividad térmica k del material aislante.

53. (a) Calcule el valor R de una ventana térmica fabricada de dos paneles sencillos de vidrio con 0.125 pulgadas de espesor cada uno y separados por un espacio de aire de 0.250 pulgadas. (b) ¿En qué factor se reduce la transferencia de energía por calor a través de la ventana, si usa una ventana térmica en lugar de la ventana de panel sencillo? Incluya la contribución interna y externa de las capas de aire estancado.

54. A nuestra distancia del Sol, la intensidad de la radiación solar es de 1 370 W/m^2. La temperatura de la Tierra es afectada por el *efecto invernadero* de la atmósfera. Este fenómeno describe el efecto de absorción de luz infrarroja emitida por la superficie, de manera que la temperatura superficial de la Tierra es mayor que si estuviera sin aire. Para comparación, considere un objeto esférico de radio r sin atmósfera a la misma distancia del Sol que la Tierra. Suponga que su emisividad es la misma para todos los tipos de ondas electromagnéticas y que su temperatura es uniforme sobre su superficie. (a) Explique por qué el área proyectada sobre la cual absorbe luz solar es πr^2 y el área superficial sobre la cual radia es $4\pi r^2$. (b) Calcule su temperatura de estado estacionario. ¿Es fría?

55. Una barra de oro (Au) está en contacto térmico con una barra de plata (Ag) de la misma longitud y área (figura P20.55). Un extremo de la barra compuesta se mantiene a 80.0°C y el extremo opuesto está a 30.0°C. Cuando la transferencia de energía alcanza un estado estable, ¿cuál es la temperatura de la unión?

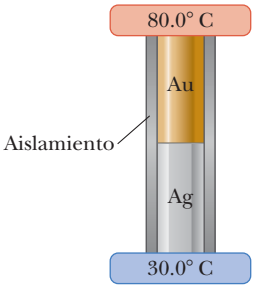


Figura P20.55

56. Para pruebas bacteriológicas de los suministros de agua y en las clínicas médicas las muestras se deben incubar rutinariamente durante 24 h a 37°C. El voluntario del Cuerpo de Paz e ingeniero del MIT, Amy Smith, inventó un incubador de bajo costo y bajo mantenimiento. El incubador consiste en una caja aislada con espuma que contiene un material ceroso que se funde a 37.0°C, intercalado entre tubos, platos o botellas que contienen las muestras de prueba y medio de cultivo (alimento para bacterias). Fuera de la caja el material ceroso primero se funde mediante una estufa o colector solar. Luego el material ceroso se pone en la caja para mantener calientes las muestras de prueba, mientras se solidifica. El calor de fusión del cambio de fase del material es 205 kJ/kg. Modele el aislamiento como un panel con 0.490 m^2 de área superficial, 4.50 cm de espesor y 0.012 W/m · °C de conductividad. Suponga que la temperatura exterior es de 23.0°C durante 12.0 h y 16.0°C durante 12.0 h. (a) ¿Qué masa del material ceroso se requiere para realizar la prueba bacteriológica? (b) Explique por qué su cálculo puede efectuarse sin conocer la masa de las muestras de prueba o del aislante.

57. Una gran pizza caliente flota en el espacio exterior después de ser rápidamente rechazada por una nave espacial. ¿Cuál es el orden de magnitud (a) de su rapidez de pérdida de energía y (b) de su rapidez de cambio de temperatura? Enliste las cantidades que estimó y el valor que consideró para cada una.

Problemas adicionales

58. Un gas se expande de I a F en la figura P20.58 (página 622). La energía agregada al gas por calor es 418 J cuando el gas va de I a F a lo largo de la trayectoria diagonal. (a) ¿Cuál es el cambio en energía interna del gas?

(b) ¿Cuánta energía debe agregarse al gas por calor a lo largo de la trayectoria indirecta *IAF*?

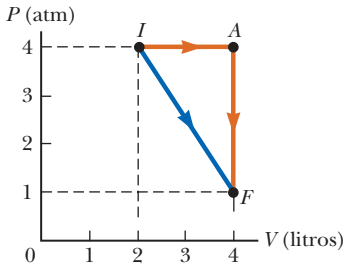


Figura P20.58

59. Un gas en un contenedor está a una presión de 1.50 atm con un volumen de 4.00 m^3. ¿Cuál es el trabajo realizado sobre el gas (a) si se expande a presión constante a un volumen dos veces mayor que el inicial, y (b) si se comprime a presión constante a un cuarto de su volumen inicial?

60. El nitrógeno líquido tiene un punto de ebullición de 77.3 K y un calor latente de vaporización de 2.01×10^5 J/kg. Un calentador eléctrico de 25.0 W está inmerso en un recipiente aislante que contiene 25.0 L de nitrógeno líquido en su punto de ebullición. ¿Cuántos kilogramos de nitrógeno son evaporados en un periodo de 4.00 h?

61. Una barra de aluminio de 0.500 m de largo y con un área de sección transversal de 2.50 cm^2 se inserta dentro de un recipiente térmicamente aislado que contiene helio líquido a 4.20 K. La barra inicialmente está a 300 K. (a) Si una mitad de la barra se inserta en el helio, ¿cuántos litros de helio escapan para cuando la mitad insertada se enfría a 4.20 K? Suponga que la mitad superior todavía no se enfría. (b) Si la superficie circular del extremo superior de la barra se mantiene a 300 K, ¿cuál es la rapidez de agotamiento aproximada del helio líquido después que la mitad inferior alcanza 4.20 K? (El aluminio tiene una conductividad térmica de 3 100 W/m · K a 4.20 K; ignore su variación de temperatura. La densidad del helio líquido es 125 kg/m^3.)

62. **Problema de repaso.** Dos balas de plomo, una de masa 12.0 g con una rapidez de 300 m/s que se mueve hacia la derecha, y la otra de masa 8.00 g con una rapidez de 400 m/s que se desplaza hacia la izquierda, colisionan de frente y permanecen juntas. Ambas balas están originalmente a 30.0°C. Suponga que el cambio de energía cinética del sistema aparece totalmente como energía interna aumentada. Interesa determinar la temperatura y fase de las balas después de la colisión. (a) ¿Cuáles son dos modelos de análisis apropiados para el sistema de dos balas durante el intervalo de tiempo desde antes hasta después de la colisión? (b) De uno de esos modelos, ¿cuál es la rapidez de las balas combinadas después de la colisión? (c) ¿Cuánta de la energía cinética inicial se ha transformado en energía interna en el sistema después de la colisión? (d) ¿Se funde todo el plomo debido a la colisión? (e) ¿Cuál es la temperatura de las balas combinadas después de la colisión? (f) ¿Cuál es la fase de las balas combinadas después de la colisión?

63. Un *calorímetro de flujo* es un aparato que se usa para medir el calor específico de un líquido. La técnica de calorimetría de flujo involucra la medición de la diferencia de temperatura entre los puntos de entrada y salida de una corriente de líquido que circula mientras se agrega energía por calor a una rapidez conocida. Un líquido de densidad 900 kg/m^3 fluye a través del calorímetro con una rapidez de flujo volumétrico de 2.00 L/min. En estado estacionario se establece una diferencia de temperatura de 3.50°C entre los puntos de entrada y salida cuando la energía se proporciona a una rapidez de 200 W. ¿Cuál es el calor específico del líquido?

64. Un *calorímetro de flujo* es un aparato que se usa para medir el calor específico de un líquido. La técnica de calorimetría de flujo involucra la medición de la diferencia de temperatura entre los puntos de entrada y salida de una corriente de líquido que circula mientras se agrega energía por calor a una rapidez conocida. Un líquido de densidad ρ fluye a través del calorímetro con una rapidez de flujo volumétrico R. En estado estacionario, se establece una diferencia de temperatura ΔT entre los puntos de entrada y salida cuando se proporciona energía a una rapidez P. ¿Cuál es el calor específico del líquido?

65. **Problema de repaso.** Después de una colisión entre una gran nave espacial y un asteroide, un disco de cobre de 28.0 m de radio y 1.20 m de espesor, a una temperatura de 850°C, flota en el espacio, girando en torno a su eje de simetría con una rapidez angular de 250 rad/s. Mientras el disco radia luz infrarroja, su temperatura cae a 20.0°C. Sobre el disco no actúa momento de torsión externo. (a) Encuentre el cambio de energía cinética del disco. (b) Determine el cambio de energía interna del disco. (c) Obtenga la cantidad de energía que radia.

66. Una bandeja para cubos de hielo se llena con 75.0 g de agua. Después que la bandeja llena logra una temperatura de equilibrio de 20.0°C, se coloca en un congelador a −8.00°C para elaborar cubos de hielo. (a) Describa los procesos que ocurren conforme la energía se elimina del agua para hacer hielo. (b) Calcule la energía que debe ser removida del agua para elaborar cubos de hielo a −8.00°C.

67. En un frío día de invierno usted compra nueces tostadas a un vendedor en la calle. Guarda su cambio, monedas de 9.00 g de cobre a −12.0°C, en el bolsillo de su parka. Su bolsillo ya contiene 14.0 g de monedas de plata a 30.0°C. Después de un breve intervalo de tiempo, la temperatura de las monedas de cobre es de 4.00°C y aumenta a razón de 0.500°C/s. En ese momento, (a) ¿cuál es la temperatura de las monedas de plata y (b) con qué rapidez está cambiando?

68. La rapidez con la que una persona en reposo convierte energía alimenticia se llama *tasa metabólica basal* (TMB). Suponga que la energía interna resultante deja el cuerpo de la persona por radiación y convección de aire seco. Cuando usted trota, la mayor parte de la energía alimenticia que quema por arriba de su TMB se convierte en energía interna que elevaría su temperatura corporal si no fuera eliminada. Suponga que la evaporación por transpiración es el mecanismo para eliminar esta energía. Suponga que una persona está trotando para la "máxima quema de grasa" convirtiendo energía alimenticia a la rapidez de 400 kcal/h por arriba de su TMB, y expulsando energía por trabajo a la rapidez de 60.0 W. Suponga que el

calor de evaporación del agua a la temperatura corporal es igual a su calor de vaporización a 100°C. (a) Determine la rapidez por hora a la cual el agua debe evaporarse de su piel. (b) Cuando usted metaboliza grasa, los átomos de hidrógeno en la molécula de grasa se transfieren al oxígeno para formar agua. Suponga que el metabolismo de 1.00 g de grasa genera 9.00 kcal de energía y produce 1.00 g de agua. ¿Qué fracción del agua que el trotador necesita es proporcionada por el metabolismo de grasas?

69. Una placa de hierro se mantiene contra una rueda de hierro tal que una fuerza de fricción cinética de 50.0 N actúa entre los dos pedazos de metal. La rapidez relativa a la cual se deslizan entre sí es de 40.0 m/s. (a) Calcule la rapidez con que se convierte energía mecánica en energía interna. (b) La placa y la rueda tienen, cada una, una masa de 5.00 kg, y cada una recibe el 50% de la energía interna. Si el sistema opera, como se ha descrito, durante 10.0 s y a cada objeto le es permitido lograr una temperatura interna uniforme, ¿cuál es el incremento de temperatura resultante?

70. Un adulto en descanso, de tamaño promedio, convierte la energía química alimenticia en energía interna con una rapidez de 120 W, llamada su *tasa metabólica basal*. Para estar a temperatura constante, el cuerpo debe expulsar energía con la misma rapidez. Varios procesos agotan la energía de su cuerpo. Usualmente, el más importante es la conducción térmica en el aire en contacto con su piel expuesta. Si usted no tiene un sombrero puesto, una corriente de convección de aire caliente se eleva verticalmente desde su cabeza, como un penacho de una chimenea. Su cuerpo también pierde energía por radiación electromagnética, por su aire caliente exhalado y por evaporación de la transpiración. En este problema, considere otra forma de pérdida de energía: humedad en el aliento exhalado. Suponga que usted realiza 22.0 respiraciones por minuto, cada una con un volumen de 0.600 L. Suponga que inhala aire seco y exhala aire a 37.0°C que contiene vapor de agua con una presión de vapor de 3.20 kPa. El vapor proviene de la evaporación de agua líquida en su cuerpo. Modele el vapor de agua como un gas ideal. Suponga que su calor latente de evaporación a 37.0°C es igual que su calor de vaporización a 100°C. Calcule a qué rapidez usted pierde energía por exhalación de aire húmedo.

71. Un cubo de hielo de 40.0 g flota en 200 g de agua en una taza de cobre de 100 g; todos están a una temperatura de 0°C. Un pedazo de plomo a 98.0°C se deja caer en la taza, y la temperatura final de equilibrio es 12.0°C. ¿Cuál es la masa del plomo?

72. Un mol de un gas ideal se contiene en un cilindro con un pistón móvil. La presión, volumen y temperatura iniciales son P_i, V_i y T_i, respectivamente. Encuentre el trabajo realizado sobre el gas en los siguientes procesos. En términos operativos, describa cómo llevar a cabo cada proceso y en un diagrama PV muestre cada proceso. (a) Una compresión isobárica con volumen final a la mitad del volumen inicial, (b) una compresión isotérmica con presión final a cuatro veces la presión inicial, (c) un proceso isovolumétrico con presión final a tres veces la presión inicial.

73. **Problema de repaso.** Ocurre que un meteoroide de 670 kg está compuesto de aluminio. Cuando está lejos de la Tierra su temperatura es de −15°C y se mueve con una rapidez de 14.0 km/s en relación con el planeta. Mientras choca con la Tierra, suponga que la energía interna proveniente de la energía mecánica del sistema meteorito-Tierra se comparte por igual entre el meteorito y la Tierra, y que todo el material del meteorito se eleva momentáneamente a la misma temperatura final. Encuentre esta temperatura. Suponga que el calor específico del aluminio líquido y gaseoso es 1 170 J/kg · °C.

74. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un grupo de excursionistas se levanta a las 8:30 a.m. y utiliza una cocina solar que consiste de una superficie reflectora curva que concentra la luz solar sobre el objeto a calentar (figura P20.74). Durante el día, la máxima intensidad solar que llega a la superficie de la Tierra en la ubicación de la cocina es $I = 600\ \text{W/m}^2$. La cocina encara al Sol y tiene un diámetro de cara $d = 0.600$ m. Suponga que una fracción f de 40.0% de la energía incidente se transfiere a 1.50 L de agua en un contenedor abierto, inicialmente a 20.0°C. El agua llega al punto de ebullición y los excursionistas disfrutan un café caliente en el desayuno antes de caminar diez millas y retornar al mediodía para la comida.

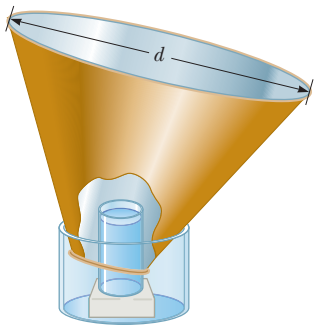


Figura P20.74

75. Durante periodos de gran actividad el Sol tiene más manchas solares que de costumbre. Las manchas solares son más frías que el resto de la capa luminosa de la atmósfera del Sol (la fotosfera). Paradójicamente, la potencia de salida total del Sol activo no es menor que el promedio, sino que es la misma o ligeramente mayor que el promedio. Elabore los detalles del siguiente modelo imperfecto de este fenómeno. Considere una mancha de la fotosfera con un área de $5.10 \times 10^{14}\ \text{m}^2$. Su emisividad es 0.965. (a) Encuentre la potencia que radia si su temperatura es uniformemente de 5 800 K, correspondiente al Sol quieto. (b) Para representar una mancha solar, suponga que 10.0% del área de la mancha está a 4 800 K y que el otro 90.0% está a 5 890 K. Encuentre la potencia de salida de la mancha. (c) Establezca cómo la respuesta al inciso (b) se compara con la respuesta al inciso (a). (d) Obtenga la temperatura promedio de la mancha. Note que esta temperatura más fría resulta en una alta presión de salida.

76. (a) En aire a 0°C un bloque de cobre de 1.60 kg a 0°C se pone a deslizar a 2.50 m/s sobre una hoja de hielo a 0°C. La fricción lleva al bloque al reposo. Encuentre la masa del hielo que se funde. (b) Conforme el bloque se frena, identifique su energía de entrada Q, su cambio en energía interna ΔE_{int} y el cambio en energía mecánica para el sistema bloque-hielo. (c) Para el hielo como un sistema,

identifique su energía de entrada Q y su cambio en energía interna ΔE_{int}. (d) Un bloque de hielo de 1.60 kg a 0°C se desliza a 2.50 m/s sobre una hoja de cobre a 0°C. La fricción lleva el bloque al reposo. Encuentre la masa del hielo que se funde. (e) Evalúe Q y ΔE_{int} para el bloque de hielo como un sistema y ΔE_{mec} para el sistema bloque-hielo. (f) Evalúe Q y ΔE_{int} para la hoja metálica como un sistema. (g) Una delgada placa de cobre de 1.60 kg a 20°C se desliza a 2.50 m/s sobre una placa estable idéntica a la misma temperatura. La fricción rápidamente detiene el movimiento. Suponga que no se transfiere energía al ambiente por calor, entonces obtenga el cambio en temperatura de ambos objetos. (h) Evalúe Q y ΔE_{int} para la placa deslizándose y ΔE_{mec} para el sistema de dos placas. (i) Evalúe Q y ΔE_{int} para la placa estacionaria.

77. En una tetera eléctrica hierve agua. La potencia absorbida por el agua es 1.00 kW. Si supone que la presión de vapor en la tetera es igual a la presión atmosférica, determine la rapidez de efusión de vapor desde el pico de la tetera si el pico tiene un área de sección transversal de 2.00 cm^2. Modele el vapor como un gas ideal.

78. La conductividad térmica promedio de las paredes (incluidas las ventanas) y techo de la casa que se describe en la figura P20.78 es 0.480 W/m · °C y su espesor promedio es 21.0 cm. La casa se mantiene caliente con gas natural que tiene un calor de combustión (es decir, la energía proporcionada por cada metro cúbico de gas quemado) de 9 300 $kcal/m^3$. ¿Cuántos metros cúbicos de gas se deben quemar cada día para mantener una temperatura interior de 25.0°C si la temperatura exterior es 0.0°C? Ignore la radiación y la pérdida de energía por calor a través del suelo.

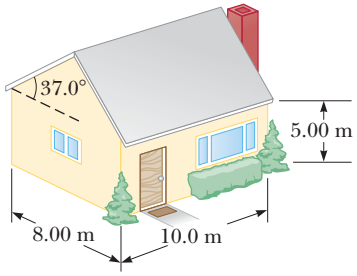


Figura P20.78

79. Un recipiente de cocina sobre un quemador lento contiene 10.0 kg de agua y una masa desconocida de hielo en equilibrio a 0°C en el tiempo $t = 0$. La temperatura de la mezcla se mide en varios tiempos y el resultado se grafica en la figura P20.79. Durante los primeros 50.0 minutos, la mezcla permanece a 0°C. De 50.0 min a 60.0 min, la temperatura aumenta a 2.00°C. Si ignora la capacidad térmica del recipiente, determine la masa inicial del hielo.

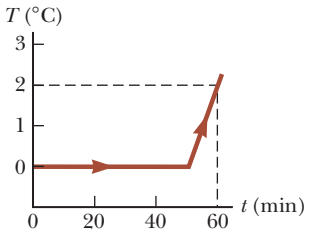


Figura P20.79

80. Un estudiante mide los siguientes datos en un experimento de calorimetría diseñado para determinar el calor específico del aluminio:

Temperatura inicial de agua y calorímetro:	70°C
Masa del agua:	0.400 kg
Masa del calorímetro:	0.040 kg
Calor específico del calorímetro:	0.63 kJ/kg · °C
Temperatura inicial del aluminio:	27.0°C
Masa del aluminio:	0.200 kg
Temperatura final de la mezcla:	66.3°C

(a) Use estos datos para determinar el calor específico del aluminio. (b) Explique si su resultado está dentro del 15% del valor dado en la tabla 20.1.

Problemas de desafío

81. Considere el aparato pistón-cilindro que se muestra en la figura P20.81. El fondo del cilindro contiene 2.00 kg de agua justamente bajo los 100.0°C. El cilindro tiene un radio $r = 7.50$ cm. El pistón de masa $m = 3.00$ kg se coloca sobre la superficie del agua. Un calentador eléctrico en la base del cilindro transfiere energía hacia el agua con una rapidez de 100 W. Suponga que el cilindro es más alto que lo mostrado en la figura, entonces no hay preocupación por el pistón llegando al tope del cilindro. (a) Una vez que el agua empieza a hervir, ¿qué tan rápido se eleva el pistón? Modele el vapor como un gas ideal. (b) Después que el agua se ha transformado completamente en vapor y el calentador continúa transfiriendo energía al vapor con la misma rapidez, ¿qué tan rápido se eleva el pistón?

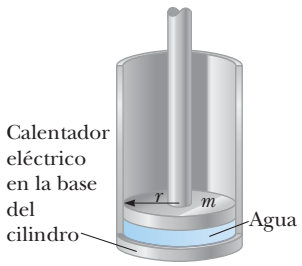


Figura P20.81

82. Un cascarón esférico tiene 3.00 cm de radio interior y 7.00 cm de radio exterior. Está hecho de material con conductividad térmica $k = 0.800$ W/m · °C. El interior se mantiene a 5°C de temperatura y el exterior a 40°C. Después de un intervalo de tiempo el cascarón alcanza un estado estable en el que la temperatura en cada punto dentro de él se mantiene constante en el tiempo. (a) Explique por qué la rapidez de transferencia de energía P debe ser la misma a través de cada superficie esférica, de radio r, dentro del cascarón y debe satisfacer

$$\frac{dT}{dr} = \frac{P}{4\pi k r^2}$$

(b) A continuación, demuestre que

$$\int_5^{40} dT = \frac{P}{4\pi k}\int_{0.03}^{0.07} r^{-2}\, dr$$

donde T está en grados Celsius y r está en metros. (c) Encuentre la rapidez de transferencia de energía a través del cascarón. (d) Demuestre que

$$\int_5^{T} dT = 1.84\int_{0.03}^{r} r^{-2}\, dr$$

donde T está en grados Celsius y r está en metros. (e) Obtenga la temperatura dentro del cascarón como una función del radio. (f) Encuentre la temperatura en $r = 5.00$ cm a la mitad a través del cascarón.

83. Un estanque de agua a 0°C se cubre con una capa de hielo de 4.00 cm de grueso. Si la temperatura del aire permanece constante a −10.0°C, ¿qué intervalo de tiempo se requiere para que el espesor del hielo aumente a 8.00 cm? *Sugerencia*: use la ecuación 20.16 en la forma

$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{\Delta T}{x}$$

y advierta que el incremento de energía dQ extraído del agua a través del espesor x de hielo es la cantidad requerida para congelar un espesor dx de hielo. Es decir, $dQ = L_f \rho A\, dx$, donde ρ es la densidad del hielo, A es el área y L_f es el calor latente de fusión.

84. (a) El interior de un cilindro hueco se mantiene a una temperatura T_a mientras que el exterior está a una temperatura menor T_b (figura P20.84). La pared del cilindro tiene una conductividad térmica k. Si ignora los efectos de los extremos, demuestre que la rapidez de conducción de energía desde la superficie interior hasta la exterior en la dirección radial es

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi Lk\left[\frac{T_a - T_b}{\ln(b/a)}\right]$$

Sugerencia: el gradiente de temperatura es dT/dr. Una corriente de energía radial pasa a través de un cilindro concéntrico de área 2πrL. (b) La sección de pasajeros de un jet comercial tiene la forma de un tubo cilíndrico con una longitud de 35.0 m y un radio interno de 2.50 m. Sus paredes están cubiertas con un material aislante de 6.00 cm de espesor y con una conductividad térmica de 4.00×10^{-5} cal/s · cm · °C. Un calentador debe mantener la temperatura interior a 25.0°C mientras que la temperatura exterior es de −35.0°C. ¿Qué potencia debe proporcionarse al calentador?

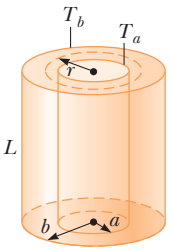


Figura P20.84

CAPÍTULO

21

Teoría cinética de los gases

21.1 Modelo molecular de un gas ideal

21.2 Calor específico molar de un gas ideal

21.3 Equipartición de la energía

21.4 Procesos adiabáticos para un gas ideal

21.5 Distribución de rapideces moleculares



Un niño infla la llanta de su bicicleta con una bomba de operación manual. La teoría cinética ayuda a describir los detalles del aire en la bomba. *(©Cengage Learning/George Semple)*

En el capítulo 19 se explicaron las propiedades de un gas ideal con el uso de variables macroscópicas como presión, volumen y temperatura. Estas propiedades a gran escala pueden relacionarse con una descripción a escala microscópica, donde la materia se trata como un conjunto de moléculas. Aplicar las leyes de movimiento de Newton de manera estadística a una colección de partículas proporciona una descripción razonable de los procesos termodinámicos. Para mantener las matemáticas a un nivel simple se considerará principalmente el comportamiento de gases, porque en ellos las interacciones entre moléculas son mucho más débiles de lo que son en líquidos o sólidos.

De inicio, la intención es relacionar directamente la presión y la temperatura con los detalles del movimiento molecular en una muestra de gas. Con base en estos resultados se realizarán predicciones de calores específicos molares de gases. Algunas de estas predicciones serán correctas y algunas no lo serán. El modelo se extenderá para explicar los valores que no se predicen correctamente mediante el modelo simple. Por último, se discute la distribución de magnitudes de rapideces moleculares en un gas.

21.1 Modelo molecular de un gas ideal

En este capítulo se investiga un *modelo estructural* para un gas ideal. Un **modelo estructural** es una construcción teórica diseñada para representar un sistema que no puede observarse directamente porque es muy grande o muy pequeño. Por ejemplo, sólo puede observarse el Sistema Solar desde adentro; no es posible viajar al exterior del Sistema Solar para mirar hacia atrás y ver cómo funciona. Este punto de vista restringido ha llevado a diferentes modelos estructurales históricos del Sistema Solar: el *modelo geocéntrico*, con la Tierra en el centro, y el *modelo heliocéntrico*, con el Sol en el centro. De hecho, el último mostró ser correcto. El átomo de hidrógeno es un ejemplo de un sistema muy pequeño y difícil de observar directamente. Se han desarrollado diversos modelos estructurales de este sistema, como el *modelo de Bohr* (sección 42.3) y el *modelo cuántico* (sección 42.4). Una vez desarrollado un modelo estructural, se efectúan diversas predicciones para observaciones experimentales. Por ejemplo, el modelo geocéntrico del Sistema Solar hace predicciones de cómo el movimiento de Marte se observaría desde la Tierra. Resulta que esas predicciones no encajan con las observaciones reales. Cuando eso ocurre con un modelo estructural, éste debe ser modificado o reemplazado con otro modelo.

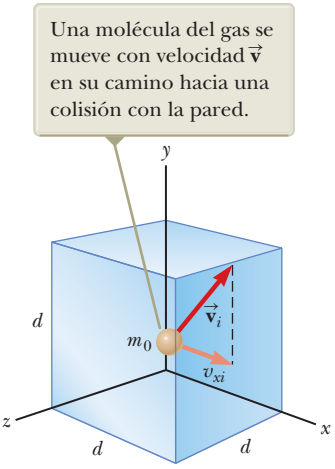


Figura 21.1 Una caja cúbica con lados de longitud d contiene un gas ideal.

El modelo estructural que se desarrollará para un gas ideal se llama **teoría cinética**. Este modelo trata un gas ideal como un conjunto de moléculas con las siguientes propiedades:

1. *Componentes físicas*:
   El gas consiste de un número de moléculas idénticas dentro de un recipiente cúbico con lados de longitud d. El número de moléculas en el gas es grande y la separación promedio entre ellas es grande comparada con sus dimensiones. Por lo tanto, las moléculas ocupan un volumen despreciable en el recipiente. Esta suposición es consistente con el modelo de gas ideal, en donde se acepta que las moléculas son puntuales.
2. *Comportamiento de los componentes*:
   (a) Las moléculas obedecen las leyes de movimiento de Newton, pero como un todo su movimiento es isotrópico: cualquier molécula se puede mover en cualquier dirección con cualquier rapidez.
   (b) Las moléculas interactúan sólo mediante fuerzas de corto alcance durante colisiones elásticas. Esta suposición es consistente con el modelo de gas ideal, en el que las moléculas no ejercen entre sí fuerzas de largo alcance.
   (c) Las moléculas tienen colisiones elásticas con las paredes.

No obstante que es frecuente ilustrar un gas ideal como constituido por átomos simples, el comportamiento de los gases moleculares se aproxima, a bajas presiones, al de los gases ideales. Por lo general, las rotaciones o vibraciones moleculares no tienen efecto sobre los movimientos que aquí se consideran.

Como primera aplicación de la teoría cinética se relaciona la variable macroscópica de presión P con cantidades microscópicas. Considere un conjunto de N moléculas de un gas ideal en un recipiente de volumen V. Como ya se indicó, el recipiente es un cubo con bordes de longitud d (figura 21.1). Primero se concentra la atención en una de dichas moléculas de masa m_0 y se supone en movimiento tal que su componente de velocidad en la dirección x es v_{xi}, como en la figura 21.2. (Aquí el subíndice se refiere a la i-ésima molécula en el conjunto, no a un valor inicial. En breve se combinarán los efectos de todas las moléculas.) A medida que la molécula colisiona elásticamente con cualquier pared (propiedad 2(c) anterior), su componente de velocidad perpendicular a la pared se invierte porque la masa de ésta es mucho mayor que la masa de la molécula. La molécula se modela como un sistema no aislado para el cual el impulso de la pared causa un cambio en la cantidad de movimiento de la molécula. La componente de la cantidad de movimiento p_{xi} de la molécula es $m_0 v_{xi}$ antes de la colisión y $-m_0 v_{xi}$ después de la colisión, así que el cambio en la componente x de la cantidad de movimiento de la molécula es

$$\Delta p_{xi} = -m_0 v_{xi} - (m_0 v_{xi}) = -2m_0 v_{xi} \qquad (21.1)$$

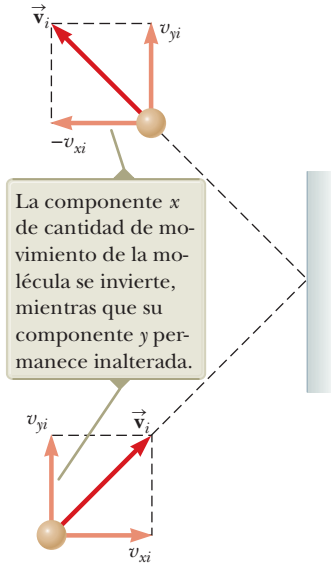


Figura 21.2 Una molécula tiene una colisión elástica con la pared del recipiente. En esta construcción se supone que la molécula se mueve en el plano xy.

Del modelo de sistema no aislado se puede aplicar el teorema impulso-cantidad de movimiento (ecuaciones 9.11 y 9.13) a la molécula para obtener

$$\bar{F}_{i,\text{sobre molécula}}\,\Delta t_{\text{colisión}} = \Delta p_{xi} = -2m_0 v_{xi} \tag{21.2}$$

donde $\bar{F}_{i,\text{sobre molécula}}$ es la componente x de la fuerza promedio[1] que la pared ejerce sobre la molécula durante la colisión y ésta tiene una duración $\Delta t_{\text{colisión}}$. Para que la molécula tenga otra colisión con la misma pared después de esta primera colisión, debe viajar una distancia $2d$ en la dirección x (a través del recipiente y de regreso). Por lo tanto, el intervalo de tiempo entre dos colisiones con la misma pared es

$$\Delta t = \frac{2d}{v_{xi}} \tag{21.3}$$

La fuerza que causa el cambio en cantidad de movimiento de la molécula en la colisión con la pared se presenta sólo durante la colisión. Sin embargo, puede obtenerse la fuerza promedio a largo plazo para muchas travesías de la molécula dentro del cubo, y para esto se toma el promedio de la fuerza en la ecuación 21.2 durante el intervalo de tiempo para que la molécula se mueva a través del cubo y regrese (ecuación 21.3). El cambio promedio en la cantidad de movimiento por viaje en el intervalo de tiempo para muchos viajes es el mismo que durante la breve duración de la colisión. Por lo tanto, la ecuación 21.2 se puede reescribir como

$$\bar{F}_i\,\Delta t = -2m_0 v_{xi} \tag{21.4}$$

donde $\bar{F}_i$ es la componente de la fuerza promedio en el intervalo de tiempo para que la molécula se traslade a través del cubo y regrese. Exactamente ocurre una colisión en cada uno de tales intervalos, entonces este resultado también es la fuerza promedio a largo plazo sobre la molécula durante largos intervalos de tiempo que contienen cualquier número de múltiplos de Δt.

Las ecuaciones 21.3 y 21.4 permiten expresar la componente x de la fuerza promedio a largo plazo ejercida por la *pared* sobre la molécula como

$$\bar{F}_i = -\frac{2m_0 v_{xi}}{\Delta t} = -\frac{2m_0 v_{xi}^2}{2d} = -\frac{m_0 v_{xi}^2}{d} \tag{21.5}$$

Ahora, por la tercera ley de Newton, la componente x de la fuerza promedio a largo plazo ejercida por la *molécula* sobre la *pared* es igual en magnitud y opuesta en dirección:

$$\bar{F}_{i,\text{sobre la pared}} = -\bar{F}_i = -\left(-\frac{m_0 v_{xi}^2}{d}\right) = \frac{m_0 v_{xi}^2}{d} \tag{21.6}$$

La fuerza promedio total $\bar{F}$ ejercida por el gas sobre la pared se obtiene al sumar las fuerzas promedio ejercidas por las moléculas individuales. Al sumar términos tipo ecuación 21.6 para todas las moléculas resulta

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_0 v_{xi}^2}{d} = \frac{m_0}{d}\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2 \tag{21.7}$$

donde se factorizó la longitud de la caja y la masa m_0, porque la propiedad 1 dice que todas las moléculas son iguales. Ahora se impone un aspecto adicional de la propiedad 1: que el número de moléculas es grande. Para un número pequeño de moléculas, la fuerza real sobre la pared variaría con el tiempo. Sería distinta de cero durante el breve intervalo de una colisión de la molécula contra la pared, y sería cero cuando ninguna molécula golpee la pared. Sin embargo, para un número muy grande de moléculas, como el número de Avogadro, estas variaciones en fuerza son suavizadas, de manera que la fuerza promedio dada anteriormente es la misma en *cualquier* intervalo de tiempo. Por lo tanto, la fuerza *constante* F sobre la pared debida a las colisiones moleculares es

$$F = \frac{m_0}{d}\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2 \tag{21.8}$$

[1] Para esta explicación se usa una barra sobre una variable para representar el valor promedio de la variable, tal como $\bar{F}$ para la fuerza promedio, en lugar del subíndice "prom" que se usó anteriormente. Esta notación es para evitar confusiones, porque ya se tienen algunos subíndices en las variables.

Para avanzar aún más considere cómo expresar el valor promedio del cuadrado de la componente x de la velocidad para N moléculas. El promedio tradicional de un conjunto de valores es la suma de los valores sobre el número de valores

$$\overline{v_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2}{N} \rightarrow \sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2 = N\overline{v_x^2} \tag{21.9}$$

El empleo de la ecuación 21.9 para sustituir la suma en la ecuación 21.8 da

$$F = \frac{m_0}{d} N\overline{v_x^2} \tag{21.10}$$

Ahora, otra vez considere una molécula con componentes de velocidad v_{xi}, v_{yi} y v_{zi}. El teorema de Pitágoras relaciona el cuadrado de la rapidez de la molécula con los cuadrados de las componentes de velocidad:

$$v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2 \tag{21.11}$$

Así que el valor promedio de v^2 para todas las moléculas en el recipiente se relaciona con los valores promedio de v_x^2, v_y^2 y v_z^2, de acuerdo con la expresión

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \tag{21.12}$$

Como el movimiento es isotrópico (propiedad 2(a) anterior), entonces los valores promedio $\overline{v_x^2}$, $\overline{v_y^2}$, y $\overline{v_z^2}$ son iguales entre sí. Al utilizar este hecho y la ecuación 21.12, se encuentra que

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2} \tag{21.13}$$

Por lo tanto, de la ecuación 21.10 la fuerza total ejercida sobre la pared es

$$F = \tfrac{1}{3} N \frac{m_0 \overline{v^2}}{d} \tag{21.14}$$

Con esta expresión se puede obtener la presión total ejercida sobre la pared:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{F}{d^2} = \tfrac{1}{3} N \frac{m_0 \overline{v^2}}{d^3} = \tfrac{1}{3}\left(\frac{N}{V}\right) m_0 \overline{v^2}$$

$$P = \tfrac{2}{3}\left(\frac{N}{V}\right)\left(\tfrac{1}{2} m_0 \overline{v^2}\right) \tag{21.15}$$

◀ **Relación entre presión y energía cinética molecular**

donde se ha introducido el volumen V del cubo como d^3.

La ecuación 21.15 indica que la presión de un gas es proporcional (1) al número de moléculas por unidad de volumen y (2) a la energía cinética traslacional promedio de las moléculas, $\frac{1}{2} m_0 \overline{v^2}$. Al analizar este modelo estructural de un gas ideal, se obtiene un resultado importante que relaciona la cantidad macroscópica de presión con una cantidad microscópica, el valor promedio del cuadrado de la rapidez molecular. Por lo tanto, se establece un vínculo clave entre el mundo molecular y el mundo a gran escala.

Observe que la ecuación 21.15 verifica algunas características de la presión con las cuales probablemente esté familiarizado. Una forma de aumentar la presión dentro de un recipiente es incrementar el número de moléculas por unidad de volumen N/V en el recipiente. Esto es lo que hace cuando agrega aire a una llanta. La presión en la llanta también se puede elevar al aumentar la energía cinética traslacional promedio de las moléculas de aire en la llanta. Esto se logra al incrementar la temperatura de dicho aire, razón por la cual la presión crece dentro de una llanta a medida que ésta se calienta durante viajes largos. La continua flexión de la llanta, a medida que se mueve a lo largo de la superficie del camino, resulta en trabajo realizado sobre el caucho conforme se distorsionan las partes de la llanta, lo que genera un incremento en la energía interna del caucho. La temperatura aumentada del caucho causa transferencia de energía por calor hacia el aire adentro de la llanta. Esta transferencia eleva la temperatura del aire, y este aumento en temperatura a su vez produce un incremento en presión.

Interpretación molecular de la temperatura

Ahora se considera otra variable macroscópica, la temperatura T del gas. Se puede obtener cierta comprensión del significado de la temperatura al escribir primero la ecuación 21.15 en la forma

$$PV = \tfrac{2}{3}N(\tfrac{1}{2}m_0\overline{v^2}) \tag{21.16}$$

Puede compararse esta expresión con la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 19.10):

$$PV = Nk_BT \tag{21.17}$$

Al igualar los lados derechos de las ecuaciones 21.16 y 21.17, y resolviendo para T resulta

Relación entre temperatura y energía cinética molecular ▶

$$T = \frac{2}{3k_B}(\tfrac{1}{2}m_0\overline{v^2}) \tag{21.18}$$

Este resultado expresa que la temperatura es una medida directa de la energía cinética molecular promedio. Al reordenar la ecuación 21.18, es posible relacionar la energía cinética molecular traslacional con la temperatura:

Energía cinética promedio por molécula ▶

$$\tfrac{1}{2}m_0\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}k_BT \tag{21.19}$$

Es decir, la energía cinética traslacional promedio por molécula es $\frac{3}{2}k_BT$. Ya que $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$ (ecuación 21.13), se sigue que

$$\tfrac{1}{2}m_0\overline{v_x^2} = \tfrac{1}{2}k_BT \tag{21.20}$$

En forma similar, para las direcciones y y z,

$$\tfrac{1}{2}m_0\overline{v_y^2} = \tfrac{1}{2}k_BT \text{ y } \tfrac{1}{2}m_0\overline{v_z^2} = \tfrac{1}{2}k_BT$$

Por lo tanto, cada grado de libertad traslacional aporta una cantidad igual de energía, $\frac{1}{2}k_BT$, al gas. (En general, un "grado de libertad" se refiere a un medio independiente por el cual una molécula puede tener energía.) Una generalización de este resultado, conocido como **teorema de equipartición de la energía**, es como sigue:

Teorema de equipartición de la energía ▶

> Cada grado de libertad contribuye con $\frac{1}{2}k_BT$ a la energía de un sistema, donde posibles grados de libertad son aquellos asociados con la traslación, rotación y vibración de las moléculas.

La energía cinética traslacional total de N moléculas de gas es simplemente N veces la energía promedio por molécula, que está dada por la ecuación 21.19:

Energía cinética traslacional total de *N* moléculas ▶

$$K_{\text{tras tot}} = N(\tfrac{1}{2}m_0\overline{v^2}) = \tfrac{3}{2}Nk_BT = \tfrac{3}{2}nRT \tag{21.21}$$

donde se utilizó $k_B = R/N_A$ para la constante de Boltzmann y $n = N/N_A$ para el número de moles del gas. Si las moléculas de gas sólo tienen energía cinética traslacional, la ecuación 21.21 representa la energía interna del gas. Este resultado implica que la energía interna de un gas ideal *sólo* depende de la temperatura. En la sección 21.2 se seguirá este punto.

La raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ se llama **rapidez media cuadrática** (**rms**) de las moléculas. De la ecuación 21.19 se encuentra que la rapidez rms es

Rapidez media cuadrática ▶

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \tag{21.22}$$

donde M es la masa molar en kilogramos por mol y es igual a m_0N_A. Esta expresión muestra que, a una temperatura dada, las moléculas más ligeras se mueven más rápido, en promedio, que las moléculas más pesadas. Por ejemplo, a una temperatura determinada, las moléculas de hidrógeno, cuya masa molar es 2.02×10^{-3} kg/mol, tienen una rapidez promedio cerca de cuatro veces mayor que las moléculas de oxígeno, cuya masa molar es 32.0×10^{-3} kg/mol. La tabla 21.1 enlista la rapidez rms para varias moléculas a 20°C.

Tabla 21.1 **Rapidez media cuadrática (rms)**

Gas	Masa molar (g/mol)	v_{rms} a 20°C (m/s)	Gas	Masa molar (g/mol)	v_{rms} a 20°C (m/s)
H_2	2.02	1902	NO	30.0	494
He	4.00	1352	O_2	32.0	478
H_2O	18.0	637	CO_2	44.0	408
Ne	20.2	602	SO_2	64.1	338
N_2 o CO	28.0	511			

Examen rápido 21.1 Dos recipientes mantienen un gas ideal a la misma temperatura y presión. Ambos recipientes tienen el mismo tipo de gas, pero el recipiente B posee el doble de volumen que el recipiente A. **(i)** ¿Cuál es la energía cinética traslacional promedio por molécula en el recipiente B? (a) El doble que el recipiente A, (b) la misma que el recipiente A, (c) la mitad que el recipiente A, (d) es imposible de determinar. **(ii)** De entre las mismas opciones, describa la energía interna del gas en el recipiente B.

Prevención de riesgos ocultos 21.1

¿La raíz cuadrada del cuadrado? Sacar la raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ no "deshace" el cuadrado, porque se toma un promedio *entre* elevar al cuadrado y tomar la raíz cuadrada. Aunque la raíz cuadrada de $(\overline{v})^2$ es $\overline{v} = \overline{v}_{prom}$, porque elevar al cuadrado se hace después del promedio, la raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ *no* es v_{prom}, sino v_{rms}.

Ejemplo 21.1 Un tanque de helio

Un tanque que se emplea para llenar globos de helio tiene un volumen de 0.300 m^3 y contiene 2.00 moles de gas helio a 20.0°C. Suponga que el helio se comporta como un gas ideal.

(A) ¿Cuál es la energía cinética traslacional total de las moléculas de gas?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un modelo microscópico de un gas en el que observa cómo se incrementa el movimiento de las moléculas alrededor del recipiente a medida que aumenta la temperatura. El gas es monoatómico, así que la energía cinética traslacional total de las moléculas es la energía interna del gas.

Categorizar Se evalúan los parámetros con las ecuaciones desarrolladas en la explicación precedente, así este ejemplo es un problema de sustitución.

Use la ecuación 21.21 con $n = 2.00$ moles y $T = 293$ K:

$$E_{int} = \tfrac{3}{2}nRT = \tfrac{3}{2}(2.00\ \text{mol})(8.31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(293\ \text{K})$$
$$= 7.30 \times 10^3\ \text{J}$$

(B) ¿Cuál es la energía cinética promedio por molécula?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 21.19:

$$\tfrac{1}{2}m_0\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}k_B T = \tfrac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(293\ \text{K})$$
$$= 6.07 \times 10^{-21}\ \text{J}$$

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la temperatura se eleva de 20.0°C a 40.0°C? Ya que 40.0 es el doble de 20.0, ¿la energía cinética traslacional total de las moléculas del gas es el doble a la temperatura más alta?

Respuesta La expresión para la energía traslacional total depende de la temperatura, y el valor para la temperatura se debe expresar en kelvins, no en grados Celsius. Por lo tanto, la razón de 40.0 a 20.0 *no* es la razón apropiada. Al convertir las temperaturas Celsius a kelvins, 20.0°C es 293 K y 40.0°C es 313 K. Así, la energía traslacional total aumenta en un factor de sólo 313 K/293 K = 1.07.

21.2 Calor específico molar de un gas ideal

Considere un gas ideal que experimenta varios procesos tales que el cambio en temperatura es $\Delta T = T_f - T_i$ para todos los procesos. El cambio de temperatura se puede lograr al tomar una variedad de trayectorias de una isoterma a otra, como se muestra en la figura 21.3. Ya que ΔT es la misma para cada ruta, el cambio en energía

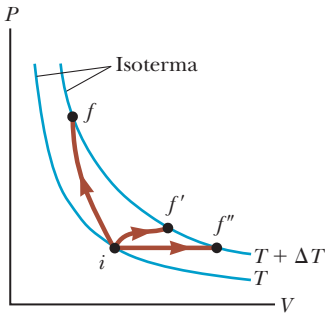


Figura 21.3 Un gas ideal se lleva de una isoterma a temperatura T a otra a temperatura $T + \Delta T$ a lo largo de tres trayectorias diferentes.

interna ΔE_{int} es el mismo para todas las trayectorias. Sin embargo, el trabajo W realizado sobre el gas (el negativo del área bajo las curvas) es diferente para cada trayectoria. Por lo tanto, de la primera ley de la termodinámica se puede argumentar que el calor $Q = \Delta E_{\text{int}} - W$, asociado con un cambio dado en temperatura, *no* tiene un valor único, como se discutió en la sección 20.4.

Esta dificultad se puede abordar al definir calores específicos para dos procesos especiales que se han estudiado: isovolumétrico e isobárico. El número de moles n es una conveniente medida de la cantidad de gas, entonces se definen los **calores específicos molares** asociados con estos procesos del modo siguiente:

$$Q = nC_V \Delta T \quad \text{(volumen constante)} \tag{21.23}$$

$$Q = nC_P \Delta T \quad \text{(presión constante)} \tag{21.24}$$

donde C_V es el **calor específico molar a volumen constante** y C_P es el **calor específico molar a presión constante**. Cuando a un gas se le agrega energía por calor a presión constante, no sólo aumenta la energía interna del gas, también se realiza trabajo (negativo) sobre el gas debido al cambio en volumen para mantener constante la presión. Por lo tanto, el calor Q en la ecuación 21.24 debe explicar el incremento en energía interna y la transferencia de energía hacia fuera del sistema por trabajo. Por este motivo, Q es mayor en la ecuación 21.24 que en la ecuación 21.23 para valores dados de n y ΔT. Así, C_P es mayor que C_V.

En la sección anterior se halló que la temperatura de un gas es una medida de la energía cinética traslacional promedio de las moléculas de gas. Esta energía cinética se asocia con el movimiento del centro de masa de cada molécula. No incluye la energía asociada con el movimiento interno de la molécula, a saber, vibraciones y rotaciones respecto al centro de masa. Esto no debería sorprenderle porque el modelo simple de teoría cinética supone una molécula sin estructura.

Así, primero considere el caso más simple de un gas monoatómico ideal, es decir, un gas que contiene un átomo por molécula, como helio, neón o argón. Cuando se agrega energía a un gas monoatómico en un recipiente de volumen fijo, toda la energía adicionada se destina a incrementar la energía cinética traslacional de los átomos. No existe otra forma de almacenar la energía en un gas monoatómico. Por lo tanto, de la ecuación 21.21 se ve que la energía interna E_{int} de N moléculas (o n moles) de un gas monoatómico ideal es

Energía interna de un gas monoatómico ideal ▶

$$E_{\text{int}} = K_{\text{tras tot}} = \tfrac{3}{2} N k_B T = \tfrac{3}{2} nRT \tag{21.25}$$

Para un gas monoatómico ideal, E_{int} sólo es una función de T y la relación funcional está dada por la ecuación 21.25. En general, la energía interna de cualquier gas ideal es una función sólo de T y la relación exacta depende del tipo de gas.

Si la energía se transfiere por calor a un sistema a volumen constante, no se realiza trabajo sobre el sistema. Es decir, $W = -\int P\, dV = 0$ para un proceso a volumen constante. Por lo tanto, de la primera ley de la termodinámica,

$$Q = \Delta E_{\text{int}} \tag{21.26}$$

En otras palabras, toda la energía transferida por calor se destina a incrementar la energía interna del sistema. En la figura 21.4 se describe un proceso a volumen constante de i a f para un gas ideal, donde ΔT es la diferencia de temperatura entre las dos isotermas. Al sustituir la expresión para Q dada por la ecuación 21.23 en la ecuación 21.26, se obtiene

$$\Delta E_{\text{int}} = nC_V \Delta T \tag{21.27}$$

Esta ecuación se aplica a todos los gases ideales, aquellos gases que tienen más de un átomo por molécula, así como a gases ideales monoatómicos.

En el límite de cambios infinitesimales se puede emplear la ecuación 21.27 para expresar el calor específico molar a volumen constante como

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{dE_{\text{int}}}{dT} \tag{21.28}$$

Ahora aplique los resultados de esta discusión a un gas monoatómico. Al sustituir la energía interna de la ecuación 21.25 en la ecuación 21.28 se obtiene

$$C_V = \tfrac{3}{2}R = 12.5\ \text{J/mol} \cdot \text{K} \qquad \textbf{(21.29)}$$

Esta expresión predice un valor de $C_V = \frac{3}{2}R$ para *todos* los gases monoatómicos. Esta predicción está en excelente acuerdo con los valores medidos de calores específicos molares para gases como helio, neón, argón y xenón sobre un amplio intervalo de temperaturas (tabla 21.2). Las pequeñas variaciones en la tabla 21.2 de los valores predichos se debe a que los gases reales no son gases ideales. En los gases reales ocurren interacciones intermoleculares débiles, que no se abordan en el modelo de gas ideal presentado.

Ahora suponga que el gas sigue la trayectoria $i \rightarrow f'$ a presión constante, como se muestra en la figura 21.4. Sobre esta trayectoria la temperatura de nuevo aumenta en ΔT. La energía que se debe transferir por calor al gas en este proceso es $Q = nC_P\Delta T$. El volumen cambia en este proceso, así que el trabajo realizado sobre el gas es $W = -P\Delta V$, donde P es la presión constante a la que ocurre el proceso. Al aplicar la primera ley de la termodinámica a este proceso, se tiene

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W = nC_P\Delta T + (-P\Delta V) \qquad \textbf{(21.30)}$$

En este caso la energía agregada al gas por calor se canaliza como sigue. Parte de ella sale del sistema por trabajo (es decir, el gas mueve un pistón a través de un desplazamiento) y el resto aparece como un incremento en la energía interna del gas. Sin embargo, el cambio en energía interna para el proceso $i \rightarrow f'$ es igual al del proceso $i \rightarrow f$ porque E_{int} sólo depende de la temperatura para un gas ideal y ΔT es la misma para ambos procesos. Además, $PV = nRT$, entonces note que para un proceso a presión constante, $P\Delta V = nR\Delta T$. Al sustituir este valor para $P\Delta V$ en la ecuación 21.30 con $\Delta E_{\text{int}} = nC_V\Delta T$ (ecuación 21.27) se obtiene

$$nC_V\Delta T = nC_P\Delta T - nR\Delta T$$
$$C_P - C_V = R \qquad \textbf{(21.31)}$$

Esta expresión se aplica a *cualquier* gas ideal. Predice que el calor específico molar de un gas ideal a presión constante es mayor que el calor específico molar a volumen constante en una cantidad R, la constante universal de los gases (que tiene el valor 8.31 J/mol · K). Esta expresión es aplicable a gases reales, como muestran los datos de la tabla 21.2.

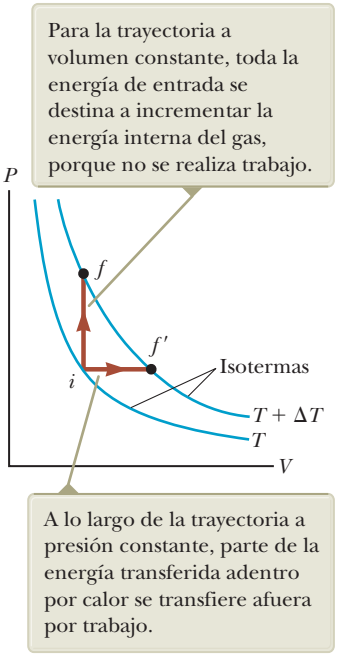


Figura 21.4 La energía se transfiere por calor a un gas ideal en dos formas.

Tabla 21.2 Calores específicos molares de varios gases

	Calor específico molar (J/mol · K)[a]			
Gas	C_P	C_V	$C_P - C_V$	$\gamma = C_P/C_V$
Gases monoatómicos				
He	20.8	12.5	8.33	1.67
Ar	20.8	12.5	8.33	1.67
Ne	20.8	12.7	8.12	1.64
Kr	20.8	12.3	8.49	1.69
Gases diatómicos				
H_2	28.8	20.4	8.33	1.41
N_2	29.1	20.8	8.33	1.40
O_2	29.4	21.1	8.33	1.40
CO	29.3	21.0	8.33	1.40
Cl_2	34.7	25.7	8.96	1.35
Gases poliatómicos				
CO_2	37.0	28.5	8.50	1.30
SO_2	40.4	31.4	9.00	1.29
H_2O	35.4	27.0	8.37	1.30
CH_4	35.5	27.1	8.41	1.31

[a] Todos los valores, excepto el del agua, se obtuvieron a 300 K.

Ya que $C_V = \frac{3}{2}R$ para un gas ideal monoatómico, la ecuación 21.31 predice un valor $C_P = \frac{5}{2}R = 20.8\,\text{J/mol}\cdot\text{K}$ para el calor específico molar de un gas monoatómico a presión constante. La razón de estos calores específicos molares es una cantidad sin dimensiones γ (letra griega gamma):

Razón de calores específicos molares para un gas ideal monoatómico

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5R/2}{3R/2} = \frac{5}{3} = 1.67 \qquad \textbf{(21.32)}$$

Los valores teóricos de C_V, C_P y γ están en excelente acuerdo con los valores experimentales obtenidos para gases monoatómicos, pero están en serio desacuerdo con los valores para los gases más complejos (vea la tabla 21.12). Esto no debe sorprender: el valor $C_V = \frac{3}{2}R$ fue deducido para un gas ideal monoatómico, y se espera alguna contribución adicional al calor específico molar proveniente de la estructura interna de las moléculas más complejas. En la sección 21.3 se describe el efecto de la estructura molecular sobre el calor específico molar de un gas. La energía interna y, por tanto, el calor específico molar de un gas complejo debe incluir contribuciones de los movimientos rotacional y vibratorio de la molécula.

En el caso de sólidos y líquidos calentados a presión constante, se realiza muy poco trabajo durante tal proceso porque la expansión térmica es pequeña. En consecuencia, C_P y C_V son aproximadamente iguales para sólidos y líquidos.

Examen rápido 21.2 **(i)** ¿De qué modo cambia la energía interna de un gas mientras sigue la trayectoria $i \to f$ en la figura 21.4? (a) E_{int} aumenta, (b) E_{int} disminuye, (c) E_{int} permanece igual, (d) no hay suficiente información para determinar cómo cambia E_{int}. **(ii)** De entre las mismas opciones, ¿cómo cambia la energía interna de un gas ideal a medida que sigue la trayectoria $f \to f'$ a lo largo de la isoterma marcada $T + \Delta T$ en la figura 21.4?

Ejemplo 21.2 Calentamiento de un cilindro de helio

Un cilindro contiene 3.00 moles de gas helio a una temperatura de 300 K.

(A) Si el gas se calienta a volumen constante, ¿cuánta energía por calor se debe transferir al gas para que su temperatura aumente a 500 K?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Proyecte el proceso en su mente con la ayuda del arreglo pistón-cilindro de la figura 19.12. Imagine que el pistón está bloqueado en posición para mantener el gas a volumen constante.

Categorizar Los parámetros se evalúan con las ecuaciones desarrolladas en la discusión precedente, así que este ejemplo es un problema de sustitución.

Use la ecuación 21.23 para encontrar la transferencia de energía: $Q_1 = nC_V\,\Delta T$

Sustituya los valores dados:

$$Q_1 = (3.00\text{ mol})(12.5\,\text{J/mol}\cdot\text{K})(500\text{ K} - 300\text{ K}) = 7.50 \times 10^3\,\text{J}$$

(B) ¿Cuánta energía se debe transferir al gas por calor a presión constante para elevar la temperatura a 500 K?

SOLUCIÓN

Utilice la ecuación 21.24 para obtener la transferencia de energía: $Q_2 = nC_P\,\Delta T$

Sustituya los valores dados:

$$Q_2 = (3.00\text{ mol})(20.8\,\text{J/mol}\cdot\text{K})(500\text{ K} - 300\text{ K}) = 12.5 \times 10^3\,\text{J}$$

Este valor es mayor que Q_1 debido a la transferencia de energía hacia fuera del gas por trabajo en el proceso a presión constante.

21.3 Equipartición de la energía

Las predicciones basadas en el modelo para calor específico molar concuerdan bastante bien con el comportamiento de los gases monoatómicos, pero no con el comportamiento de los gases complejos (vea la tabla 21.2). Sin embargo, el valor predicho por el modelo para la cantidad $C_P - C_V = R$ es el mismo para todos los gases. Dicha similitud no sorprende, porque esta diferencia es el resultado del trabajo efectuado sobre el gas, que es independiente de su estructura molecular.

Para aclarar las variaciones en C_V y C_P en los gases más complejos que los gases monoatómicos, explore aún más el origen del calor específico molar. Hasta el momento se ha supuesto que la única contribución a la energía interna de un gas es la energía cinética traslacional de las moléculas. No obstante, la energía interna de un gas incluye aportaciones de los movimientos traslacional, vibratorio y rotacional de las moléculas. Los movimientos rotacional y vibratorio de las moléculas se activan mediante colisiones y, por lo tanto, se "acoplan" al movimiento traslacional de las moléculas. La rama de la física conocida como *mecánica estadística* ha demostrado que, para un gran número de partículas que obedecen las leyes de la mecánica newtoniana, la energía disponible se comparte, en promedio, de manera equitativa por cada grado de libertad independiente. Recuerde de la sección 21.1 que el teorema de equipartición establece que, en equilibrio, cada grado de libertad aporta $\frac{1}{2}k_BT$ de energía por molécula.

Considere un gas diatómico cuyas moléculas tienen la forma de una mancuerna (figura 21.5). En este modelo, el centro de masa de la molécula se traslada en las direcciones x, y y z (figura 21.5a). Además, la molécula puede girar en torno a tres ejes mutuamente perpendiculares (figura 21.5b). La rotación en torno al eje y se puede despreciar, porque el momento de inercia I_y de la molécula y su energía rotacional $\frac{1}{2}I_y\omega^2$ respecto a este eje son despreciables comparadas con las asociadas a los ejes x y z. (Si los dos átomos se modelan como partículas, entonces I_y es idénticamente cero.) Por lo tanto, hay cinco grados de libertad para traslación y rotación: tres asociados con el movimiento traslacional y dos asociados con el movimiento rotacional. Cada grado de libertad contribuye, en promedio, con $\frac{1}{2}k_BT$ de energía por molécula, así que la energía interna para un sistema de N moléculas, ignorando por ahora la vibración, es

$$E_{\text{int}} = 3N(\tfrac{1}{2}k_BT) + 2N(\tfrac{1}{2}k_BT) = \tfrac{5}{2}Nk_BT = \tfrac{5}{2}nRT$$

Se puede emplear este resultado y la ecuación 21.28 para encontrar el calor específico molar a volumen constante:

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{dE_{\text{int}}}{dT} = \frac{1}{n}\frac{d}{dT}(\tfrac{5}{2}nRT) = \tfrac{5}{2}R = 20.8\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \qquad \textbf{(21.33)}$$

De las ecuaciones 21.31 y 21.32, se encuentra que

$$C_P = C_V + R = \tfrac{7}{2}R = 29.1\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1.40$$

Estos resultados concuerdan con la mayoría de los datos para moléculas diatómicas dados en la tabla 21.2. Esto es sorprendente porque todavía no se explican las posibles vibraciones de la molécula.

En el modelo para vibración, los dos átomos se unen mediante un resorte imaginario (vea la figura 21.5c). El movimiento vibratorio agrega dos grados de libertad más, que corresponden a la energía cinética y a la energía potencial asociadas con las vibraciones a lo largo de la longitud de la molécula. Así, un modelo que incluye los tres tipos de movimiento predice una energía interna total de

$$E_{\text{int}} = 3N(\tfrac{1}{2}k_BT) + 2N(\tfrac{1}{2}k_BT) + 2N(\tfrac{1}{2}k_BT) = \tfrac{7}{2}Nk_BT = \tfrac{7}{2}nRT$$

y un calor específico molar a volumen constante de

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{dE_{\text{int}}}{dT} = \frac{1}{n}\frac{d}{dT}(\tfrac{7}{2}nRT) = \tfrac{7}{2}R = 29.1\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \qquad \textbf{(21.34)}$$

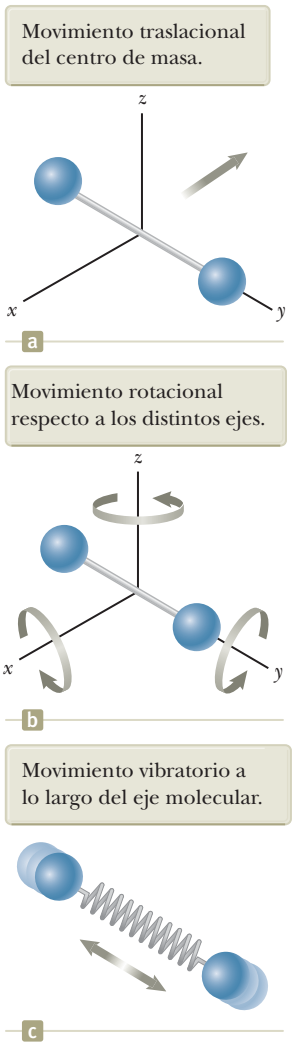


Figura 21.5 Posibles movimientos de una molécula diatómica.

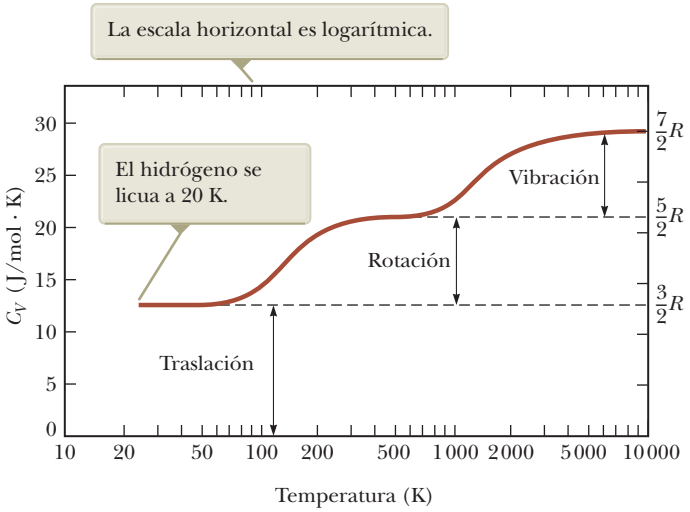


Figura 21.6 Calor específico molar del hidrógeno como función de la temperatura.

Este valor es inconsistente con los datos experimentales para moléculas como H_2 y N_2 (vea la tabla 21.2), y sugiere un fracaso del modelo basado en la física clásica.

Puede parecer que el modelo es un fracaso para predecir calores específicos molares para gases diatómicos. Sin embargo, se puede afirmar cierto éxito del modelo si se hacen mediciones de calor específico molar sobre un amplio intervalo de temperatura, en lugar de hacerlo en una sola temperatura que dé los valores en la tabla 21.2. La figura 21.6 muestra el calor específico molar del hidrógeno como una función de la temperatura. La característica notable acerca de las tres mesetas en la curva de la gráfica, ¡es que son los valores del calor específico molar predicho por las ecuaciones 21.29, 21.33 y 21.34! Para bajas temperaturas, el gas hidrógeno diatómico se comporta como un gas monoatómico. A medida que la temperatura se eleva a la del ambiente, su calor específico molar crece a un valor para un gas diatómico, consistente con la inclusión de la rotación, pero no de la vibración. Para temperaturas altas, el calor específico molar es consistente con un modelo que incluye todos los tipos de movimiento.

Antes de explicar la razón para este misterioso comportamiento, se harán algunas breves observaciones acerca de los gases poliatómicos. Para moléculas con más de dos átomos están disponibles tres ejes de rotación. Las vibraciones son más complejas que para moléculas diatómicas. Por lo tanto, el número de grados de libertad es incluso más grande. El resultado es un calor específico molar mayor al predicho, en acuerdo cualitativo con el experimento. Los calores específicos molares para los gases poliatómicos en la tabla 21.2 son mayores que aquellos para gases diatómicos. Mientras más grados de libertad tenga disponibles una molécula, más "formas" habrá para almacenar energía, resultando así un mayor calor específico molar.

Una sugerencia de la cuantización de la energía

Hasta el momento el modelo para calores específicos molares se basa en conceptos puramente clásicos. Predice un valor del calor específico para un gas diatómico que, de acuerdo con la figura 21.6, sólo concuerda con las mediciones experimentales hechas a elevadas temperaturas. Para explicar por qué este valor sólo es correcto a temperaturas altas y por qué existen las mesetas en la figura 21.6, se debe ir más allá de la física clásica e introducir algo de física cuántica en el modelo. En el capítulo 18 se analizó la cuantización de la frecuencia en cuerdas vibrando y en columnas de aire; sólo pueden existir ciertas frecuencias de ondas estacionarias. Dicho resultado es natural siempre que las ondas estén sujetas a condiciones de frontera.

La física cuántica (capítulos 40 al 43) demuestra que los átomos y moléculas se pueden describir mediante ondas bajo el modelo de análisis de condiciones de frontera. Así, estas ondas tienen frecuencias cuantizadas. Además, en física cuántica la energía de un sistema es proporcional a la frecuencia de la onda que representa al sistema. Por lo tanto, **las energías de átomos y moléculas están cuantizadas.**

Para una molécula, la física cuántica dice que las energías rotacional y vibratoria están cuantizadas. La figura 21.7 muestra un **diagrama de nivel de energía** para los estados cuánticos rotacional y vibratorio de una molécula diatómica. El estado más bajo permitido se denomina **estado base**. Las líneas negras muestran las energías permitidas para la molécula. Observe que los estados vibratorios permitidos están separados por extensos vacíos energéticos que son estados rotacionales.

A bajas temperaturas, la energía que gana una molécula en colisiones con sus vecinas por lo general no es lo suficientemente grande para elevarla al primer estado excitado de rotación o de vibración. Así, aun cuando de acuerdo con la física clásica se permitan rotación y vibración, en realidad no se presentan a bajas temperaturas. Todas las moléculas están en el estado base para rotación y vibración. La única contribución a la energía promedio de las moléculas es de traslación, y el calor específico es el predicho por la ecuación 21.29.

A medida que la temperatura se eleva, la energía promedio de las moléculas aumenta. En algunas colisiones una molécula puede tener suficiente energía transferida desde otra molécula para excitar el primer estado rotacional. Conforme la temperatura se eleva aún más, más moléculas se pueden excitar a este estado. El resultado es que la rotación comienza a contribuir a la energía interna, y se incrementa el calor específico molar. Cerca de la temperatura ambiente en la figura 21.6 se alcanza la segunda meseta y la rotación contribuye completamente al calor específico molar. Ahora el calor específico molar es igual al valor predicho por la ecuación 21.33.

A temperatura ambiente no hay contribución de la vibración porque las moléculas todavía están en el estado base vibratorio. La temperatura se debe elevar aún más para excitar el primer estado vibratorio, lo cual ocurre en la figura 21.6 entre 1 000 K y 10 000 K. A 10 000 K en el lado derecho de la figura, la vibración contribuye por completo a la energía interna y el calor específico molar tiene el valor predicho por la ecuación 21.34.

Las predicciones de este modelo son sustento del teorema de equipartición de la energía. Además, la inclusión en el modelo de la cuantización de la energía de la física cuántica permite una total comprensión de la figura 21.6.

Examen rápido 21.3 El calor específico molar de un gas diatómico se mide a volumen constante y se encuentra que es de 29.1 J/mol · K. ¿Cuáles son los tipos de energía que contribuyen al calor específico molar? **(a)** Sólo traslación, **(b)** sólo traslación y rotación, **(c)** sólo traslación y vibración, **(d)** traslación, rotación y vibración.

Examen rápido 21.4 El calor específico molar de un gas se mide a volumen constante y se encuentra que es de $11R/2$. Es más probable que el gas sea: ¿**(a)** monoatómico, **(b)** diatómico o **(c)** poliatómico?

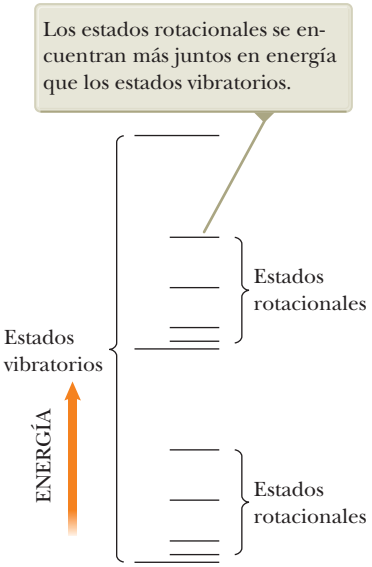


Figura 21.7 Diagrama de niveles de energía para estados vibratorio y rotacional de una molécula diatómica.

21.4 Procesos adiabáticos para un gas ideal

Como se notó en la sección 20.6, un **proceso adiabático** es aquel en el que no se transfiere energía por calor entre un sistema y sus alrededores. Por ejemplo, si un gas se comprime (o expande) rápidamente, muy poca energía se transfiere afuera (o adentro) del sistema por calor, así que el proceso es casi adiabático. Tales procesos se presentan en el ciclo de un motor a gasolina, que se explica con detalle en el capítulo 22. Otro ejemplo de un proceso adiabático es la lenta expansión de un gas que está térmicamente aislado de sus alrededores. Las tres variables en la ley de gas ideal, P, V y T, cambian durante un proceso adiabático.

Imagine el proceso adiabático de un gas que involucra un cambio infinitesimal en volumen dV acompañado de un cambio infinitesimal en temperatura dT. El trabajo realizado sobre el gas es $-P\,dV$. La energía interna de un gas ideal sólo depende de la temperatura, entonces el cambio en la energía interna en un proceso adiabático es el mismo que para un proceso isovolumétrico entre las mismas temperaturas,

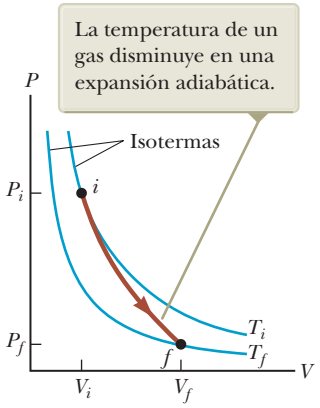


Figura 21.8 Diagrama *PV* para una expansión adiabática de un gas ideal.

$dE_{int} = nC_V\,dT$ (ecuación 21.27). Así, la primera ley de la termodinámica, $\Delta E_{int} = Q + W$, con $Q = 0$, se convierte en la forma infinitesimal

$$dE_{int} = nC_V\,dT = -P\,dV \tag{21.35}$$

La diferencial total de la ecuación de estado de un gas ideal, $PV = nRT$, da

$$P\,dV + V\,dP = nR\,dT \tag{21.36}$$

Al eliminar dT de las ecuaciones 21.35 y 21.36, se encuentra que

$$P\,dV + V\,dP = -\frac{R}{C_V}P\,dV$$

Al sustituir $R = C_P - C_V$ y dividir entre PV resulta

$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = -\left(\frac{C_P - C_V}{C_V}\right)\frac{dV}{V} = (1-\gamma)\frac{dV}{V}$$

$$\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V} = 0$$

Al integrar esta expresión, se tiene

$$\ln P + \gamma \ln V = \text{constante}$$

que es equivalente a

Relación entre *P* y *V* para un proceso adiabático que involucra un gas ideal ▶

$$PV^{\gamma} = \text{constante} \tag{21.37}$$

El diagrama *PV* para una expansión adiabática se muestra en la figura 21.8. Ya que $\gamma > 1$, la curva *PV* es más pronunciada de lo que sería para una expansión isotérmica, para la cual $PV = \text{constante}$. Por la definición de un proceso adiabático, no se transfiere energía por calor hacia dentro o hacia fuera del sistema. Entonces, de la primera ley se ve que ΔE_{int} es negativo (el trabajo es efectuado *por* el gas, así su energía interna disminuye) y en consecuencia ΔT también es negativo. Por lo tanto, la temperatura del gas disminuye ($T_f < T_i$) durante una expansión adiabática.[2] Inversamente, la temperatura aumenta si el gas se comprime adiabáticamente. Al aplicar la ecuación 21.37 a los estados inicial y final, se ve que

$$P_iV_i^{\gamma} = P_fV_f^{\gamma} \tag{21.38}$$

Mediante la ley del gas ideal, la ecuación 21.37 se expresa como

Relación entre *T* y *V* para un proceso adiabático que involucra un gas ideal ▶

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \tag{21.39}$$

Ejemplo 21.3 Un cilindro de motor diesel

Aire a 20.0°C en el cilindro de un motor diesel se comprime desde una presión inicial de 1.00 atm y volumen 800.0 cm^3 hasta un volumen de 60.0 cm^3. Suponga que el aire se comporta como un gas ideal con $\gamma = 1.40$ y la compresión es adiabática. Encuentre la presión y temperatura finales del aire.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que sucede si un gas se comprime en un volumen más pequeño. La explicación anterior y la figura 21.8 indican que tanto la presión como la temperatura aumentan.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema que incluye un proceso adiabático.

Analizar Aplique la ecuación 21.38 para hallar la presión final:

$$P_f = P_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma} = (1.00\text{ atm})\left(\frac{800.0\text{ cm}^3}{60.0\text{ cm}^3}\right)^{1.40}$$

$$= 37.6\text{ atm}$$

[2] En la expansión adiabática libre, analizada en la sección 20.6, la temperatura permanece constante. En este proceso único no se realiza trabajo, porque el gas se expande en un vacío. En general, la temperatura disminuye en una expansión adiabática en la cual se efectuó trabajo.

21.3 continuación

Utilice la ley de gas ideal para encontrar la temperatura final:

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f}$$

$$T_f = \frac{P_f V_f}{P_i V_i} T_i = \frac{(37.6 \text{ atm})(60.0 \text{ cm}^3)}{(1.00 \text{ atm})(800.0 \text{ cm}^3)}(293 \text{ K})$$

$$= 826 \text{ K} = 553°\text{C}$$

Finalizar La temperatura del gas se incrementa en un factor de 826 K/293 K = 2.82. La alta compresión en un motor diesel eleva la temperatura del gas lo suficiente para provocar la combustión del combustible sin el uso de bujías.

21.5 Distribución de rapideces moleculares

Hasta el momento sólo se han considerado valores promedio de las energías de moléculas en un gas, y no se ha abordado la distribución de energías entre las moléculas individuales. El movimiento de las moléculas es extremadamente caótico. Cualquier molécula individual colisiona contra otras a una rapidez enorme, por lo general mil millones de veces por segundo. Cada colisión resulta en un cambio en la rapidez y dirección de movimiento de cada una de las moléculas participantes. La ecuación 21.22 muestra que las magnitudes de rapideces moleculares rms aumentan al crecer la temperatura. En un tiempo dado, ¿cuál es el número relativo de moléculas que tienen alguna característica como la energía dentro de cierto rango?

Esta cuestión se abordará al considerar la **densidad de número** $n_V(E)$. Esta cantidad, llamada *función de distribución*, se define tal que $n_V(E)\,dE$ sea el número de moléculas por unidad de volumen con energía entre E y $E + dE$. (La razón del número de moléculas que tienen la característica deseada al número total de moléculas es la probabilidad de que una molécula particular tenga dicha característica.) En general, a partir de la mecánica estadística se encuentra que la densidad de número es

$$n_V(E) = n_0 e^{-E/k_B T} \tag{21.40}$$

donde n_0 se define tal que $n_0\,dE$ es el número de moléculas por unidad de volumen que tienen energía entre $E = 0$ y $E = dE$. Esta ecuación, conocida como **ley de distribución de Boltzmann**, es importante para describir la mecánica estadística de un gran número de moléculas. Dicha ley afirma que la probabilidad de encontrar moléculas en un estado energético particular varía exponencialmente como el negativo de la energía dividida entre $k_B T$. Todas las moléculas caerán en el nivel energético más bajo si la agitación térmica a una temperatura T no excita las moléculas a niveles energéticos superiores.

Prevención de riesgos ocultos 21.2

La función de distribución La función de distribución $n_V(E)$ se define en términos del número de moléculas con energía en el intervalo E a $E + dE$, y no en términos del número de moléculas con energía E. El número de moléculas es finito y la cantidad de posibles valores de la energía es infinita, entonces el número de moléculas con una energía *exacta* E puede ser cero.

◀ **Ley de distribución de Boltzmann**

Ejemplo 21.4 Excitación térmica de niveles energéticos atómicos

Como se explicó en la sección 21.4, los átomos pueden ocupar sólo ciertos niveles energéticos discretos. Considere un gas a una temperatura de 2 500 K cuyos átomos pueden ocupar sólo dos niveles energéticos separados por 1.50 eV, donde 1 eV (electrón volt) es una unidad de energía igual a 1.60×10^{-19} (figura 21.9). Determine la razón del número de átomos en el nivel energético superior al número en el nivel energético inferior.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En su representación mental de este ejemplo, recuerde que sólo dos posibles estados se permiten para el sistema del átomo. La figura 21.9 le ayuda a visualizar los dos estados en un diagrama de niveles de energía. En este caso, el átomo tiene dos posibles energías, E_1 y E_2, donde $E_1 < E_2$.

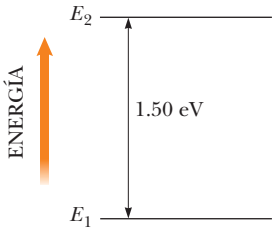


Figura 21.9 (Ejemplo 21.4) Diagrama de niveles de energía para un gas cuyos átomos pueden ocupar dos estados de energía.

continúa

21.4 continuación

Categorizar Este ejemplo se clasifica como uno enfocado en partículas en un sistema cuantizado con dos estados. A este sistema se le aplicará la ley de distribución de Boltzmann.

Analizar Establezca la razón del número de átomos en el nivel energético superior al número en el nivel energético inferior y aplique la ecuación 21.40 para expresar cada número:

$$(1)\quad \frac{n_V(E_2)}{n_V(E_1)} = \frac{n_0 e^{-E_2/k_B T}}{n_0 e^{-E_1/k_B T}} = e^{-(E_2-E_1)/k_B T}$$

Evalúe $k_B T$ en el exponente:

$$k_B T = (1.38 \times 10^{-23}\,\text{J/K})(2\,500\,\text{K})\left(\frac{1\,\text{eV}}{1.60 \times 10^{-19}\,\text{J}}\right) = 0.216\,\text{eV}$$

Sustituya este valor en la ecuación (1):

$$\frac{n_V(E_2)}{n_V(E_1)} = e^{-1.50\,\text{eV}/0.216\,\text{eV}} = e^{-6.96} = 9.52 \times 10^{-4}$$

Finalizar Este resultado indica que en $T = 2\,500$ K, sólo una pequeña fracción de los átomos están en el nivel energético superior. De hecho, por cada átomo en el nivel energético superior hay aproximadamente 1 000 átomos en el nivel inferior. El número de átomos en el nivel superior aumenta incluso a temperaturas más altas, pero la ley de distribución especifica que en equilibrio siempre existen más átomos en el nivel inferior que en el nivel superior.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si los niveles de energía en la figura 21.9 estuvieran más juntos en energía? ¿La fracción de los átomos en el nivel energético superior aumentaría o disminuiría?

Respuesta Si el nivel excitado es menor en energía que en la figura 21.9, sería más fácil que la agitación térmica excitara átomos a este nivel y la fracción de átomos en este nivel energético sería mayor, lo cual puede verse matemáticamente al expresar la ecuación (1) en la forma

$$r_2 = e^{-(E_2-E_1)/k_B T}$$

donde r_2 es la razón de átomos que tienen energía E_2 respecto a los que poseen energía E_1. Al derivar respecto de E_2, se encuentra

$$\frac{dr_2}{dE_2} = \frac{d}{dE_2}\left[e^{-(E_2-E_1)/k_B T}\right] = -\frac{1}{k_B T}\,e^{-(E_2-E_1)/k_B T} < 0$$

La derivada tiene un valor negativo, así r_2 aumenta a medida que E_2 disminuye.



© INTERFOTO/Alamy

Ludwig Boltzmann
Físico austriaco (1844-1906)
Boltzmann hizo muchas aportaciones importantes al desarrollo de la teoría cinética de los gases, electromagnetismo y termodinámica. Su obra pionera en el campo de la teoría cinética condujo a la rama de la física conocida como mecánica estadística.

Ahora que se explicó la distribución de energías entre moléculas en un gas, piense sobre la distribución de magnitudes de rapideces moleculares. En 1860, James Clerk Maxwell (1831-1879) obtuvo una expresión que describe la distribución de magnitudes de velocidad moleculares en una forma muy definida. Su obra y desarrollos posteriores de otros científicos generaron una gran controversia, porque en esa época no se podía lograr experimentalmente la detección directa de moléculas. Sin embargo, alrededor de 60 años después se diseñaron experimentos que confirmaron las predicciones de Maxwell.

Considere un recipiente de gas cuyas moléculas tienen alguna distribución de magnitudes de rapidez. Suponga que se desea determinar cuántas moléculas de gas tienen una rapidez en el intervalo de, por ejemplo, 400 a 401 m/s. Intuitivamente, se espera que la distribución de rapidez dependa de la temperatura. Además, también es de esperarse que la distribución tenga un máximo en la vecindad de v_{rms}. Es decir, se espera que pocas moléculas tengan rapideces mucho menores o mucho mayores que v_{rms}, porque dichas magnitudes de velocidad extremas sólo resultan de una improbable cadena de colisiones.

La distribución de rapidez observada en las moléculas de gas en equilibrio térmico se muestra en la figura 21.10. La cantidad N_v, llamada **función de distribución de rapidez de Maxwell-Boltzmann**, se define como sigue. Si N es el número total de moléculas, el número de moléculas con magnitudes de velocidad entre v y $v + dv$ es $dN = N_v\,dv$. Este número también es igual al área del rectángulo coloreado en la figura 21.10. Además, la fracción de moléculas con magnitudes de velocidad entre v y $v + dv$ es $(N_v\,dv)/N$. Esta fracción también es igual a la probabilidad de que una molécula tenga una rapidez en el rango de v a $v + dv$.

La expresión fundamental que describe la distribución de magnitudes de rapideces de N moléculas de gas es

$$N_v = 4\pi N\left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2/2k_B T} \tag{21.41}$$

donde m_0 es la masa de una molécula de gas, k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta.[3] Observe la presencia del factor de Boltzmann $e^{-E/kBT}$ con $E = m_0 v^2/2$.

Como se indica en la figura 21.10, la rapidez promedio es un poco menor que la rapidez rms. En la *rapidez más probable* v_{mp} la curva de distribución tiene un máximo. Con la ecuación 21.41 se encuentra que

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_0}} = 1.73\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} \tag{21.42}$$

$$v_{avg} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_0}} = 1.60\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} \tag{21.43}$$

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_0}} = 1.41\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} \tag{21.44}$$

La ecuación 21.42 apareció anteriormente como ecuación 21.22. Los detalles de las deducciones de estas ecuaciones a partir de la ecuación 21.41 se dejan para los problemas al final del capítulo (consulte los problemas 42 y 69). De estas ecuaciones se obtiene que

$$V_{rms} > v_{prom} > v_{mp}$$

La figura 21.11 representa curvas de distribución de rapidez para nitrógeno, N_2. Las curvas se obtuvieron al emplear la ecuación 21.41 para evaluar la función de distribución en varias magnitudes de rapideces y en dos temperaturas. Observe que el máximo en cada curva se desplaza a la derecha a medida que T aumenta, esto indica que la rapidez promedio se incrementa con el aumento de temperatura, como se esperaba. La rapidez posible más baja es cero y el límite superior clásico de la rapidez es infinito, así que las curvas son asimétricas. (En el capítulo 39 se probará que el límite superior real es la rapidez de la luz.)

La ecuación 21.41 muestra que la distribución de magnitudes de velocidades moleculares en un gas depende tanto de la masa como de la temperatura. A una temperatura dada, la fracción de moléculas con magnitudes de velocidad que superan un valor fijo aumenta a medida que la masa disminuye. Así, las moléculas más

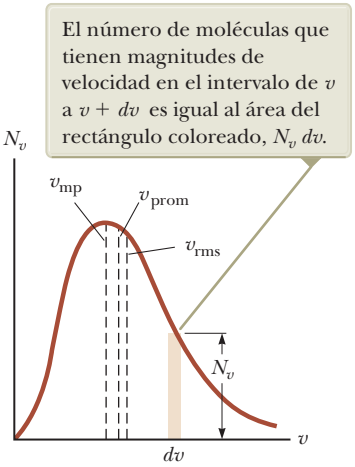


Figura 21.10 Distribución de rapidez de moléculas de gas a cierta temperatura. La función N_v tiende a cero a medida que v tiende a infinito.

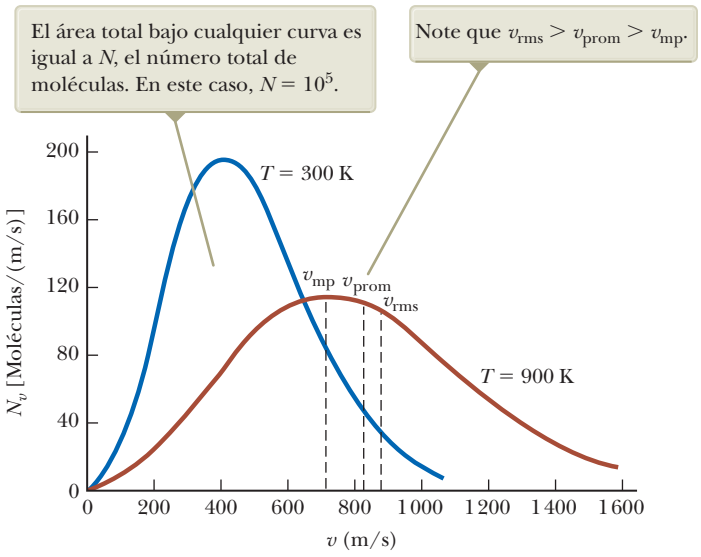


Figura 21.11 Función de distribución de rapidez para 10^5 moléculas de nitrógeno a 300 K y 900 K.

[3] Para la deducción de esta expresión, vea un texto avanzado de termodinámica.

ligeras, como H_2 y He, escapan más fácilmente hacia el espacio desde la atmósfera de la Tierra que las moléculas más pesadas, como N_2 y O_2. (Vea el análisis de rapidez de escape en el capítulo 13. Las moléculas de gas escapan incluso más fácilmente de la superficie de la Luna que de la Tierra, porque la rapidez de escape en la Luna es menor que en la Tierra.)

Las curvas de distribución de rapidez para moléculas en un líquido son similares a las que se muestran en la figura 21.11. El fenómeno de la evaporación de un líquido se puede entender a partir de esta distribución en magnitudes de rapidez, dado que algunas moléculas en el líquido son más energéticas que otras. Algunas de las moléculas más rápidas en el líquido penetran la superficie e incluso dejan el líquido a temperaturas muy por abajo del punto de ebullición. Las moléculas que escapan del líquido por evaporación son las que tienen suficiente energía para superar las fuerzas atractivas de las moléculas en la fase líquida. En consecuencia, las moléculas que quedan en la fase líquida tienen una energía cinética promedio más baja; como resultado, la temperatura del líquido disminuye. Así, la evaporación es un proceso de enfriamiento. Por ejemplo, puede colocar una tela mojada en alcohol en la cabeza de un paciente con fiebre para enfriarlo y reconfortarlo.

Ejemplo 21.5 Un sistema de nueve partículas

Nueve partículas tienen magnitudes de velocidad de 5.00, 8.00, 12.0, 12.0, 14.0, 14.0, 17.0 y 20.0 m/s.

(A) Encuentre la rapidez promedio de las partículas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un pequeño número de partículas móviles en direcciones aleatorias con las pocas magnitudes de velocidad enlistadas. Esta situación no es representativa del gran número de moléculas en un gas, así que no se espera que los resultados sean consistentes con los obtenidos mediante la mecánica estadística.

Categorizar Se trata de un número pequeño de partículas, así que se puede calcular directamente la rapidez promedio.

Analizar Encuentre la rapidez promedio de las partículas al dividir la suma de las magnitudes de rapidez entre el número total de partículas:

$$v_{\text{prom}} = \frac{(5.00 + 8.00 + 12.0 + 12.0 + 12.0 + 14.0 + 14.0 + 17.0 + 20.0)\ \text{m/s}}{9}$$

$$= \boxed{12.7\ \text{m/s}}$$

(B) ¿Cuál es la rapidez rms de las partículas?

SOLUCIÓN

Encuentre la rapidez cuadrática media de las partículas al dividir la suma de las magnitudes de velocidad al cuadrado entre el número total de partículas:

$$\overline{v^2} = \frac{(5.00^2 + 8.00^2 + 12.0^2 + 12.0^2 + 12.0^2 + 14.0^2 + 14.0^2 + 17.0^2 + 20.0^2)\ \text{m}^2/\text{s}^2}{9}$$

$$= 178\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

Obtenga la rapidez rms de las partículas al sacar la raíz cuadrada:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{178\ \text{m}^2/\text{s}^2} = \boxed{13.3\ \text{m/s}}$$

(C) ¿Cuál es la rapidez más probable de las partículas?

SOLUCIÓN

Tres de las partículas tienen una rapidez de 12.0 m/s, dos tienen una rapidez de 14.0 m/s y las cuatro restantes tienen diferentes magnitudes de velocidad. Así, la rapidez más probable v_{mp} es 12.0 m/s.

Finalizar Compare este ejemplo, que tiene un número de partículas pequeño y del que se conocen las magnitudes de velocidad de las partículas individuales, con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 21.6 Rapideces moleculares en el gas hidrógeno

Una muestra de 0.500 moles de gas hidrógeno está a 300 K

(A) Encuentre la rapidez promedio, la rapidez rms y la rapidez más probable de las moléculas de hidrógeno.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un gran número de partículas en un gas real, todas moviéndose en direcciones aleatorias con magnitudes de rapidez diferentes.

Categorizar No es posible calcular los promedios como se hizo en el ejemplo 21.5, porque las magnitudes de velocidad individuales de las partículas son desconocidas. Sin embargo, se trata con un número muy grande de partículas, así que puede aplicarse la función de distribución de rapidez de Maxwell-Boltzmann.

Analizar Aplique la ecuación 21.43 para encontrar la rapidez promedio:

$$v_{\text{prom}} = 1.60\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} = 1.60\sqrt{\frac{(1.38\times10^{-23}\,\text{J/K})(300\,\text{K})}{2(1.67\times10^{-27}\,\text{kg})}}$$

$$= \boxed{1.78\times10^{3}\,\text{m/s}}$$

Use la ecuación 21.42 para obtener la rapidez rms:

$$v_{\text{rms}} = 1.73\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} = 1.73\sqrt{\frac{(1.38\times10^{-23}\,\text{J/K})(300\,\text{K})}{2(1.67\times10^{-27}\,\text{kg})}}$$

$$= \boxed{1.93\times10^{3}\,\text{m/s}}$$

Utilice la ecuación 21.44 para determinar la rapidez más probable:

$$v_{\text{mp}} = 1.41\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} = 1.41\sqrt{\frac{(1.38\times10^{-23}\,\text{J/K})(300\,\text{K})}{2(1.67\times10^{-27}\,\text{kg})}}$$

$$= \boxed{1.57\times10^{3}\,\text{m/s}}$$

(B) Encuentre el número de moléculas con magnitudes de velocidad entre 400 m/s y 401 m/s.

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 21.41 para evaluar el número de moléculas en un estrecho intervalo de magnitudes de velocidad, entre v y $v + dv$:

$$(1)\quad N_v\,dv = 4\pi N\left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2/2k_B T}\,dv$$

Evalúe la constante enfrente de v^2:

$$4\pi N\left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} = 4\pi n N_A\left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}$$

$$= 4\pi(0.500\,\text{mol})(6.02\times10^{23}\,\text{mol}^{-1})\left[\frac{2(1.67\times10^{-27}\,\text{kg})}{2\pi(1.38\times10^{-23}\,\text{J/K})(300\,\text{K})}\right]^{3/2}$$

$$= 1.74\times10^{14}\,\text{s}^3/\text{m}^3$$

Determine el exponente de e que aparece en la ecuación (1):

$$-\frac{m_0 v^2}{2k_B T} = -\frac{2(1.67\times10^{-27}\,\text{kg})(400\,\text{m/s})^2}{2(1.38\times10^{-23}\,\text{J/K})(300\,\text{K})} = -0.064\,5$$

Evalúe $N_v\,dv$ empleando estos valores en la ecuación (1):

$$N_v\,dv = (1.74\times10^{14}\,\text{s}^3/\text{m}^3)(400\,\text{m/s})^2 e^{-0.064\,5}(1\,\text{m/s})$$

$$= \boxed{2.61\times10^{19}\,\text{moléculas}}$$

Finalizar En esta evaluación, se podría calcular el resultado sin integración porque $dv = 1$ m/s es mucho más pequeño que $v = 400$ m/s. De haber buscado el número de partículas por decir, entre 400 m/s y 500 m/s se habría necesitado integrar la ecuación (1) entre estos límites de rapidez.

Resumen

Conceptos y principios

La presión de N moléculas de un gas ideal contenido en un volumen V es

$$P = \frac{2}{3}\left(\frac{N}{V}\right)\left(\tfrac{1}{2}m_0\overline{v^2}\right) \qquad (21.15)$$

La energía cinética traslacional promedio por molécula de un gas, $\frac{1}{2}m_0\overline{v^2}$, se relaciona con la temperatura T del gas a través de la expresión

$$\tfrac{1}{2}m_0\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}k_B T \qquad (21.19)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann. Cada grado de libertad traslacional (x, y o z) tiene $\frac{1}{2}k_B T$ de energía asociada con él.

La energía interna de N moléculas (o n moles) de un gas ideal monoatómico es

$$E_{int} = \tfrac{3}{2}Nk_B T = \tfrac{3}{2}nRT \qquad (21.25)$$

El cambio en energía interna para n moles de cualquier gas ideal que experimenta un cambio en temperatura ΔT es

$$\Delta E_{int} = nC_V \Delta T \qquad (21.27)$$

donde C_V es el **calor específico molar a volumen constante.**

El calor específico molar de un gas monoatómico ideal a volumen constante es $C_V = \frac{3}{2}R$; el calor específico molar a presión constante es $C_P = \frac{5}{2}R$. La razón de calores específicos está dada por $\gamma = C_P/C_V = \frac{5}{3}$

Si un gas ideal experimenta una expansión o una compresión adiabáticas, la primera ley de la termodinámica, junto con la ecuación de estado, muestra que

$$PV^\gamma \text{ constante} \qquad (21.37)$$

La **ley de distribución de Boltzmann** describe la distribución de partículas entre estados de energía disponibles. El número relativo de partículas que tienen energía entre E y $E + dE$ es $n_V(E)\,dE$, donde

$$n_V(E) = n_0 e^{-E/k_B T} \qquad (21.40)$$

La **función de distribución de rapidez de Maxwell-Boltzmann** describe la distribución de magnitudes de rapidez de las moléculas en un gas:

$$N_v = 4\pi N\left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2/2k_B T} \qquad (21.41)$$

La ecuación 21.41 permite calcular la **rapidez media cuadrática**, la **rapidez promedio** y la **rapidez más probable** de las moléculas del gas:

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_0}} = 1.73\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} \qquad (21.42)$$

$$v_{prom} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_0}} = 1.60\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} \qquad (21.43)$$

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_0}} = 1.41\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} \qquad (21.44)$$

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. El cilindro A contiene gas oxígeno (O_2), y el cilindro B contiene gas nitrógeno (N_2). Si las moléculas en los dos cilindros tienen las mismas magnitudes de velocidad rms, ¿cuál de los siguientes enunciados es *falso*? (a) Los dos gases tienen diferente temperatura. (b) La temperatura del cilindro B es menor que la temperatura del cilindro A. (c) La temperatura del cilindro B es mayor que la temperatura del cilindro A. (d) La energía cinética promedio de las moléculas de nitrógeno es menor que la energía cinética promedio de las moléculas de oxígeno.

2. Un gas ideal se mantiene a presión constante. Si la temperatura del gas se incrementa de 200 K a 600 K, ¿qué ocurre con la rapidez rms de las moléculas? (a) Aumenta por un factor de 3. (b) Permanece inalterada. (c) Es un tercio de la rapidez original. (d) Es $\sqrt{3}$ veces la rapidez original. (e) Se incrementa por un factor de 6.

3. Dos muestras del mismo gas ideal tienen la misma presión y densidad. La muestra B tiene el doble de volumen que la muestra A. ¿Cuál es la rapidez rms de las moléculas en la muestra B? (a) El doble que en la muestra A, (b) igual que en la muestra A, (c) la mitad que en la muestra A, (d) imposible de determinar.

4. Un globo de látex lleno con helio inicialmente a temperatura ambiente se coloca en un congelador. El látex permanece flexible. **(i)** ¿El volumen del globo (a) aumenta, (b) disminuye o (c) permanece igual? **(ii)** ¿La presión del

gas helio (a) aumenta significativamente, (b) decrece significativamente o (c) permanece aproximadamente igual?

5. Un gas está a 200 K. Si se quiere duplicar la rapidez rms de las moléculas del gas, ¿a cuánto se debe aumentar su temperatura? (a) 283 K, (b) 400 K, (c) 566 K, (d) 800 K, (e) 1 130 K.
6. Clasifique de mayor a menor y anote cualquier caso de igualdad. (a) La rapidez promedio de las moléculas en una muestra particular de gas ideal, (b) la rapidez más probable, (c) la rapidez media cuadrática, (d) el vector velocidad promedio de las moléculas.
7. Una muestra de gas tiene un termómetro inmerso en ella y está colocada sobre una placa caliente. A un estudiante se le pide explique paso a paso la observación de que la temperatura del gas aumenta. Su respuesta incluye los siguientes pasos. (a) Aumenta la rapidez de las moléculas. (b) Entonces las moléculas colisionan entre sí con más frecuencia. (c) La fricción interna introduce colisiones inelásticas. (d) En las colisiones se produce calor. (e) Las moléculas del gas transfieren más energía al termómetro cuando lo golpean, así se observa una elevación en la temperatura. (f) El mismo proceso puede ocurrir sin el uso de una placa caliente si rápidamente se comprime un pistón en un cilindro aislado que contiene el gas. **(i)** ¿Cuáles de los incisos del (a) al (f) de esta explicación son enunciados correctos necesarios para una clara y completa explicación? **(ii)** ¿Cuáles enunciados son correctos pero innecesarios para explicar la lectura de mayor temperatura? **(iii)** ¿Cuáles son enunciados incorrectos?
8. Un gas ideal está contenido en un recipiente a 300 K. La temperatura del gas se incrementa a 900 K. **(i)** ¿Por qué factor cambia la energía cinética promedio de las moléculas, (a) un factor de 9, (b) un factor de 3, (c) un factor de $\sqrt{3}$, (d) un factor de 1 o (e) un factor de ? Empleando las mismas opciones como en el inciso (i), determine en qué factor cambian las siguientes cantidades: **(ii)** la rapidez molecular rms de las partículas, **(iii)** el cambio de cantidad de movimiento promedio que una molécula experimenta en una colisión con una pared particular, **(iv)** la rapidez de colisiones de las moléculas contra las paredes y **(v)** la presión del gas.
9. ¿Cuáles de las siguientes suposiciones *no* se hacen en la teoría cinética de gases? (a) El número de moléculas es muy grande. (b) Las moléculas obedecen las leyes de Newton. (c) Las fuerzas entre moléculas son de largo alcance. (d) El gas es una sustancia pura. (e) La separación promedio entre moléculas es muy grande comparada con sus dimensiones.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. Si el aire caliente sube, ¿por qué en general es más frío a medida que escala una montaña? *Nota*: el aire tiene una conductividad térmica baja.
2. ¿Por qué un gas diatómico tiene un mayor contenido energético por mol que un gas monoatómico a la misma temperatura?
3. Cuando se frota alcohol en el cuerpo, baja la temperatura de su piel. Explique este efecto.
4. ¿Qué sucede con un globo lleno con helio liberado en el aire? ¿Se expande o se contrae? ¿Deja de elevarse en alguna altura?
5. ¿Cuál es más denso, el aire seco o el aire saturado con vapor de agua? Explique.
6. Un recipiente está lleno con gas helio y otro con gas argón. Ambos recipientes están a la misma temperatura. ¿Cuáles moléculas tienen la mayor rapidez rms? Explique.
7. La ley de Dalton para las presiones parciales establece que la presión total de una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones que cada gas en la mezcla ejercería si estuviera solo en el recipiente. Proporcione un argumento convincente para esta ley de acuerdo con la teoría cinética de los gases.

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 21.1 Modelo molecular de un gas ideal

El problema 30 del capítulo 19 puede asignarse a esta sección.

1. (a) ¿Cuántos átomos de gas helio llenan un globo esférico de 30.0 cm de diámetro a 20.0°C y 1.00 atm? (b) ¿Cuál es la energía cinética promedio de los átomos de helio? (c) ¿Cuál es la rapidez rms de los átomos de helio?
2. Un cilindro contiene una mezcla de gases helio y argón en equilibrio a 150°C. (a) ¿Cuál es la energía cinética promedio para cada tipo de molécula de gas? (b) ¿Cuál es la rapidez rms de cada tipo de molécula?
3. En un intervalo de 30.0 s, 500 granizos golpean una ventana de vidrio de 0.600 m^2 de área a un ángulo de 45° con la superficie de la ventana. Cada granizo tiene una masa de 5.00 g y una rapidez de 8.00 m/s. Si supone que las colisiones son elásticas, encuentre (a) la fuerza promedio y (b) la presión promedio sobre la ventana durante este intervalo.
4. En un sistema de ultraalto vacío (con presiones típicas menores que 10^{-7} pascal), la presión medida es 1.00 ×

10^{-10} torr (donde 1 torr = 133 Pa). Si supone que la temperatura es de 300 K, encuentre el número de moléculas en un volumen de 1.00 m^3.

5. Un globo esférico de 4 000 cm^3 de volumen contiene helio a una presión de 1.20×10^5 Pa. ¿Cuántas moles de helio hay en el globo si la energía cinética promedio de cada átomo de helio es de 3.60×10^{-22} J?

6. Un globo esférico de volumen V contiene helio a una presión P. ¿Cuántos moles de helio hay en el globo si la energía cinética promedio de los átomos de helio es $\overline{K}$?

7. Una muestra de 2.00 moles de gas oxígeno se confina en un recipiente de 5.00 L a una presión de 8.00 atm. Encuentre la energía cinética traslacional promedio de las moléculas de oxígeno bajo estas condiciones.

8. Oxígeno modelado como un gas ideal está en un recipiente y tiene una temperatura de 77.0°C. ¿Cuál es la magnitud promedio rms de la cantidad de movimiento de las moléculas de gas en el recipiente?

9. Calcule la masa de un átomo de (a) helio, (b) hierro y (c) plomo. Proporcione sus respuestas en kilogramos. Las masas atómicas de estos átomos son 4.00 u, 55.9 u y 207 u, respectivamente.

10. La rapidez rms de una molécula de oxígeno (O_2) en un recipiente de gas oxígeno es 625 m/s. ¿Cuál es la temperatura del gas?

11. Un recipiente de 5.00 L contiene gas nitrógeno a 27°C y 3.00 atm. Encuentre (a) la energía cinética traslacional total de las moléculas de gas y (b) la energía cinética promedio por molécula.

12. Un recipiente de 7.00 L contiene 3.50 moles de gas a una presión de 1.60×10^6 Pa. Encuentre (a) la temperatura del gas y (b) la energía cinética promedio de las moléculas de gas en el recipiente. (c) ¿Qué información adicional se necesitaría si se pidiera encontrar la rapidez promedio de las moléculas de gas?

13. En un periodo de 1.00 s, 5.00×10^{23} moléculas de nitrógeno golpean una pared con un área de 8.00 cm^2. Suponga que las moléculas se mueven con una rapidez de 300 m/s y golpean la pared frontal en colisiones elásticas. ¿Cuál es la presión ejercida sobre la pared? *Nota*: la masa de una molécula de N_2 es 4.65×10^{-26} kg.

Sección 21.2 Calor específico molar de un gas ideal

Nota: Pueden emplearse los datos de la tabla 21.2 para gases particulares. Aquí se define un "gas ideal monoatómico" como un gas con los calores específicos molares $C_V = \frac{3}{2}R$ y $C_P = \frac{5}{2}R$, y un "gas ideal diatómico" como el gas con $C_V = \frac{5}{2}R$ y $C_P = \frac{7}{2}R$.

14. En un proceso a volumen constante se transfieren 209 J de energía por calor a 1.00 mol de un gas monoatómico ideal inicialmente a 300 K. Encuentre (a) el trabajo efectuado sobre el gas, (b) el aumento en energía interna del gas y (c) su temperatura final.

15. Una muestra de gas ideal diatómico tiene presión P y volumen V. Cuando el gas se calienta, su presión se triplica y su volumen se duplica. Este proceso de calentamiento incluye dos etapas, la primera a presión constante y la segunda a volumen constante. Determine la cantidad de energía transferida al gas por calor.

16. **Problema de repaso**. Una casa tiene paredes bien aisladas. Contiene un volumen de 100 m^3 de aire a 300 K. (a) Calcule la energía requerida para aumentar la temperatura de este gas ideal diatómico en 1.00°C. (b) **¿Qué pasaría si?** Si toda esta energía se pudiera emplear para levantar un objeto de masa m a una altura de 2.00 m, ¿cuál es el valor de m?

17. Una muestra de 1.00 mol de gas hidrógeno se calienta a presión constante de 300 K a 420 K. Calcule (a) la energía transferida al gas por calor, (b) el aumento en su energía interna y (c) el trabajo realizado sobre el gas.

18. Un cilindro vertical con un pesado pistón contiene aire a 300 K. La presión inicial es 2.00×10^5 Pa y el volumen inicial es 0.350 m^3. Considere que la masa molar del aire es de 28.9 g/mol y suponga que $C_V = \frac{5}{2}R$. (a) Encuentre el calor específico del aire a volumen constante en unidades de J/kg · °C. (b) Calcule la masa del aire en el cilindro. (c) Suponga que el pistón se mantiene fijo. Determine la entrada de energía requerida para elevar la temperatura del aire a 700 K. (d) **¿Qué pasaría si?** Suponga de nuevo las condiciones del estado inicial y que el pesado pistón tiene libertad de movimiento. Encuentre la entrada de energía necesaria para elevar la temperatura a 700 K.

19. Calcule el cambio en energía interna de 3.00 moles de gas helio cuando su temperatura se incrementa en 2.00 K.

20. Una botella aislada de 1 L está llena con té a 90°C. Vierte en una taza y de inmediato cierra la botella. Haga una estimación de un orden de magnitud del cambio en temperatura del té restante en la botella que resulta de la admisión de aire a temperatura ambiente. Establezca las cantidades que toma como datos y los valores que mide o estima para ellos.

21. **Problema de repaso.** Este problema es continuación del problema 39 del capítulo 19. Un globo con aire caliente consiste de una envolvente de volumen constante 400 m^3. Sin incluir el aire interior, el globo y la carga tienen una masa de 200 kg. El aire exterior y originalmente el interior es un gas ideal diatómico a 10.0°C y 101 kPa, con densidad de 1.25 kg/m^3. Un quemador de propano en el centro de la envolvente esférica inyecta energía en el aire interior. El aire interno está a presión constante. El aire caliente, a la temperatura justa para elevar el globo, comienza a llenar la envolvente en su parte superior cerrada, lo suficientemente rápido para que una energía despreciable fluya por calor al aire frío abajo o hacia fuera a través de las paredes del globo. El aire a 10.0°C sale por una abertura en el fondo de la envolvente hasta que todo el globo esté lleno con aire caliente a temperatura uniforme. Entonces el quemador se apaga y el globo se levanta del suelo.

(a) Evalúe la cantidad de energía que el quemador debe transferir al aire en el globo. (b) El "valor de calor" del propano, la energía interna liberada por la quema de cada kilogramo, es 50.3 MJ/kg. ¿Qué masa de propano debe quemarse?

Sección 21.3 Equipartición de la energía

22. Cierta molécula tiene f grados de libertad. Demuestre que un gas ideal que consiste de tales moléculas tiene las siguientes propiedades: (a) su energía interna total es $fnRT/2$, (b) su calor específico molar a volumen constante es $fR/2$, (c) su calor específico molar a presión constante es $(f + 2)R/2$ y (d) su razón de calor específico es $\gamma = C_P/C_V = (f + 2)/f$.

23. En un modelo imperfecto (figura P21.23) de una molécula diatómica de cloro (Cl_2) en rotación, los dos átomos de Cl están separados 2.00×10^{-10} m y giran en torno a su centro de masa con rapidez angular $\omega = 2.00 \times 10^{12}$ rad/s. ¿Cuál es la energía cinética rotacional de una molécula de Cl_2, la cual tiene una masa molar de 70.0 g/mol?

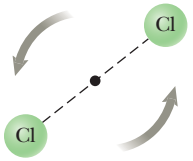


Figura P21.23

24. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un equipo de investigadores descubre un nuevo gas, el cual tiene un valor de $\gamma = C_P/C_V = 1.75$.

25. La relación entre la capacidad calorífica de una muestra y el calor específico del material de la muestra se discutió en la sección 20.2. Considere una muestra que contiene 2.00 moles de un gas ideal diatómico. Suponga que las moléculas rotan pero no vibran, entonces encuentre (a) la capacidad calorífica total de la muestra a volumen constante y (b) la capacidad calorífica a presión constante. (c) **¿Qué pasaría si?** Repita los incisos (a) y (b), suponga que las moléculas rotan y vibran.

Sección 21.4 Procesos adiabáticos para un gas ideal

26. Una muestra de 2.00 moles de gas ideal diatómico se expande lenta y adiabáticamente desde una presión de 5.00 atm y un volumen de 12.0 L hasta un volumen final de 30.0 L. (a) ¿Cuál es la presión final del gas? (b) ¿Cuáles son las temperaturas inicial y final? Encuentre (c) Q, (d) ΔE_{int} y (e) W para el gas durante este proceso.

27. Durante la carrera de compresión de cierto motor de gasolina, la presión aumenta de 1.00 atm a 20.0 atm. Si el proceso es adiabático y la mezcla combustible-aire se comporta como un gas ideal diatómico, (a) ¿en qué factor cambia el volumen y (b) en qué factor cambia la temperatura? Suponga que la compresión comienza con 0.0160 moles de gas a 27.0°C, encuentre los valores de (c) Q, (d) ΔE_{int} y (e) W que caracterizan el proceso.

28. ¿Cuánto trabajo se requiere para comprimir 5.00 moles de aire a 20.0°C y 1.00 atm a un décimo del volumen original (a) mediante un proceso isotérmico? (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuánto trabajo se necesita para producir la misma compresión en un proceso adiabático? (c) ¿Cuál es la presión final en el inciso (a)? (d) ¿Cuál es la presión final en el inciso (b)?

29. El aire en una nube de tormenta se expande a medida que se eleva. Si su temperatura inicial es 300 K y no se pierde energía por conducción térmica en la expansión, ¿cuál es su temperatura cuando el volumen inicial se duplica?

30. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Se ha diseñado un nuevo motor diesel que incrementa la economía de combustible respecto a modelos previos. Los automóviles con este nuevo diseño están increíblemente solicitados. Dos características del diseño son responsables de este aumentado ahorro de combustible: (1) el motor está totalmente fabricado de aluminio para reducir el peso del automóvil y (2) el escape del motor se emplea para precalentar el aire a 50°C antes de que entre al cilindro para aumentar la temperatura final del gas comprimido. El motor tiene una *razón de compresión*, es decir, el cociente del volumen inicial del aire entre su volumen final después de la compresión, de 14.5. El proceso de compresión es adiabático y el aire se comporta como un gas ideal diatómico con $\gamma = 1.40$.

31. Durante la carrera de trabajo en un motor de automóvil de cuatro tiempos, el pistón es forzado hacia abajo a medida que la mezcla de productos de combustión y aire experimenta una expansión adiabática. Suponga que (1) el motor gira a 2 500 ciclos/min; (2) la presión manométrica justo antes de la expansión es 20.0 atm; (3) los volúmenes de la mezcla justo antes y después de la expansión son 50.0 y 400 cm^3, respectivamente (figura P21.31); (4) el intervalo de tiempo para la expansión es un cuarto del ciclo total y (5) la mezcla se comporta como un gas ideal con razón de calor específico de 1.40. Encuentre la potencia promedio generada durante la carrera de trabajo.

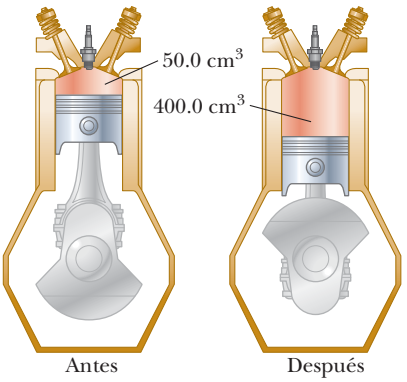


Figura P21.31

32. Considere aire (un gas ideal diatómico) a 27.0°C y presión atmosférica que entra a una bomba de bicicleta (vea la foto al inicio de este capítulo en la página 626) que tiene un cilindro con diámetro interno de 2.50 cm y longitud 50.0 cm. La carrera hacia abajo comprime adiabáticamente el aire que alcanza una presión manométrica de 8.00×10^5 Pa antes de entrar a la llanta. Se desea investigar el incremento de temperatura de la bomba. (a) ¿Cuál es el volumen inicial del aire en la bomba? (b) ¿Cuál es el número de moles de aire en la bomba? (c) ¿Cuál es la presión absoluta del aire comprimido? (d) ¿Cuál es el volumen del aire comprimido? (e) ¿Cuál es la temperatura del aire comprimido? (f) ¿Cuál es el aumento en energía interna del gas durante la compresión? **¿Qué pasaría**

si? La bomba está hecha de acero con espesor de 2.00 mm. Suponga una longitud del cilindro de 4.00 cm en equilibrio térmico con el aire. (g) ¿Cuál es el volumen de acero en esta longitud de 4.00 cm? (h) ¿Cuál es la masa del acero en esta longitud de 4.00 cm? (i) Suponga que la bomba se comprime otra vez. Después de la expansión adiabática, la conducción resulta en el incremento de energía en el inciso (f) compartido entre el gas y la longitud de acero de 4.00 cm. ¿Cuál será el aumento en temperatura del acero después de una compresión?

33. Una muestra de 4.00 L de un gas ideal diatómico con razón de calor específico de 1.40, confinado a un cilindro, se lleva a través de un ciclo cerrado. El gas está inicialmente a 1.00 atm y 300 K. Primero su presión se triplica bajo volumen constante. Luego se expande adiabáticamente a su presión original. Por último, el gas se comprime isobáricamente a su volumen original. (a) Dibuje un diagrama *PV* de este ciclo. (b) Determine el volumen del gas al final de la expansión adiabática. (c) Encuentre la temperatura del gas al inicio de la expansión adiabática. (d) Obtenga la temperatura al final del ciclo. (e) ¿Cuál fue el trabajo neto realizado sobre el gas para este ciclo?

34. Un gas ideal con razón de calor específico γ, confinado a un cilindro, se lleva a través de un ciclo cerrado. Inicialmente el gas está en P_i, V_i y T_i. Primero su presión se triplica a volumen constante. Después se expande adiabáticamente a su presión original y finalmente se comprime isobáricamente a su volumen original. (a) Dibuje un diagrama *PV* de este ciclo. (b) Determine el volumen al final de la expansión adiabática. Encuentre (c) la temperatura del gas al inicio de la expansión adiabática y (d) la temperatura al final del ciclo. (e) ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el gas para este ciclo?

Sección 21.5 Distribución de rapideces moleculares

35. Gas helio está en equilibrio térmico con helio líquido a 4.20 K. No obstante que ello está sobre el punto de condensación, modele el gas como ideal y determine la rapidez más probable de un átomo de helio (masa = 6.64×10^{-27} kg) en él.

36. Quince partículas idénticas tienen diferentes magnitudes de velocidad: una tiene una rapidez de 2.00 m/s, dos tienen una rapidez de 3.00 m/s, tres tienen una rapidez de 5.00 m/s, cuatro tienen una rapidez de 7.00 m/s, tres tienen una rapidez de 9.00 m/s y dos tienen una rapidez de 12.0 m/s. Encuentre (a) la rapidez promedio, (b) la rapidez rms y (c) la rapidez más probable de estas partículas.

37. Un metro cúbico de hidrógeno atómico a 0°C y presión atmosférica contiene aproximadamente 2.70×10^{25} átomos. El primer estado excitado del átomo de hidrógeno tiene una energía de 10.2 eV sobre el nivel energético más bajo, llamado estado base. Use el factor de Boltzmann para obtener el número de átomos en el primer estado excitado (a) a 0°C y (b) a (1.00×10^4)°C.

38. En una mezcla, dos gases se difunden a través de un filtro en cantidades proporcionales a su respectiva rapidez rms. (a) Encuentre la razón de magnitudes de rapidez para los dos isótopos de cloro, ^{35}Cl y ^{37}Cl, mientras se difunden a través del aire. (b) ¿Cuál isótopo se mueve más rápido?

39. **Problema de repaso.** ¿A qué temperatura la rapidez promedio de los átomos de helio sería igual a (a) la rapidez de escape de la Tierra, 1.12×10^4 m/s, y (b) la rapidez de escape de la Luna, 2.37×10^3 m/s? *Nota*: la masa de un átomo de helio es 6.64×10^{-27} kg.

40. Considere un recipiente con moléculas de gas nitrógeno a 900 K. Calcule (a) la rapidez más probable, (b) la rapidez promedio y (c) la rapidez rms para las moléculas. (d) Establezca cómo se comparan sus resultados con los valores que se muestran en la figura 21.11.

41. Suponga que la atmósfera de la Tierra tiene una temperatura uniforme de 20°C y composición uniforme, con una masa molar efectiva de 28.9 g/mol. (a) Demuestre que la densidad en el número de las moléculas depende de la altura y sobre el nivel del mar de acuerdo con

$$n_V(y) = n_0 e^{-m_0 g y / k_B T}$$

donde n_0 es la densidad de número a nivel del mar ($y = 0$). Este resultado se llama *ley de atmósferas*. (b) Por lo general, los aviones comerciales vuelan a una altura de 11.0 km. Encuentre la razón de la densidad atmosférica ahí a la densidad al nivel del mar.

42. A partir de la distribución de rapidez de Maxwell-Boltzmann, demuestre que la rapidez más probable de una molécula de gas está dada por la ecuación 21.44. *Nota*: la rapidez más probable corresponde al punto donde la pendiente de la curva de distribución de rapidez dN_v/dv es cero.

43. La ley de atmósferas establece que la densidad de número de moléculas en la atmósfera depende de la altura y sobre el nivel del mar de acuerdo con

$$n_V(y) = n_0 e^{-m_0 g y / k_B T}$$

donde n_0 es la densidad de número al nivel del mar ($y = 0$). La altura promedio de una molécula en la atmósfera de la Tierra está dada por

$$y_{\text{prom}} = \frac{\int_0^\infty y n_V(y)\, dy}{\int_0^\infty n_V(y)\, dy} = \frac{\int_0^\infty y e^{-m_0 g y / k_B T}\, dy}{\int_0^\infty e^{-m_0 g y / k_B T}\, dy}$$

(a) Pruebe que esta altura promedio es igual a $k_B T / m_0 g$. (b) Evalúe la altura promedio si supone que la temperatura es 10°C y la masa molecular es 28.9 u, uniformes a través de la atmósfera.

Problemas adicionales

44. Ocho moléculas tienen magnitudes de velocidad de 3.00 km/s, 4.00 km/s, 5.80 km/s, 2.50 km/s, 3.60 km/s, 1.90 km/s, 3.80 km/s y 6.60 km/s. Encuentre (a) la rapidez promedio de las moléculas y (b) la rapidez rms de las moléculas.

45. Un pequeño tanque de oxígeno a una presión manométrica de 125 atm tiene un volumen de 6.88 L a 21.0°C. (a) Si un atleta respira oxígeno de este tanque a razón de 8.50 L/min cuando se mide a presión atmosférica y la temperatura permanece a 21.0°C, ¿cuánto durará el tanque antes de quedarse vacío? (b) En un momento particular durante este proceso, ¿cuál es la razón de la rapidez rms

de las moléculas restantes en el tanque a la rapidez rms de aquellas que son liberadas a presión atmosférica?

46. Las dimensiones de un salón de clases son 4.20 m × 3.00 m × 2.50 m. (a) Encuentre el número de moléculas de aire en él a presión atmosférica y 20.0°C. (b) Halle la masa de este aire, si supone que el aire consiste en moléculas diatómicas con masa molar de 28.9 g/mol. (c) Encuentre la energía cinética promedio de las moléculas. (d) Obtenga la rapidez molecular rms. (e) **¿Qué pasaría si?** Suponga que el calor específico molar del aire es independiente de la temperatura. Determine el cambio en energía interna del aire en el salón a medida que la temperatura se eleva a 25.0°C. (f) Explique cómo convencería a un estudiante de que su respuesta al inciso (e) es correcta, aun cuando sea sorprendente.

47. La atmósfera de la Tierra consiste principalmente de oxígeno (21%) y nitrógeno (78%). La rapidez rms de las moléculas de oxígeno en la atmósfera en determinada ubicación es de 535 m/s. (a) ¿Cuál es la temperatura de la atmósfera en ese lugar? (b) La rapidez rms de las moléculas de nitrógeno (N_2) en dicho lugar, ¿es mayor, igual a o menor que 535 m/s? Explique. (c) Determine la rapidez rms del N_2 en esa ubicación.

48. La *trayectoria libre media* ℓ de una molécula es la distancia promedio que una molécula viaja antes de colisionar con otra molécula. Está dada por

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N_V}$$

donde d es el diámetro de la molécula y N_V es el número de moléculas por unidad de volumen. El número de colisiones que una molécula ejecuta con otras moléculas por unidad de tiempo, o *frecuencia de colisión f*, está dada por

$$f = \frac{v_{\text{prom}}}{\ell}$$

(a) Si el diámetro de una molécula de oxígeno es 2.00×10^{-10} m, encuentre la trayectoria libre media de las moléculas en un tanque que tiene un volumen de 12.0 L y está lleno de oxígeno a una presión manométrica de 100 atm y temperatura de 25.0°C. (b) ¿Cuál es el intervalo de tiempo promedio entre colisiones moleculares para una molécula de este gas?

49. Un rifle de aire dispara un balín de plomo al permitir la expansión de aire a alta presión, lo que impulsa al balín por el cañón del rifle. Ya que este proceso sucede muy rápidamente, no se presenta conducción térmica apreciable y la expansión en esencia es adiabática. Suponga que el rifle comienza con 12.0 cm^3 de aire comprimido, que se comporta como un gas ideal con $\gamma = 1.40$. La expansión del aire empuja un balín de 1.10 g como un pistón con área de sección transversal de 0.030 0 cm^2 a lo largo del cañón del arma, de 50.0 cm de largo. ¿Qué presión inicial se requiere para expulsar el balín con una rapidez de boquilla de 120 m/s? Ignore los efectos del aire enfrente del balín y la fricción con las paredes internas del cañón.

50. En una muestra de un metal sólido, cada átomo tiene libertad de vibrar en torno a alguna posición de equilibrio. La energía del átomo consiste de energía cinética para movimiento en las direcciones x, y y z, más energía potencial elástica asociada con las fuerzas de la ley de Hooke ejercidas por los átomos vecinos sobre él en las direcciones x, y y z. De acuerdo con el teorema de equipartición de la energía, suponga que la energía promedio de cada átomo es $\frac{1}{2}k_B T$ para cada grado de libertad. (a) Pruebe que el calor específico molar del sólido es $3R$. La *ley de Dulong-Petit* establece que este resultado describe sólidos puros a temperaturas suficientemente altas. (Puede ignorar la diferencia entre el calor específico a presión constante y el calor específico a volumen constante.) (b) Evalúe el calor específico c del hierro. Explique cómo se compara con el valor que se menciona en la tabla 20.1. (c) Repita la evaluación y comparación para el oro.

51. Cierto gas ideal tiene un calor específico molar de $C_V = \frac{7}{2}R$. Una muestra de 2.00 moles del gas siempre inicia a una presión de 1.00×10^5 Pa con una temperatura de 300 K. Para cada uno de los siguientes procesos, determine (a) la presión final, (b) el volumen final, (c) la temperatura final, (d) el cambio en energía interna del gas, (e) la energía agregada al gas por calor y (f) el trabajo realizado sobre el gas. **(i)** El gas se calienta a presión constante a 400 K. **(ii)** El gas se calienta a volumen constante a 400 K. **(iii)** El gas se comprime a temperatura constante a 1.20×10^5 Pa. (iv) El gas se comprime adiabáticamente a 1.20×10^5 Pa.

52. La compresibilidad κ de una sustancia se define como el cambio fraccionario en volumen de dicha sustancia para un cambio dado en la presión

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

(a) Explique por qué el signo negativo en esta expresión asegura que κ siempre es positiva. (b) Demuestre que si un gas ideal se comprime isotérmicamente, su compresibilidad está dada por $\kappa_1 = 1/P$. (c) ¿Qué pasaría si? Demuestre que si un gas ideal se comprime adiabáticamente, su compresibilidad está dada por $\kappa_2 = 1/(\gamma P)$. Determine valores para (d) κ_1 y (e) κ_2 para un gas ideal monoatómico a una presión de 2.00 atm.

53. **Problema de repaso.** El oxígeno a presiones mucho mayores que 1 atm es tóxico para las células pulmonares. Suponga que un buzo de profundidad respira una mezcla de oxígeno (O_2) y helio (He). En peso, ¿qué razón de helio a oxígeno debe emplearse si el buzo está a una profundidad oceánica de 50.0 m?

54. Examine los datos para gases poliatómicos en la tabla 21.2 y dé una explicación por la que el dióxido de azufre tiene un mayor calor específico a volumen constante que los otros gases poliatómicos a 300 K.

55. Modele el aire como un gas ideal diatómico con $M = 28.9$ g/mol. Un cilindro con un pistón contiene 1.20 kg de aire a 25.0°C y 200 kPa. La energía se transfiere por calor al sistema mientras se le permite expandirse, con la presión elevándose a 4.00×10^5 Pa. A lo largo de la expansión, la relación entre presión y volumen está dada por

$$P = CV^{1/2}$$

donde C es una constante. Encuentre (a) el volumen inicial, (b) el volumen final, (c) la temperatura final, (d) el trabajo realizado sobre el aire y (e) la energía transferida por calor.

56. **Problema de repaso.** A medida que una onda sonora pasa a través de un gas, las compresiones son tan rápidas o

tan separadas que la conducción térmica se evita por un intervalo de tiempo despreciable o por un grosor de aislamiento efectivo. Las compresiones y enrarecimiento son adiabáticos. (a) Demuestre que la rapidez del sonido en un gas ideal es

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

donde M es la masa molar. La rapidez del sonido en un gas está dada por la ecuación 17.8; use esa ecuación y la definición del módulo volumétrico de la sección 12.4. (b) Calcule la rapidez teórica del sonido en el aire a 20°C y establezca cómo se compara con el valor en la tabla 17.1. Tome $M = 28.9$ g/mol. (c) Demuestre que la rapidez del sonido en un gas ideal es

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m_0}}$$

donde m_0 es la masa de una molécula. (d) Establezca cómo el resultado en el inciso (c) se compara con las magnitudes de rapideces más probable, promedio y rms moleculares.

57. Veinte partículas, cada una con masa m_0 y confinadas a un volumen V, tienen diferentes magnitudes de velocidad: dos tienen rapidez v, tres tienen rapidez $2v$, cinco tienen rapidez $3v$, cuatro tienen rapidez $4v$, tres tienen rapidez $5v$, dos tienen rapidez $6v$ y una tiene rapidez $7v$. Encuentre (a) la rapidez promedio, (b) la rapidez rms, (c) la rapidez más probable, (d) la presión promedio que las partículas ejercen sobre las paredes del recipiente y (e) la energía cinética promedio por partícula.

58. En un cilindro, una muestra de un gas ideal con número de moles n experimenta un proceso adiabático. (a) Partiendo de la expresión $W = -\int P\,dV$ y empleando la condición $PV^\gamma =$ constante, demuestre que el trabajo realizado sobre el gas es

$$W = \left(\frac{1}{\gamma - 1}\right)(P_f V_f - P_i V_i)$$

(b) Partiendo de la primera ley de la termodinámica, demuestre que el trabajo efectuado sobre el gas es igual a $nC_V(T_f - T_i)$. (c) ¿Estos dos resultados son consistentes entre sí? Explique.

59. A medida que una muestra de 1.00 mol de un gas ideal monoatómico se expande adiabáticamente, el trabajo efectuado sobre él es -2.50×10^3 J. La temperatura y presión iniciales del gas son 500 K y 3.60 atm. Calcule (a) la temperatura final y (b) la presión final.

60. Una muestra consiste de n moles de un gas ideal monoatómico. El gas se expande adiabáticamente, con trabajo W realizado sobre él. (El trabajo W es un número negativo.) La temperatura y presión iniciales del gas son T_i y P_i. Calcule (a) la temperatura final y (b) la presión final.

61. Cuando una partícula pequeña se suspende en un fluido, el bombardeo por moléculas hace que la partícula tiemble en rededor al azar. Robert Brown descubrió este movimiento en 1827, mientras estudiaba la fertilización de plantas, y ahora dicho movimiento se conoce como *movimiento browniano*. La energía cinética promedio de la partícula se puede tomar como $\frac{3}{2}k_B T$, el mismo que una molécula en un gas ideal. Considere una partícula esférica de densidad 1.00×10^3 kg/m^3 en agua a 20.0°C. (a) Para una partícula de diámetro d, evalúe la rapidez rms. (b) El movimiento real de la partícula es una caminata al azar, pero imagine que se mueve con rapidez constante igual en magnitud a su rapidez rms. ¿En qué intervalo de tiempo se movería una distancia igual a su propio diámetro? (c) Evalúe la rapidez rms y el intervalo de tiempo para una partícula de diámetro 3.00 μm. (d) Evalúe la rapidez rms y el intervalo de tiempo para una esfera de masa 70.0 kg, modelando su propio cuerpo.

62. Un recipiente contiene 1.00×10^4 moléculas de oxígeno a 500 K. (a) Elabore una gráfica precisa de la función de distribución de rapidez de Maxwell vs. rapidez con puntos a intervalos de rapidez de 100 m/s. (b) Determine la rapidez más probable a partir de esta gráfica. (c) Calcule las rapideces promedio y rms para las moléculas y etiquete estos puntos sobre su gráfica. (d) A partir de la gráfica, estime la fracción de moléculas con magnitudes de velocidad en el intervalo de 300 m/s a 600 m/s.

63. Un pitcher lanza una pelota de béisbol de 0.142 kg a 47.2 m/s. Mientras viaja 16.8 m al plato de home, la pelota se frena hasta 42.5 m/s debido a la resistencia del aire. Encuentre el cambio en temperatura del aire a través del cual pasa. Determine el mayor cambio de temperatura posible, puede hacer las siguientes suposiciones. El aire tiene un calor específico molar de $C_P = \frac{7}{2}R$ y una masa molar equivalente de 28.9 g/mol. El proceso es tan rápido que la cubierta de la pelota actúa como aislante térmico y la temperatura de la bola no cambia. Al inicio sucede un cambio en temperatura sólo para el aire en un cilindro de 16.8 m de largo y 3.70 cm de radio. Este aire inicialmente está a 20.0°C.

64. El calor latente de vaporización para el agua a temperatura ambiente es 2 430 J/g. Considere una molécula particular en la superficie de un vaso con agua líquida, móvil hacia arriba con rapidez suficiente que será la siguiente molécula en unirse al vapor. (a) Encuentre su energía cinética traslacional. (b) Halle su rapidez. Ahora considere un gas no denso hecho justo de moléculas como ésta. (c) ¿Cuál es su temperatura? (d) ¿Por qué usted no se quema por el agua en evaporación de un recipiente a temperatura ambiente?

65. Una muestra de gas ideal monoatómico ocupa 5.00 L a presión atmosférica y 300 K (punto A en la figura P21.65). Se calienta a volumen constante a 3.00 atm (punto B). Luego se le permite expandirse isotérmicamente a 1.00 atm (punto C) y al final se comprime isobáricamente a su estado original. (a) Encuentre el número de moles en la muestra.

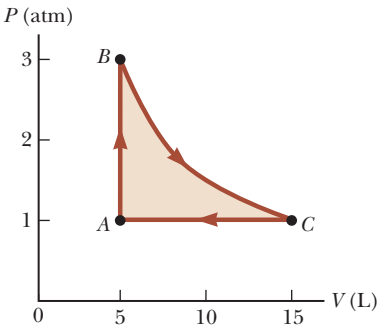


Figura P21.65

Encuentre (b) la temperatura en el punto B, (c) la temperatura en el punto C y (d) el volumen en el punto C. (e) Ahora considere los procesos $A \to B$, $B \to C$ y $C \to A$. Describa cómo llevar a cabo cada proceso de manera experimental. (f) Encuentre Q, W y ΔE_{int} para cada uno de los procesos. (g) Para todo el ciclo $A \to B \to C \to A$, encuentre Q, W y ΔE_{int}.

66. Considere las partículas en una centrifugadora de gas, dispositivo utilizado para separar partículas de diferente masa al hacerlas girar en una trayectoria circular de radio r con rapidez angular ω. La fuerza que actúa sobre una molécula de gas hacia el centro de la centrifugadora es $m_0\omega^2 r$. (a) Explique cómo se puede usar una centrifugadora de gas para separar partículas de diferente masa. (b) Suponga que la centrifugadora contiene un gas de partículas de idéntica masa. Demuestre que la densidad de las partículas como función de r es

$$n(r) = n_0 e^{m_0 r^2 \omega^2 / 2k_B T}$$

67. Para un gas maxwelliano use una computadora o calculadora programable para encontrar el valor numérico de la razón $N_v(v)/N_v(v_{\text{mp}})$ para los siguientes valores de v: (a) $(v_{\text{mp}}/50.0)$, (b) $(v_{\text{mp}}/10.0)$, (c) $(v_{\text{mp}}/2.00)$, (d) v_{mp}, (e) $2.00v_{\text{mp}}$, (f) $10.0v_{\text{mp}}$ y (g) $50.0v_{\text{mp}}$. Proporcione sus resultados a tres cifras significativas.

68. Una molécula triatómica puede tener una configuración lineal, como el CO_2 (figura P21.68a), o puede ser no lineal, como el H_2O (figura P21.68b). Suponga que la temperatura de un gas de moléculas triatómicas es suficientemente baja como para que el movimiento vibratorio sea despreciable. ¿Cuál es el calor específico molar a volumen constante, expresado como múltiplo de la constante universal de los gases, (a) si las moléculas son lineales y (b) si las moléculas son no lineales? En altas temperaturas, una molécula triatómica tiene dos modos de vibración, y cada uno aporta $\frac{1}{2}R$ al calor específico molar para su energía cinética y otro $\frac{1}{2}R$ para su energía potencial. Identifique el calor específico molar de alta temperatura a volumen constante para un gas ideal triatómico de (c) moléculas lineales y (d) moléculas no lineales. (e) Explique cómo se pueden emplear los datos de calor específico para determinar si una molécula triatómica es lineal o no lineal. ¿Los datos en la tabla 21.2 son suficientes para hacer esta determinación?

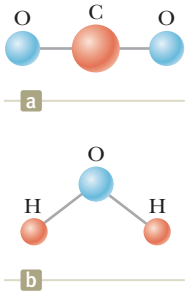


Figura P21.68

69. Utilice la distribución de rapidez de Maxwell-Boltzmann para verificar las ecuaciones 21.42 y 21.43 para (a) la rapidez rms y (b) la rapidez promedio de las moléculas de un gas a una temperatura T. El valor promedio de v^n es

$$\overline{v^n} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^n N_v \, dv$$

Use la tabla de integrales B.6 en el Apéndice B.

70. En el diagrama PV para un gas ideal, una curva isoterma y una curva adiabática pasan a través de cada punto, como se muestra en la figura P21.70. Demuestre que la pendiente de la curva adiabática es más inclinada que la pendiente de la isoterma en ese punto por el factor γ.

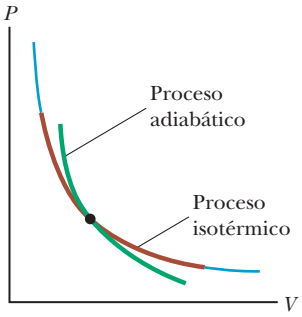


Figura P21.70

71. En Beijing, un restaurante mantiene un caldero de caldo de pollo hirviendo a fuego lento. Cada mañana se llena con 10.0 L de agua, junto con un pollo fresco, vegetales y especias. La sopa se agita por completo. La masa molar del agua es 18.0 g/mol. (a) Encuentre el número de moléculas de agua en el caldero. (b) Durante cierto mes, 90.0% del caldo se sirvió cada día a personas que luego emigraron inmediatamente. De las moléculas de agua en el caldero puestas el primer día del mes, ¿cuándo se sirvió la última? (c) El caldo se ha hervido a fuego lento durante siglos, a través de guerras, terremotos y reparaciones de estufa. Suponga que el agua que estuvo en el caldero hace mucho se mezcló en la hidrosfera de la Tierra, de 1.32×10^{21} kg de masa. ¿Cuántas de las moléculas del agua original es probable que estén presentes en él de nuevo en la actualidad?

72. **Problema de repaso.** (a) Si tiene suficiente energía cinética, es posible que una molécula en la superficie de la Tierra "escape a la gravitación de la Tierra", en el sentido de que puede continuar alejándose de la Tierra para siempre, como se explicó en la sección 13.6. Con el principio de conservación de la energía, demuestre que la mínima energía cinética necesaria para "escapar" es $m_0 g R_T$, donde m_0 es la masa de la molécula, g es la aceleración de caída libre en la superficie y R_T es el radio de la Tierra. (b) Calcule la temperatura para la cual la mínima energía cinética de escape es diez veces la energía cinética promedio de una molécula de oxígeno.

73. Con múltiples rayos láser, los físicos han podido enfriar y atrapar átomos de sodio en una región pequeña. En un experimento, la temperatura de los átomos se redujo a 0.240 mK. (a) Determine la rapidez rms de los átomos de sodio a esta temperatura. Los átomos se pueden capturar durante aproximadamente 1.00 s. La trampa tiene una dimensión lineal de más o menos 1.00 cm. (b) ¿Durante qué intervalo de tiempo aproximado un átomo vagaría fuera de la región de la trampa si no hubiera acción de captura?

Problemas de desafío

74. Las ecuaciones 21.42 y 21.43 muestran que $v_{rms} > v_{prom}$ para una colección de partículas de gas, lo cual es cierto siempre que las partículas tengan una distribución de magnitudes de rapidez. Explore esta desigualdad para un gas de dos partículas. Sea $v_1 = av_{prom}$ la rapidez de una partícula y la rapidez de la otra partícula $v_2 = (2 - a)v_{prom}$. (a) Demuestre que el promedio de estas dos magnitudes de rapidez es v_{prom}. (b) Demuestre que

$$v_{rms}^2 = v_{prom}^2 (2 - 2a + a^2)$$

(c) Argumente que la ecuación en el inciso (b) demuestra que, en general, $v_{rms} > v_{prom}$. (d) ¿Bajo qué condición especial se tendrá $v_{rms} = v_{prom}$ para el gas de dos partículas?

75. Un cilindro se cierra en ambos extremos y tiene paredes aislantes. Se divide en dos compartimientos mediante un pistón aislante que es perpendicular al eje del cilindro, como se muestra en la figura P21.75a. Cada sección contiene 1.00 mol de oxígeno que se comporta como un gas ideal con $\gamma = 1.40$. Al inicio los dos compartimientos tienen iguales volúmenes y sus temperaturas son 550 K y 250 K. Ahora se le permite al pistón moverse lentamente, paralelo al eje del cilindro, hasta que llega al reposo en una posición de equilibrio (figura P21.75b). Encuentre las temperaturas finales en los dos compartimientos.

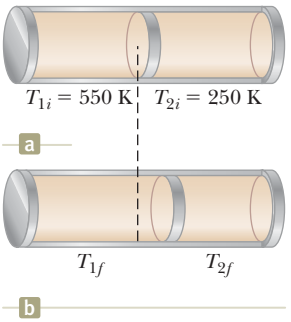


Figura P21.75

CAPÍTULO

22

Máquinas térmicas, entropía y segunda ley de la termodinámica



22.1 Máquinas térmicas y segunda ley de la termodinámica

22.2 Bombas de calor y refrigeradores

22.3 Procesos reversibles e irreversibles

22.4 La máquina de Carnot

22.5 Motores de gasolina y diesel

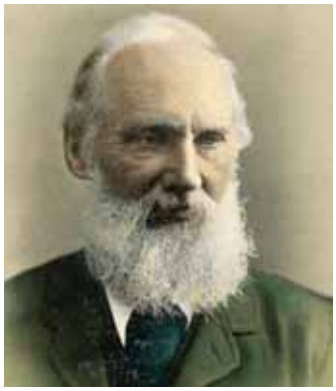
22.6 Entropía

22.7 Cambios de entropía en sistemas termodinámicos

22.8 Entropía y la segunda ley

Una máquina de Stirling de inicios del siglo XIX. El aire se calienta en el cilindro inferior mediante una fuente externa. A medida que esto ocurre, el aire se expande y empuja contra un pistón, generando movimiento. Luego el aire se enfría y permite que el ciclo inicie otra vez. Éste es un ejemplo de máquina térmica que se estudia en este capítulo. *(© SSPL/The Image Works)*

La primera ley de la termodinámica, que se estudió en el capítulo 20, es un enunciado de la conservación de energía y es un caso especial de reducción de la ecuación 8.2. Esta ley establece que un cambio en energía interna en un sistema puede ocurrir como un resultado de transferencia de energía por calor, por trabajo o por ambos. Aunque la primera ley de la termodinámica es muy importante, no hace distinción entre procesos que se presentan espontáneamente y aquellos que no lo hacen así. Sin embargo, en la naturaleza sólo tienen lugar ciertos tipos de conversión de energía y procesos de transferencia de energía. La *segunda ley de la termodinámica*, el tema principal de este capítulo, establece cuáles procesos se presentan y cuáles no. Los siguientes son ejemplos de procesos que no violan la primera



© Mary Evans Picture Library/Alamy

Lord Kelvin
Físico y matemático británico (1824-1907)
William Thomson nació en Belfast, conocido como Kelvin fue el primero en proponer el uso de una escala absoluta de temperatura. La escala de temperatura Kelvin se nombró así en su honor. El trabajo de Kelvin en termodinámica condujo a la idea de que la energía no puede pasar espontáneamente de un objeto más frío a un objeto más caliente.

ley de la termodinámica si siguen su curso en cualquier dirección, aunque en realidad se observa que proceden sólo en una dirección:

- Cuando dos objetos a diferentes temperaturas se colocan en contacto térmico mutuo, la transferencia de energía neta por calor siempre es del objeto más caliente al objeto más frío, nunca del más frío al más caliente.
- Una bola de caucho que se deja caer al suelo rebota varias veces y eventualmente llega al reposo, pero una bola que se encuentra en el suelo nunca reúne energía interna del suelo y comienza a rebotar por cuenta propia.
- Un péndulo en oscilación al final llega al reposo debido a que colisiona con moléculas de aire y a la fricción en el punto de suspensión. La energía mecánica del sistema se convierte en energía interna en el aire, el péndulo y la suspensión; la conversión contraria de energía nunca se presenta.

Todos estos procesos son *irreversibles*; es decir, son procesos que ocurren de manera natural en una sola dirección. No se ha observado jamás que algún proceso irreversible proceda de regreso. Si lo hiciera, violaría la segunda ley de la termodinámica.[1]

22.1 Máquinas térmicas y segunda ley de la termodinámica

Una **máquina térmica** es un dispositivo que toma energía por calor[2] y, al funcionar en un proceso cíclico, expulsa una fracción de dicha energía mediante trabajo. Por ejemplo, en un típico proceso con el cual una planta de energía produce electricidad, un combustible, como carbón, se quema y los gases de alta temperatura producidos se emplean para convertir agua líquida en vapor. Este vapor se dirige a las aspas de una turbina y las pone a girar. La energía mecánica asociada con esta rotación se utiliza para impulsar un generador eléctrico. Otro dispositivo que se modela como máquina térmica es el motor de combustión interna de un automóvil. Este dispositivo emplea energía de la quema de un combustible para realizar trabajo sobre pistones, lo que resulta en el movimiento del automóvil.

Considere más en detalle la operación de una máquina térmica. Ésta lleva alguna sustancia de trabajo a través de un proceso cíclico durante el cual (1) la sustancia de trabajo absorbe energía por calor de un depósito de energía a alta temperatura, (2) la máquina realiza trabajo y (3) se expulsa energía por calor a un depósito a temperatura más baja. Como un ejemplo, considere la operación de una máquina de vapor (figura 22.1) que utiliza agua como la sustancia de trabajo. El agua en una caldera absorbe energía de la quema de combustible y la convierte en vapor, que luego realiza trabajo al expandirse contra un pistón. Después que el vapor se enfría y condensa, el agua líquida producida regresa a la caldera y el ciclo se repite.

Es útil representar de manera esquemática una máquina térmica, como en la figura 22.2. La máquina absorbe una cantidad de energía $|Q_h|$ del depósito caliente. Para la explicación matemática de las máquinas térmicas se emplean valores absolutos para hacer positivas todas las transferencias de energía, y la dirección de transferencia se indica con un signo explícito, positivo o negativo. La máquina realiza trabajo $W_{\text{máq}}$ (así, trabajo *negativo* $W = -W_{\text{máq}}$ es efectuado *sobre* la máquina) y después entrega una cantidad de energía $|Q_C|$ al depósito frío. Ya que la sustancia de tra-



© Andy Moore/Photolibrary/Jupiterimages

Figura 22.1 Esta locomotora impulsada por vapor obtiene su energía mediante la quema de madera o carbón. La energía generada vaporiza agua, que impulsa la locomotora. Las modernas locomotoras usan combustible diesel en lugar de madera o carbón. Ya sean antiguas o modernas, tales locomotoras se modelan como máquinas térmicas, que extraen energía de la quema de un combustible y convierten una fracción del mismo en energía mecánica.

[1] Aunque un proceso que ocurre en el sentido inverso del tiempo nunca se ha *observado*, es *posible* que suceda. Sin embargo, como se verá más adelante en este capítulo, la probabilidad de que ocurra tal proceso es infinitesimalmente pequeña. Desde este punto de vista, los procesos suceden con una probabilidad mucho más grande en una dirección que en la dirección opuesta.

[2] Se emplea calor como modelo de la transferencia de energía a una máquina térmica. Sin embargo, en el modelo de máquina térmica son posibles otros métodos de transferencia de energía. Por ejemplo, la atmósfera de la Tierra se puede modelar como una máquina térmica con transferencia de energía de entrada mediante radiación electromagnética del Sol. La salida de la máquina térmica atmosférica causa la estructura de los vientos en la atmósfera.

bajo pasa a través de un ciclo, sus energías internas inicial y final son iguales: $\Delta E_{\text{int}} = 0$. Así, de la primera ley de la termodinámica, $\Delta E_{\text{int}} = Q + W = Q - W_{\text{máq}} = 0$, y el trabajo neto $W_{\text{máq}}$ realizado por una máquina térmica es igual a la energía neta Q_{neta} que se le transfiere. Como puede ver a partir de la figura 22.2, $Q_{\text{neta}} = |Q_h| - |Q_c|$; por lo tanto,

$$W_{\text{máq}} = |Q_h| - |Q_c| \tag{22.1}$$

La **eficiencia térmica** e de una máquina térmica se define como la razón del trabajo neto realizado por la máquina durante un ciclo, a la energía de entrada a la mayor temperatura durante el ciclo:

$$e \equiv \frac{W_{\text{máq}}}{|Q_h|} = \frac{|Q_h| - |Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} \tag{22.2}$$

◀ **Eficiencia térmica de una máquina térmica**

Puede pensar en la eficiencia como la razón de lo que gana (trabajo) a lo que da (transferencia de energía a la mayor temperatura). En la práctica, todas las máquinas térmicas sólo expulsan una fracción de la energía de entrada Q_h por trabajo mecánico; en consecuencia, su eficiencia siempre es menor que el 100%. Por ejemplo, un buen motor de automóvil tiene una eficiencia aproximada de 20%, y los motores diesel tienen eficiencias que varían de 35% a 40%.

La ecuación 22.2 muestra que una máquina térmica tiene 100% de eficiencia ($e = 1$) sólo si $|Q_C| = 0$, es decir, si no se expulsa energía al depósito frío. En otras palabras, una máquina térmica con eficiencia perfecta tendría que expulsar toda la energía de entrada por trabajo. Las eficiencias de los motores reales están muy por debajo de 100%, la **forma de Kelvin-Planck de la segunda ley de la termodinámica** establece lo siguiente:

> Es imposible construir una máquina térmica que, funcionando en un ciclo, no produzca otro efecto que la entrada de energía por calor de un depósito y la realización de una cantidad igual de trabajo.

Este enunciado de la segunda ley significa que, durante el funcionamiento de una máquina térmica, $W_{\text{máq}}$ nunca puede ser igual a $|Q_h|$ o que algo de energía $|Q_C|$ se *debe* expulsar al ambiente. La figura 22.3 es un diagrama esquemático de la imposible máquina térmica "perfecta".

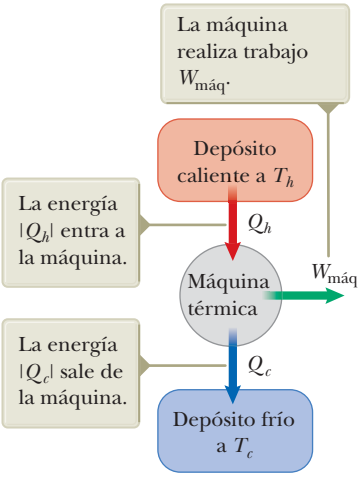


Figura 22.2 Representación esquemática de una máquina térmica.

Examen rápido 22.1 La energía de entrada a una máquina es 4.00 veces mayor que el trabajo que realiza. **(i)** ¿Cuál es su eficiencia térmica? (a) 4.00, (b) 1.00, (c) 0.250, (d) imposible de determinar. **(ii)** ¿Qué fracción de la energía de entrada se expulsa al depósito frío? (a) 0.250, (b) 0.750, (c) 1.00, (d) imposible de determinar.

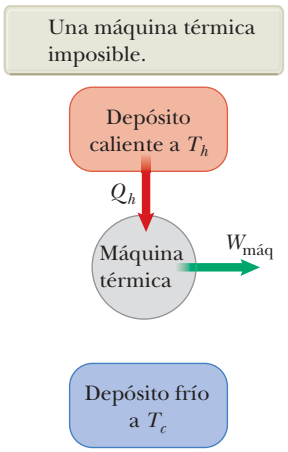


Figura 22.3 Diagrama esquemático de una máquina térmica que toma energía de un depósito caliente y realiza una cantidad equivalente de trabajo. Es imposible construir tal máquina perfecta.

Prevención de riesgos ocultos 22.1

Primera y segunda leyes Observe la distinción entre la primera y segunda leyes de la termodinámica. Si un gas experimenta un *proceso isotérmico en una dirección*, entonces $\Delta E_{\text{int}} = Q + W = 0$ y $W = -Q$. Por lo tanto, la primera ley permite que *toda* la energía de entrada por calor se expulse por trabajo. Sin embargo, en una máquina térmica, en la que una sustancia se somete a un proceso *cíclico*, sólo una *parte* de la energía de entrada por calor se puede expulsar por trabajo, de acuerdo con la segunda ley.

Ejemplo 22.1 La eficiencia de una máquina

Durante un ciclo una máquina transfiere 2.00×10^3 J de energía de un depósito caliente y transfiere 1.50×10^3 J conforme expulsa a un depósito frío.

(A) Encuentre la eficiencia de la máquina.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Revise la figura 22.2; piense en la energía que va a la máquina desde el depósito caliente y se divide, con una parte que sale por trabajo y otra por calor hacia el depósito frío.

Categorizar Este ejemplo involucra la evaluación de cantidades de las ecuaciones introducidas en esta sección, así que se clasifica como un problema de sustitución.

Encuentre la eficiencia de la máquina a partir de la ecuación 22.2:

$$e = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{1.50 \times 10^3\ \text{J}}{2.00 \times 10^3\ \text{J}} = \boxed{0.250, \text{ o } 25.0\%}$$

(B) ¿Cuánto trabajo realiza esta máquina en un ciclo?

SOLUCIÓN

Determine el trabajo efectuado por la máquina al tomar la diferencia entre las energías de entrada y de salida:

$$W_{\text{máq}} = |Q_h| - |Q_c| = 2.00 \times 10^3\ \text{J} - 1.50 \times 10^3\ \text{J}$$
$$= \boxed{5.0 \times 10^2\ \text{J}}$$

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que se le pregunta por la potencia de salida de la máquina. ¿Tiene suficiente información para responder?

Respuesta No, la información es insuficiente. La potencia de una máquina es la *rapidez* a la que realiza trabajo. Sabe cuánto trabajo se efectúa por ciclo, pero carece de información sobre el intervalo de tiempo asociado con un ciclo. Sin embargo, si se le dijera que la máquina opera a 2 000 rpm (revoluciones por minuto), podría relacionar esta rapidez con el periodo de rotación T del mecanismo de la máquina. Si supone que hay un ciclo termodinámico por revolución, la potencia es

$$P = \frac{W_{\text{maq}}}{T} = \frac{5.0 \times 10^2\ \text{J}}{(\frac{1}{2\,000}\ \text{min})}\left(\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\right) = 1.7 \times 10^4\ \text{W}$$

22.2 Bombas de calor y refrigeradores

En una máquina térmica la dirección de transferencia de energía es del depósito caliente al depósito frío, que es la dirección natural. La función de la máquina térmica es procesar la energía del depósito caliente para que se transforme en trabajo útil. ¿Qué pasaría si se desea transferir energía del depósito frío al depósito caliente? Ya que no es la dirección natural de transferencia de energía, se debe poner algo de energía en un dispositivo para lograrlo. Los dispositivos que logran esta tarea se llaman **bombas de calor** y **refrigeradores**. Por ejemplo, los hogares en verano se enfrían con el uso de bombas de calor llamadas *acondicionadores de aire*. El acondicionador de aire transfiere energía de la habitación fría en la casa al aire caliente exterior.

En un refrigerador o en una bomba de calor la máquina toma energía $|Q_c|$ de un depósito frío y expulsa energía $|Q_h|$ a un depósito caliente (figura 22.4), que puede lograrse sólo si se realiza trabajo *sobre* la máquina. De la primera ley, se conoce que la energía cedida al depósito caliente debe ser igual a la suma del trabajo realizado y la energía tomada del depósito frío. Por lo tanto, el refrigerador o la bomba de calor transfiere energía desde el cuerpo más frío (por ejemplo, los contenidos de un refrigerador de cocina o el aire invernal afuera de un edificio) a un cuerpo más caliente (el aire en la cocina o a una habitación en el edificio). En la práctica, es deseable llevar a cabo este proceso con un mínimo de trabajo. Si el proceso se

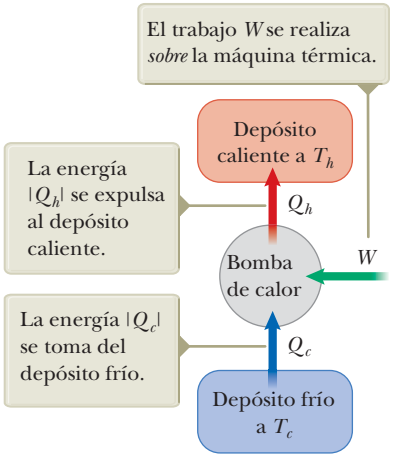


Figura 22.4 Representación esquemática de una bomba de calor.

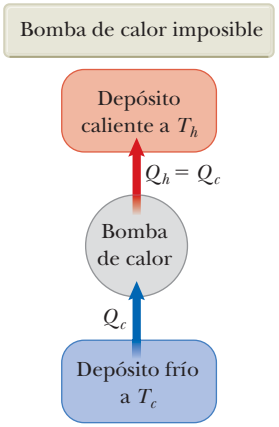


Figura 22.5 Diagrama esquemático de una bomba de calor o refrigerador imposible, es decir, uno que toma energía de un depósito frío y expulsa una cantidad equivalente de energía a un depósito caliente sin la entrada de energía por trabajo.

pudiera lograr sin efectuar trabajo alguno, el refrigerador o bomba de calor sería "perfecto" (figura 22.5). De nuevo, la existencia de tal dispositivo violaría la segunda ley de la termodinámica, que en la forma del **enunciado de Clausius**[3] establece:

> Es imposible construir una máquina cíclica cuyo único efecto sea transferir energía de manera continua por calor desde un objeto a otro a una mayor temperatura sin la entrada de energía por trabajo.

En términos más simples, la energía no se transfiere espontáneamente por calor de un objeto frío a un objeto caliente. Se requiere trabajo de entrada para que funcione un refrigerador.

Los enunciados de Clausius y de Kelvin-Planck de la segunda ley de la termodinámica aparecen, a primera vista, como desconectados, pero de hecho son equivalentes en todos los aspectos. Aunque no se prueba aquí, si algún enunciado es falso, también lo es el otro.[4]

En la práctica, una bomba de calor consiste en un fluido que circula a través de dos conjuntos de serpentines metálicos que pueden intercambiar energía con los alrededores. El fluido es frío y a baja presión cuando está en los serpentines ubicados en un ambiente frío, donde absorbe energía por calor. Entonces el fluido caliente resultante se comprime y entra a los otros serpentines como un fluido caliente de alta presión. Ahí libera su energía almacenada a los alrededores calientes. En un acondicionador de aire, la energía se absorbe en el fluido en los serpentines ubicados en el interior de un edificio; después que el fluido se comprime, la energía deja el fluido a través de serpentines localizados en el exterior. En un refrigerador los serpentines externos están detrás o debajo de la unidad (figura 22.6). Los serpentines internos están en las paredes del refrigerador y absorben energía de los alimentos.

La efectividad de una bomba de calor se describe en términos de un número llamado **coeficiente de rendimiento** (COP). El COP es similar a la eficiencia térmica de una máquina térmica en que es la razón de lo que gana (energía transferida a o desde un depósito) a lo que da (entrada de trabajo). Para una bomba de calor que funciona en el modo de enfriamiento, "lo que gana" es energía removida del depósito frío. El refrigerador o acondicionador de aire más efectivo es el que retira la mayor cantidad de energía del depósito frío a cambio de la menor cantidad de



© Cengage Learning/Charles D. Winters

Figura 22.6 Parte posterior de un refrigerador casero. El aire que rodea los serpentines es el depósito caliente.

[3] Expresada por primera vez por Rudolf Clausius (1822-1888).

[4] Para esta prueba vea un texto avanzado de termodinámica.

trabajo. Por lo tanto, para aquellos dispositivos que funcionan en el modo de enfriamiento, se define el COP en términos de $|Q_c|$:

$$\text{COP (modo de enfriamiento)} = \frac{\text{energía transferida a baja temperatura}}{\text{trabajo efectuado sobre la bomba de calor}} = \frac{|Q_c|}{W} \quad (22.3)$$

Un buen refrigerador debe tener un COP alto, típicamente 5 o 6.

Además de aplicaciones de enfriamiento, las bombas de calor cada vez se vuelven más populares para propósitos de calentamiento. Los serpentines que absorben energía para una bomba de calor se ubican afuera de un edificio, en contacto con el aire o enterrados en el suelo. El otro conjunto de serpentines está en el interior del edificio. El fluido circulante a través de los serpentines absorbe energía del exterior y la libera al interior del edificio desde los serpentines internos.

En el modo de calentamiento, el COP de una bomba de calor se define como la razón de la energía transferida hacia el depósito caliente, al trabajo requerido para transferir dicha energía:

$$\text{COP (modo de calentamiento)} = \frac{\text{energía transferida a alta temperatura}}{\text{trabajo realizado sobre la bomba de calor}} = \frac{|Q_h|}{W} \quad (22.4)$$

Si la temperatura exterior es de 25°F (−4°C) o mayor, un valor típico del COP para una bomba de calor es aproximadamente 4. Es decir, la cantidad de energía transferida al edificio es cerca de cuatro veces más que el trabajo efectuado por el motor en la bomba de calor. Sin embargo, conforme desciende la temperatura exterior se vuelve más difícil que la bomba de calor extraiga suficiente energía del aire y así el COP disminuye. Por lo tanto, el uso de bombas de calor que extraen energía del aire, aunque satisfactorio en climas moderados, no es adecuado en áreas donde las temperaturas invernales son muy bajas. Es posible emplear bombas de calor en áreas más frías al enterrar los serpentines exteriores en el suelo, a buena profundidad. En ese caso, la energía se extrae del suelo, que tiende a estar más caliente que el aire en el invierno.

Examen rápido 22.2 La energía que entra a un calentador eléctrico mediante transmisión eléctrica se puede convertir en energía interna con una eficiencia de 100%. ¿En qué factor cambia el costo de calentar su casa cuando sustituye su sistema de calefacción eléctrica con una bomba de calor eléctrica que tenga un COP de 4.00? Suponga que el motor que activa la bomba de calor es 100% eficiente. **(a)** 4.00, **(b)** 2.00, **(c)** 0.500, (d) 0.250.

Ejemplo 22.2 Congelación de agua

Cierto refrigerador tiene un COP de 5.00. Cuando el refrigerador está en funcionamiento, su potencia de entrada es de 500 W. Una muestra de agua de 500 g de masa y 20.0°C de temperatura se coloca en el compartimiento del congelador. ¿Cuánto tarda en congelar el agua a 0°C? Suponga que las otras partes del refrigerador permanecen a la misma temperatura y no hay fugas de energía al exterior, así que la operación del refrigerador resulta sólo en energía que se extrae del agua.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La energía sale del agua, lo que reduce su temperatura y luego se congela en hielo. El intervalo de tiempo requerido para todo este proceso se relaciona con la rapidez de extracción de energía del agua, la que a su vez se relaciona con la potencia de entrada del refrigerador.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como una combinación de la comprensión de los cambios de temperatura y cambios de fase del capítulo 20, y el entendimiento de las bombas de calor de este capítulo.

Analizar Use la potencia nominal del refrigerador para encontrar el intervalo de tiempo Δt necesario para que ocurra el proceso de congelación:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{W}{P}$$

22.2 continuación

Aplique la ecuación 22.3 para relacionar el trabajo W realizado sobre la bomba de calor con la energía $|Q_c|$ extraída del agua:

$$\Delta t = \frac{|Q_c|}{P(\text{COP})}$$

Utilice las ecuaciones 20.4 y 20.7 para sustituir la cantidad de energía $|Q_c|$ que debe extraerse del agua de masa m:

$$\Delta t = \frac{|mc\,\Delta T + L_f \Delta m|}{P(\text{COP})}$$

Observe que la cantidad de agua que se congela es $\Delta m = -m$ porque toda el agua se congela:

$$\Delta t = \frac{|m(c\,\Delta T - L_f)|}{P(\text{COP})}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\Delta t = \frac{|(0.500\ \text{kg})[(4\,186\ \text{J/kg}\cdot{}^\circ\text{C})(-20.0{}^\circ\text{C}) - 3.33 \times 10^5\ \text{J/kg}]|}{(500\ \text{W})(5.00)}$$

$$= 83.3\ \text{s}$$

Finalizar En realidad, el intervalo de tiempo para que el agua se congele en un refrigerador es mucho más que 83.3 s, lo que sugiere que las suposiciones del modelo no son válidas. Sólo una pequeña parte de la energía extraída del interior del refrigerador en un intervalo de tiempo dado proviene del agua. También se debe extraer energía del recipiente en el que se coloca el agua, y se debe extraer la energía que continuamente se filtra al interior desde el exterior.

22.3 Procesos reversibles e irreversibles

En la siguiente sección se propone una máquina térmica teórica que sea lo más eficiente posible. Para entender su naturaleza, primero se debe examinar el significado de los procesos reversibles e irreversibles. En un proceso **reversible**, el sistema que experimenta el proceso puede retornar a sus condiciones iniciales a lo largo de la misma trayectoria sobre un diagrama PV, y cada punto sobre esta ruta es un estado de equilibrio. Un proceso que no satisface estos requisitos es **irreversible**.

Se conoce que todos los procesos naturales son irreversibles. Examine la expansión libre adiabática de un gas, discutida en la sección 20.6, y muestre que no puede ser reversible. Considere un gas en un recipiente aislado térmicamente, como se muestra en la figura 22.7. Una membrana separa al gas de un vacío. Cuando la membrana se perfora, el gas se expande libremente en el vacío. Como resultado de la perforación, el sistema cambió porque ocupa un mayor volumen después de la expansión. El gas no ejerce una fuerza a través de un desplazamiento, entonces no realiza trabajo sobre los alrededores mientras se expande. Además, no se transfiere energía hacia o desde el gas por calor porque el recipiente está aislado de sus alrededores. Por lo tanto, en este proceso adiabático el sistema cambió, pero los alrededores no.

Para que este proceso sea reversible, el gas debe retornar a su volumen y temperatura originales sin cambiar los alrededores. Imagine invertir el proceso mediante la compresión del gas a su volumen original. Para hacerlo se ajusta el recipiente con un pistón y se usa una máquina para forzar el pistón hacia dentro. Durante este proceso los alrededores cambian, porque se realiza trabajo mediante un agente externo sobre el sistema. Además, el sistema cambia porque la compresión incrementa la temperatura del gas. La temperatura del gas puede disminuirse si se le permite entrar en contacto con un depósito de energía externo. Aunque esta etapa regresa al gas a sus condiciones originales, los alrededores de nuevo resultan afectados porque se agrega energía a los alrededores desde el gas. Si esta energía se pudiera emplear para impulsar la máquina que comprime el gas, la transferencia de energía neta hacia los alrededores sería cero. De esta manera, el sistema y sus alrededores podrían retornar a sus condiciones iniciales y se podría identificar el proceso como

Prevención de riesgos ocultos 22.2

Todos los procesos reales son irreversibles El proceso reversible es una idealización; todos los procesos reales en la Tierra son irreversibles.

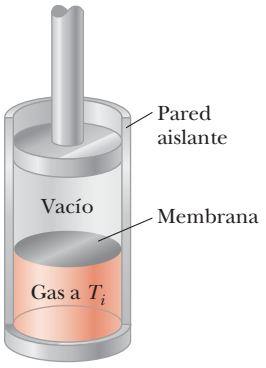


Figura 22.7 Expansión libre adiabática de un gas.

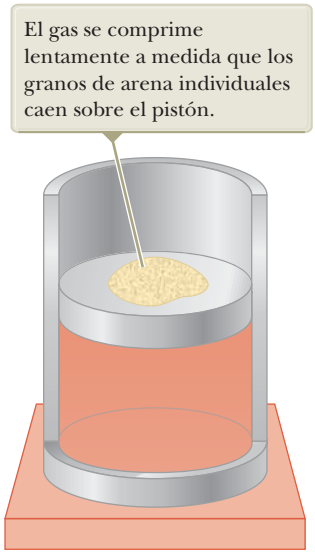


Figura 22.8 Un método para comprimir un gas en un proceso isotérmico casi reversible.

reversible. Sin embargo, el enunciado de Kelvin-Planck de la segunda ley especifica que la energía removida del gas para regresar la temperatura a su valor original no se puede convertir completamente en energía mecánica por el proceso de trabajo efectuado por la máquina al comprimir el gas. Por lo tanto, se debe concluir que el proceso es irreversible.

También se podría argumentar que la expansión libre adiabática es irreversible al considerar la definición de un proceso reversible que se refiere a los estados de equilibrio. Por ejemplo, durante la expansión súbita ocurren variaciones significativas de presión a través del gas. Por lo tanto, en algún momento entre los estados inicial y final no hay un valor bien definido de la presión para todo el sistema. De hecho, el proceso no se puede representar como una trayectoria sobre un diagrama *PV*. En una expansión libre adiabática el diagrama *PV* mostraría como puntos las condiciones inicial y final, pero estos puntos no estarían conectados por una trayectoria. Así, ya que las condiciones intermedias entre los estados inicial y final no son estados de equilibrio, el proceso es irreversible.

Aunque todos los procesos reales son irreversibles, algunos son casi reversibles. Si un proceso real ocurre muy lentamente, tal que el sistema siempre está muy cerca de un estado de equilibrio, el proceso se puede aproximar como reversible. Suponga que un gas se comprime isotérmicamente en un arreglo pistón-cilindro en donde el gas está en contacto térmico con un depósito de energía y continuamente se transfiere suficiente energía del gas al depósito para mantener la temperatura constante. Por ejemplo, imagine que el gas se comprime muy lentamente al soltar granos de arena sobre un pistón sin fricción, como se muestra en la figura 22.8. Conforme cada grano cae sobre el pistón y comprime el gas una pequeña cantidad, el sistema se desvía de un estado de equilibrio, pero está tan cerca que logra un nuevo estado de equilibrio en un intervalo de tiempo relativamente breve. Cada grano agregado representa un cambio a un nuevo estado de equilibrio, pero las diferencias entre estados son tan pequeñas que todo el proceso se aproxima como si sucediera a través de estados de equilibrio continuos. El proceso se puede invertir al retirar lentamente granos del pistón.

Una característica general de un proceso reversible es que no presenta efectos no conservativos (como turbulencia o fricción) que transformen energía mecánica en energía interna. Tales efectos pueden ser imposibles de eliminar por completo. Así, no es de sorprender que los procesos reales en la naturaleza sean irreversibles.

22.4 La máquina de Carnot

Prevención de riesgos ocultos 22.3

No compre una máquina de Carnot La máquina de Carnot es una idealización; no espere que se desarrolle una máquina de Carnot para uso comercial. La máquina de Carnot se explora sólo para consideraciones teóricas.

En 1824 un ingeniero francés llamado Sadi Carnot describió una máquina teórica, ahora llamada **máquina de Carnot**, que es de gran importancia desde puntos de vista prácticos y teóricos. Él demostró que una máquina térmica que funciona en un ciclo reversible ideal, llamado **ciclo de Carnot**, entre dos depósitos de energía es la máquina más eficiente posible. Tal máquina ideal establece un límite superior sobre las eficiencias de todas las otras máquinas. Es decir, el trabajo neto realizado en el ciclo de Carnot por una sustancia de trabajo es la mayor cantidad de trabajo posible para una cantidad dada de energía suministrada a la sustancia a la temperatura superior. El **teorema de Carnot** se puede establecer como sigue:

> Ninguna máquina térmica real que opere entre dos depósitos de energía puede ser más eficiente que una máquina de Carnot que funcione entre los mismos dos depósitos.

En esta sección se demostrará que la eficiencia de una máquina de Carnot sólo depende de las temperaturas de los depósitos. A su vez, que la eficiencia representa la máxima eficiencia posible para máquinas reales. Confirme que la máquina de Carnot es la más eficiente. Imagine una máquina hipotética con una eficiencia

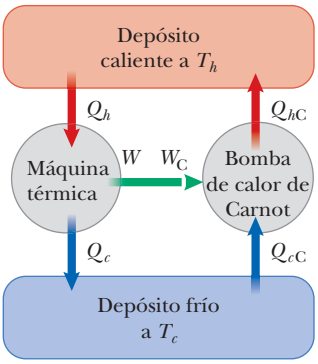


Figura 22.9 Una máquina de Carnot operada como una bomba de calor, y otra máquina con una propuesta eficiencia más alta funciona entre dos depósitos de energía. Se igualan los trabajos de entrada y de salida.



© INTERFOTO/Alamy

Sadi Carnot
Ingeniero francés
(1796-1832)
Carnot fue el primero en demostrar la relación cuantitativa entre trabajo y calor. En 1824 publicó su única obra, *Reflexiones sobre el poder motriz del calor*, que revisaba la importancia industrial, política y económica de la máquina de vapor. En ella definió trabajo como "el peso levantado a través de una altura".

mayor que la de una máquina de Carnot. Considere la figura 22.9, donde se muestra a la izquierda la máquina hipotética con $e > e_C$ conectada entre depósitos caliente y frío. Además, se implementa una máquina de Carnot entre los mismos depósitos. El ciclo de Carnot es reversible, entonces la máquina de Carnot puede operar en reversa como una bomba de calor de Carnot, como se muestra a la derecha en la figura 22.9. Se iguala el trabajo de salida de la máquina al trabajo de entrada de la bomba de calor, $W = W_C$, así que no existe intercambio de energía por trabajo entre los alrededores y la combinación máquina-bomba de calor.

Debido a la relación propuesta entre las eficiencias, se debe tener

$$e > e_C \rightarrow \frac{|W|}{|Q_h|} > \frac{|W_C|}{|Q_{hC}|}$$

Los numeradores de estas dos fracciones se eliminan porque los trabajos se han igualado. Esta expresión requiere que

$$|Q_{hC}| > |Q_h| \tag{22.5}$$

De la ecuación 22.1, la igualdad de los trabajos da

$$|W| = |W_C| \rightarrow |Q_h| - |Q_c| = |Q_{hC}| - |Q_{cC}|$$

que pueden reacomodarse para colocar las energías intercambiadas con el depósito frío a la izquierda y con el depósito caliente a la derecha:

$$|Q_{hC}| - |Q_h| = |Q_{cC}| - |Q_c| \tag{22.6}$$

Observe que el lado izquierdo de la ecuación 22.6 es positivo, entonces el lado derecho también debe ser positivo. Así el intercambio de energía neto con el depósito caliente es igual al intercambio de energía neto con el depósito frío. En consecuencia, para la combinación de la máquina térmica y la bomba de calor, la energía se transfiere del depósito frío al depósito caliente por calor con ninguna entrada de energía por trabajo.

Este resultado viola el enunciado de Clausius de la segunda ley. Por lo tanto, debe ser incorrecta la suposición original $e > e_C$, y entonces debe concluirse que la máquina de Carnot representa la máxima eficiencia para una máquina. La principal característica de la máquina de Carnot, que la hace la más eficiente, es su *reversibilidad*; puede funcionar en reversa como una bomba de calor. Todas las máquinas reales son menos eficientes que la máquina de Carnot porque no operan mediante un ciclo reversible. La eficiencia de una máquina real se reduce aún más por dificultades prácticas, como fricción y pérdidas de energía por conducción.

Para describir el ciclo de Carnot que tiene lugar entre las temperaturas T_c y T_h, suponga que la sustancia de trabajo es un gas ideal contenido en un cilindro adaptado con un pistón móvil en un extremo. Las paredes del cilindro y el pistón son térmicamente no conductoras. En la figura 22.10 (página 662) se muestran cuatro etapas del ciclo de Carnot y el diagrama *PV* para el ciclo indicado en la figura 22.11

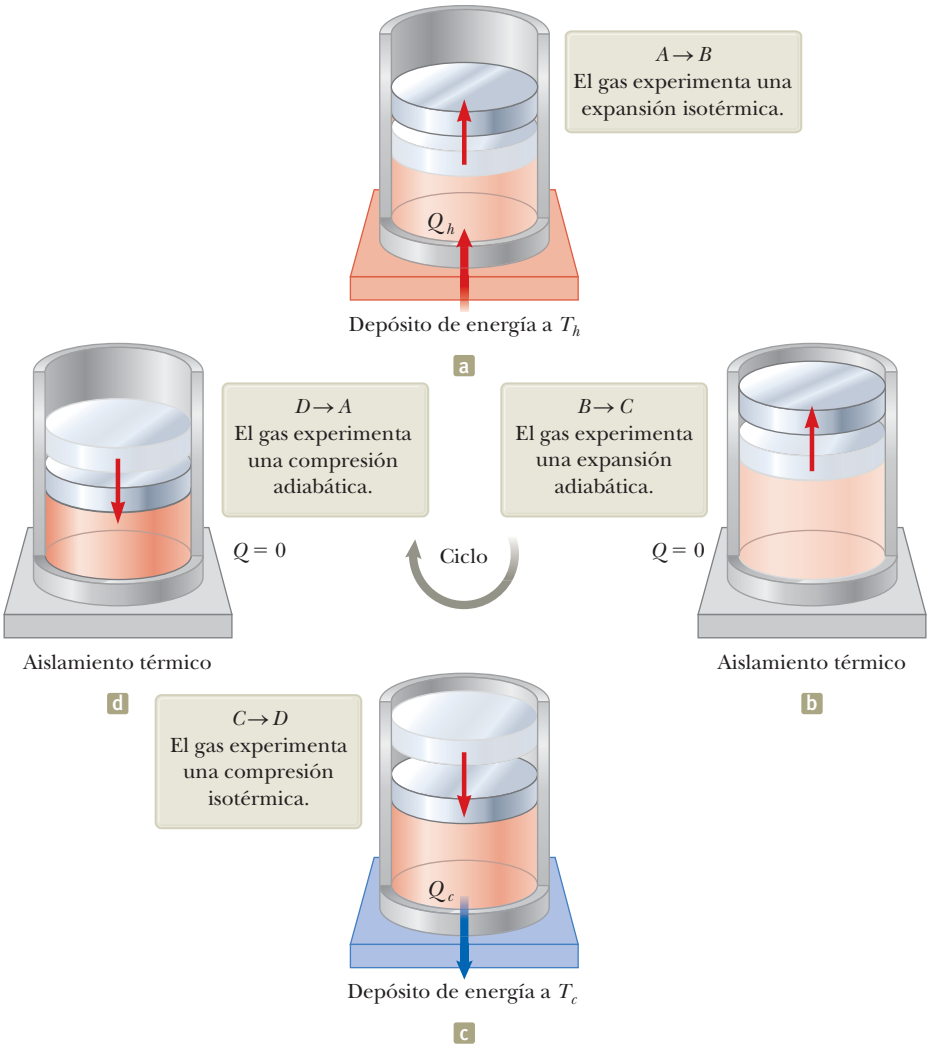


Figura 22.10 El ciclo de Carnot. Las letras *A*, *B*, *C* y *D* se refieren a los estados del gas mostrados en la figura 22.11. Las flechas sobre el pistón indican la dirección de su movimiento durante cada proceso.

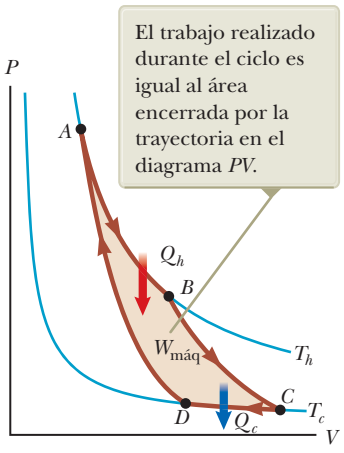


Figura 22.11 Diagrama *PV* para el ciclo de Carnot. El trabajo neto efectuado $W_{máq}$ es igual a la energía neta transferida en la máquina de Carnot en un ciclo, $|Q_h| - |Q_c|$.

El ciclo de Carnot consiste de dos procesos adiabáticos y dos procesos isotérmicos, todos reversibles:

1. El proceso $A \rightarrow B$ (figura 22.10a) es una expansión isotérmica a temperatura T_h. El gas se coloca en contacto térmico con un depósito de energía a temperatura T_h. Durante la expansión, el gas absorbe energía $|Q_h|$ del depósito a través de la base del cilindro y realiza trabajo W_{AB} para elevar el pistón.
2. En el proceso $B \rightarrow C$ (figura 22.10b) la base del cilindro se sustituye por una pared térmicamente no conductora y el gas se expande adiabáticamente; es decir, no entra ni sale energía del sistema por calor. Durante la expansión, la temperatura del gas disminuye de T_h a T_c y el gas efectúa trabajo W_{BC} para elevar el pistón.
3. En el proceso $C \rightarrow D$ (figura 22.10c) el gas se coloca en contacto térmico con un depósito de energía a temperatura T_c y se comprime isotérmicamente a temperatura T_c. Durante este tiempo, el gas expulsa energía $|Q_c|$ al depósito y el trabajo que el pistón realiza sobre el gas es W_{CD}.
4. En el proceso final $D \rightarrow A$ (figura 22.10d) la base del cilindro se sustituye por una pared no conductora y el gas se comprime adiabáticamente. La temperatura del gas aumenta a T_h y el trabajo efectuado por el pistón sobre el gas es W_{DA}.

La eficiencia térmica de la máquina está dada por la ecuación 22.2:

$$e = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|}$$

En el ejemplo 22.3 se demuestra que para un ciclo de Carnot,

$$\frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c}{T_h} \tag{22.7}$$

Así, la eficiencia térmica de una máquina de Carnot es

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} \tag{22.8}$$

◀ **Eficiencia de una máquina de Carnot**

Este resultado indica que todas las máquinas de Carnot que operan entre las mismas dos temperaturas tienen la misma eficiencia.[5]

La ecuación 22.8 se puede aplicar a cualquier sustancia de trabajo que funciona en un ciclo de Carnot entre dos depósitos de energía. De acuerdo con esta ecuación, la eficiencia es cero si $T_c = T_h$, como uno esperaría. La eficiencia aumenta conforme T_c baja y T_h se eleva. Sin embargo, la eficiencia puede ser la unidad (100%) sólo si $T_c = 0$ K. Tales depósitos no están disponibles; por lo tanto, la máxima eficiencia siempre es menor que 100%. En la mayoría de los casos prácticos, T_c está cerca de la temperatura ambiente, que es aproximadamente 300 K. Así, por lo general se lucha por aumentar la eficiencia al elevar T_h.

En teoría, una máquina térmica con ciclo de Carnot que funcione en reversa constituye la bomba de calor más efectiva posible, y ello determina el máximo COP para una combinación dada de temperaturas de depósito caliente y frío. Al emplear las ecuaciones 22.1 y 22.4 se ve que el máximo COP para una bomba de calor en su modo de calentamiento es

$$\text{COP}_C \text{ (modo de calentamiento)} = \frac{|Q_h|}{W}$$

$$= \frac{|Q_h|}{|Q_h| - |Q_c|} = \frac{1}{1 - \dfrac{|Q_c|}{|Q_h|}} = \frac{1}{1 - \dfrac{T_c}{T_h}} = \frac{T_h}{T_h - T_c}$$

El COP de Carnot para una bomba de calor en el modo de enfriamiento es

$$\text{COP}_C \text{ (modo de enfriamiento)} = \frac{T_c}{T_h - T_c}$$

Conforme la diferencia entre las temperaturas de los dos depósitos tiende a cero en esta expresión, el COP teórico tiende a infinito. En la práctica, la baja temperatura de los serpentines de enfriamiento y la alta temperatura en el compresor limitan el COP a valores por debajo de 10.

Examen rápido 22.3 Tres máquinas operan entre depósitos separados en temperatura por 300 K. Las temperaturas de los depósitos son como sigue: máquina A: T_h = 1 000 K, T_c = 700 K; máquina B: T_h = 800 K, T_c = 500 K; máquina C: T_h = 600 K, T_c = 300 K. Clasifique las máquinas, por su eficiencia teórica posible, de mayor a menor.

[5] Para que los procesos en el ciclo de Carnot sean reversibles, deben realizarse de manera infinitesimalmente lenta. Por lo tanto, aunque la máquina de Carnot sea la máquina más eficiente posible, ¡tiene una salida de potencia cero porque tarda un intervalo de tiempo infinito en completar un ciclo! Para una máquina real, el corto intervalo de tiempo para cada ciclo resulta en que la sustancia de trabajo alcanza una temperatura alta menor que la del depósito caliente y una temperatura baja mayor que la del depósito frío. Una máquina que experimenta un ciclo de Carnot entre tan estrecho intervalo de temperaturas lo analizaron F. L. Curzon y B. Ahlborn ("Eficiencia de una máquina de Carnot a máxima potencia de salida", *Am. J. Phys.* **43**(1), 22, 1975), quienes encontraron que la eficiencia a máxima potencia de salida sólo depende de las temperaturas de los depósitos T_c y T_h, y está dada por $e_{C-A} = 1 - (T_c/T_h)^{1/2}$. La eficiencia de Curzon-Ahlborn e_{C-A} proporciona una aproximación más cercana a las eficiencias de las máquinas reales que la eficiencia de Carnot.

Ejemplo 22.3 Eficiencia de la máquina de Carnot

Demuestre que la razón de transferencias de energía por calor en una máquina de Carnot es igual a la razón de temperaturas de los depósitos, como lo expresa la ecuación 22.7.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Utilice las figura 22.10 y 22.11 para ayudarse a visualizar los procesos en el ciclo de Carnot.

Categorizar Debido a la comprensión del ciclo de Carnot, los procesos en el ciclo se pueden clasificar como isotérmico y adiabático.

Analizar Para la expansión isotérmica (proceso $A \rightarrow B$ en la figura 22.10), encuentre la transferencia de energía por calor desde el depósito caliente mediante la ecuación 20.14 y la primera ley de la termodinámica:

$$|Q_h| = |\Delta E_{\text{int}} - W_{AB}| = |0 - W_{AB}| = nRT_h \ln \frac{V_B}{V_A}$$

De manera similar, determine la transferencia de energía al depósito frío durante la compresión isotérmica $C \rightarrow D$:

$$|Q_c| = |\Delta E_{\text{int}} - W_{CD}| = |0 - W_{CD}| = nRT_c \ln \frac{V_C}{V_D}$$

Divida la segunda expresión entre la primera:

$$(1) \quad \frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c}{T_h} \frac{\ln (V_C/V_D)}{\ln (V_B/V_A)}$$

Aplique la ecuación 21.39 a los procesos adiabáticos $B \rightarrow C$ y $D \rightarrow A$:

$$T_h V_B^{\gamma-1} = T_c V_C^{\gamma-1}$$
$$T_h V_A^{\gamma-1} = T_c V_D^{\gamma-1}$$

Divida la primera ecuación entre la segunda:

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$$

$$(2) \quad \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Sustituya la ecuación (2) en la ecuación (1):

$$\frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c}{T_h} \frac{\ln (V_C/V_D)}{\ln (V_B/V_A)} = \frac{T_c}{T_h} \frac{\ln (V_C/V_D)}{\ln (V_C/V_D)} = \frac{T_c}{T_h}$$

Finalizar Esta última ecuación es la ecuación 22.5, la que se debía comprobar.

Ejemplo 22.4 La máquina de vapor

Una máquina de vapor tiene un calentador que funciona a 500 K. La energía del combustible quemado cambia el agua líquida a vapor, y este vapor después impulsa un pistón. La temperatura del depósito frío es la del aire exterior, aproximadamente 300 K. ¿Cuál es la máxima eficiencia térmica de esta máquina de vapor?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En una máquina de vapor, el gas que empuja sobre el pistón en la figura 22.10 es vapor. Una máquina de vapor real no funciona en un ciclo de Carnot, pero para encontrar la máxima eficiencia posible, imagine una máquina de vapor de Carnot.

Categorizar La eficiencia se calcula con la ecuación 22.8, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Sustituya las temperaturas de los depósitos en la ecuación 22.8:

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{300\ \text{K}}{500\ \text{K}} = 0.400 \quad \text{o} \quad 40.0\%$$

Este resultado es la máxima eficiencia *teórica* de la máquina. En la práctica, la eficiencia es considerablemente menor.

22.4 continuación

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que se quiere aumentar la eficiencia teórica de esta máquina. Este aumento se puede lograr al elevar T_h en ΔT o reducir T_c por la misma ΔT. ¿Qué sería más efectivo?

Respuesta Una ΔT dada tendría un mayor efecto fraccionario sobre una temperatura más pequeña, así se esperaría un mayor cambio en la eficiencia si se altera T_c en ΔT. Pruebe esto numéricamente. Eleve T_h en 50 K, lo que corresponde a $T_h = 550$ K, esto daría una máxima eficiencia de

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{300\ \text{K}}{550\ \text{K}} = 0.455$$

Si reduce T_c en 50 K, lo que corresponde a $T_c = 250$ K, se obtendría una eficiencia máxima de

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{250\ \text{K}}{500\ \text{K}} = 0.500$$

Aunque cambiar T_c es *matemáticamente* más efectivo, con frecuencia cambiar T_h es *prácticamente* más factible.

22.5 Motores de gasolina y diesel

En cada ciclo de un motor de gasolina se presentan seis procesos, que se ilustran en la figura 22.12. En esta discusión, considere el interior del cilindro arriba del pistón como el sistema que se lleva a través de ciclos repetidos en el funcionamiento del motor. Para un ciclo dado, el pistón se mueve arriba y abajo dos veces, lo que representa un ciclo de cuatro tiempos que consiste de dos recorridos ascendentes y dos recorridos descendentes. Los procesos en el ciclo se pueden aproximar mediante el **ciclo de Otto** que se muestra en el diagrama *PV* en la figura 22.13 (página 666). En la siguiente explicación consulte la figura 22.12 para la representación pictórica de los tiempos y la figura 22.13 para el significado del diagrama *PV* de la siguiente designación de caracteres:

1. Durante la *carrera de admisión* (figura 22.12a y $O \rightarrow A$ en la figura 22.13) el pistón se mueve hacia abajo y una mezcla gaseosa de aire y combustible entra

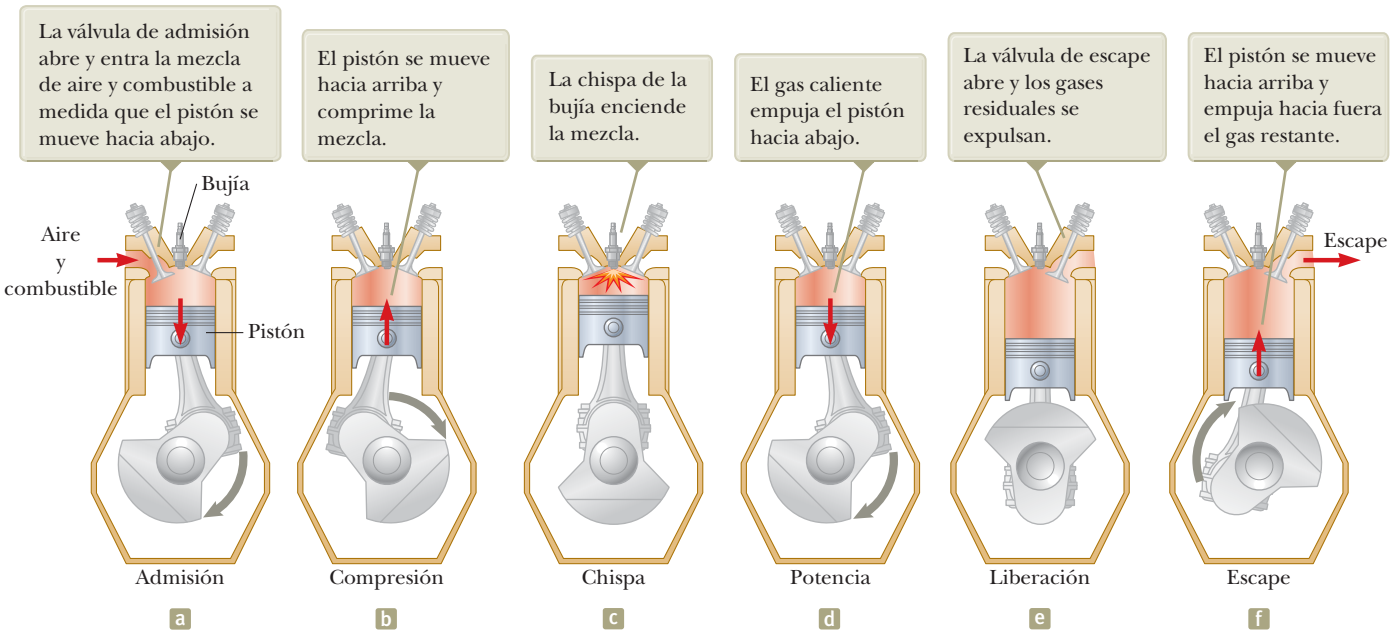


Figura 22.12 Ciclo de cuatro tiempos de un motor de gasolina convencional. Las flechas en el pistón indican la dirección de su movimiento durante cada proceso.

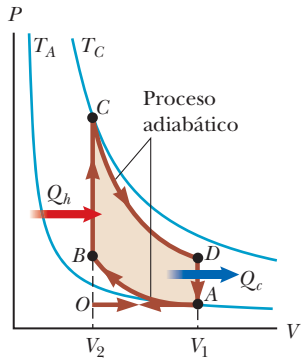


Figura 22.13 Diagrama *PV* para el ciclo de Otto, que representa aproximadamente los procesos que ocurren en un motor de combustión interna.

al cilindro a presión atmosférica. Ésta es parte de la energía de entrada del ciclo: la energía entra al sistema (el interior del cilindro) por transferencia de materia como energía potencial almacenada en el combustible. En este proceso, el volumen aumenta de V_2 a V_1. Esta aparente numeración hacia atrás se basa en el tiempo de compresión (proceso 2 que se presenta a continuación), en donde la mezcla de aire-combustible se comprime de V_1 a V_2.

2. Durante la *carrera de compresión* (figura 22.12b y $A \rightarrow B$ en la figura 22.13) el pistón se mueve hacia arriba, la mezcla de aire-combustible se comprime adiabáticamente del volumen V_1 al volumen V_2 y la temperatura aumenta de T_A a T_B. El trabajo realizado sobre el gas es positivo y su valor es igual al negativo del área bajo la curva AB en la figura 22.13.
3. La combustión ocurre cuando la bujía produce una chispa (figura 22.12c y $B \rightarrow C$ en la figura 22.13). Éste no es uno de los tiempos del ciclo porque se presenta en un intervalo de tiempo muy breve, mientras el pistón está en su posición más alta. La combustión representa una transformación rápida de energía potencial almacenada en enlaces químicos en el combustible en energía interna asociada con el movimiento molecular, que se relaciona con la temperatura. Durante este intervalo de tiempo la presión y temperatura de la mezcla aumentan rápidamente, y la temperatura se eleva de T_B a T_C. Sin embargo, el volumen permanece aproximadamente constante debido al breve intervalo de tiempo. Como resultado, casi no se realiza trabajo sobre o por el gas. Este proceso se puede modelar en el diagrama *PV* (figura 22.13) como aquel proceso en donde la energía $|Q_h|$ entra al sistema. (Sin embargo, en realidad este proceso es una *transformación* de energía ya existente en el cilindro del proceso $O \rightarrow A$.)
4. En el *tiempo de trabajo* (figura 22.12d y $C \rightarrow D$ en la figura 22.13) el gas se expande adiabáticamente de V_2 a V_1. Esta expansión causa la caída de temperatura de T_C a T_D. El gas realiza trabajo al empujar el pistón hacia abajo y el valor de este trabajo es igual al área bajo la curva CD.
5. La liberación de los gases residuales ocurre cuando se abre una válvula de escape (figura 22.12e y $D \rightarrow A$ en la figura 22.13). La presión cae súbitamente por un breve intervalo de tiempo. Durante éste el pistón es casi fijo y el volumen es aproximadamente constante. Desde el interior del cilindro se expulsa energía y continúa expulsándose durante el siguiente proceso.
6. En el proceso final, la *carrera de escape* (figura 22.12e y $A \rightarrow O$ en la figura 22.13), el pistón se mueve hacia arriba mientras la válvula de escape permanece abierta. Los gases residuales se expulsan a presión atmosférica y el volumen disminuye de V_1 a V_2. Después el ciclo se repite.

Si la mezcla aire-combustible se supone como un gas ideal, la eficiencia del ciclo de Otto es

$$e = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}} \quad \text{(ciclo de Otto)} \tag{22.9}$$

donde V_1/V_2 es la **razón de compresión** y γ es la razón de los calores específicos molares C_P/C_V para la mezcla aire-combustible. La ecuación 22.9, que se deduce en el ejemplo 22.5, muestra que la eficiencia aumenta conforme se incrementa la razón de compresión. Para una típica razón de compresión de 8 y con $\gamma = 1.4$, la ecuación 22.9 predice una eficiencia teórica de 56% para un motor que opera en el ciclo de Otto idealizado. Este valor es mucho mayor que el logrado en los motores reales (15% a 20%) debido a efectos como fricción, transferencia de energía por conducción a través de las paredes del cilindro y combustión incompleta de la mezcla aire-combustible.

Los motores diesel operan en un ciclo similar al ciclo de Otto, pero no emplean bujía. La razón de compresión para un motor diesel es mucho mayor que la de un motor de gasolina. El aire en el cilindro se comprime a un volumen muy pequeño y,

como consecuencia, la temperatura del cilindro al final del tiempo de compresión es muy alta. En este punto, el combustible se inyecta en el cilindro. La temperatura es lo suficientemente alta para que la mezcla de aire-combustible se encienda sin la ayuda de una bujía. Los motores diesel son más eficientes que los motores de gasolina debido a sus mayores razones de compresión y a las mayores temperaturas de combustión resultantes.

Ejemplo 22.5 Eficiencia del ciclo de Otto

Demuestre que la eficiencia térmica de un motor que funciona en un ciclo de Otto (vea las figuras 22.12 y 22.13) está dada por la ecuación 22.9. Trate la sustancia de trabajo como un gas ideal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie las figura 22.12 y 22.13 para asegurarse de que entendió el funcionamiento del ciclo de Otto.

Categorizar Como se vio en la figura 22.13, los procesos en el ciclo de Otto se clasifican como isovolumétrico y adiabático.

Analizar Modele la entrada y salida de energía por calor en los procesos $B \rightarrow C$ y $D \rightarrow A$. (En realidad, la mayor parte de la energía entra y sale por transferencia de materia conforme la mezcla de aire-combustible entra y sale del cilindro.) Use la ecuación 21.23 para encontrar las transferencias de energía por calor para dichos procesos, que tienen lugar a volumen constante.

$$B \rightarrow C \quad |Q_h| = nC_V(T_C - T_B)$$
$$D \rightarrow A \quad |Q_c| = nC_V(T_D - T_A)$$

Sustituya estas expresiones en la ecuación 22.2:

$$(1) \quad e = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

Aplique la ecuación 21.39 a los procesos adiabáticos $A \rightarrow B$ y $C \rightarrow D$:

$$A \rightarrow B \quad T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$
$$C \rightarrow D \quad T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$$

Resuelva estas expresiones para las temperaturas T_A y T_D, y note que $V_A = V_D = V_1$ y $V_B = V_C = V_2$:

$$(2) \quad T_A = T_B\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = T_B\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$
$$(3) \quad T_D = T_C\left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = T_C\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

Reste la ecuación (2) de la ecuación (3) y reordene:

$$(4) \quad \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

Sustituya la ecuación (4) en la ecuación (1):

$$e = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}}$$

Finalizar Esta expresión final es la ecuación 22.9.

22.6 Entropía

La ley cero de la termodinámica involucra el concepto de temperatura, y la primera ley concierne al concepto de energía interna. Temperatura y energía interna son variables de estado; es decir, el valor de cada una sólo depende del estado termodinámico de un sistema, no del proceso que lo llevó a dicho estado. Otra variable de estado, relacionada con la segunda ley de la termodinámica, es la *entropía*.

La entropía originalmente se formuló como un concepto útil en termodinámica. Sin embargo, su importancia creció conforme el campo de la mecánica estadística se desarrolló, porque las técnicas analíticas de ésta proporcionan un medio alternativo de interpretar la entropía y un significado más global a este concepto. En mecánica

Prevención de riesgos ocultos 22.4

La entropía es abstracta La entropía es uno de los conceptos más abstractos de la física, así que siga con mucho cuidado la explicación en esta y las secciones siguientes. No confunda energía con entropía. Aun cuando los nombres suenen similares, los conceptos son muy diferentes.

estadística, el comportamiento de una sustancia se describe en términos del comportamiento estadístico de sus átomos y moléculas.

Para desarrollar la comprensión de la entropía, primero se consideran algunos sistemas no termodinámicos, como un par de dados y manos de póquer. Después estas ideas se extienden y se utilizan para entender el concepto de entropía como aplicado a sistemas termodinámicos.

Este proceso se inicia con la distinción entre *microestados* y *macroestados* de un sistema. Un **microestado** es una configuración particular de los componentes individuales del sistema. Un **macroestado** es una descripción de las condiciones del sistema desde un punto de vista macroscópico.

Para un macroestado dado del sistema es posible un cierto número de microestados. Por ejemplo, el macroestado de un 4 en un par de dados se puede formar a partir de los posibles microestados 1-3, 2-2 y 3-1. El macroestado de 2 sólo tiene un microestado, 1-1. Se supone que todos los microestados son igualmente probables. Hay tres maneras de comparar estos dos macroestados: (1) *Incertidumbre*: si se conoce que existe un macroestado de 4, hay alguna incertidumbre respecto al correspondiente microestado, porque existen múltiples microestados que conducen a 4. En comparación, hay menor incertidumbre (de hecho, incertidumbre *cero*) para un macroestado de 2, porque sólo se tiene un microestado. (2) *Elección*: existen más elecciones de microestados para un 4 que para un 2. (3) *Probabilidad*: el macroestado de 4 tiene mayor probabilidad que un macroestado de 2, porque hay más maneras (microestados) de lograr un 4. Los conceptos de incertidumbre, elección y probabilidad son centrales al concepto de entropía, como se discutirá a continuación.

Considere otro ejemplo relacionado con la mano de póquer. Sólo hay un microestado asociado con el macroestado de una flor imperial de cinco espadas, que se encuentran en orden del diez al as (figura 22.14a). La figura 22.14b muestra otra mano de póquer. Aquí el macroestado es "una mano sin valor". La mano *particular* (el microestado) en la figura 22.14b y la mano en la figura 22.14a son igualmente probables. Sin embargo, se tienen *muchas* otras manos similares a la exhibida en la figura 22.14b; es decir, existen muchos microestados que también son manos sin valor. Si usted, como jugador de póquer, le dice a su oponente que tiene un macroestado de una flor imperial en espadas, hay *incertidumbre cero* con respecto a las cinco cartas que están en la mano, sólo *una elección* de qué cartas son y *baja probabilidad* de que la mano realmente ocurrió. En contraste, si usted expresa a su oponente que tiene un macroestado de "mano sin valor", entonces existe una *alta incertidumbre* sobre cuáles cinco cartas podrían ser, podrían ser *muchas elecciones*, con una *alta probabilidad* de que haya ocurrido una mano sin valor. De hecho, otra variable en el póquer es el valor de la mano, relacionada con la probabilidad: entre más alta la probabilidad, menor es el valor. El punto importante a destacar de esta discusión es que incertidumbre, elección y probabilidad están relacionadas en estas situaciones: si una es alta, las otras son altas, y viceversa.

Otra manera de describir macroestados es por medio de "falta de información". Para macroestados de alta probabilidad con muchos microestados existe gran can-





Figura 22.14 (a) Una flor imperial tiene baja probabilidad de ocurrir. (b) Una mano de póquer sin valor, una de tantas.

tidad de información faltante, lo que significa que se tiene muy poca información sobre qué microestado realmente es. Para un macroestado de un 2 sobre un par de dados, no hay información faltante; se *sabe* que el microestado es 1-1. Sin embargo, para un macroestado de una mano de póquer sin valor, se tiene bastante falta de información debido al gran número de elecciones que se podrían hacer para dicha mano.

Examen rápido 22.4 **(a)** Suponga que selecciona cuatro cartas al azar de un mazo estándar de baraja y termina con un macroestado de cuatro 2. ¿Cuántos microestados se asocian con este macroestado? **(b)** Suponga que levanta dos cartas y termina con un macroestado de dos ases. ¿Cuántos microestados se asocian con este macroestado?

Para sistemas termodinámicos la variable **entropía** S se emplea para representar el nivel de incertidumbre, elección, probabilidad o falta de información en el sistema. Considere una configuración (un macroestado) en el cual todas las moléculas de oxígeno en su cuarto se localizan en la mitad oeste de la habitación y las moléculas de nitrógeno en la mitad este. Compare ese macroestado con la configuración más común de las moléculas de aire distribuidas uniformemente en toda la habitación. La última configuración tiene mayor incertidumbre y más información faltante respecto a dónde se localizan las moléculas, porque éstas podrían estar en cualquier parte, no justamente en una mitad de la habitación de acuerdo con el tipo de molécula. La configuración con una distribución uniforme también representa más elecciones respecto a dónde localizar a las moléculas. También tiene más alta probabilidad de ocurrir; ¿acaso usted ha notado que la mitad de su cuarto súbitamente se queda vacía de oxígeno? Por lo tanto, la última configuración representa una alta entropía.

Para sistemas de dados y manos de póquer, la comparación entre probabilidades para varios macroestados involucran números relativamente pequeños. Por ejemplo, un macroestado de un 4 sobre un par de dados sólo es tres veces más probable que un macroestado de 2. La razón de probabilidades de una mano sin valor y una flor imperial es significativamente mayor. Sin embargo, cuando se habla de un sistema termodinámico macroscópico que contiene una cantidad de partículas del orden del número de Avogadro, las razones de probabilidades pueden ser astronómicas.

Explore este concepto al considerar 100 moléculas en un recipiente. La mitad de las moléculas son de oxígeno y la otra mitad son de nitrógeno. En cualquier momento dado la probabilidad de que una molécula esté en la parte izquierda del recipiente, que se muestra en la figura 22.15a, como resultado de movimiento aleatorio es $\frac{1}{2}$. Si hay dos moléculas, como se indica en la figura 22.15b, la probabilidad de que ambas estén en la parte izquierda es $(\frac{1}{2})^2$, o 1 en 4. Si hay tres moléculas (figura 22.15c), la probabilidad de que todas ellas estén en la porción izquierda al mismo tiempo es $(\frac{1}{2})^3$, o 1 en 8. Para 100 moléculas que se mueven independientemente, la probabilidad de que las 50 moléculas de oxígeno sean encontradas en la parte izquierda en cualquier momento es $(\frac{1}{2})^{50}$. Del mismo modo, la probabilidad de que las restan-

Prevención de riesgos ocultos 22.5

La entropía es para sistemas termodinámicos No se ha aplicado la palabra *entropía* para describir los sistemas de dados o cartas. Se discutieron los dados y cartas sólo para establecer los conceptos de microestados, macroestados, incertidumbre, elección, probabilidad y falta de información. La entropía *sólo* puede emplearse para describir sistemas termodinámicos que contienen muchas partículas, permitiendo que el sistema almacene energía como energía interna.

Prevención de riesgos ocultos 22.6

Entropía y desorden En algunos textos la entropía es relacionada con el *desorden* de un sistema. Aunque ese enfoque tiene cierto mérito, no es totalmente exitoso. Por ejemplo, considere dos muestras del mismo material sólido a la misma temperatura. Una muestra tiene volumen V y la otra tiene volumen $2V$. La muestra grande tiene mayor entropía que la pequeña simplemente porque hay más moléculas en ella. Pero no está claro en qué sentido esté más desordenada que la muestra pequeña. En este texto no se utiliza el enfoque de desorden, pero puede observarlo en otras fuentes.

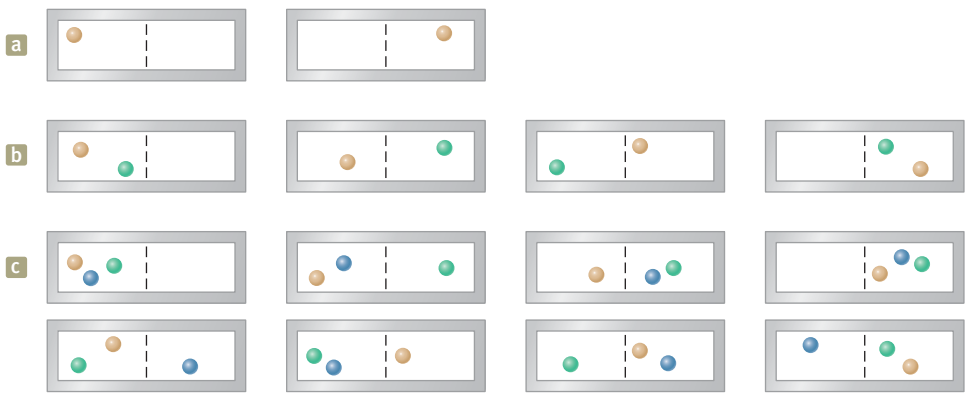


Figura 22.15 Posibles distribuciones de moléculas idénticas en un recipiente. Los colores que aquí se emplean permiten distinguir las moléculas. (a) Una molécula en un recipiente tiene una oportunidad de 1 en 2 de estar en el lado izquierdo. (b) Dos moléculas tienen una oportunidad de 1 en 4 de estar en el lado izquierdo al mismo tiempo. (c) Tres moléculas tienen una oportunidad de 1 en 8 de estar en el lado izquierdo al mismo tiempo.

tes 50 moléculas de nitrógeno se encuentren en la porción derecha en cualquier momento es $(\frac{1}{2})^{50}$. Por lo tanto, la probabilidad de tener esta separación oxígeno-nitrógeno como resultado de movimiento aleatorio es el producto $(\frac{1}{2})^{50}(\frac{1}{2})^{50} = (\frac{1}{2})^{100}$, que corresponde aproximadamente a 1 en 10^{30}. Cuando este cálculo se extrapola de 100 moléculas al número en 1 mol de gas (6.02×10^{23}), ¡se encuentra que el arreglo ordenado es *extremadamente* improbable!

Ejemplo conceptual 22.6 ¡A jugar canicas!

Suponga que tiene una bolsa con 100 canicas, de las cuales 50 son rojas y 50 son verdes. Se le permite extraer cuatro canicas de la bolsa, de acuerdo con las siguientes reglas. Extraiga una canica, registre su color y regrésela a la bolsa. Agite la bolsa y luego extraiga otra canica. Continúe este proceso hasta que haya extraído y regresado cuatro canicas. ¿Cuáles son los posibles macroestados para este conjunto de eventos? ¿Cuál es el macroestado menos probable?

SOLUCIÓN

Ya que cada canica se regresa a la bolsa antes de que la siguiente se extraiga y luego la bolsa se agita, la probabilidad de extraer una canica roja siempre es la misma que la probabilidad de extraer una verde. En la tabla 22.1 se muestran todos los posibles microestados y macroestados. Como indica esta tabla, sólo hay una forma de extraer un macroestado de cuatro canicas rojas, así que sólo hay un microestado para dicho macroestado. Sin embargo, hay cuatro posibles microestados que corresponden al macroestado de una canica verde y tres canicas rojas, seis microestados que corresponden a dos canicas verdes y dos canicas rojas, cuatro microestados que corresponden a tres canicas verdes y una canica roja, y un microestado que corresponde a cuatro canicas verdes. El macroestado más probable, dos canicas rojas y dos canicas verdes, corresponde al mayor número de elecciones de microestados y, por lo tanto, el más incierto en cuanto a qué microestado exacto es. Los macroestados menos probables, cuatro canicas rojas o cuatro canicas verdes, corresponden a sólo una elección de microestado y, por lo tanto, de incertidumbre cero. No existe falta de información para los estados menos probables: se conocen los colores de las cuatro canicas.

Tabla 22.1 Posibles resultados de extraer cuatro canicas de una bolsa

Macroestado	Posibles microestados	Número total de microestados
Todas R	RRRR	1
1V, 3R	RRRV, RRVR, RVRR, VRRR	4
2V, 2R	RRVV, RVRV, VRRV, RVVR, VRVR, VVRR	6
3V, 1R	VVVR, VVRV, VRVV, RVVV	4
Todas V	VVVV	1

Se investigaron los conceptos de incertidumbre, número de elecciones, probabilidad y falta de información para algunos sistemas no termodinámicos, y se argumentó que el concepto de entropía puede relacionarse con estos conceptos para sistemas termodinámicos. No se ha indicado cómo evaluar la entropía numéricamente para un sistema termodinámico. Esta evaluación fue realizada, mediante métodos estadísticos, por Boltzmann en 1870 y su forma actualmente aceptada es

$$S = k_B \ln W \tag{22.10}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann; W proviene de la palabra alemana *Wahrscheinlichkeit* para probabilidad, y Boltzmann propone que sea proporcional a la probabilidad de que exista un determinado macroestado. Es equivalente a que W sea el número de microestados asociados con el macroestado, así que W se puede interpretar como el número de "maneras" de lograr el macroestado. Por lo tanto, macroestados con grandes números de microestados tienen alta probabilidad y, equivalentemente, alta entropía.

En la teoría cinética de los gases las moléculas de gas se representan como partículas con movimiento aleatorio. Suponga que el gas está confinado a un volumen V. Para una distribución uniforme del gas en el volumen, existe un gran número de microestados equivalentes, y la entropía del gas se puede relacionar con el número de microestados que corresponden a un macroestado determinado. Cuente el número de microestados al considerar la variedad de ubicaciones moleculares disponibles a las moléculas. Suponga que cada molécula ocupa algún volumen microscópico V_m. El número total de posibles ubicaciones de una sola molécula en

un volumen macroscópico V es la razón $w = V/V_m$, que es un número enorme. Aquí se emplea w para representar el número de maneras en que una molécula puede colocarse en el volumen, o el número de microestados para una sola molécula, que es equivalente al número de ubicaciones disponibles. Se supone que son iguales las probabilidades de que una molécula ocupe alguna de estas ubicaciones. Conforme más moléculas se agregan al sistema, se multiplica el número de posibles maneras en que las moléculas se pueden posicionar en el volumen, como se vio en la figura 22.15. Por ejemplo, si considera dos moléculas, para cada posible colocación de la primera, todas las posibles ubicaciones de la segunda están disponibles. Por lo tanto, hay w maneras de colocar la primera molécula, y por cada manera existen w formas de ubicar la segunda molécula. El número total de maneras de colocar las dos moléculas es $W = w \times w = w^2 = (V/V_m)^2$. ($W$ representa el número de maneras de colocar múltiples moléculas en el volumen y no se debe confundir con trabajo.)

Ahora considere colocar N moléculas de gas en el volumen V. Si desprecia la probabilidad, muy pequeña, de tener dos moléculas ocupando la misma ubicación, cada molécula puede ir en alguna de las V/V_m ubicaciones, y así el número de maneras de colocar N moléculas en el volumen es $W = w^N = (V/V_m)^N$. Por lo tanto, la parte espacial de la entropía del gas, a partir de la ecuación 22.10, es

$$S = k_B \ln W = k_B \ln \left(\frac{V}{V_m}\right)^N = Nk_B \ln \left(\frac{V}{V_m}\right) = nR \ln \left(\frac{V}{V_m}\right) \qquad \textbf{(22.11)}$$

En la próxima sección se utiliza esta expresión para investigar cambios en entropía en procesos que ocurren en sistemas termodinámicos.

Observe que la ecuación 22.11 sólo representa la porción *espacial* de la entropía del gas. También existe una porción de la entropía que depende de la temperatura, que la discusión anterior no considera. Por ejemplo, imagine un proceso isovolumétrico en donde se incrementa la temperatura del gas. Para esta situación, la ecuación 22.11 no muestra algún cambio en la porción espacial de la entropía. Sin embargo, *existe* un cambio de entropía asociado con el incremento de la temperatura. Esto se puede entender si otra vez se apela a la física cuántica. De la sección 21.3, recuerde que las energías de las moléculas de gas están cuantizadas. Cuando cambia la temperatura de un gas, la distribución de energías de las moléculas de gas cambia de acuerdo con la ley de distribución de Boltzmann, discutida en la sección 21.5. Por lo tanto, a medida que aumenta la temperatura del gas, hay más incertidumbre sobre el microestado particular correspondiente conforme las moléculas de gas se distribuyen por sí mismas en altos estados cuánticos disponibles. En el ejemplo 22.8 se considera el cambio de entropía asociado con un proceso isovolumétrico.

22.7 Cambios de entropía en sistemas termodinámicos

Los sistemas termodinámicos están en flujo constante, cambian continuamente de un microestado a otro. Si el sistema está en equilibrio, existe un determinado macroestado y el sistema fluctúa de un microestado asociado con ese macroestado a otro. Este cambio no es observable porque sólo es posible detectar al macroestado. Los estados de equilibrio tiene una probabilidad mucho mayor que los estados de no equilibrio, entonces es muy poco probable que un estado de equilibrio cambie, de manera espontánea, a un estado de no equilibrio. Por ejemplo, no se observa la separación espontánea en oxígeno-nitrógeno discutida en la sección 22.6.

Sin embargo, ¿qué pasaría si el sistema inicia en un macroestado de baja probabilidad? ¿Qué ocurriría si la habitación *inicia* con una separación oxígeno-nitrógeno? En este caso, el sistema evoluciona de este macroestado de baja probabilidad al estado de más alta probabilidad: los gases se dispersan y mezclan a través de la habitación. La entropía está relacionada con la probabilidad, así que un incremento espontáneo en la entropía, como en la última situación, es natural. Si inicialmente

las moléculas de oxígeno y de nitrógeno estuvieran esparcidas de manera uniforme en la habitación, ocurriría un descenso en la entropía si sucediera una separación espontánea de las moléculas.

Una manera de conceptualizar un cambio en la entropía es relacionarlo al *esparcimiento de energía*. Una tendencia natural de la energía es el experimentar un esparcimiento espacial en el tiempo, representando un incremento en la entropía. Si una pelota de basquetbol cae al suelo, rebota varias veces y eventualmente llega al reposo. La energía potencial gravitacional inicial en el sistema pelota-Tierra se ha transformado en energía interna en la bola y el piso. Esa energía se ha esparcido por calor hacia el aire y a regiones del piso alejadas del punto de caída. Además, algo de la energía se ha diseminado por sonido a través de la habitación. No sería natural que la energía en la habitación y en el suelo invirtiera su movimiento y se concentrara en la pelota estacionaria de tal manera que ésta espontáneamente empezara a rebotar otra vez.

En la expansión libre adiabática de la sección 22.3, el esparcimiento de energía acompaña a la diseminación de las moléculas conforme el gas se precipita a la mitad evacuada del recipiente. Si un objeto caliente se coloca en contacto térmico con un objeto frío, la energía se transfiere por calor del objeto caliente al frío, representando una diseminación de energía hasta que esté distribuida más uniformemente entre los dos objetos.

Ahora considere una representación matemática de este esparcimiento de energía o, equivalentemente, el cambio de entropía. La formulación original de entropía en termodinámica involucra la transferencia de energía por calor durante un proceso reversible. Considere cualquier proceso infinitesimal en el que un sistema cambia de un estado de equilibrio a otro. Si dQ_r es la cantidad de energía transferida por calor cuando el sistema sigue una trayectoria reversible entre los estados, el cambio en entropía dS es igual a esta cantidad de energía dividida entre la temperatura absoluta del sistema:

Cambio en entropía para un proceso infinitesimal

$$dS = \frac{dQ_r}{T} \tag{22.12}$$

Se supone que la temperatura es constante porque el proceso es infinitesimal. La entropía es una variable de estado, así el cambio en entropía durante un proceso sólo depende de los puntos extremos y, por lo tanto, es independiente de la trayectoria real seguida. En consecuencia, el cambio en entropía para un proceso irreversible se determina al calcular el cambio en entropía para un proceso *reversible* que conecta los mismos estados inicial y final.

El subíndice r en la cantidad dQ_r es un recordatorio de que la energía transferida se mide a lo largo de una trayectoria reversible aun cuando quizás el sistema en realidad siguió alguna trayectoria irreversible. Cuando el sistema absorbe energía, dQ_r es positiva y la entropía del sistema aumenta. Cuando el sistema expulsa energía, dQ_r es negativa y la entropía del sistema disminuye. Note que la ecuación 22.12 no define la entropía sino, más bien, el *cambio* en entropía. Por tanto, la cantidad significativa para describir un proceso es el *cambio* en entropía.

Para calcular el cambio en entropía para un proceso *finito*, primero reconozca que T, por lo general, no es constante durante el proceso. Por lo tanto, se debe integrar la ecuación 22.12:

Cambio en entropía para un proceso finito

$$\Delta S = \int_i^f dS = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} \tag{22.13}$$

Igual que con un proceso infinitesimal, el cambio en entropía ΔS de un sistema que va de un estado a otro tiene el mismo valor para *todas* las trayectorias que conectan los dos estados. Es decir, el cambio finito en entropía ΔS de un sistema sólo depende de las propiedades de los estados de equilibrio inicial y final. Por lo tanto, se tiene la libertad de elegir cualquier trayectoria conveniente sobre la cual evaluar la entropía en lugar de la trayectoria real, en tanto los estados inicial y final sean los mismos para ambas trayectorias. Este punto se explora más en esta sección.

De la ecuación 22.10, se tiene que un cambio en entropía se representa en la ecuación de Boltzmann como

$$\Delta S = k_B \ln\left(\frac{W_f}{W_i}\right) \tag{22.14}$$

donde W_i y W_f son los números de microestados inicial y final, respectivamente, para las configuraciones inicial y final del sistema. Si $W_f > W_i$, el estado final es más probable que el estado inicial (existen más elecciones de microestados), y la entropía aumenta.

Examen rápido 22.5 Un gas ideal se lleva de una temperatura inicial T_i a una temperatura final mayor T_f a lo largo de dos trayectorias reversibles diferentes. La trayectoria A está a presión constante, y la trayectoria B es a volumen constante. ¿Cuál es la relación entre los cambios de entropía del gas para estas trayectorias? **(a)** $\Delta S_A > \Delta S_B$, **(b)** $\Delta S_A = \Delta S_B$, **(c)** $\Delta S_A < \Delta S_B$.

Examen rápido 22.6 Verdadero o falso: El cambio de entropía en un proceso adiabático debe ser cero porque $Q = 0$.

Ejemplo 22.7 Cambio en entropía: fusión

Un sólido que tiene un calor latente de fusión L_f se funde a una temperatura T_m. Calcule el cambio en entropía de esta sustancia cuando se funde una masa m de la sustancia.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Se puede elegir cualquier trayectoria reversible conveniente que conecte los estados inicial y final. No es necesario identificar el proceso o la trayectoria, cualquiera que sea, el efecto es el mismo: la energía entra a la sustancia por calor y ésta se funde. La masa m de la sustancia que se funde es igual a Δm, el cambio en masa de la sustancia de fase mayor (líquida).

Categorizar La fusión ocurre a una temperatura fija, así el proceso se clasifica como isotérmico.

Analizar Aplique la ecuación 20.7 en la ecuación 22.13 y note que la temperatura permanece fija:

$$\Delta S = \int \frac{dQ_r}{T} = \frac{1}{T_m}\int dQ_r = \frac{Q_r}{T_m} = \frac{L_f \Delta m}{T_m} = \frac{L_f m}{T_m}$$

Finalizar Observe que Δm es positivo, así que ΔS es positivo, esto significa que a la sustancia se le agrega energía.

Cambio en entropía en un ciclo de Carnot

Considere los cambios en entropía que ocurren en una máquina térmica de Carnot que opera entre las temperaturas T_c y T_h. En un ciclo la máquina toma energía $|Q_h|$ del depósito caliente y expulsa energía $|Q_c|$ al depósito frío. Estas transferencias de energías sólo se presentan durante las porciones isotérmicas del ciclo de Carnot; por lo tanto, la temperatura constante se puede sacar enfrente del signo de integral en la ecuación 22.13. Entonces la integral simplemente tiene el valor de la cantidad de energía total transferida por calor. Así, el cambio total en entropía para un ciclo es

$$\Delta S = \frac{|Q_h|}{T_h} - \frac{|Q_c|}{T_c} \tag{22.15}$$

donde el signo menos indica que la energía sale de la máquina a temperatura T_c. En el ejemplo 22.3 se probó que para una máquina de Carnot,

$$\frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c}{T_h}$$

Al emplear este resultado en la ecuación 22.15, se encuentra que el cambio total en entropía para una máquina de Carnot que funciona en un ciclo es *cero*:

$$\Delta S = 0$$

Ahora considere un sistema que se lleva a través de un ciclo reversible arbitrario (no de Carnot). La entropía es una variable de estado, así que sólo depende de las propiedades de un estado de equilibrio determinado, entonces se concluye que $\Delta S = 0$ para *cualquier* ciclo reversible. En general, esta condición se puede escribir como

$$\oint \frac{dQ_r}{T} = 0 \quad \text{(ciclo reversible)} \tag{22.16}$$

donde el símbolo $\oint$ indica que la integración es sobre una trayectoria cerrada.

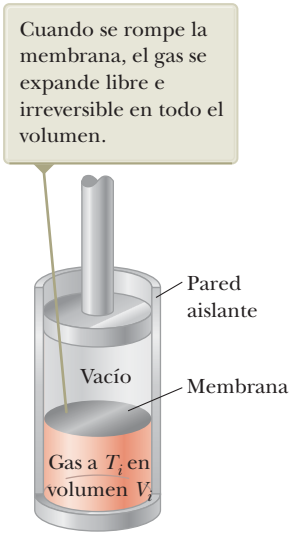


Figura 22.16 Expansión libre adiabática de un gas. El recipiente está térmicamente aislado de sus alrededores; por lo tanto, $Q = 0$.

Cambio de entropía en una expansión libre

Considere de nuevo la expansión libre adiabática de un gas que ocupa un volumen inicial V_i (figura 22.16). En esta situación se rompe una membrana que separa al gas de una región evacuada y el gas se expande a un volumen V_f. Este proceso es irreversible; después de llenar todo el volumen, el gas no se concentraría espontáneamente en una mitad de dicho volumen. ¿Cuál es el cambio en entropía del gas durante este proceso? El proceso no es reversible ni cuasiestático. Como se muestra en la sección 20.6, las temperaturas inicial y final del gas son las mismas.

Para aplicar la ecuación 22.13 no se puede tomar $Q = 0$, el valor para el proceso irreversible, sino que se debe obtener Q_r; es decir, se debe encontrar una trayectoria reversible equivalente que comparta los mismos estados inicial y final. Una elección simple es una expansión isotérmica reversible en donde el gas empuja lentamente contra un pistón mientras entra energía al gas, por calor, desde un depósito para mantener constante la temperatura. Ya que T es constante en este proceso, la ecuación 22.13 da

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} = \frac{1}{T}\int_i^f dQ_r$$

Para un proceso isotérmico, la primera ley de la termodinámica especifica que $\int_i^f dQ_r$ es igual al negativo del trabajo realizado sobre el gas durante la expansión de V_i a V_f, dado por la ecuación 20.14. Al emplear este resultado, se encuentra que el cambio de entropía para el gas es

$$\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \tag{22.17}$$

Ya que $V_f > V_i$, se concluye que ΔS es positivo. Este resultado positivo indica que la entropía del gas se *incrementa* como resultado de la expansión adiabática irreversible.

Es fácil ver que la energía se ha esparcido después de la expansión. En lugar de estar concentradas en un espacio relativamente pequeño, las moléculas y la energía asociada con ellas se dispersan en una región más amplia.

Cambio de entropía en conducción térmica

Ahora considere un sistema que consiste en un depósito caliente y un depósito frío en contacto térmico mutuo y aislados del resto del universo. Durante un proceso, la energía Q se transfiere por calor del depósito caliente a temperatura T_h al depósito frío a temperatura T_c. El proceso, como se describe, es irreversible (la energía no fluye espontáneamente del frío al caliente), así que debe encontrarse un proceso reversible equivalente. Todo el proceso es una combinación de dos procesos: la energía saliendo del depósito caliente y la energía entrando al depósito frío. En cada proceso se calcula el cambio de entropía para el depósito y se suma para obtener el cambio de entropía global.

Primero considere el proceso de entrada de energía al depósito frío. No obstante que el depósito ha absorbido alguna energía, la temperatura del depósito no ha cambiado. La energía que ha entrado al depósito es la misma que entraría mediante un proceso reversible, isotérmico. Lo mismo es cierto para la energía que abandona el depósito caliente.

El depósito frío absorbe energía Q, así su entropía aumenta en Q/T_c. Al mismo tiempo, el depósito caliente pierde energía Q, entonces su cambio de entropía es $-Q/T_h$. Por lo tanto, el cambio en entropía del sistema es

$$\Delta S = \frac{Q}{T_c} + \frac{-Q}{T_h} = Q\left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_h}\right) > 0 \qquad \textbf{(22.18)}$$

Este incremento es consistente con la interpretación del cambio de entropía como representando la diseminación de energía. En la configuración inicial, el depósito caliente tiene exceso de energía interna respecto al depósito frío. El proceso que ocurre disemina la energía en una distribución más equitativa entre los dos depósitos.

Ejemplo 22.8 Expansión libre adiabática: una última vez

Verifique que los enfoques macroscópico y microscópico para el cálculo de la entropía conducen a la misma conclusión para la expansión libre adiabática de un gas ideal. Suponga que en la figura 22.16 un gas ideal se expande a cuatro veces su volumen inicial. Como se vio para este proceso, las temperaturas inicial y final son las mismas.

(A) Con un enfoque macroscópico, calcule el cambio de entropía para el gas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe de nuevo la figura 22.16, que es un diagrama del sistema antes de la expansión libre adiabática. Imagine romper la membrana de modo que el gas se mueve hacia el área evacuada. La expansión es irreversible.

Categorizar Se puede sustituir el proceso irreversible con un proceso isotérmico reversible entre los mismos estados inicial y final. Este enfoque es macroscópico, así que se emplea una variable termodinámica, en particular, el volumen V.

Analizar Aplique la ecuación 22.17 para evaluar el cambio de entropía:

$$\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = nR \ln\left(\frac{4V_i}{V_i}\right) = nR \ln 4$$

(B) Mediante consideraciones estadísticas, calcule el cambio de entropía para el gas y demuestre que concuerda con la respuesta que obtuvo en el inciso (A).

SOLUCIÓN

Categorizar Este enfoque es microscópico, entonces se utilizan variables relacionadas con las moléculas individuales.

Analizar Como en la discusión que condujo a la ecuación 22.11, el número de microestados disponibles para una sola molécula en el volumen inicial V_i es $w_i = V_i/V_m$, donde V_i es el volumen inicial del gas y V_m es el volumen microscópico ocupado por la molécula. Use este número para encontrar el número de microestados disponibles para N moléculas:

$$W_i = w_i^N = \left(\frac{V_i}{V_m}\right)^N$$

Determine el número de microestados disponibles para N moléculas en el volumen final $V_f = 4V_i$:

$$W_f = \left(\frac{V_f}{V_m}\right)^N = \left(\frac{4V_i}{V_m}\right)^N$$

continúa

22.8 continuación

Utilice la ecuación para obtener el cambio de entropía:

$$\Delta S = k_B \ln\left(\frac{W_f}{W_i}\right)$$

$$= k_B \ln\left(\frac{4V_i}{V_i}\right)^N = k_B \ln\left(4^N\right) = Nk_B \ln 4 = nR \ln 4$$

Finalizar La respuesta es la misma que para el inciso (A), que trata con parámetros macroscópicos.

¿QUÉ PSARÍA SI? En el inciso (A) se usó la ecuación 22.17, que está basada en un proceso isotérmico reversible que conecta los estados inicial y final. ¿Llegaría al mismo resultado si elige un proceso reversible diferente?

Respuesta *Debe* llegar al mismo resultado, porque la entropía es una variable de estado. Por ejemplo, considere los procesos de dos etapas en la figura 22.17: una expansión adiabática reversible de V_i a $4V_i$, $(A \rightarrow B)$ durante el cual la temperatura cae de T_1 a T_2, y un proceso isovolumétrico reversible $(B \rightarrow C)$ que lleva al gas de vuelta a la temperatura inicial T_1. Durante el proceso adiabático reversible, $\Delta S = 0$ porque $Q_r = 0$.

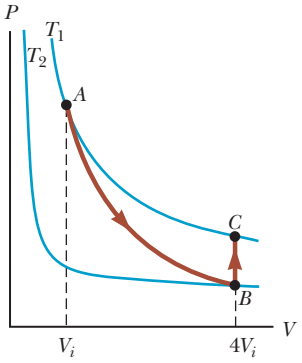


Figura 22.17 (Ejemplo 22.8) Un gas se expande a cuatro veces su volumen inicial y regresa a la temperatura inicial mediante un proceso de dos etapas.

Para el proceso isovolumétrico reversible $(B \rightarrow C)$ use la ecuación 22.13:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_2}^{T_1} \frac{nC_V dT}{T} = nC_V \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

Encuentre la razón de temperatura T_1 a T_2 de la ecuación 21.39 para el proceso adiabático:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{4V_i}{V_i}\right)^{\gamma-1} = (4)^{\gamma-1}$$

Sustituya para determinar ΔS:

$$\Delta S = nC_V \ln(4)^{\gamma-1} = nC_V(\gamma - 1)\ln 4$$

$$= nC_V\left(\frac{C_P}{C_V} - 1\right)\ln 4 = n(C_P - C_V)\ln 4 = nR \ln 4$$

De hecho obtiene el mismo resultado exacto para el cambio de entropía.

22.8 Entropía y la segunda ley

Si considera un sistema y sus alrededores para incluir todo el universo, éste siempre se mueve hacia un macroestado de mayor probabilidad, correspondiente al continuo esparcimiento de energía. Una forma alternativa de establecer este comportamiento es como sigue:

Enunciado de entropía de la segunda ley de la termodinámica

La entropía del universo aumenta en todos los procesos reales.

Este enunciado es, pero con otras palabras, la segunda ley de la termodinámica y puede probarse su equivalencia a los enunciados de Kelvin-Planck y Clausius.

Primero se mostrará que es equivalente al enunciado de Clausius. Observe la figura 22.5 y vea que si la bomba de calor opera en esta manera, la energía fluye espontáneamente del depósito frío al depósito caliente sin una entrada de energía por trabajo. Como un resultado, la energía en el sistema no se esparce uniformemente entre los dos depósitos, se *concentra* en el depósito caliente. En consecuencia, si el enunciado de Clausius de la segunda ley no es verdadero, entonces el enunciado de entropía también es falso, probando así su equivalencia.

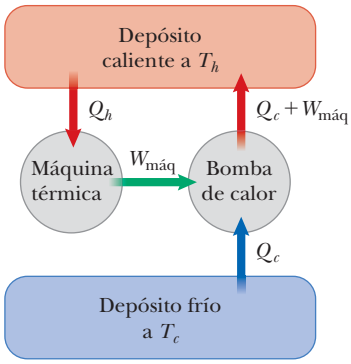


Figura 22.18 La máquina imposible de la figura 22.3 transfiere energía por trabajo a una bomba de calor que opera entre dos depósitos de energía. Esta situación es prohibida por el enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica.

Para la equivalencia con el enunciado de Kelvin-Planck, considere la figura 22.18, donde se muestra la máquina imposible de la figura 22.3 conectada a una bomba de calor que opera entre los mismos depósitos. El trabajo de salida de la máquina se utiliza para impulsar la bomba de calor. El efecto neto de esta combinación es que la energía abandona el depósito frío y es dirigida hacia el depósito caliente sin la entrada de trabajo. (El trabajo realizado por la máquina sobre la bomba de calor es *interno* al sistema de ambos dispositivos.) Esto está prohibido por el enunciado de Clausius de la segunda ley, el cual demostró ser equivalente al enunciado de entropía. Por lo tanto, el enunciado de la segunda ley también es equivalente al enunciado de entropía.

Al ocuparse con un sistema que no está aislado de sus alrededores, recuerde que el incremento en entropía descrito en la segunda ley es del sistema *y* sus alrededores. Cuando un sistema y su entorno interactúan en un proceso irreversible, el aumento en entropía de uno es mayor que la disminución en entropía del otro. Así, el cambio en entropía del universo debe ser mayor que cero para un proceso irreversible y es igual a cero para un proceso reversible.

Este enunciado de la segunda ley puede checarse para los cálculos del cambio de entropía realizados en la sección 22.7. Primero considere el cambio de entropía en una expansión libre, descrita por la ecuación 22.17. Ya que la expansión libre ocurre en un recipiente aislado, no se transfiere energía por calor desde los alrededores. Por lo tanto, la ecuación 22.17 representa el cambio de entropía del universo completo. Como $V_f > V_i$, el cambio en entropía del universo es positivo, consistente con la segunda ley.

Ahora considere el cambio de entropía en conducción térmica, descrito por la ecuación 22.18. Se supone que cada depósito es la mitad del universo. (¡Entre más grande sea el depósito, es mejor la suposición de que su temperatura permanece constante!) Entonces el cambio de entropía del universo queda representado por la ecuación 22.18. Ya que $T_h > T_c$, este cambio de entropía es positivo, de nuevo consistente con la segunda ley. El cambio de entropía positivo también es consistente con la noción de esparcimiento de energía. La porción caliente del universo tiene exceso de energía interna respecto de la porción fría. La conducción térmica representa una diseminación de la energía más equitativa a través del universo.

Por último, considere el cambio de entropía en un ciclo de Carnot, dado por la ecuación 22.15. El cambio de entropía de la máquina por sí misma es cero. El cambio en entropía de los depósitos es

$$\Delta S = \frac{|Q_c|}{T_c} - \frac{|Q_h|}{T_h}$$

De acuerdo con la ecuación 22.7, este cambio de entropía también es cero. Por lo tanto, el cambio de entropía del universo sólo está asociado con el trabajo efectuado por la máquina. Una parte de ese trabajo se utiliza para cambiar la energía mecánica de un sistema externo a la máquina: rotar el eje de un motor, elevar un peso y así sucesivamente. No hay cambio en la energía interna del sistema externo por esta

parte del trabajo o, equivalentemente, no existe esparcimiento de energía, así otra vez el cambio de entropía es cero. La otra porción del trabajo se emplea para superar varias fuerzas de fricción u otras fuerzas no conservativas en el sistema externo. Este proceso causa un incremento en la energía interna de ese sistema. Ese mismo incremento en la energía interna podría ocurrir vía un proceso termodinámico reversible en donde energía Q_r se transfiere por calor, así el cambio en entropía asociado con esa parte del trabajo es positivo. Como resultado, el cambio de entropía global del universo para la operación de la máquina de Carnot es positivo, de nuevo consistente con la segunda ley.

Finalmente, como los procesos reales son irreversibles, la entropía del universo debe aumentar estacionariamente para después lograr un valor máximo. En este valor, suponga que la segunda ley de la termodinámica, como está formulada aquí en la Tierra, se aplica al Universo completo en expansión, así el Universo estará en un estado con temperatura y densidad uniformes. La energía total del Universo se habrá diseminado más uniformemente a través del Universo. Todos los procesos físicos, químicos y biológicos habrán cesado en esa época. A este sombrío panorama a veces se le conoce como la *muerte térmica* del Universo.

Resumen

Definiciones

La **eficiencia térmica** e de una máquina térmica es

$$e \equiv \frac{W_{\text{maq}}}{|Q_h|} = \frac{|Q_h| - |Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} \quad \textbf{(22.2)}$$

El **microestado** de un sistema es la descripción de sus componentes individuales. El **macroestado** es una descripción del sistema desde un punto de vista macroscópico. Un determinado macroestado puede tener muchos microestados.

Desde un punto de vista microscópico, la **entropía** de un determinado macroestado se define como

$$S \equiv k_B \ln W \quad \textbf{(22.10)}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y W es el número de microestados del sistema que corresponden al macroestado.

En un proceso **reversible**, el sistema puede regresar a sus condiciones iniciales a lo largo de la misma trayectoria sobre un diagrama PV, y cada punto de esta ruta es un estado de equilibrio. Un proceso que no satisface estos requisitos es **irreversible**.

Conceptos y principios

Una **máquina térmica** es un dispositivo que toma energía por calor y, al funcionar en un proceso cíclico, expulsa una fracción de dicha energía mediante trabajo. El trabajo neto realizado por una máquina térmica al llevar una sustancia de trabajo a través de un proceso cíclico ($\Delta E_{\text{int}} = 0$) es

$$W_{\text{máq}} = |Q_h| - |Q_c| \quad \textbf{(22.1)}$$

donde $|Q_h|$ es la energía que se toma de un depósito caliente y $|Q_c|$ es la energía que se expulsa a un depósito frío.

Dos formas en que puede expresarse la **segunda ley de la termodinámica**:

- Es imposible construir una máquina térmica que, al operar en un ciclo, no produzca otro efecto que la entrada de energía por calor desde un depósito y la realización de una cantidad igual de trabajo (enunciado de Kelvin-Planck).
- Es imposible construir una máquina cíclica cuyo único efecto sea la transferencia continua de energía, por calor, de un objeto a otro a una mayor temperatura sin la entrada de energía por trabajo (enunciado de Clausius).

El **teorema de Carnot** establece que ninguna máquina térmica real que funcione (irreversiblemente) entre las temperaturas T_c y T_h puede ser más eficiente que una máquina que opere reversiblemente en un ciclo de Carnot entre las mismas dos temperaturas.

La eficiencia térmica de una máquina térmica que funciona en el ciclo de Carnot es

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} \qquad \textbf{(22.8)}$$

El estado macroscópico de un sistema con un gran número de microestados tiene cuatro cualidades que están relacionadas entre sí: (1) *incertidumbre*: debido al gran número de microestados, existe fuerte incertidumbre sobre cuál de ellos es; (2) *elección*: otra vez, debido al enorme número de microestados, hay un gran número de elecciones sobre cuál de ellos pueda ser; (3) *probabilidad*: un macroestado con muchos microestados es más probable que exista que uno con un pequeño número de microestados; (4) *falta de información*: debido al gran número de microestados, se tiene una elevada cantidad de información faltante sobre cuál de ellos es. Para un sistema termodinámico, estas cuatro cualidades se pueden relacionar con la **entropía**, una variable de estado.

La segunda ley de la termodinámica establece que cuando ocurren procesos reales (irreversibles), existe una diseminación espacial de energía. Este esparcimiento de energía se relaciona con una variable de estado termodinámica llamada **entropía** S. Por lo tanto, otra forma de la segunda ley se puede establecer como sigue:

- La entropía del universo aumenta en todos los procesos reales.

El **cambio en entropía** dS de un sistema durante un proceso entre dos estados de equilibrio infinitesimalmente separados es

$$dS = \frac{dQ_r}{T} \qquad \textbf{(22.12)}$$

donde dQ_r es la transferencia de energía por calor para el sistema en un proceso reversible que conecta los estados inicial y final.

El cambio de entropía de un sistema durante un proceso finito arbitrario entre un estado inicial y un estado final es

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} \qquad \textbf{(22.13)}$$

El valor de ΔS para el sistema es el mismo para todas las trayectorias que conectan los estados inicial y final. El cambio de entropía para un sistema que experimenta cualquier proceso cíclico reversible es cero.

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. La segunda ley de la termodinámica implica que el coeficiente de rendimiento de un refrigerador debe ser: (a) menor que 1, (b) menor que o igual a 1, (c) mayor que o igual a 1, (d) finito, (e) mayor que 0.

2. Suponga que una muestra de un gas ideal está a temperatura ambiente. ¿Qué acción *necesariamente* incrementará la entropía de la muestra? (a) Transferencia de energía en ella por calor. (b) Transferencia de energía en ella, irreversiblemente, por calor. (c) Realizar trabajo sobre ella. (d) Incrementar su temperatura o su volumen, sin dejar que disminuya la otra variable. (e) Ninguna de esas opciones es correcta.

3. Un refrigerador tiene 18.0 kJ de trabajo efectuado sobre él mientras que 115 kJ de energía se transfieren desde su interior. ¿Cuál es su coeficiente de rendimiento? (a) 3.40, (b) 2.80, (c) 8.90, (d) 6.40, (e) 5.20.

4. En lo siguiente, ¿cuál *no* es un enunciado de la segunda ley de la termodinámica? (a) Ninguna máquina térmica operando en un ciclo puede absorber energía de un depósito y usarla totalmente para efectuar trabajo. (b) Ninguna máquina real funcionando entre dos depósitos de energía puede ser más eficiente que una máquina de Carnot operando entre los mismos dos depósitos. (c) Cuando un sistema experimenta un cambio de estado, el cambio en la energía interna del sistema es la suma de la energía transferida al sistema por calor y el trabajo realizado sobre el sistema. (d) La entropía del universo aumenta en todos los procesos naturales. (e) La energía no se transfiere espontáneamente por calor desde un objeto frío a un objeto caliente.

5. Considere procesos cíclicos completamente caracterizados por cada una de las siguientes entradas y salidas de energía neta. En cada caso, las transferencias de energía que se mencionan son las únicas que ocurren. Clasifique cada proceso como (a) posible, (b) imposible de acuerdo con la primera ley de la termodinámica, (c) imposible de acuerdo con la segunda ley de la termodinámica o (d) imposible de acuerdo con la primera y segunda leyes. **(i)** Entrada de 5 J de trabajo y salida de 4 J de trabajo. **(ii)** Entrada de 5 J de trabajo y salida de 5 J de energía transferida por calor. **(iii)** Entrada de 5 J de energía transferida por transmisión eléctrica y salida de 6 J de trabajo. **(iv)** Entrada de 5 J de energía transferida por calor y salida de 5 J de energía transferida por calor. **(v)** Entrada de 5 J de energía transferida por calor y salida de 5 J de trabajo. **(vi)** Entrada de 5 J de energía transferida por calor y salida de 3 J de trabajo más 2 J de energía transferida por calor.

6. Una unidad de aire acondicionado compacta se coloca sobre una mesa dentro de un departamento bien aislado, se enchufa y se enciende. ¿Qué ocurre con la temperatura promedio del departamento? (a) Se incrementa. (b) Disminuye. (c) Permanece constante. (d) Se incrementa hasta que la unidad se calienta y entonces disminuye. (e) La respuesta depende de la temperatura inicial del departamento.

7. Una turbina de vapor opera a una temperatura de caldera de 450 K y a una temperatura de escape de 300 K. ¿Cuál es la máxima eficiencia teórica de este sistema? (a) 0.240, (b) 0.500, (c) 0.333, (d) 0.667, (e) 0.150

8. Ocurre un proceso termodinámico en el que la entropía de un sistema cambia en −8 J/K. De acuerdo con la segunda ley de la termodinámica, ¿qué puede concluir sobre el cambio de entropía del ambiente? (a) Debe ser +8 J/K o menor. (b) Debe estar entre +8 J/K y 0. (c) Debe ser igual a +8 J/K. (d) Debe ser +8 J/K o más. (e) Debe ser cero.

9. Una muestra de un gas ideal monoatómico está contenido en un cilindro con un pistón. Su estado se representa mediante el punto en el diagrama *PV* que se muestra en la figura PO22.9. Las flechas de la *A* a la *E* representan procesos isobárico, isotérmico, adiabático e isovolumétrico que la muestra puede experimentar. En cada proceso, excepto *D*, el volumen cambia en un factor de 2. Todos los cinco procesos son reversibles. Clasifique los procesos de acuerdo con el cambio en entropía del gas desde el mayor valor positivo hasta el valor negativo de mayor magnitud. En su clasificación, muestre cualquier caso de igualdad.

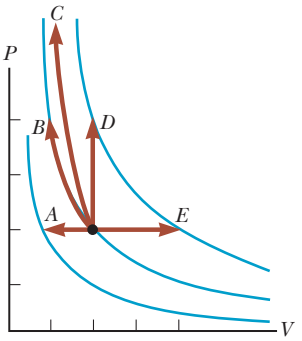


Figura PO22.9

10. Una máquina realiza 15.0 kJ de trabajo mientras expulsa 37.0 kJ a un depósito frío. ¿Cuál es la eficiencia de la máquina? (a) 0.150, (b) 0.288, (c) 0.333, (d) 0.450, (e) 1.20.

11. La flecha *OA* en el diagrama *PV* que se muestra en la figura PO22.11 representa una expansión adiabática reversible de un gas ideal. La misma muestra de gas parte del mismo estado *O*, pero ahora experimenta una expansión libre adiabática hacia el mismo volumen final. ¿Qué punto sobre el diagrama podría representar el estado final del gas? (a) El mismo punto *A* que para la expansión reversible, (b) el punto *B*, (c) el punto *C*, (d) cualquiera de esas opciones, (e) ninguna de esas posibilidades.

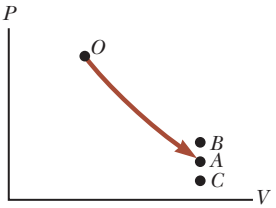


Figura PO22.11

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. El escape de energía en una estación de generación eléctrica impulsada por carbón se realiza al "enfriar el agua" en el lago Ontario. El agua queda caliente, según las criaturas vivientes del lago. Algunas de ellas se congregan alrededor del puerto de salida y pueden impedir que circule el agua. (a) Use la teoría de máquinas térmicas para explicar por qué esta acción puede reducir la salida de potencia eléctrica de la estación. (b) Un ingeniero dice que la salida eléctrica se reduce debido a "mayor contrapresión en las aspas de la turbina". Comente acerca de la exactitud de este enunciado.

2. Explique tres ejemplos diferentes, que sean comunes, de procesos naturales con un aumento en entropía. Asegúrese de explicar todas las partes de cada sistema bajo consideración.

3. ¿La segunda ley de la termodinámica contradice o corrige la primera ley? Argumente su respuesta.

4. "La primera ley de la termodinámica dice que en realidad no se puede ganar, y la segunda ley dice que ni siquiera puede quedar empatado". Explique cómo se aplica este enunciado a un dispositivo o proceso particular; alternativamente, argumente contra el enunciado.

5. "La energía es el ama del Universo y la entropía es su sombra." Al escribir para un auditorio de lectores en general, argumente a favor de este enunciado con al menos dos ejemplos. Alternativamente, argumente para la visión de que la entropía es como un decisivo ejecutivo práctico que determina lo que ocurrirá, mientras que la energía es como un miserable contador detrás de la puerta que dice cuán poco se puede permitir. (Arnold Sommerfeld sugirió la idea para esta pregunta.)

6. (a) Dé un ejemplo de un proceso irreversible que ocurra en la naturaleza. (b) Proporcione un ejemplo de un proceso en la naturaleza que sea casi reversible.

7. El dispositivo que se muestra en la figura PC22.7, llamado convertidor termoeléctrico, emplea una serie de celdas semiconductoras para transformar energía interna en energía potencial eléctrica, que se estudiará en el capítulo 25. En la fotografía a la izquierda, ambas patas del dispositivo están a la misma temperatura y no se produce energía potencial eléctrica. Sin embargo, cuando una pata está a una temperatura mayor que la otra, como se muestra en la fotografía de la derecha, se produce energía potencial eléctrica conforme el dispositivo extrae energía del depó-

sito caliente y activa un pequeño motor eléctrico. (a) ¿Por qué es necesaria la diferencia en temperatura para producir energía potencial eléctrica en esta demostración? (b) ¿En qué sentido este intrigante experimento demuestra la segunda ley de la termodinámica?





Courtesy of PASCO Scientific Company

Figura PC22.9

8. Una turbina impulsada por vapor es uno de los componentes principales de una planta eléctrica. ¿Por qué es ventajoso tener la temperatura del vapor tan alta como sea posible?

9. Explique el cambio de entropía de un gas que se expande (a) a temperatura constante y (b) adiabáticamente.

10. Suponga que su compañero de cuarto limpia y pone en orden su muy sucia habitación después de una gran fiesta. Dado que su compañero de cuarto crea más orden, ¿este proceso representa una violación de la segunda ley de la termodinámica?

11. ¿Es posible construir una máquina térmica que no produzca contaminación? Explique.

12. (a) Si usted agita un frasco lleno con frijoles de grenetina de diferentes tamaños, los frijoles más grandes tienden a aparecer cerca de la parte superior y los más pequeños tienden a caer al fondo. ¿Por qué? (b) ¿Este proceso viola la segunda ley de la termodinámica?

13. ¿Cuáles son algunos factores que afectan la eficiencia de los motores automotrices?

Problemas

1. sencillo; **2.** intermedio; **3.** desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 22.1 Máquinas térmicas y segunda ley de la termodinámica

1. Una máquina térmica tiene una potencia de salida mecánica de 5.00 kW y una eficiencia de 25.0%. La máquina expulsa 8.00×10^3 J de energía de escape en cada ciclo. Encuentre (a) la energía que admite durante cada ciclo y (b) el intervalo de tiempo por cada ciclo.

2. El trabajo realizado por una máquina es igual a un cuarto de la energía que absorbe de un depósito. (a) ¿Cuál es su eficiencia térmica? (b) ¿Qué fracción de la energía absorbida es expulsada al depósito frío?

3. Una máquina térmica toma 360 J de energía de un depósito caliente y efectúa 25.0 J de trabajo en cada ciclo. Encuentre (a) la eficiencia de la máquina y (b) la energía expulsada al depósito frío en cada ciclo.

4. Un arma es una máquina térmica. En particular, es una máquina de pistón de combustión interna que no funciona en un ciclo, sino que se estropea durante su proceso de expansión adiabática. Cierta arma consiste de 1.80 kg de hierro. Dispara una bala de 2.40 g a 320 m/s con una eficiencia energética de 1.10%. Suponga que el cuerpo del arma absorbe toda la salida de energía, el otro 98.9%, y aumenta uniformemente en temperatura durante un breve intervalo de tiempo antes de perder alguna energía por calor en el ambiente. Encuentre su aumento de temperatura.

5. Una máquina absorbe 1.70 kJ de un depósito caliente a 277°C y expulsa 1.20 kJ a un depósito frío a 27°C en cada ciclo. (a) ¿Cuál es la eficiencia de la máquina? (b) ¿Cuánto trabajo realiza la máquina en cada ciclo? (c) ¿Cuál es la potencia de salida de la máquina si cada ciclo dura 0.300 s?

6. Un motor de gasolina multicilindro en un avión, que opera a 2.50×10^3 rev/min, admite 7.89×10^3 J de energía y expulsa 4.58×10^3 J por cada revolución del cigüeñal. (a) ¿Cuántos litros de combustible consume en 1.00 h de operación, si el calor de combustión es 4.03×10^7 J/L. (b) ¿Cuál es la potencia mecánica de salida de la máquina? Ignore la fricción y exprese la respuesta en caballos de potencia. (c) ¿Cuál es el momento de torsión que ejerce el cigüeñal sobre la carga? (d) ¿Qué potencia debe transferir afuera del motor el sistema de escape y el de enfriamiento?

7. Suponga que una máquina térmica se conecta a dos depósitos de energía, uno es una alberca de aluminio fundido (660°C) y el otro un bloque de mercurio sólido (−38.9°C). La máquina funciona al congelar 1.00 g de aluminio y fundir 15.0 g de mercurio durante cada ciclo. El calor de fusión del aluminio es 3.97×10^5 J/kg; el calor de fusión del mercurio es 1.18×10^4 J/kg. ¿Cuál es la eficiencia de esta máquina?

Sección 22.2 Bombas de calor y refrigeradores

8. Un refrigerador tiene un coeficiente de rendimiento igual a 5.00. El refrigerador admite 120 J de energía de un depósito frío en cada ciclo. Encuentre (a) el trabajo requerido en cada ciclo y (b) la energía expulsada al depósito caliente.

9. Durante cada ciclo, un refrigerador expulsa 625 kJ de energía a un depósito de alta temperatura y toma 550 kJ

de energía de un depósito de baja temperatura. Determine (a) el trabajo realizado sobre el refrigerador en cada ciclo y (b) el coeficiente de rendimiento del refrigerador.

10. Una bomba de calor tiene un coeficiente de rendimiento de 3.80 y opera con un consumo de potencia de 7.03×10^3 W. (a) ¿Cuánta energía aporta a una casa durante 8.00 h de operación continua? (b) ¿Cuánta energía extrae del aire exterior?

11. Un refrigerador tiene un coeficiente de rendimiento de 3.00. El compartimiento de charolas de hielo está a −20.0°C y la temperatura ambiente es de 22.0°C. El refrigerador puede convertir 30.0 g de agua a 22.0°C en 30.0 g de hielo a −20.0°C cada minuto. ¿Qué potencia de entrada se requiere? Proporcione su respuesta en watts.

12. Una bomba de calor tiene un coeficiente de rendimiento igual a 4.20 y requiere una potencia de 1.75 kW para operar. (a) ¿Cuánta energía es aportada por la bomba de calor a una casa en una hora? (b) Si se invierte la bomba de calor de manera que actúe como un dispositivo de aire acondicionado en el verano, ¿cuál sería su coeficiente de rendimiento?

13. Un congelador tiene un coeficiente de rendimiento de 6.30. Utiliza electricidad a razón de 457 kWh/año. (a) En promedio, ¿cuánta energía emplea en un solo día? (b) En promedio, ¿cuánta energía elimina del refrigerador en un solo día? (c) ¿Cuál es la cantidad masa de agua máxima a 20.0°C que el congelador podría procesar en un solo día? *Nota*: un kilowatt-hora (kWh) es una cantidad de energía igual a la que necesita para hacer funcionar un aparato de 1 kW durante una hora.

Sección 22.3 Procesos reversibles e irreversibles
Sección 22.4 La máquina de Carnot

14. Una máquina térmica opera entre un depósito a 25.0°C y uno a 375°C. ¿Cuál es la máxima eficiencia posible para esta máquina?

15. Una de las máquinas térmicas más eficientes jamás construida es una turbina de vapor en el valle del río Ohio, que funciona entre 1 870°C y 430°C con energía del carbón. (a) ¿Cuál es la máxima eficiencia teórica? (b) La eficiencia real de la máquina es 42.0%. ¿Cuánta potencia mecánica entrega la máquina si admite 1.40×10^5 J de energía cada segundo de su depósito caliente?

16. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Una inventora acude a la oficina de patentes afirmando que su máquina térmica, la cual emplea agua como sustancia de trabajo, tiene una eficiencia termodinámica de 0.110. No obstante que esta eficiencia es baja comparada con típicas máquinas automotrices, ella explica que su máquina opera entre un depósito de energía a temperatura ambiente y una mezcla de agua-hielo a presión atmosférica y, por lo tanto, no requiere otro combustible para hacer el hielo. La patente es aprobada y los prototipos operando de la máquina prueban la afirmación de la inventora respecto a la eficiencia.

17. Una máquina de Carnot tiene una potencia de salida de 150 kW. La máquina funciona entre dos depósitos a 20.0°C y 500°C. (a) ¿Cuánta energía por calor admite por hora? (b) ¿Cuánta energía pierde por calor por hora en su descarga?

18. Una máquina de Carnot tiene una potencia de salida P. La máquina funciona entre dos depósitos a temperaturas T_c y T_h. (a) ¿Cuánta energía por calor admite en un intervalo de tiempo Δt? (b) ¿Cuánta energía pierde por calor en el intervalo de tiempo Δt?

19. ¿Cuál es el coeficiente de rendimiento de un refrigerador que funciona con eficiencia de Carnot entre las temperaturas −3.00°C y +27.0°C?

20. Un refrigerador ideal o una bomba de calor ideal es equivalente a una máquina de Carnot que funciona en reversa. Es decir, de un depósito frío se toma energía $|Q_c|$ y la energía $|Q_h|$ es expulsada a un depósito caliente. (a) Demuestre que el trabajo que se debe suministrar para que funcione el refrigerador o bomba de calor es

$$W = \frac{T_h - T_c}{T_c} |Q_c|$$

(b) Demuestre que el coeficiente de rendimiento (COP) del refrigerador ideal es

$$\text{COP} = \frac{T_c}{T_h - T_c}$$

21. ¿Cuál es el máximo coeficiente de rendimiento posible de una bomba de calor que toma energía del exterior a −3.00°C hacia el interior de una casa a 22.0°C? *Nota*: el trabajo realizado para que funcione la bomba de calor también está disponible para calentar la casa.

22. ¿Cuánto trabajo requiere un refrigerador de Carnot ideal para remover 1.00 J de energía de helio líquido a 4.00 K y disipar esta energía al entorno a temperatura ambiente (293 K)?

23. Si una máquina térmica de Carnot con 35% de eficiencia (figura 22.2) funciona en reversa para formar un refrigerador (figura 22.4), ¿cuál sería el coeficiente de rendimiento de este refrigerador?

24. Una planta eléctrica funciona a un 32.0% de eficiencia durante el verano, cuando el agua de mar que utiliza para enfriar está a 20.0°C. La planta emplea vapor a 350°C para impulsar las turbinas. Si la eficiencia de la planta cambia en la misma proporción que la eficiencia ideal, ¿cuál es la eficiencia de la planta en el invierno, cuando el agua de mar está a 10.0°C?

25. Una máquina térmica se diseña para tener una eficiencia de Carnot de 65.0% cuando opere entre dos depósitos de energía. (a) Si la temperatura del depósito frío es 20.0°C, ¿cuál debe ser la temperatura del depósito caliente? (b) ¿La eficiencia real de la máquina puede ser igual a 65.0%? Explique.

26. Una máquina térmica de Carnot funciona entre las temperaturas T_h y T_c. (a) Si T_h = 500 K y T_c = 350 K, ¿cuál es la eficiencia de la máquina? (b) ¿Cuál es el cambio en su eficiencia por cada grado de aumento en T_h sobre 500 K? (c) ¿Cuál es el cambio en su eficiencia por cada grado de cambio en T_c? (d) ¿La respuesta al inciso (c) depende de T_c? Explique.

27. Un gas ideal circula a través de un ciclo de Carnot. La expansión isotérmica se presenta a 250°C y la compresión isotérmica tiene lugar a 50.0°C. El gas admite 1.20×10^3 J

de energía del depósito caliente durante la expansión isotérmica. Encuentre (a) la energía expulsada al depósito frío en cada ciclo y (b) el trabajo neto realizado por el gas en cada ciclo.

28. Se ha propuesto una planta eléctrica que usaría el gradiente de temperatura del océano, el sistema funcionará entre 20.0°C (temperatura del agua superficial) y 5.00°C (temperatura del agua a una profundidad de aproximadamente 1 km). (a) ¿Cuál sería la máxima eficiencia de tal sistema? (b) Si la potencia eléctrica de salida de la planta fuese de 75.0 MW, ¿por hora, cuánta energía admite del depósito caliente? (c) En vista de su respuesta al inciso (a), explique si cree que tal sistema vale la pena. Note que el "combustible" es gratuito.

29. Una máquina térmica opera en un ciclo de Carnot entre 80.0°C y 350°C. Absorbe 21 000 J de energía por ciclo de un depósito caliente. La duración de cada ciclo es 1.00 s. (a) ¿Cuál es la potencia mecánica de salida de esta máquina? (b) ¿Cuánta energía expulsa por calor en cada ciclo?

30. Suponga que construye un dispositivo de dos máquinas térmicas y que la salida de energía de escape de una se suministra como la energía de entrada para la segunda. Se dice que las dos máquinas operan *en serie*. Acepte que e_1 y e_2 representan las eficiencias de las dos máquinas. (a) La eficiencia global del dispositivo de dos máquinas se define como la salida de trabajo total dividida entre la energía que se pone en la primera máquina por calor. Demuestre que la eficiencia global está dada por

$$e = e_1 + e_2 - e_1 e_2$$

¿Qué pasaría si? Para los incisos (b) a (c) que siguen, suponga que las dos máquinas son máquinas de Carnot. La máquina 1 funciona entre las temperaturas T_h y T_i. El gas en la máquina 2 varía en temperatura entre T_i y T_c. En términos de las temperaturas, (b) ¿cuál es la eficiencia de la combinación de máquinas? (c) ¿A partir del uso de dos máquinas resulta una mejoría en la eficiencia neta en lugar de emplear sólo una? (d) ¿Qué valor de la temperatura intermedia T_i resulta en que cada una de las dos máquinas en serie realicen igual trabajo? (c) ¿Qué valor de T_i resulta en que cada una de las dos máquinas en serie tengan la misma eficiencia?

31. A una turbina entra argón a razón de 80.0 kg/min, una temperatura de 800°C y una presión de 1.50 MPa. Se expande adiabáticamente mientras empuja sobre las aspas de la turbina y sale a presión de 300 kPa. (a) Calcule su temperatura en la salida. (b) Obtenga la potencia de salida (máxima) de la turbina que gira. (c) La turbina es un componente de un modelo de máquina de turbina de gas a ciclo cerrado. Calcule la máxima eficiencia de la máquina.

32. En el punto A en un ciclo de Carnot, 2.34 moles de un gas ideal monoatómico tienen una presión de 1 400 kPa, un volumen de 10.0 L y una temperatura de 720 K. El gas se expande isotérmicamente al punto B y luego se expande adiabáticamente al punto C, donde su volumen es 24.0 L. Una compresión isotérmica lo lleva al punto D, donde su volumen es 15.0 L. Un proceso adiabático regresa el gas al punto A. (a) Determine todas las presiones, volúmenes y temperaturas desconocidas conforme llena la siguiente tabla:

	P	V	T
A	1 400 kPa	10.0 L	720 K
B			
C		24.0 L	
D		15.0 L	

(b) Encuentre la energía que se agrega por calor, el trabajo realizado por la máquina y el cambio en energía interna para cada uno de los pasos $A \to B$, $B \to C$, $C \to D$ y $D \to A$. (c) Calcule la eficiencia $W_{\text{neto}}/|Q_h|$. (d) Demuestre que la eficiencia es igual a $1 - T_C/T_A$, la eficiencia de Carnot.

33. Una estación para generar energía eléctrica se diseña para dar una potencia de salida eléctrica de 1.40 MW con el uso de una turbina a dos tercios de la eficiencia de una máquina de Carnot. La descarga de energía se transfiere por calor a una torre de enfriamiento a 110°C. (a) Encuentre la rapidez de descarga de energía por calor, como función de la temperatura de combustión T_h. (b) Si el hogar se modifica para funcionar más caliente con el empleo de tecnología de combustión más avanzada, ¿cómo cambia la cantidad de energía que se descarga? (c) Encuentre la potencia de descarga para T_h = 800°C. (d) Obtenga el valor de T_h para el que la potencia de escape sólo sería la mitad del inciso (c). (e) Determine el valor de T_h para el que la potencia de descarga sería un cuarto del inciso (c).

34. Un congelador ideal (Carnot) en una cocina tiene una temperatura constante de 260 K, mientras que el aire en la cocina tiene una temperatura constante de 300 K. Suponga que el aislamiento para el congelador no es perfecto y conduce energía al congelador en una cantidad de 0.150 W. Determine la potencia promedio requerida para que el motor del congelador mantenga la temperatura constante en el congelador.

35. La bomba de calor, que se muestra en la figura P22.35, es en esencia un acondicionador de aire instalado hacia atrás.

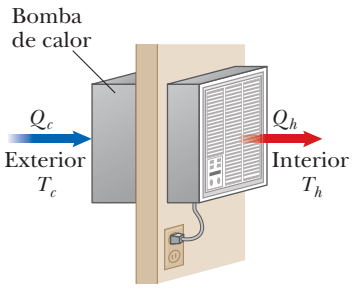


Figura P22.35

Extrae energía del aire exterior más frío y lo deposita en una habitación más caliente. Suponga que la razón de la energía real que entra a la habitación al trabajo realizado por el motor del dispositivo es 10.0% de la razón máxima teórica. Determine la energía que entra a la habitación

por joule de trabajo efectuado por el motor, dado que la temperatura interior es 20.0°C y la exterior es −5.00°C.

Sección 22.5 Motores de gasolina y diesel

Nota: Para los problemas en esta sección, suponga que el gas en la máquina es diatómico con $\gamma = 1.40$.

36. Un motor de gasolina tiene una razón de compresión de 6.00. (a) ¿Cuál es la eficiencia del motor si funciona en un ciclo idealizado de Otto? (b) **¿Qué pasaría si?** Si la eficiencia real es de 15.0%, ¿qué fracción del combustible se desperdicia como resultado de fricción y pérdidas de energía por calor que se podrían evitar en un motor reversible? Suponga combustión completa de la mezcla aire-combustible.

37. En el cilindro de un motor de automóvil, enseguida de la combustión, el gas se confina en un volumen de 50.0 cm^3 y tiene una presión inicial de 3.00×10^6 Pa. El pistón se mueve hacia fuera a un volumen final de 300 cm^3 y el gas se expande sin pérdida de energía por calor. (a) ¿Cuál es la presión final del gas? (b) ¿Cuánto trabajo realiza el gas al expandirse?

38. Un motor diesel idealizado funciona en un ciclo conocido como *ciclo diesel estándar de aire*, que se muestra en la figura P22.38. El combustible se rocía en el cilindro en el punto de máxima compresión, *B*. La combustión ocurre durante la expansión $B \rightarrow C$, que se modela como un proceso isobárico. Demuestre que la eficiencia de un motor que opera en este ciclo diesel idealizado es

$$e = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}\right)$$

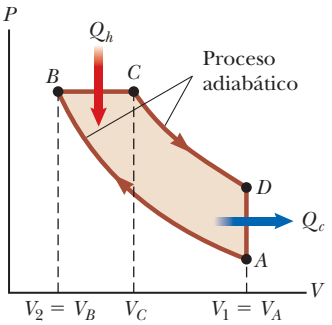


Figura P22.38

Sección 22.6 Entropía

39. Prepare una tabla semejante a la tabla 22.1 mediante el mismo procedimiento (a) para el caso en el que saca tres canicas de su bolsa en lugar de cuatro y (b) para el caso en el que saca cinco en lugar de cuatro.

40. (a) Prepare una tabla como la tabla 22.1 para el siguiente acontecimiento. Lanza simultáneamente cuatro monedas al aire y registra los resultados de sus lanzamientos en términos del número de águila (A) y sol (S) que resulten. Por ejemplo, AASA y ASAA son dos posibles formas en que pueden lograrse tres águilas y un sol. (b) Con base en su tabla, ¿cuál es el resultado más probable registrado para un lanzamiento?

41. Si lanza dos dados, ¿cuál es el número total de formas en las que puede obtener (a) un 12 y (b) un 7?

Sección 22.7 Cambios de entropía en sistemas termodinámicos

Sección 22.8 Entropía y la segunda ley

42. Una charola de hielo contiene 500 g de agua líquida a 0°C. Calcule el cambio de entropía del agua conforme se congela lenta y completamente a 0°C.

43. Un vaso de espuma de poliestireno contiene 125 g de agua caliente a 100°C y se enfría a temperatura ambiente, 20.0°C. ¿Cuál es el cambio en entropía de la habitación? Desprecie el calor específico del vaso y cualquier cambio en la temperatura de la habitación.

44. Una herradura de hierro de 1.00 kg se lleva de una forja a 900°C y se deja caer en 4.00 kg de agua a 10.0°C. Si supone que no se pierde energía por calor hacia los alrededores, determine el cambio en entropía total del sistema herradura-agua. (*Sugerencia*: observe que $dQ = mc\,dT$.)

45. Un automóvil de 1 500 kg se mueve a 20.0 m/s. El conductor frena hasta detenerse. Los frenos se enfrían a la temperatura del aire circundante, que es casi constante a 20.0°C. ¿Cuál es el cambio de entropía total?

46. Dos autos de 2.00×10^3 kg viajan a 20.0 m/s, experimentan una colisión frontal y quedan unidos. Encuentre el cambio en entropía del aire circundante como consecuencia de la colisión si la temperatura del aire es 23.0°C. Ignore la energía que se propaga por sonido debido a la colisión.

47. Un tronco de 70.0 kg cae a un lago desde una altura de 25.0 m. Si el tronco, el lago y el aire están todos a 300 K, encuentre el cambio de entropía del aire durante este proceso.

48. Una muestra de 1.00 mol de gas H_2 se coloca en el lado izquierdo del recipiente que se muestra en la figura P22.48, que tiene iguales volúmenes izquierdo y derecho. El lado derecho está vacío. Cuando la válvula se abre, el gas circula hacia el lado derecho. (a) ¿Cuál es el cambio de entropía del gas? (b) ¿Cambia la temperatura del gas? Suponga que el recipiente es tan grande que el hidrógeno se comporta como un gas ideal.

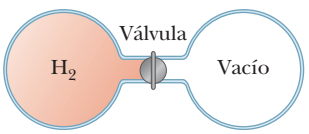


Figura P22.48

49. Un recipiente de 2.00 L tiene un separador al centro que lo divide en dos partes iguales, como se muestra en la figura P22.49. El lado izquierdo contiene 0.044 moles de gas H_2, y el lado derecho contiene 0.044 0 moles de gas O_2. Ambos gases están a temperatura ambiente y a presión atmosférica. Se retira el separador y se permite que los gases se mezclen. ¿Cuál es el aumento en entropía del sistema?

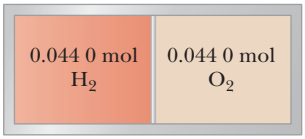


Figura P22.49

50. ¿Qué cambio en entropía ocurre cuando un cubo de hielo de 27.9 g a −12°C es transformado en vapor a 115°C?

51. Calcule el cambio en entropía de 250 g de agua calentada lentamente de 20.0°C a 80.0°C.

52. Personalmente, ¿qué tan rápido hace que aumente la entropía del universo justo ahora? Calcule un orden de magnitud, establezca qué cantidades toma como datos y los valores que mide o estima para ellos.

53. Cuando una barra de aluminio se conecta entre un depósito caliente a 725 K y un depósito frío a 310 K, 2.50 kJ de energía se transfieren por calor del depósito caliente al depósito frío. En este proceso irreversible, calcule el cambio de entropía de (a) el depósito caliente, (b) el depósito frío y (c) el universo, despreciando cualquier cambio en entropía de la barra de aluminio.

54. Cuando una barra metálica se conecta entre un depósito caliente a T_h y un depósito frío a T_c, la energía transferida por calor del depósito caliente al depósito frío es Q. En este proceso irreversible, encuentre expresiones para el cambio de entropía de (a) el depósito caliente, (b) el depósito frío y (c) el universo, despreciando cualquier cambio en entropía de la barra metálica.

55. La temperatura en la superficie del Sol es aproximadamente 5 800 K, y la temperatura en la superficie de la Tierra es cerca de 290 K. ¿Qué cambio de entropía del Universo ocurre cuando 1.00×10^3 J de energía se transfieren por radiación del Sol a la Tierra?

Problemas adicionales

56. Calcule el aumento en entropía del universo cuando agrega 20.0 g de crema a 5.00°C a 200 g de café a 60.0°C. Suponga que los calores específicos de la crema y el café son de 4.20 J/g · °C.

57. ¿Cuánto trabajo se requiere, empleando un refrigerador de Carnot ideal, para cambiar 0.500 kg de agua del grifo a 10.0°C en hielo a −20.0°C? Suponga que el compartimiento del congelador se mantiene a −20.0°C y que el refrigerador expulsa energía en la habitación a 20.0°C.

58. Una máquina de vapor funciona en un clima frío donde la temperatura de escape es 0°C. (a) Calcule la máxima eficiencia teórica de la máquina empleando una temperatura de vapor de admisión de 100°C. (b) Si, en lugar de eso, se utiliza vapor supercalentado a 200°C, encuentre la máxima eficiencia posible.

59. La energía absorbida por una máquina es tres veces mayor que el trabajo que realiza. (a) ¿Cuál es su eficiencia térmica? (b) ¿Qué fracción de la energía absorbida es expulsada al depósito frío?

60. En las cataratas del Niágara cada segundo unos 5.00×10^3 m^3 de agua caen una distancia de 50.0 m. ¿Cuál es el incremento en entropía del universo por segundo debido a la caída de agua? Suponga que la masa de los alrededores es tan grande que su temperatura y la del agua permanecen casi constantes a 20.0°C. También suponga una cantidad despreciable de agua que se evapora.

61. Encuentre la máxima eficiencia (Carnot) de una máquina que absorbe energía de un depósito caliente a 545°C y que expulsa energía a un depósito frío a 185°C.

62. En 1993 el gobierno estadounidense instituyó el requisito de que todos los acondicionadores de aire que se vendieran en Estados Unidos debían tener un factor de eficiencia energética (EER, por sus siglas en inglés) de 10 o mayor. El EER se define como la razón de la capacidad de enfriamiento del acondicionador de aire, medida en unidades térmicas británicas por hora, o Btu/h, a su requerimiento de potencia eléctrica en watts. (a) Convierta el EER de 10.0 a forma adimensional, con el uso de la conversión 1 Btu = 1 055 J. (b) ¿Cuál es el nombre apropiado para esta cantidad adimensional? (c) Alrededor de 1970 era común encontrar acondicionadores de aire de habitación con EER de 5 o menos. Establezca la comparación de los costos de operación para acondicionadores de aire de 10 000 Btu/h con EER de 5.00 y 10.0. Suponga que cada acondicionador de aire opera durante 1 500 h, en el verano, en una ciudad donde la electricidad cuesta 17.0 centavos por kWh.

63. La energía se transfiere por calor a través de las paredes y el techo de una casa a razón de 5.00×10^3 J/s = 5.00 kW cuando la temperatura interior es 22.0°C y la temperatura exterior es −5.00°C. (a) Calcule la potencia eléctrica requerida para mantener la temperatura interior a 22.0°C si la potencia se emplea en los calentadores de resistencia eléctricos que convierten toda la energía transferida por transmisión eléctrica en energía interna. (b) **¿Qué pasaría si?** Calcule la potencia eléctrica necesaria para mantener la temperatura interior a 22.0°C si la potencia se utiliza para impulsar un motor eléctrico que opera el compresor de una bomba de calor que tiene un coeficiente de rendimiento igual a 60.0% del valor del ciclo de Carnot.

64. Un mol de gas neón se calienta de 300 K a 420 K a presión constante. Calcule (a) la energía Q transferida al gas, (b) el cambio en energía interna del gas y (c) el trabajo realizado *sobre* el gas. Note que el neón tiene un calor específico molar de $C_P = 20.79$ J/mol · K para un proceso a presión constante.

65. Un congelador hermético mantiene n moles de aire a 25.0°C y 1.00 atm. Luego el aire es enfriado a −18.0°C. (a) ¿Cuál es el cambio en entropía del aire si el volumen se mantiene constante? (b) ¿Cuál sería el cambio en entropía si la presión se mantuviera a 1.00 atm durante el enfriamiento?

66. Suponga que pudiera construirse una bomba de calor ideal (Carnot) para emplearse en un acondicionador de aire. (a) Obtenga una expresión para el coeficiente de rendimiento (COP) de tal acondicionador de aire en términos de T_h y T_c. (b) ¿Tal acondicionador de aire funcionaría con una menor energía de entrada si la diferencia en las temperaturas de operación fuera mayor o menor? (c) Determine el COP para tal acondicionador de aire si

la temperatura interior es 20.0°C y la temperatura externa es 40.0°C.

67. En 1816, Robert Stirling, un clérigo escocés, patentó el *motor Stirling*, que después encontró gran variedad de aplicaciones, incluyendo su empleo en colectores de energía solar para transformar la luz solar en electricidad. El combustible se quema externamente para calentar uno de los dos cilindros del motor. Una cantidad fija de gas inerte se mueve cíclicamente entre los cilindros y se expande en el caliente y se contrae en el frío. La figura P22.67 representa un modelo de su ciclo termodinámico. Considere n moles de un gas ideal monoatómico que circula una vez por el ciclo, que consiste de dos procesos isotérmicos a temperaturas $3T_i$ y T_i y dos procesos a volumen constante. Ahora el objetivo es obtener la eficiencia de esta máquina. (a) Encuentre la energía transferida por calor al gas durante el proceso isovolumétrico *AB*. (b) Determine la energía que se transfiere por calor al gas durante el proceso isotérmico *BC*. (c) Encuentre la energía transferida por calor al gas durante el proceso isovolumétrico *CD*. (d) Obtenga la energía que se transfiere por calor al gas durante el proceso isotérmico *DA*. (e) Identifique cuáles de los resultados de los incisos (a) a (d) son positivos y evalúe la energía de entrada a la máquina por calor. (f) De la primera ley de la termodinámica, encuentre el trabajo efectuado por la máquina. (g) De los resultados de los incisos (e) y (f), evalúe la eficiencia de la máquina. Un motor Stirling es más fácil de fabricar que un motor de combustión interna o una turbina. Puede funcionar con la quema de basura. Puede operar con la energía transferida por luz solar y no producir materiales de descarga. Los motores Stirling no se emplean en automóviles debido a su largo tiempo de arranque y a su pobre respuesta de aceleración.

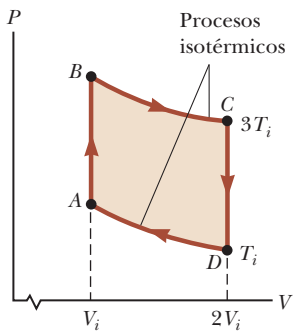


Figura P22.67

68. Un hogar está a 750 K y la temperatura ambiente a 300 K. La eficiencia de una máquina de Carnot que hace 150 J de trabajo mientras transporta energía entre estos baños de temperaturas constantes es 60.0%. La máquina de Carnot debe tomar energía a 150 J/0.600 = 250 J del depósito caliente y colocar 100 J de energía por calor en el ambiente. Para seguir el razonamiento de Carnot, suponga que alguna otra máquina térmica S podría tener una eficiencia de 70.0%. (a) Encuentre la entrada de energía y la salida de energía desperdiciada de la máquina S conforme realiza 150 J de trabajo. (b) Deje que la máquina S funcione como en el inciso (a) y opere la máquina de Carnot de reversa entre los mismos depósitos. El trabajo de salida de la máquina S es el trabajo de entrada para el refrigerador de Carnot. Encuentre la energía total transferida a o desde el hogar y la energía total transferida a o desde el ambiente cuando ambas máquinas funcionan juntas. (c) Explique cómo los resultados de los incisos (a) y (b) demuestran que se viola el enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica. (d) Encuentre la entrada de energía y la salida de trabajo de la máquina S conforme saca energía de escape de 100 J. Deje que la máquina S opere como en el inciso (c) y aporte 150 J de su trabajo de salida para que funcione la máquina de Carnot en reversa. Encuentre (e) la energía total que el hogar proporciona cuando ambas máquinas funcionan juntas, (f) el trabajo total de salida y (g) la energía total transferida al ambiente. (h) Explique cómo los resultados demuestran que se viola el enunciado de Kelvin-Planck de la segunda ley. Por lo tanto, la suposición acerca de la eficiencia de la máquina S debe ser falsa. (i) Deje que las máquinas operen juntas a través de un ciclo, como en el inciso (d). Encuentre el cambio en entropía del universo. (j) Explique cómo el resultado del inciso (i) prueba que se viola el enunciado de entropía de la segunda ley.

69. **Problema de repaso.** Este problema complementa al problema 88 del capítulo 10. En la operación de un motor de pistón de combustión interna de un solo cilindro, una carga de combustible explota para impulsar el pistón hacia fuera en el llamado *tiempo de trabajo*. Parte de su energía de salida se almacena en un volante giratorio. Después esta energía se usa para empujar el pistón hacia dentro para comprimir la siguiente carga de combustible y aire. En este proceso de compresión suponga que un volumen original de 0.120 L de un gas ideal diatómico, a presión atmosférica, se comprime adiabáticamente a un octavo de su volumen original. (a) Encuentre la entrada de trabajo que se requiere para comprimir el gas. (b) Suponga que el volante es un disco sólido de 5.10 kg de masa y 8.50 cm de radio que gira libremente sin fricción entre el tiempo de trabajo y el tiempo de compresión. ¿Cuán rápido debe girar el volante inmediatamente después del tiempo de trabajo? Esta situación representa la mínima rapidez angular a la que el motor puede funcionar; no es el punto de ahogamiento. (c) Cuando la operación del motor está muy arriba del punto de ahogamiento, suponga que el volante pone 5.00% de su energía máxima para comprimir la siguiente carga de combustible y aire. Encuentre su rapidez angular máxima en este caso.

70. Un laboratorio de biología se mantiene a una temperatura constante de 7.00°C mediante un acondicionador de aire, que da salida al aire exterior. En un típico día caluroso de verano, la temperatura exterior es de 27.0°C y la unidad de acondicionamiento de aire emite energía al exterior en una cantidad de 10.0 kW. Modele la unidad como teniendo un coeficiente de rendimiento (COP) igual a 40.0% del COP de un dispositivo ideal de Carnot. (a) ¿Con qué rapidez el acondicionador de aire retira energía del laboratorio? (b) Calcule la potencia requerida para la entrada de trabajo. (c) Encuentre el cambio en entropía del universo que produce el acondicionador de aire en 1.00 h. (d) **¿Qué pasaría si?** La temperatura exterior aumenta a 32.0°C. Encuentre el cambio fraccionario en el COP del acondicionador de aire.

71. Una planta de energía, que tiene eficiencia de Carnot, produce 1.00 GW de potencia eléctrica a partir de turbinas que admiten vapor a 500 K y rechazan agua a 300 K en un río. La corriente de agua es 6.00 K más caliente debido a la salida de la planta eléctrica. Determine la razón de flujo del río.

72. Una planta eléctrica, que tiene eficiencia de Carnot, produce potencia eléctrica P a partir de turbinas que admiten vapor a temperatura T_h y descargan energía a temperatura T_c a través de un intercambiador de calor hacia un río. La corriente de agua es ΔT más caliente debido a la salida de la planta eléctrica. Determine la razón de flujo del río.

73. Una muestra de 1.00 mol de un gas ideal monoatómico se lleva a través del ciclo que se muestra en la figura P22.73. El proceso $A \rightarrow B$ es una expansión isotérmica reversible. Calcule (a) el trabajo neto realizado por el gas, (b) la energía agregada al gas por calor, (c) la energía expulsada del gas por calor y (d) la eficiencia del ciclo. (e) Explique cómo se compara la eficiencia con la de una máquina de Carnot que funciona entre los mismos extremos de temperatura.

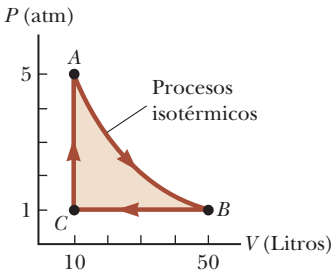


Figura P22.73

74. Un sistema que consiste de n moles de un gas ideal con calor específico molar a presión constante C_P experimenta dos procesos reversibles. Comienza con presión P_i y volumen V_i, se expande isotérmicamente y luego se contrae adiabáticamente para alcanzar un estado final con presión P_i y volumen $3V_i$. (a) Encuentre su cambio de entropía en el proceso isotérmico. (La entropía no cambia en el proceso adiabático.) (b) **¿Qué pasaría si?** Explique por qué la respuesta al inciso (a) debe ser la misma que la respuesta al problema 77. (No es necesario resolver el problema 77 para contestar esta pregunta.)

75. Una máquina térmica funciona entre dos depósitos a $T_2 = 600$ K y $T_1 = 350$ K. Admite 1.00×10^3 J de energía del depósito de mayor temperatura y realiza 250 J de trabajo. Encuentre (a) el cambio de entropía del universo ΔS_U para este proceso y (b) el trabajo W que podría realizar una máquina de Carnot ideal que opere entre estos dos depósitos. (c) Demuestre que la diferencia entre las cantidades de trabajo realizados en los incisos (a) y (b) es $T_1 \Delta S_U$.

76. Una muestra de 1.00 mol de un gas ideal monoatómico se lleva a través del ciclo que se muestra en la figura P22.76. En el punto A la presión, el volumen y la temperatura son P_i, V_i y T_i, respectivamente. En términos de R y T_i, encuentre (a) la energía total que entra al sistema por calor por ciclo, (b) la energía total que sale del sistema por calor por ciclo y (c) la eficiencia de una máquina que opera en este ciclo. (d) Explique cómo se compara la eficiencia con la de una máquina que opera en un ciclo de Carnot entre los mismos extremos de temperatura.

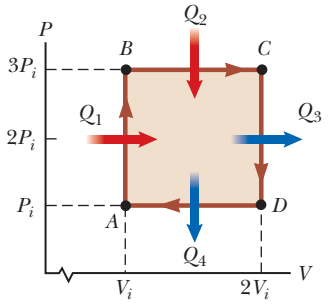


Figura P22.76

77. Una muestra que consiste de n moles de un gas ideal se somete a una expansión isobárica reversible desde el volumen V_i hasta el volumen $3V_i$. Encuentre el cambio de entropía del gas al calcular $\int_i^f dQ/T$, donde $dQ = nC_P\,dT$.

78. Un atleta cuya masa es de 70.0 kg bebe 16 onzas (454 g) de agua fría. El agua está a una temperatura de 35.0°F. (a) Si ignora el cambio de temperatura del cuerpo que resulta de la ingesta del agua (de modo que el cuerpo se considera como un depósito siempre a 98.6°F), encuentre el aumento en entropía de todo el sistema. (b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que todo el cuerpo se enfría por la bebida y que el calor específico promedio de una persona es igual al calor específico del agua líquida. Si ignora cualquier otra transferencia de energía por calor y cualquier liberación de energía metabólica, determine la temperatura del atleta después de que bebe el agua fría, dada una temperatura corporal inicial de 98.6°F. (c) Bajo estas suposiciones, ¿cuál es el aumento de entropía de todo el sistema? (d) Establezca cómo se compara este resultado con el que obtuvo en el inciso (a).

79. Una muestra de un gas ideal se expande isotérmicamente, duplicando su volumen. (a) Demuestre que el trabajo realizado sobre el gas al expandirse es $W = -nRT \ln 2$. (b) La energía interna E_{int} de un gas ideal sólo depende de su temperatura, así el cambio en energía interna es cero durante la expansión. De la primera ley se sigue que la entrada de energía al gas por calor durante la expansión es igual a la salida de energía por trabajo. ¿Este proceso tiene 100% de eficiencia al convertir la entrada de energía por calor en salida de trabajo? (c) ¿Esta conversión viola la segunda ley? Explique.

80. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Dos muestras de agua se mezclan a presión constante dentro de un recipiente aislado: 1.00 kg de agua a 10.0°C y 1.00 kg de agua a 30.0°C. El recipiente está aislado, así que no existe intercambio de energía por calor entre el agua y el ambiente. Aún más, la cantidad de energía que abandona el agua caliente por calor es igual a la cantidad que entra al agua fría por calor. Por lo tanto, el cambio en entropía del universo es cero para este proceso.

Problemas de desafío

81. Una muestra de 1.00 mol de gas ideal ($\gamma = 1.40$) se lleva a través del ciclo de Carnot descrito en la figura 22.11. En el

punto A la presión es 25.0 atm y la temperatura es 600 K. En el punto C la presión es 1.00 atm y la temperatura es 400 K. (a) Determine las presiones y volúmenes en los puntos A, B, C y D. (b) Calcule el trabajo neto realizado por ciclo.

82. La razón de compresión de un ciclo de Otto, como se muestra en la figura 22.13, es $V_A/V_B = 8.00$. En el inicio A del proceso de compresión, 500 cm^3 de gas están a 100 kPa y 20.0°C. En el inicio de la expansión adiabática la temperatura es $T_C = 750°C$. Modele el fluido de trabajo como un gas ideal con $\gamma = 1.40$. (a) En la siguiente tabla indique los estados del gas:

	T (K)	P (kPa)	V (cm^3)
A	293	100	500
B			
C	1 023		
D			

(b) En la tabla que sigue complete los procesos:

	Q	W	ΔE_{int}
$A \rightarrow B$			
$B \rightarrow C$			
$C \rightarrow D$			
$D \rightarrow A$			
$ABCDA$			

(c) Identifique la energía de entrada $|Q_h|$, (d) la energía expulsada $|Q_c|$ y (e) el trabajo neto de salida $W_{máq}$. (f) Calcule la eficiencia térmica. (g) Encuentre el número de revoluciones por minuto del cigüeñal requerido para que un motor de un cilindro tenga una potencia de salida de 1.00 kW = 1.34 hp. *Nota*: el ciclo termodinámico involucra cuatro golpes de pistón.

Tablas

APÉNDICE

A

Tabla A.1 Factores de conversión

Longitud

	m	cm	km	pulg	pie	mi
1 metro	1	10^{2}	10^{-3}	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 centímetro	10^{-2}	1	10^{-5}	0.393 7	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 kilómetro	10^{3}	10^{5}	1	3.937×10^{4}	3.281×10^{3}	0.621 4
1 pulgada	2.540×10^{-2}	2.540	2.540×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 pie	0.304 8	30.48	3.048×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1 milla	1 609	1.609×10^{5}	1.609	6.336×10^{4}	5 280	1

Masa

	kg	g	slug	u
1 kilogramo	1	10^{3}	6.852×10^{-2}	6.024×10^{26}
1 gramo	10^{-3}	1	6.852×10^{-5}	6.024×10^{23}
1 slug	14.59	1.459×10^{4}	1	8.789×10^{27}
1 unidad masa atómica	1.660×10^{-27}	1.660×10^{-24}	1.137×10^{-28}	1

Nota: 1 ton métrica = 1 000 kg.

Tiempo

	s	min	h	día	año
1 segundo	1	1.667×10^{-2}	2.778×10^{-4}	1.157×10^{-5}	3.169×10^{-8}
1 minuto	60	1	1.667×10^{-2}	6.994×10^{-4}	1.901×10^{-6}
1 hora	3 600	60	1	4.167×10^{-2}	1.141×10^{-4}
1 día	8.640×10^{4}	1 440	24	1	2.738×10^{-5}
1 año	3.156×10^{7}	5.259×10^{5}	8.766×10^{3}	365.2	1

Rapidez

	m/s	cm/s	pie/s	mi/h
1 metro por segundo	1	10^{2}	3.281	2.237
1 centímetro por segundo	10^{-2}	1	3.281×10^{-2}	2.237×10^{-2}
1 pie por segundo	0.304 8	30.48	1	0.681 8
1 milla por hora	0.447 0	44.70	1.467	1

Nota: 1 mi/min = 60 mi/h = 88 pie/s.

Fuerza

	N	lb
1 newton	1	0.224 8
1 libra	4.448	1

(*continúa*)

Tabla A.1 Factores de conversión *(continuación)*

Energía, transferencia de energía

	J	pie · lb	eV
1 joule	1	0.737 6	6.242×10^{18}
1 pie-libra	1.356	1	8.464×10^{18}
1 electrón volt	1.602×10^{-19}	1.182×10^{-19}	1
1 caloría	4.186	3.087	2.613×10^{19}
1 unidad térmica británica	1.055×10^{3}	7.779×10^{2}	6.585×10^{21}
1 kilowatt-hora	3.600×10^{6}	2.655×10^{6}	2.247×10^{25}

	cal	Btu	kWh
1 joule	0.238 9	9.481×10^{-4}	2.778×10^{-7}
1 pie-libra	0.323 9	1.285×10^{-3}	3.766×10^{-7}
1 electrón volt	3.827×10^{-20}	1.519×10^{-22}	4.450×10^{-26}
1 caloría	1	3.968×10^{-3}	1.163×10^{-6}
1 unidad térmica británica	2.520×10^{2}	1	2.930×10^{-4}
1 kilowatt-hora	8.601×10^{5}	3.413×10^{2}	1

Presión

	Pa	atm
1 pascal	1	9.869×10^{-6}
1 atmósfera	1.013×10^{5}	1
1 centímetro de mercurio[a]	1.333×10^{3}	1.316×10^{-2}
1 libra por pulgada cuadrada	6.895×10^{3}	6.805×10^{-2}
1 libra por pie cuadrado	47.88	4.725×10^{-4}

	cm Hg	lb/pulg^2	lb/pie^2
1 pascal	7.501×10^{-4}	1.450×10^{-4}	2.089×10^{-2}
1 atmósfera	76	14.70	2.116×10^{3}
1 centímetro de mercurio[a]	1	0.194 3	27.85
1 libra por pulgada cuadrada	5.171	1	144
1 libra por pie cuadrado	3.591×10^{-2}	6.944×10^{-3}	1

[a] A 0°C y en una ubicación donde la aceleración tiene su valor "estándar", 9.806 65 m/s^2.

Tabla A.2 Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas

Cantidad	Símbolo común	Unidad[a]	Dimensiones[b]	Unidades en términos de unidades del SI base
Aceleración	$\vec{\mathbf{a}}$	m/s^2	L/T^2	m/s^2
Cantidad de sustancia	n	MOL		mol
Ángulo	θ, ϕ	radián (rad)	1	
Aceleración angular	$\vec{\boldsymbol{\alpha}}$	rad/s^2	T^{-2}	s^{-2}
Frecuencia angular	ω	rad/s	T^{-1}	s^{-1}
Cantidad de movimiento angular	$\vec{\mathbf{L}}$	kg · m^2/s	ML^2/T	kg · m^2/s
Velocidad angular	$\vec{\boldsymbol{\omega}}$	rad/s	T^{-1}	s^{-1}
Área	A	m^2	L^2	m^2
Número atómico	Z			
Capacitancia	C	farad (F)	Q^{2}T^2/ML^2	A^2 · s^4/kg · m^2
Carga	q, Q, e	coulomb (C)	Q	A · s

(*continúa*)

Tabla A.2 **Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas** ***(continuación)***

Cantidad	Símbolo común	Unidad[a]	Dimensiones[b]	Unidades en términos de unidades del SI base
Densidad de carga				
Línea	λ	C/m	Q/L	A · s/m
Superficie	σ	C/m^2	Q/L^2	A · s/m^2
Volumen	ρ	C/m^3	Q/L^3	A · s/m^3
Conductividad	σ	1/Ω · m	Q^{2}T/ML^3	A^2 · s^3/kg · m^3
Corriente	I	AMPERE	Q/T	A
Densidad de corriente	J	A/m^2	Q/TL^2	A/m^2
Densidad	ρ	kg/m^3	M/L^3	kg/m^3
Constante dieléctrica	κ			
Momento de dipolo eléctrico	$\vec{\mathbf{p}}$	C · m	QL	A · s · m
Campo eléctrico	$\vec{\mathbf{E}}$	V/m	ML/QT^2	kg · m/A · s^3
Flujo eléctrico	Φ_E	V · m	ML^3/QT^2	kg · m^3/A · s^3
Fuerza electromotriz	$\mathcal{E}$	volt (V)	ML^2/QT^2	kg · m^2/A · s^3
Energía	E, U, K	joule (J)	ML^2/T^2	kg · m^2/s^2
Entropía	S	J/K	ML^2/T^{2}K	kg · m^2/s^2 · K
Fuerza	$\vec{\mathbf{F}}$	newton (N)	ML/T^2	kg · m/s^2
Frecuencia	f	hertz (Hz)	T^{-1}	s^{-1}
Calor	Q	joule (J)	ML^2/T^2	kg · m^2/s^2
Inductancia	L	henry (H)	ML^2/Q^2	kg · m^2/A^2 · s^2
Longitud	ℓ, L	METRO	L	m
Desplazamiento	Δx, $\Delta\vec{\mathbf{r}}$			
Distancia	d, h			
Posición	x, y, z, $\vec{\mathbf{r}}$			
Momento de dipolo magnético	$\vec{\boldsymbol{\mu}}$	N · m/T	QL^2/T	A · m^2
Campo magnético	$\vec{\mathbf{B}}$	tesla (T) (= Wb/m^2)	M/QT	kg/A · s^2
Flujo magnético	Φ_B	weber (Wb)	ML^2/QT	kg · m^2/A · s^2
Masa	m, M	KILOGRAMO	M	kg
Calor específico molar	C	J/mol · K		kg · m^2/s^2 · mol · K
Momento de inercia	I	kg · m^2	ML^2	kg · m^2
Cantidad de movimiento	$\vec{\mathbf{p}}$	kg · m/s	ML/T	kg · m/s
Periodo	T	s	T	s
Permeabilidad de espacio libre	μ_0	N/A^2 (= H/m)	ML/Q^2	kg · m/A^2 · s^2
Permitividad del espacio libre	ϵ_0	C^2/N · m^2 (= F/m)	Q^{2}T^2/ML^3	A^2 · s^4/kg · m^3
Potencial	V	volt (V) (= J/C)	ML^2/QT^2	kg · m^2/A · s^3
Potencia	P	watt (W) (= J/s)	ML^2/T^3	kg · m^2/s^3
Presión	P	pascal (Pa) (= N/m^2)	M/LT^2	kg/m · s^2
Resistencia	R	ohm (Ω) (= V/A)	ML^2/Q^{2}T	kg · m^2/A^2 · s^3
Calor específico	c	J/kg · K	L^2/T^{2}K	m^2/s^2 · K
Rapidez	v	m/s	L/T	m/s
Temperatura	T	KELVIN	K	K
Tiempo	t	SEGUNDO	T	s
Momento de torsión	$\vec{\boldsymbol{\tau}}$	N · m	ML^2/T^2	kg · m^2/s^2
Velocidad	$\vec{\mathbf{v}}$	m/s	L/T	m/s
Volumen	V	m^3	L^3	m^3
Longitud de onda	λ	m	L	m
Trabajo	W	joule (J) (= N · m)	ML^2/T^2	kg · m^2/s^2

[a]Las unidades del SI base están dadas en mayúsculas.

[b]Los símbolos M, L, T, K y Q denotan masa, longitud, tiempo, temperatura y carga, respectivamente.

APÉNDICE

B

Repaso matemático

Este apéndice en matemáticas tiene la intención de ser un breve repaso de operaciones y métodos. Desde las primeras etapas de este curso usted debió estar familiarizado con las técnicas algebraicas básicas, la geometría analítica y la trigonometría. Las secciones acerca de cálculo diferencial e integral son más detalladas y se dedican a aquellos estudiantes que tengan dificultad para aplicar los conceptos del cálculo a situaciones físicas.

B.1 Notación científica

Muchas cantidades utilizadas por los científicos con frecuencia tienen valores o muy grandes o muy pequeños. La rapidez de la luz, por ejemplo, es de aproximadamente 300 000 000 m/s, y la tinta requerida para hacer el punto sobre una *i* en este libro tiene una masa de aproximadamente 0.000 000 001 kg. Obviamente, es muy complicado leer, escribir y seguir la pista de tales números. Este problema se evita al usar un método que incorpora potencias del número 10:

$$10^0 = 1$$
$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$
$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$$
$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$
$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

y así sucesivamente. El número de ceros corresponde a la potencia a la que se eleva el diez, llamado **exponente** de diez. Por ejemplo, la rapidez de la luz, 300 000 000 m/s, se puede expresar como 3.00×10^8 m/s.

En este método, algunos números representativos menores que la unidad son los siguientes:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$
$$10^{-2} = \frac{1}{10 \times 10} = 0.01$$
$$10^{-3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.001$$
$$10^{-4} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,1$$
$$10^{-5} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,01$$

En estos casos, el número de lugares que el punto decimal está a la izquierda del dígito 1 es igual al valor del exponente (negativo). Los números expresados como alguna potencia de diez, multiplicados por otro número entre uno y diez, están en **notación científica**. Por ejemplo, la notación científica para 5 943 000 000 es 5.943×10^9 y para 0.000 083 2 es 8.32×10^{-5}.

Cuando se multiplican números expresados en notación científica, la siguiente regla general es muy útil:

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m} \tag{B.1}$$

donde n y m pueden ser *cualquier* número (no necesariamente enteros). Por ejemplo, $10^2 \times 10^5 = 10^7$. La regla también se aplica si uno de los exponentes es negativo: $10^3 \times 10^{-8} = 10^{-5}$.

Cuando se dividen números expresados en notación científica, observe que

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^n \times 10^{-m} = 10^{n-m} \tag{B.2}$$

Ejercicios

Con ayuda de las reglas anteriores, verifique las respuestas de las siguientes ecuaciones:

1. $86\,400 = 8.64 \times 10^4$
2. $9\,816\,762.5 = 9.816\,762\,5 \times 10^6$
3. $0.000\,000\,039\,8 = 3.98 \times 10^{-8}$
4. $(4.0 \times 10^8)(9.0 \times 10^9) = 3.6 \times 10^{18}$
5. $(3.0 \times 10^7)(6.0 \times 10^{-12}) = 1.8 \times 10^{-4}$
6. $\dfrac{75 \times 10^{-11}}{5.0 \times 10^{-3}} = 1.5 \times 10^{-7}$
7. $\dfrac{(3 \times 10^6)(8 \times 10^{-2})}{(2 \times 10^{17})(6 \times 10^5)} = 2 \times 10^{-18}$

B.2 Álgebra

Algunas reglas básicas

Cuando se realizan operaciones algebraicas, se aplican las leyes de la aritmética. Los símbolos como x, y y z por lo general se usan para representar cantidades no especificadas, llamadas **incógnitas**.

Primero, considere la ecuación

$$8x = 32$$

Si quiere resolver para x, divida (o multiplique) cada lado de la ecuación por el mismo factor sin destruir la igualdad. En este caso, si divide ambos lados entre 8, tiene

$$\frac{8x}{8} = \frac{32}{8}$$

$$x = 4$$

A continuación considere la ecuación

$$x + 2 = 8$$

En este tipo de expresión se puede sumar o restar la misma cantidad de cada lado. Si resta 2 de cada lado, obtiene

$$x + 2 - 2 = 8 - 2$$

$$x = 6$$

En general, si $x + a = b$, por lo tanto $x = b - a$.

Ahora considere la ecuación

$$\frac{x}{5} = 9$$

Si multiplica cada lado por 5, queda x sola a la izquierda y 45 a la derecha:

$$\left(\frac{x}{5}\right)(5) = 9 \times 5$$
$$x = 45$$

En todos los casos, *cualquier operación que realice en el lado izquierdo de la igualdad también la debe realizar en el lado derecho.*

Debe recordar las siguientes reglas para multiplicar, dividir, sumar y restar fracciones, donde a, b, c y d son cuatro números:

	Regla	Ejemplo
Multiplicar	$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$	$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}$
Dividir	$\frac{(a/b)}{(c/d)} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2/3}{4/5} = \frac{(2)(5)}{(4)(3)} = \frac{10}{12}$
Sumar	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{(2)(5) - (4)(3)}{(3)(5)} = -\frac{2}{15}$

Ejercicios

En los siguientes ejercicios resuelva para x.

	Respuestas
1. $a = \frac{1}{1 + x}$	$x = \frac{1 - a}{a}$
2. $3x - 5 = 13$	$x = 6$
3. $ax - 5 = bx + 2$	$x = \frac{7}{a - b}$
4. $\frac{5}{2x + 6} = \frac{3}{4x + 8}$	$x = -\frac{11}{7}$

Potencias

Cuando multiplique potencias de una cantidad conocida x, aplique las siguientes reglas:

$$x^n x^m = x^{n+m} \tag{B.3}$$

Por ejemplo, $x^2x^4 = x^{2+4} = x^6$.

Cuando divida potencias de una cantidad conocida, la regla es

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \tag{B.4}$$

Por ejemplo, $x^8/x^2 = x^{8-2} = x^6$.

Una potencia que es fracción, como $\frac{1}{3}$, corresponde a una raíz del modo siguiente:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \tag{B.5}$$

Por ejemplo, $4^{1/3} = \sqrt[3]{4} = 1.587\,4$. (Para tales cálculos es útil una calculadora científica.)

Por último, cualquier cantidad x^n elevada a la potencia m es

$$(x^n)^m = x^{nm} \tag{B.6}$$

La tabla B.1 resume las reglas de exponentes.

Tabla B.1 Regla de exponentes

$x^0 = 1$
$x^1 = x$
$x^n x^m = x^{n+m}$
$x^n/x^m = x^{n-m}$
$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$
$(x^n)^m = x^{nm}$

Ejercicios

Verifique las siguientes ecuaciones:

1. $3^2 \times 3^3 = 243$
2. $x^5x^{-8} = x^{-3}$

3. $x^{10}/x^{-5} = x^{15}$
4. $5^{1/3} = 1.709\ 976$ (Use su calculadora)
5. $60^{1/4} = 2.783\ 158$ (Use su calculadora)
6. $(x^4)^3 = x^{12}$

Factorización

Las siguientes son algunas fórmulas útiles para factorizar una ecuación:

$ax + ay + az = a(x + y + z)$ factor común

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ cuadrado perfecto

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ diferencia de cuadrados

Ecuaciones cuadráticas

La forma general de una ecuación cuadrática es

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{B.7}$$

donde x es la cantidad desconocida y a, b y c son factores numéricos conocidos como **coeficientes** de la ecuación. Esta ecuación tiene dos raíces, conocidas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{B.8}$$

Si $b^2 \geq 4ac$, las raíces son reales.

Ejemplo B.1

La ecuación $x^2 + 5x + 4 = 0$ tiene las siguientes raíces que corresponden a los dos signos del término raíz cuadrada:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - (4)(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$$x_+ = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \qquad x_- = \frac{-5 - 3}{2} = -4$$

donde x_+ se refiere a la raíz correspondiente al signo positivo y x_- se refiere a la raíz que corresponde al signo negativo.

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas:

		Respuestas	
1. $x^2 + 2x - 3 = 0$	$x_+ = 1$		$x_- = -3$
2. $2x^2 - 5x + 2 = 0$	$x_+ = 2$		$x_- = \frac{1}{2}$
3. $2x^2 - 4x - 9 = 0$	$x_+ = 1 + \sqrt{22}/2$		$x_- = 1 - \sqrt{22}/2$

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal tiene la forma general

$$y = mx + b \tag{B.9}$$

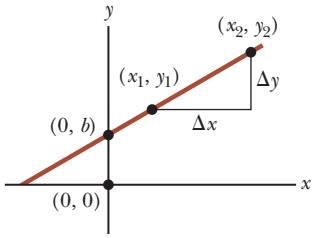


Figura B.1 Línea recta graficada sobre un sistema coordenado *xy*. La pendiente de la línea es la proporción de Δy a Δx.

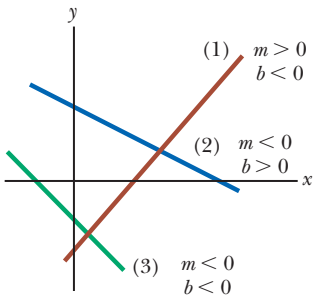


Figura B.2 La línea café tiene una pendiente positiva y una ordenada al origen negativa. La línea azul tiene una pendiente negativa y una ordenada al origen positiva. La línea verde tiene una pendiente negativa y una ordenada al origen negativa.

donde *m* y *b* son constantes. A esta ecuación se le conoce como lineal porque la gráfica de *y* en función de *x* es una línea recta, como se muestra en la figura B.1. La constante *b*, llamada **ordenada al origen**, representa el valor de *y* en el que la línea recta interseca el eje *y*. La constante *m* es igual a la **pendiente** de la línea recta. Si dos puntos cualesquiera en la línea recta se especifican mediante las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), como en la figura B.1, la pendiente de la línea recta se expresa como

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \textbf{(B.10)}$$

Note que *m* y *b* pueden tener valores positivos o negativos. Si $m > 0$, la línea recta tiene una pendiente *positiva*, como en la figura B.1. Si $m < 0$, la línea recta tiene una pendiente *negativa*. En la figura B.1, tanto *m* como *b* son positivos. En la figura B.2 se muestran otras tres posibles situaciones.

Ejercicios

1. Dibuje las gráficas de las siguientes líneas rectas: (a) $y = 5x + 3$ (b) $y = -2x + 4$ (c) $y = -3x - 6$.
2. Encuentre las pendientes de las líneas rectas descritas en el ejercicio 1.

Respuestas (a) 5, (b) −2, (c) −3.

3. Encuentre las pendientes de las líneas rectas que pasan por los siguientes conjuntos de puntos: (a) (0, −4) y (4, 2), (b) (0, 0) y (2, −5) (c) (−5, 2) y (4, −2).

Respuestas (a) $\frac{3}{2}$ (b) $-\frac{5}{2}$ (c) $-\frac{4}{9}$

Resolución de ecuaciones lineales simultáneas

Considere la ecuación $3x + 5y = 15$, que tiene dos incógnitas, *x* y *y*. Tal ecuación no tiene una solución única. Por ejemplo $(x = 0, y = 3)$, $(x = 5, y = 0)$ y $(x = 2, y = \frac{9}{5})$ son todas soluciones a esta ecuación.

Si un problema tiene dos incógnitas, una solución única sólo es posible si se tienen *dos* piezas de información que, en la mayoría de los casos, son dos ecuaciones. En general, si un problema tiene *n* incógnitas, su solución requiere *n* ecuaciones. Para resolver dos ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas, *x* y *y*, resuelva una de las ecuaciones para *x* en términos de *y* y sustituya esta expresión en la otra ecuación.

En algunos casos, las dos piezas de información pueden ser (1) una ecuación y (2) una condición sobre las soluciones. Por ejemplo, suponga que tenemos la ecuación $m = 3n$ y la condición de que *m* y *n* los menores enteros positivos diferentes de cero. Entonces, la sola ecuación no permite una solución única, pero la suma de las condiciones de $n = 1$ y $n = 3$.

Ejemplo B.2

Resuelva las dos ecuaciones simultáneas

$$(1) \quad 5x + y = -8$$
$$(2) \quad 2x - 2y = 4$$

SOLUCIÓN

De la ecuación (2), $x = y + 2$. La sustitución de esta ecuación en la ecuación (1) produce

$$5(y + 2) + y = -8$$
$$6y = -18$$

B.2 continuación

$$y = -3$$
$$x = y + 2 = -1$$

Solución alternativa Multiplique cada término en la ecuación (1) por el factor 2 y sume el resultado a la ecuación (2):

$$\begin{aligned} 10x + 2y &= -16 \\ 2x - 2y &= 4 \\ \hline 12x \quad &= -12 \\ x &= -1 \\ y &= x - 2 = -3 \end{aligned}$$

Dos ecuaciones lineales que contienen dos incógnitas también se pueden resolver mediante un método gráfico. Si las líneas rectas que corresponden a las dos ecuaciones se grafican en un sistema coordenado convencional, la intersección de las dos líneas representa la solución. Por ejemplo, considere las dos ecuaciones

$$x - y = 2$$
$$x - 2y = -1$$

Estas ecuaciones se grafican en la figura B.3. La intersección de las dos rectas tiene las coordenadas $x = 5$ y $y = 3$, que representan la solución a las ecuaciones. Debe comprobar esta solución mediante la técnica analítica explicada anteriormente.

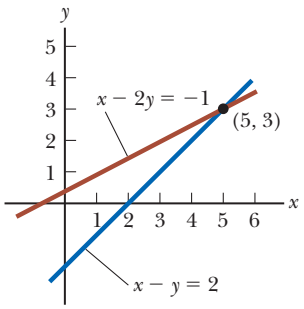


Figura B.3 Solución gráfica para dos ecuaciones lineales.

Ejercicios

Resuelva los siguientes pares de ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas:

		Respuestas
1.	$x + y = 8$ $x - y = 2$	$x = 5, y = 3$
2.	$98 - T = 10a$ $T - 49 = 5a$	$T = 65, a = 3.27$
3.	$6x + 2y = 6$ $8x - 4y = 28$	$x = 2, y = -3$

Logaritmos

Suponga que una cantidad x se expresa como una potencia de alguna cantidad a:

$$x = a^y \tag{B.11}$$

El número a se llama **número** base. El **logaritmo** de x respecto a la base a es igual al exponente al que se debe elevar la base para satisfacer la expresión $x = a^y$:

$$y = \log_a x \tag{B.12}$$

A la inversa, el **antilogaritmo** de y es el número x:

$$x = \text{antilog}_a\, y \tag{B.13}$$

En la práctica, las dos bases usadas con más frecuencia son la base 10, llamada base de logaritmo *común*, y la base $e = 2.718\,282$, llamada constante de Euler o base de logaritmo *natural*. Cuando se usan logaritmos comunes:

$$y = \log_{10} x \quad (\text{o } x = 10^y) \tag{B.14}$$

Cuando se usan logaritmos naturales:

$$y = \ln x \quad (\text{o } x = e^y) \tag{B.15}$$

Por ejemplo, $\log_{10} 52 = 1.716$, de modo que $\text{antilog}_{10}\, 1.716 = 10^{1.716} = 52$. Del mismo modo, $\ln 52 = 3.951$, de modo que $\text{antiln}\, 3.951 = e^{3.951} = 52$.

En general, note que puede convertir entre base 10 y base e con la igualdad

$$\ln x = (2.302\,585) \log_{10} x \tag{B.16}$$

Por último, las siguientes son algunas propiedades útiles de los logaritmos:

$$\left.\begin{aligned} \log(ab) &= \log a + \log b \\ \log(a/b) &= \log a - \log b \\ \log(a^n) &= n \log a \end{aligned}\right\} \text{cualquier base}$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^a = a$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

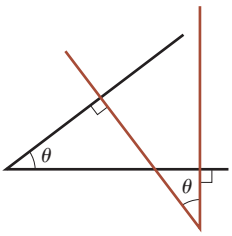


Figura B.4 Los ángulos son iguales porque sus lados son perpendiculares.

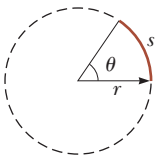


Figura B.5 El ángulo θ en radianes es el cociente de la longitud del arco s al radio r del círculo.

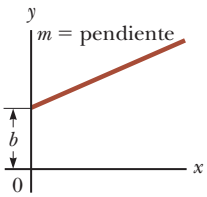


Figura B.6 Una línea recta con una pendiente m y una ordenada al origen b.

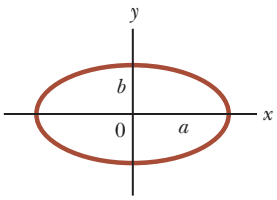


Figura B.7 Una elipse con semieje mayor a y semieje menor b.

B.3 Geometría

La **distancia** d entre dos puntos que tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{B.17}$$

Dos ángulos son iguales si sus lados son perpendiculares, lado derecho con lado derecho y lado izquierdo con lado izquierdo. Por ejemplo, los dos ángulos marcados θ en la figura B.4 son iguales debido a la perpendicularidad de los lados de los ángulos. Para distinguir los lados izquierdo y derecho de un ángulo, imagine estar de pie en el vértice del ángulo y de frente al ángulo.

Medida radián: La longitud de arco s de un arco circular (figura B.5) es proporcional al radio r para un valor fijo de θ (en radianes):

$$\begin{aligned} s &= r\theta \\ \theta &= \frac{s}{r} \end{aligned} \tag{B.18}$$

La tabla B.2 da las **áreas** y **volúmenes** para varias formas geométricas usadas por todo el texto.

La ecuación de una **línea recta** (figura B.6) es

$$y = mx + b \tag{B.19}$$

donde b es la ordenada al origen y m la pendiente de la línea.

La ecuación de un **círculo** de radio R con centro en el origen es

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{B.20}$$

La ecuación de una **elipse** que tiene el origen en su centro (figura B.7) es

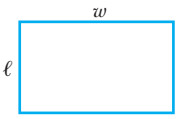
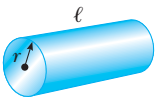
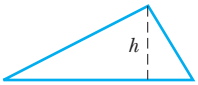
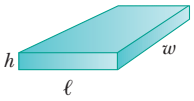
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{B.21}$$

donde a es la longitud del eje semimayor (el más largo) y b es la longitud del eje semimenor (el más corto).

La ecuación de una **parábola** cuyo vértice está en $y = b$ (figura B.8) es

$$y = ax^2 + b \tag{B.22}$$

Tabla B.2 Información útil para geometría

Forma	Área o volumen	Forma	Área o volumen
 Rectángulo	Área $= \ell w$	 Esfera	Área superficial $= 4\pi r^2$ Volumen $= \frac{4\pi r^3}{3}$
 Círculo	Área $= \pi r^2$ Circunferencia $= 2\pi r$	 Cilindro	Área de superficie lateral $= 2\pi r\ell$ Volumen $= \pi r^2 \ell$
 Triángulo	Área $= \frac{1}{2}bh$	 Caja rectangular	Área superficial $= 2(\ell h + \ell w + hw)$ Volumen $= \ell wh$

La ecuación de una **hipérbola rectangular** (figura B.9) es

$$xy = \text{constante} \tag{B.23}$$

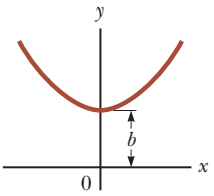


Figura B.8 Una parábola con su vértice en $y = b$.

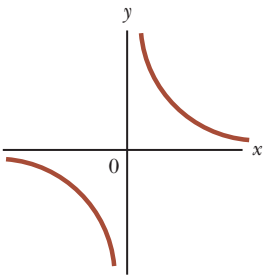


Figura B.9 Una hipérbola.

B.4 Trigonometría

La parte de las matemáticas basada en las propiedades especiales del triángulo rectángulo se llama trigonometría. Por definición, un triángulo rectángulo es aquel que contiene un ángulo de 90°. Considere el triángulo rectángulo que se muestra en la figura B.10, donde el lado a es opuesto al ángulo θ, el lado b es adyacente al ángulo θ y el lado c es la hipotenusa del triángulo. Las tres funciones trigonométricas básicas definidas por tal triángulo son el seno (sen), el coseno (cos) y la tangente (tan). En términos del ángulo θ, estas funciones se definen del modo siguiente:

a = lado opuesto
b = lado adyacente
c = hipotenusa

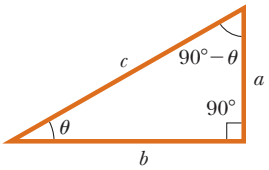


Figura B.10 Un triángulo rectángulo, que se usa para definir las funciones básicas de la trigonometría.

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \tag{B.24}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{lado adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \tag{B.25}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{lado adyacente a } \theta} = \frac{a}{b} \tag{B.26}$$

El teorema de Pitágoras proporciona la siguiente relación entre los lados de un triángulo rectángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{B.27}$$

A partir de las definiciones anteriores y del teorema de Pitágoras se sigue que

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$

Las funciones cosecante, secante y cotangente se definen como

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Tabla B.3 Algunas identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \qquad \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \qquad \cos^2\frac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2}(1 + \cos\theta)$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \qquad 1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen}A\cos B \pm \cos A\operatorname{sen}B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$$
$$\operatorname{sen}A \pm \operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}\left[\tfrac{1}{2}(A \pm B)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(A \mp B)\right]$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\left[\tfrac{1}{2}(A + B)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(A - B)\right]$$
$$\cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\left[\tfrac{1}{2}(A + B)\right]\operatorname{sen}\left[\tfrac{1}{2}(B - A)\right]$$

Las siguientes relaciones se deducen directamente del triángulo rectángulo que se muestra en la figura B.10:

$$\operatorname{sen}\theta = \cos(90^\circ - \theta)$$
$$\cos\theta = \operatorname{sen}(90^\circ - \theta)$$
$$\cot\theta = \tan(90^\circ - \theta)$$

Algunas propiedades de las funciones trigonométricas son las siguientes:

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

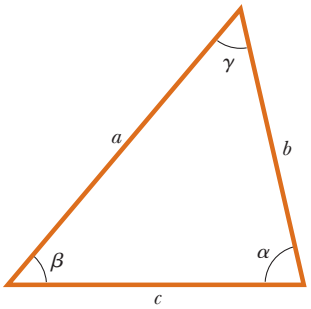


Figura B.11 Un triángulo arbitrario no rectángulo.

Las relaciones que siguen son aplicables a *cualquier* triángulo, como se muestra en la figura B.11:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Ley de cosenos

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases}$$

Ley de senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

La tabla B.3 menciona algunas identidades trigonométricas útiles.

Ejemplo B.3

Considere el triángulo rectángulo de la figura B.12 en el que $a = 2.00$, $b = 5.00$ y c es desconocido. A partir del teorema de Pitágoras se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2.00^2 + 5.00^2 = 4.00 + 25.0 = 29.0$$

$$c = \sqrt{29.0} = 5.39$$

Para encontrar el ángulo θ, note que

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{2.00}{5.00} = 0.400$$

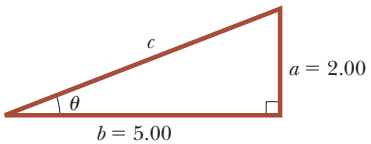


Figura B.12 (Ejemplo B.3)

B.3 continuación

Con una calculadora se encuentra que

$$\theta = \tan^{-1}(0.400) = 21.8°$$

donde $\tan^{-1}(0.400)$ es la notación para "ángulo cuya tangente es 0.400", que a veces se escribe como arctan (0.400).

Ejercicios

1. En la figura B.13, identifique (a) el lado opuesto a θ, (b) el lado adyacente a ϕ y luego encuentre (c) cos θ, (d) sen ϕ y (e) tan ϕ.

Respuestas (a) 3 (b) 3 (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{4}{5}$ (e) $\frac{4}{3}$

2. En cierto triángulo rectángulo, los dos lados que son mutuamente perpendiculares miden 5.00 m y 7.00 m. ¿Cuál es la longitud del tercer lado?

Respuesta 8.60 m.

3. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 3.00 m de largo y uno de sus ángulos mide 30°. (a) ¿Cuál es la longitud del lado opuesto al ángulo de 30°? (b) ¿Cuál es el lado adyacente al ángulo de 30°?

Respuestas (a) 1.5 m, (b) 2.6 m.

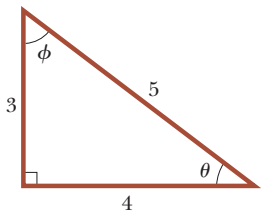


Figura B.13 (Ejercicio 1)

B.5 Desarrollo de series

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \tfrac{1}{2}x^2 \pm \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \; x \text{ en radianes}$$

Para $x \ll 1$, se pueden usar las siguientes aproximaciones:[1]

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \qquad \operatorname{sen} x \approx x$$

$$e^x \approx 1 + x \qquad \cos x \approx 1$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x \qquad \tan x \approx x$$

B.6 Cálculo diferencial

En diferentes ramas de la ciencia, a veces, es necesario usar las herramientas básicas del cálculo, inventadas por Newton, para describir fenómenos físicos. El uso del cálculo es fundamental en el tratamiento de diferentes problemas en mecánica newtoniana, electricidad y magnetismo. En esta sección simplemente se establecen algunas propiedades básicas y "reglas empíricas" que deben ser un útil repaso para el estudiante.

[1]Las aproximaciones para las funciones sen x, cos x y tan x son para $x \leq 0.1$ rad.

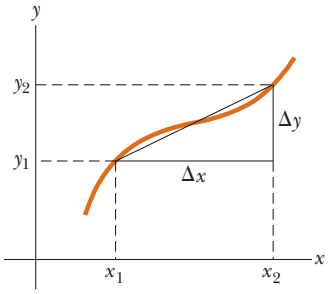


Figura B.14 Las longitudes Δx y Δy se usan para definir la derivada de esta función en un punto.

Primero, se debe especificar una **función** que relacione una variable con otra (por ejemplo, una coordenada como función del tiempo). Suponga que una de las variables se llama y (la variable dependiente) y la otra x (la variable independiente). Puede tener una relación funcional como

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Si a, b, c y d son constantes específicas, y se puede calcular para cualquier valor de x. Por lo general se trata con funciones continuas, es decir, aquellas para las que y varía "de manera uniforme" con x.

La **derivada** de y respecto a x se define como el límite a medida que Δx tiende a cero de las pendientes de las cuerdas dibujadas entre dos puntos sobre la curva y en función de x. En términos matemáticos, esta definición se escribe como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \qquad \textbf{(B.28)}$$

donde Δy y Δx se definen como $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$ (figura B.14). Note que dy/dx *no* significa dy dividido por dx, simplemente es una notación del proceso de límite de la derivada según se define por la ecuación B.28.

Una expresión útil de recordar cuando $y(x) = ax^n$, donde a es una *constante* y n es *cualquier* número positivo o negativo (entero o fracción), es

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} \qquad \textbf{(B.29)}$$

Si $y(x)$ es un polinomio o función algebraica de x, se aplica la ecuación B.29 a *cada* término en el polinomio y se saca $d[\text{constante}]/dx = 0$. En los ejemplos B.4 al B.7 se evalúan las derivadas de varias funciones.

Tabla B.4 Derivadas de varias funciones

$$\frac{d}{dx}(a) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } ax) = a \cos ax$$

$$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \text{ sen } ax$$

$$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a \sec^2 ax$$

$$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a \csc^2 ax$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1} ax) = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} ax) = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} ax) = \frac{a}{1 + a^2x^2}$$

Nota: Los símbolos a y n representan constantes.

Propiedades especiales de la derivada

A. Derivada del producto de dos funciones. Si una función $f(x)$ está dado por el producto de dos funciones, por decir, $g(x)$ y $h(x)$, la derivada de $f(x)$ se define como

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x)h(x)] = g\frac{dh}{dx} + h\frac{dg}{dx} \qquad \textbf{(B.30)}$$

B. Derivada de la suma de dos funciones. Si una función $f(x)$ es igual a la suma de dos funciones, la derivada de la suma es igual a la suma de las derivadas:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx} \qquad \textbf{(B.31)}$$

C. Regla de la cadena para cálculo diferencial. Si $y = f(x)$ y $x = g(z)$, entonces dy/dz se puede escribir como el producto de dos derivadas:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz} \qquad \textbf{(B.32)}$$

D. La segunda derivada. La segunda derivada de y respecto a x se define como la derivada de la función dy/dx (la derivada de la derivada). Por lo general se escribe como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad \textbf{(B.33)}$$

Algunas de las derivadas de las funciones más comúnmente usadas se mencionan en la tabla B.4.

Ejemplo B.4

Suponga que $y(x)$ (es decir, y como función de x) está dada por

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

donde a y b son constantes. Se sigue que

$$\begin{aligned} y(x + \Delta x) &= a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x) + c \\ &= a(x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3) + b(x + \Delta x) + c \end{aligned}$$

de modo que

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a(3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3) + b\Delta x$$

Al sustituir esto en la ecuación B.28 se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [3ax^2 + 3ax\,\Delta x + a\,\Delta x^2] + b$$

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b$$

Ejemplo B.5

Encuentre la derivada de

$$y(x) = 8x^5 + 4x^3 + 2x + 7$$

SOLUCIÓN

Al aplicar la ecuación B.29 a cada término independientemente y recordar que d/dx (constante) $= 0$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 8(5)x^4 + 4(3)x^2 + 2(1)x^0 + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 40x^4 + 12x^2 + 2$$

Ejemplo B.6

Encuentre la derivada de $y(x) = x^3/(x + 1)^2$ respecto a x.

SOLUCIÓN

Esta función se puede rescribir como $y(x) = x^3(x + 1)^{-2}$ y aplicar la ecuación B.30:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x + 1)^{-2} \frac{d}{dx}(x^3) + x^3 \frac{d}{dx}(x + 1)^{-2} \\ &= (x + 1)^{-2}\, 3x^2 + x^3\,(-2)(x + 1)^{-3} \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{(x + 1)^2} - \frac{2x^3}{(x + 1)^3} = \frac{x^2(x + 3)}{(x + 1)^3}$$

Ejemplo B.7

Una fórmula útil que se sigue de la ecuación B.30 es la derivada del cociente de dos funciones. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{h\dfrac{dg}{dx} - g\dfrac{dh}{dx}}{h^2}$$

SOLUCIÓN

El cociente se puede escribir como gh^{-1} y luego aplicar las ecuaciones B.29 y B.30:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{d}{dx}(gh^{-1}) = g\frac{d}{dx}(h^{-1}) + h^{-1}\frac{d}{dx}(g)$$

$$= -gh^{-2}\frac{dh}{dx} + h^{-1}\frac{dg}{dx}$$

$$= \frac{h\dfrac{dg}{dx} - g\dfrac{dh}{dx}}{h^2}$$

B.7 Cálculo integral

La integración se considera como el inverso de la derivación. Como ejemplo, considere la expresión

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b \tag{B.34}$$

que fue el resultado de derivar la función

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

en el ejemplo B.4. La ecuación B.34 se puede escribir como $dy = f(x)\,dx = (3ax^2 + b)\,dx$ y obtener $y(x)$ al "sumar" sobre todos los valores de x. En términos matemáticos, esta operación inversa se escribe como

$$y(x) = \int f(x)\,dx$$

Para la función $f(x)$ dada por la ecuación B.34 se tiene

$$y(x) = \int (3ax^2 + b)\,dx = ax^3 + bx + c$$

donde c es una constante de integración. Este tipo de integral se llama *integral indefinida*, porque su valor depende de la elección de c.

Una **integral indefinida** general $I(x)$ se define como

$$I(x) = \int f(x)\,dx \tag{B.35}$$

donde $f(x)$ se llama *integrando* y $f(x) = dI(x)/dx$.

Para una función *continua general* $f(x)$, la integral se puede describir como el área bajo la curva acotada por $f(x)$ y el eje x, entre dos valores específicos de x, por decir, x_1 y x_2, como en la figura B.15.

El área del elemento azul en la figura B.15 es aproximadamente $f(x_i)\,\Delta x_i$. Si suma todos estos elementos de área entre x_1 y x_2 y toma el límite de esta suma como $\Delta x_i \to 0$,

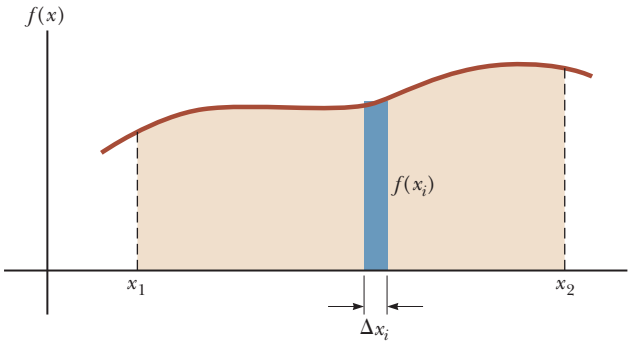


Figura B.15 La integral definida de una función es el área bajo la curva de la función entre los límites x_1 y x_2.

obtiene el área *verdadera* bajo la curva acotada por $f(x)$ y el eje x, entre los límites x_1 y x_2:

$$\text{Área} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \tag{B.36}$$

Las integrales del tipo definido por la ecuación B.36 se llaman **integrales definidas**.

Una integral común que surge en situaciones prácticas tiene la forma

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \tag{B.37}$$

Este resultado es obvio, pues la derivación del lado derecho respecto a x da $f(x) = x^n$ directamente. Si los límites de la integración se conocen, esta integral se vuelve una *integral definida* y se escribe

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{{x_2}^{n+1} - {x_1}^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \tag{B.38}$$

Ejemplos

1. $\displaystyle\int_0^a x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\bigg]_0^a = \frac{a^3}{3}$

2. $\displaystyle\int_0^b x^{3/2}\, dx = \frac{x^{5/2}}{5/2}\bigg]_0^b = \tfrac{2}{5}\, b^{5/2}$

3. $\displaystyle\int_3^5 x\, dx = \frac{x^2}{2}\bigg]_3^5 = \frac{5^2 - 3^2}{2} = 8$

Integración parcial

A veces es útil aplicar el método de *integración parcial* (también llamado "integración por partes") para evaluar ciertas integrales. Este método usa la propiedad

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \tag{B.39}$$

donde u y v se eligen con *cuidado* para reducir una integral compleja a una más simple. En muchos casos, tienen que hacerse muchas reducciones. Considere la función

$$I(x) = \int x^2\, e^x\, dx$$

que se puede evaluar al integrar por partes dos veces. Primero, si elige $u = x^2$, $v = e^x$, obtiene

$$\int x^2\, e^x\, dx = \int x^2\, d(e^x) = x^2\, e^x - 2\int e^x\, x\, dx + c_1$$

Ahora, en el segundo término, elija $u = x$, $v = e^x$, que produce

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2\, e^x - 2x\, e^x + 2\int e^x\, dx + c_1$$

o

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2\, e^x - 2xe^x + 2e^x + c_2$$

La diferencial perfecta

Otro método útil para recordar es el de la *diferencial perfecta*, en el que se busca un cambio de variable tal que la diferencial de la función sea la diferencial de la variable independiente que aparece en el integrando. Por ejemplo, considere la integral

$$I(x) = \int \cos^2 x\ \text{sen}\ x\ dx$$

Esta integral se vuelve fácil de evaluar si reescribe la diferencial como $d(\cos x) = -\text{sen}\ x\, dx$. Entonces la integral se convierte en

$$\int \cos^2 x\ \text{sen}\ x\ dx = -\int \cos^2 x\, d(\cos x)$$

Si ahora se cambian variables, con $y = \cos x$, obtenemos

$$\int \cos^2 x\ \text{sen}\ x\ dx = -\int y^2\, dy = -\frac{y^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

La tabla B.5 menciona algunas integrales indefinidas útiles. La tabla B.6 da la integral de probabilidad de Gauss y otras integrales definidas. Una lista más completa se puede encontrar en varios textos, como *The Handbook of Chemistry and Physics* (Boca Ratón, FL: CRC Press, que se publica anualmente).

Tabla B.5 **Algunas integrales indefinidas (a cada una de estas integrales debe agregar una constante arbitraria.)**

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (\text{siempre que } n \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}\, dx = \ln x$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx)$$

$$\int \frac{x\, dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\ln(a+bx)$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a}\ln\frac{x+a}{x}$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} \quad (a^2 - x^2 > 0)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} \quad (x^2 - a^2 > 0)$$

$$\int \ln ax\, dx = (x\ln ax) - x$$

$$\int xe^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}\ (ax-1)$$

$$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac}\ln\ (a+be^{cx})$$

$$\int \text{sen}\ ax\, dx = \frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\text{sen}\ ax$$

$$\int \tan ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln(\cos ax) = \frac{1}{a}\ln(\sec ax)$$

$$\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln(\text{sen}\ ax)$$

$$\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\int \csc ax\, dx = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a}\ln\left(\tan\frac{ax}{2}\right)$$

(continúa)

Tabla B.5 Algunas integrales indefinidas *(continuación)*

$$\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2} = \pm\tfrac{1}{2}\ln(a^2 \pm x^2)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} = -\cos^{-1}\frac{x}{a} \quad (a^2 - x^2 > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{|a|}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\tfrac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right]$$

$$\int x\left(\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)dx = \tfrac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a}\cot ax$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\tan ax$$

$$\int \tan^2 ax\,dx = \frac{1}{a}(\tan ax) - x$$

$$\int \cot^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}(\cot ax) - x$$

$$\int \operatorname{sen}^{-1} ax\,dx = x(\operatorname{sen}^{-1} ax) + \frac{\sqrt{1 - a^2x^2}}{a}$$

$$\int \cos^{-1} ax\,dx = x(\cos^{-1} ax) - \frac{\sqrt{1 - a^2x^2}}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Tabla B.6 Integral de probabilidad de Gauss y otras integrales definidas

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{(Integral de probabilidad de Gauss)}$$

$$I_1 = \int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a}$$

$$I_2 = \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,dx = -\frac{dI_0}{da} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$I_3 = \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\,dx = -\frac{dI_1}{da} = \frac{1}{2a^2}$$

$$I_4 = \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}\,dx = \frac{d^2 I_0}{da^2} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

$$I_5 = \int_0^\infty x^5 e^{-ax^2}\,dx = \frac{d^2 I_1}{da^2} = \frac{1}{a^3}$$

$$\vdots$$

$$I_{2n} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_0$$

$$I_{2n+1} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_1$$

B.8 Propagación de incertidumbre

En experimentos de laboratorio una actividad común es tomar mediciones que fungen como datos no analizados. Estas mediciones son de varios tipos (longitud, intervalo de tiempo, temperatura, voltaje, y así sucesivamente) y se toman mediante varios instrumentos. Sin importar la medición y la calidad de la instrumentación, **siempre hay incertidumbre asociada con una medición física**. Esta incertidumbre es una combinación de la que se asocia con el instrumento y la relacionada con el sistema a medir. Un ejemplo de lo anterior es la incapacidad de determinar con exactitud la posición de una medición de longitud entre las líneas de una regleta. Otro ejemplo de incertidumbre relacionado con el sistema a medir es la variación de la temperatura dentro de una muestra de agua, de modo que es difícil determinar una sola temperatura para la muestra.

Las incertidumbres se expresan en dos formas. La **incertidumbre absoluta** se refiere a una incertidumbre expresada en las mismas unidades que la medición. Por lo tanto, la longitud de una etiqueta de disco de computadora se puede expresar como (5.5 ± 0.1) cm. Sin embargo, la incertidumbre de ± 0.1 cm por sí misma no es lo suficientemente descriptiva para algunos propósitos. Esta incertidumbre es grande si la medición es 1.0 cm, pero es pequeña si la medición es 100 m. Para dar una explicación más descriptiva de la incertidumbre, se usa la **incertidumbre fraccionaria** o la **incertidumbre porcentual**. En este tipo de descripción la incertidumbre se divide entre la medición real. Por lo tanto, la longitud de la etiqueta del disco de computadora podría expresarse como

$$\ell = 5.5 \text{ cm} \pm \frac{0.1 \text{ cm}}{5.5 \text{ cm}} = 5.5 \text{ cm} \pm 0.018 \quad \text{(incertidumbre fraccionaria)}$$

o como

$$\ell = 5.5 \text{ cm} \pm 1.8\% \quad \text{(incertidumbre porcentual)}$$

Cuando se combinan mediciones en un cálculo, la incertidumbre porcentual en el resultado final por lo general es mayor que la incertidumbre en las mediciones individuales. A esto se le llama **propagación de incertidumbre** y es uno de los retos de la física experimental.

Algunas reglas simples pueden proporcionar estimaciones razonables de incertidumbre en un resultado calculado:

Multiplicación y división: Cuando las mediciones con incertidumbres se multiplican o dividen, sume las *incertidumbres porcentuales* para obtener la incertidumbre porcentual en el resultado.

Ejemplo: El área de una placa rectangular

$$A = \ell w = (5.5 \text{ cm} \pm 1.8\%) \times (6.4 \text{ cm} \pm 1.6\%) = 35 \text{ cm}^2 \pm 3.4\%$$
$$= (35 \pm 1) \text{ cm}^2$$

Suma y resta: Cuando se suman o restan mediciones con incertidumbre, sume las *incertidumbres absolutas* para obtener la incertidumbre absoluta en el resultado.

Ejemplo: Un cambio en temperatura

$$\Delta T = T_2 - T_1 = (99.2 \pm 1.5)^\circ\text{C} - (27.6 \pm 1.5)^\circ\text{C} = (71.6 \pm 3.0)^\circ\text{C}$$
$$= 71.6^\circ\text{C} \pm 4.2\%$$

Potencias: Si una medición se eleva a una potencia, la incertidumbre porcentual se multiplica por dicha potencia para obtener la incertidumbre porcentual en el resultado.

Ejemplo: Volumen de una esfera

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi(6.20\text{ cm} \pm 2.0\%)^3 = 998\text{ cm}^3 \pm 6.0\%$$
$$= (998 \pm 60)\text{ cm}^3$$

Para cálculos complicados muchas incertidumbres se suman juntas, lo que puede hacer que la incertidumbre en el resultado final sea indeseablemente grande. Los experimentos se deben diseñar de modo que los cálculos sean tan simples como sea posible.

Note que las incertidumbres en un cálculo siempre se suman. Como resultado, un experimento que involucre una resta se debe evitar, si es posible, en especial si las mediciones a restar están cercanas. El resultado de tal cálculo es una diferencia pequeña en las mediciones e incertidumbres que se suman. ¡Es posible que la incertidumbre en el resultado pueda ser mayor que el resultado mismo!

APÉNDICE

C

Tabla periódica de los elementos

Grupo I	Grupo II								
H 1 1.007 9 $1s$									
Li 3 6.941 $2s^1$	**Be** 4 9.0122 $2s^2$								
Na 11 22.990 $3s^1$	**Mg** 12 24.305 $3s^2$								
K 19 39.098 $4s^1$	**Ca** 20 40.078 $4s^2$	**Sc** 21 44.956 $3d^14s^2$	**Ti** 22 47.867 $3d^24s^2$	**V** 23 50.942 $3d^34s^2$	**Cr** 24 51.996 $3d^54s^1$	**Mn** 25 54.938 $3d^54s^2$	**Fe** 26 55.845 $3d^64s^2$	**Co** 27 58.933 $3d^74s^2$
Rb 37 85.468 $5s^1$	**Sr** 38 87.62 $5s^2$	**Y** 39 88.906 $4d^15s^2$	**Zr** 40 91.224 $4d^25s^2$	**Nb** 41 92.906 $4d^45s^1$	**Mo** 42 95.94 $4d^55s^1$	**Tc** 43 (98) $4d^55s^2$	**Ru** 44 101.07 $4d^75s^1$	**Rh** 45 102.91 $4d^{\square}5s^1$
Cs 55 132.91 $6s^1$	**Ba** 56 137.33 $6s^2$	57–71*	**Hf** 72 178.49 $5d^26s^2$	**Ta** 73 180.95 $5d^36s^2$	**W** 74 183.84 $5d^46s^2$	**Re** 75 186.21 $5d^56s^2$	**Os** 76 190.23 $5d^66s^2$	**Ir** 77 192.2 $5d^76s^2$
Fr 87 (223) $7s^1$	**Ra** 88 (226) $7s^2$	89–103**	**Rf** 104 (261) $6d^27s^2$	**Db** 105 (262) $6d^37s^2$	**Sg** 106 (266)	**Bh** 107 (264)	**Hs** 108 (277)	**Mt** 109 (268)

Símbolo — **Ca** 20 — Número atómico
Masa atómica† — 40.078
$4s^2$ — Configuración de electrón

*Serie lantánidos	**La** 57 138.91 $5d^16s^2$	**Ce** 58 140.12 $5d^14f^16s^2$	**Pr** 59 140.91 $4f^36s^2$	**Nd** 60 144.24 $4f^46s^2$	**Pm** 61 (145) $4f^56s^2$	**Sm** 62 150.36 $4f^66s^2$
**Serie actínidos	**Ac** 89 (227) $6d^17s^2$	**Th** 90 232.04 $6d^27s^2$	**Pa** 91 231.04 $5f^26d^17s^2$	**U** 92 238.03 $5f^36d^17s^2$	**Np** 93 (237) $5f^46d^17s^2$	**Pu** 94 (244) $5f^67s^2$

Nota: Los valores de masa atómica son promedios sobre isótopos en los porcentajes en los que existen en la naturaleza.
† Para un elemento inestable el número de masa del isótopo conocido más estable aparece entre paréntesis.

Grupo III	Grupo IV	Grupo V	Grupo VI	Grupo VII	Grupo 0
				H 1 1.007 9 $1s^1$	**He** 2 4.002 6 $1s^2$
B 5 10.811 $2p^1$	**C** 6 12.011 $2p^2$	**N** 7 14.007 $2p^3$	**O** 8 15.999 $2p^4$	**F** 9 18.998 $2p^5$	**Ne** 10 20.180 $2p^6$
Al 13 26.982 $3p^1$	**Si** 14 28.086 $3p^2$	**P** 15 30.974 $3p^3$	**S** 16 32.066 $3p^4$	**Cl** 17 35.453 $3p^5$	**Ar** 18 39.948 $3p^6$
Ga 31 69.723 $4p^1$	**Ge** 32 72.64 $4p^2$	**As** 33 74.922 $4p^3$	**Se** 34 78.96 $4p^4$	**Br** 35 79.904 $4p^5$	**Kr** 36 83.80 $4p^6$
In 49 114.82 $5p^1$	**Sn** 50 118.71 $5p^2$	**Sb** 51 121.76 $5p^3$	**Te** 52 127.60 $5p^4$	**I** 53 126.90 $5p^5$	**Xe** 54 131.29 $5p^6$
Tl 81 204.38 $6p^1$	**Pb** 82 207.2 $6p^2$	**Bi** 83 208.98 $6p^3$	**Po** 84 (209) $6p^4$	**At** 85 (210) $6p^5$	**Rn** 86 (222) $6p^6$
113†† (284)	**Fl** 114 (289)	115†† (288)	**Lv** 116 (293)	117†† (294)	118†† (294)

Ni 28 58.693 $3d^8 4s^2$	**Cu** 29 63.546 $3d^{10} 4s^1$	**Zn** 30 65.41 $3d^{10} 4s^2$							
Pd 46 106.42 $4d^{10}$	**Ag** 47 107.87 $4d^{10} 5s^1$	**Cd** 48 112.41 $4d^{10} 5s^2$							
Pt 78 195.08 $5d^{\square} 6s^1$	**Au** 79 196.97 $5d^{10} 6s^1$	**Hg** 80 200.59 $5d^{10} 6s^2$							
Ds 110 (271)	**Rg** 111 (272)	**Cn** 112 (285)							

Eu 63 151.96 $4f^7 6s^2$	**Gd** 64 157.25 $4f^7 5d^1 6s^2$	**Tb** 65 158.93 $4f^8 5d^1 6s^2$	**Dy** 66 162.50 $4f^{10} 6s^2$	**Ho** 67 164.93 $4f^{11} 6s^2$	**Er** 68 167.26 $4f^{12} 6s^2$	**Tm** 69 168.93 $4f^{13} 6s^2$	**Yb** 70 173.04 $4f^{14} 6s^2$	**Lu** 71 174.97 $4f^{14} 5d^1 6s^2$
Am 95 (243) $5f^7 7s^2$	**Cm** 96 (247) $5f^7 6d^1 7s^2$	**Bk** 97 (247) $5f^8 6d^1 7s^2$	**Cf** 98 (251) $5f^{10} 7s^2$	**Es** 99 (252) $5f^{11} 7s^2$	**Fm** 100 (257) $5f^{12} 7s^2$	**Md** 101 (258) $5f^{13} 7s^2$	**No** 102 (259) $5f^{14} 7s^2$	**Lr** 103 (262) $5f^{14} 6d^1 7s^2$

†† Los elementos 113, 115, 117 y 118 todavía no tienen nombre. Sólo se han observado pequeños números de átomos de estos elementos.

Nota: Para una descripción de los datos atómicos, visite *physics.nist.gov/PhysRefData/Elements/per_text.html*

APÉNDICE

D

Unidades del SI

Tabla D.1 **Unidades del SI**

	Unidad base del SI	
Cantidad base	**Nombre**	**Símbolo**
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Tabla D.2 **Algunas unidades del SI deducibles**

Otra cantidad	**Nombre**	**Símbolo**	**Expresión en términos de unidades base**	**Expresión en términos de otras unidades del SI**
Ángulo plano	radián	rad	m/m	
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}	
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$	J/m
Presión	pascal	Pa	$kg/m \cdot s^2$	N/m^2
Energía	joule	J	$kg \cdot m^2/s^2$	$N \cdot m$
Potencia	watt	W	$kg \cdot m^2/s^3$	J/s
Carga eléctrica	coulomb	C	$A \cdot s$	
Potencial eléctrico	volt	V	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$	W/A
Capacitancia	farad	F	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^2$	C/V
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^3$	V/A
Flujo magnético	weber	Wb	$kg \cdot m^2/A \cdot s^2$	$V \cdot s$
Campo magnético	tesla	T	$kg/A \cdot s^2$	
Inductancia	henry	H	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^2$	$T \cdot m^2/A$

Respuestas a exámenes rápidos y problemas con numeración impar

Capítulo 1

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (a)
2. Falso
3. (b)

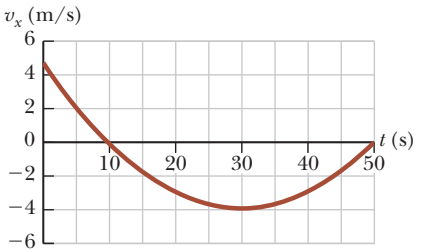
Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) 5.52×10^3 kg/m^3 (b) Está entre la densidad del aluminio y del hierro y es mayor que la densidad de las rocas superficiales típicas.
3. 23.0 kg
5. 7.69 cm
7. 0.141 nm
9. Sólo (b)
11. (a) kg · m/s (b) N · s
13. No.
15. 11.4×10^3 kg/m^3
17. 871 m^2
19. Al medir las páginas, se encuentra que cada página tiene área 0.277 m × 0.217 m = 0.060 m^2. La habitación tiene un área de pared de 37 m^2, requiriendo 616 hojas que se podrían considerar 1 232 páginas. El volumen 1 de este libro de texto contiene sólo 784 páginas.
21. 1.00×10^{10} lb
23. 4.05×10^3 m^2
25. 2.86 cm
27. 151 μm
29. (a) 507 años (b) 2.48×10^9 billetes
31. $\sim 10^6$ bolas en una habitación de 4 m por 4 m por 3 m
33. $\sim 10^2$ afinadores de piano
35. (209 ± 4) cm^2
37. 31 556 926.0 s
39. 19
41. 8.80%
43. 63
45. (a) 6.71 m (b) 0.894 (c) 0.745
47. 48.6 kg
49. ±3.46
51. Las respuestas pueden variar ligeramente debido a la variación en la lectura de números precisos de la gráfica. (a) 0.015 g (b) 8 % (c) 5.2 g/m^2 (d) Para cortar las formas de este papel de copia, la masa de la abertura es proporcional a su área. La constante de proporcionalidad es 5.2 g/m^2 ± 8%, donde se estima la incertidumbre. (e) Este resultado es de esperarse si el papel tiene espesor y densidad que son uniformes dentro de la incertidumbre experimental. (f) La pendiente es la densidad de áreas del papel, su masa por unidad de área.
53. 5.2 m^3, 3%
55. 316 m
57. 5.0 m
59. 3.41 m
61. (a) aluminio, 2.75 g/cm^3; cobre, 9.36 g/cm^3; latón, 8.91 g/cm^3; estaño, 7.68 g/cm^3; hierro, 7.88 g/cm^3 (b) Los valores tabulados son más pequeños en 2% para el aluminio, en 5% para el cobre, 6% para el latón, en 5% para el estaño y 0.3% para el hierro.
63. 1×10^{10} gal/año
65. Las respuestas pueden variar. (a) $\sim 10^{29}$ procariotas (b) $\sim 10^{14}$ kg
67. (a) $B = 2.70$ g/cm^3, $C = 1.19$ g/cm^4 (b) 1.39 kg
69. $V = 0.579t + (1.19 \times 10^{29})t^2$, donde V está en pies cúbicos y t está en segundos.
71. (a) 0.529 cm/s (b) 11.5 cm/s
73. (a) 12.1 m (b) 135° (c) 25.2° (d) 135°

Capítulo 2

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (c)
2. (b)
3. Falso. La gráfica debería verse como la que se muestra a continuación. Esta gráfica de $v_x - t$ muestra que la velocidad máxima es aproximadamente de 5.0 m/s, que es de 18 km/h (= 11 mi/h), por lo que el conductor no estaba acelerando.

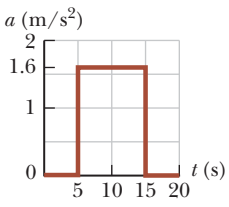


4. (b)
5. (c)
6. (a)–(e), (b)–(d), (c)–(f)
7. **(i)** (e) **(ii)** (d)

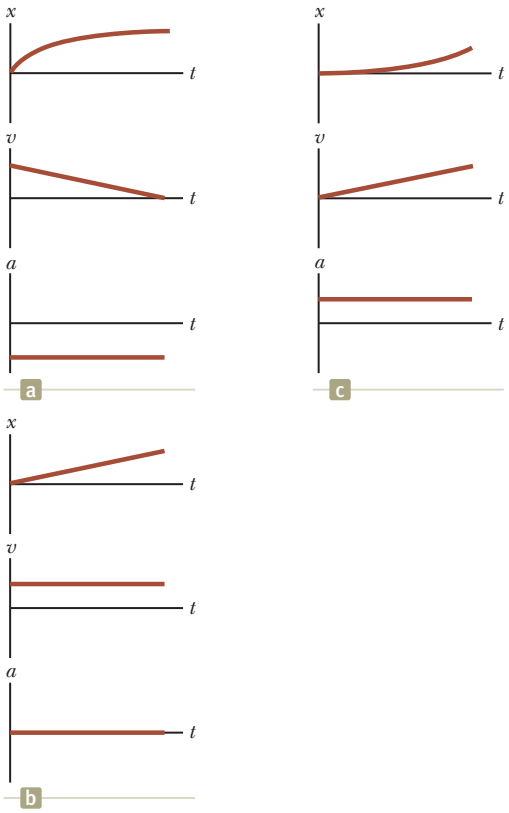
Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) 5 m/s (b) 1.2 m/s (c) −2.5 m/s (d) −3.3 m/s (e) 0
3. (a) 3.75 m/s (b) 0
5. (a) 2.30 m/s (b) 16.1 m/s (c) 11.5 m/s

7. (a) −2.4 m/s (b) −3.8 m/s (c) 4.0 s
9. (a) 5.0 m/s (b) −2.5 m/s (c) 0 (d) +5.0 m/s
11. (a) 5.00 m (b) 4.88×10^3 s
13. (a) 2.80 h (b) 218 km
15. (a)



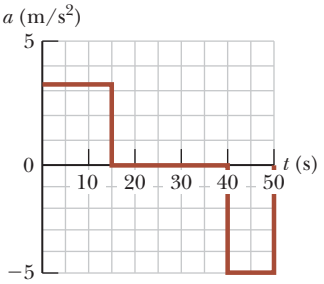
(b) 1.60 m/s² (c) 0.800 m/s²
17. (a) 1.3 m/s² (b) $t = 3$ s, $a = 2$ m/s² (c) $t = 6$ s, $t > 10$ s (d) $a = -1.5$ m/s², $t = 8$ s
19. (a) 20 m/s, 5 m/s (b) 263 m
21. (a) 2.00 m (b) −3.00 m/s (c) −2.00 m/s²
23.



25. (a) 4.98×10^{-9} s (b) 1.20×10^{15} m/s²
27. (a) 9.00 m/s (b) −3.00 m/s (c) 17.0 m/s (d) La gráfica de velocidad contra tiempo es una línea recta que pasa por 13 m/s a las 10:05 a.m. y se inclina hacia abajo, disminuyendo 4 m/s cada segundo después de eso. (e) Si y sólo si conocemos la velocidad del objeto en un instante, el conocer su aceleración nos dice su velocidad en cualquier otro momento mientras la aceleración sea constante.
29. −16.0 cm/s²
31. (a) −202 m/s² (b) 198 m
33. (a) 35.0 s (b) 15.7 m/s
35. 3.10 m/s
37. (a)



(b) Partícula bajo aceleración constante
(c) $v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$ (ecuación 2.17)
(d) $a = \dfrac{v_f^2 - v_i^2}{2(x_f - x_i)}$ (e) 1.25 m/s² (f) 8.00 s
39. (a) La idea es falsa, a menos que la aceleración sea cero. Definimos la aceleración constante en el sentido de que la velocidad está cambiando constantemente en el tiempo. Así, la velocidad no puede estar cambiando constantemente en el espacio. (b) Esta idea es verdadera. Como la velocidad está cambiando constantemente en el tiempo, la velocidad a la mitad de un intervalo es igual a la media de sus valores iniciales y finales.
41. (a) 13.5 m (b) 13.5 m (c) 13.5 m (d) 22.5 m
43. (a) 1.88 km (b) 1.46 km
(c)



(d) $0a$: $x = 1.67t^2$; ab: $x = 50t - 375$; bc: $x = 250t - 2.5t^2 - 4\,375$ (En las tres expresiones, x está en metros y t está en segundos). (e) 37.5 m/s
45. (a) 0.231 m (b) 0.364 m (c) 0.399 m (d) 0.175 m
47. David no tendrá éxito. El tiempo medio de reacción humana es de 0.2 s (investigado en Internet) y un billete de dólar tiene aproximadamente 15.5 cm de largo, así los dedos de David están aproximadamente a 8 cm del extremo del billete antes de que se caiga. El billete caerá cerca de 20 cm antes de que pueda cerrar los dedos.
49. (a) 510 m (b) 20.4 s
51. 1.79 s
53. (a) 10.0 m/s hacia arriba (b) 4.68 m/s hacia abajo
55 (a) 7.82 m (b) 0.782 s
57. (a) $a_x(t) = a_{xi} + Jt$; $v_x(t) = v_{xi} + a_{xi}t + \frac{1}{2}Jt^2$; $x(t) = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_{xi}t^2 + \frac{1}{6}Jt^3$
59. (a) $a = -(10.0 \times 10^7)t + 3.00 \times 10^5$; $x = -(1.67 \times 10^7)t^3 + (1.50 \times 10^5)t^2$ (En estas expresiones, a está en m/s², x está en metros y t está en segundos.) (b) 3.00 ms (c) 450 m/s (d) 0.900 m
61. (a) 4.00 m/s (b) 1.00 ms (c) 0.816 m
63. (a) 3.00 s (b) −15.3 m/s (c) 31.4 m/s hacia abajo y 34.8 m/s hacia abajo
65. (a) 3.00 m/s (b) 6.00 s (c) −0.300 m/s² (d) 2.05 m/s
67. (a) 2.83 s (b) Es exactamente la misma situación que en el ejemplo 2.8, excepto que este problema está en la dirección vertical. El ascensor descendente desempeña el papel del auto a toda velocidad, y el tornillo que cae desempeña el papel del patrullero acelerando. Gire 90° en el sentido de las manecillas del reloj la figura 2.13 ¡para visualizar el problema elevador–tornillo! (c) Si cada piso tiene 3 m de alto, el piso más alto que puede alcanzar es el piso 13.
69. (a) En la gráfica, vemos que el Acela está cruzando con una velocidad constante y positiva en la dirección x positiva de −50 s a 50 s. De 50 s a 200 s, el Acela acelera en la dirección x positiva alcanzando una rapidez máxima de aproximadamente 170 mi/h. Alrededor de 200 s, el ingeniero aplica los frenos y el tren sigue viajando en la direc-

ción x positiva, se ralentiza y luego se detiene en 350 s. Justo después de 350 s, invierte la dirección el tren (v se hace negativa) y constantemente gana rapidez en la dirección x negativa. (b) Aproximadamente 2.2 mi/h/s (c) Aproximadamente 6.7 mi

71. (a) Aquí v_1 debe ser mayor que v_2, y la distancia entre el primer atleta y la línea de meta debe ser suficientemente grande para que el atleta que lo sigue tenga tiempo de alcanzarlo.

(b) $t = \dfrac{d_1}{v_1 - v_2}$ (c) $d_2 = \dfrac{v_2 d_1}{v_1 - v_2}$

73. (a) 5.46 s (b) 73.0 m (c) $v_{\text{Stan}} = 22.6$ m/s, $v_{\text{Kathy}} = 26.7$ m/s

75. (a) $v_B = (1/\tan\theta)v$ (b) La velocidad v_B comienza mayor que v para valores pequeños de θ y luego disminuye, acercándose a cero conforme θ tiende a 90°.

77. (a) 15.0 s (b) 30.0 m/s (c) 225 m

79. 1.60 m/s^2

81. (a) 35.9 m (b) 4.04 s (c) 45.8 m (d) 22.6 m/s

83. (a) 5.32 m/s^2 para Laura y 3.75 m/s^2 para Healan (b) 10.6 m/s para Laura y 11.2 m/s para Healan (c) Laura, por 2.63 m (d) 4.47 m a $t = 2.84$ s

85. (a) 26.4 m (b) 6.8%

Capítulo 3

Respuestas a los exámenes rápidos

1. vectores: (b), (c); escalares: (a), (d), (e)

2. (c)

3. (b) y (c)

4. (b)

5. (c)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (−2.75, −4.76) m

3. (a) 8.60 m (b) 4.47 m, −63.4°; 4.24 m, 135°

5. (a) (−3.56 cm, −2.40 cm) (b) ($r = 4.30$ cm, $\theta = 326°$) (c) ($r = 8.60$ cm, $\theta = 34.0°$) (d) ($r = 12.9$ cm, $\theta = 146°$)

7. 70.0 m

9. Esta situación *nunca* puede ser cierta, porque la distancia es un arco de un círculo entre dos puntos, mientras que la magnitud del vector desplazamiento es una cuerda, una línea recta que corta el círculo entre los mismos puntos.

11. (a) 5.2 m a 60° (b) 3.0 m a 330° (c) 3.0 m a 150° (d) 5.2 m a 300°

13. Aproximadamente 420 pies a −3°

15. 47.2 unidades a 122°

17. (a) Sí (b) La rapidez de la minivan debe ser 28.3 m/s o más para cumplir con este requisito.

19. (a) $(-11.1\hat{\mathbf{i}} + 6.40\hat{\mathbf{j}})$ m (b) $(1.65\hat{\mathbf{i}} + 2.86\hat{\mathbf{j}})$ cm (c) $(-18.0\hat{\mathbf{i}} - 12.6\hat{\mathbf{j}})$ pulg.

21. 358 m a 2.00° Sureste

23. (a) $2.00\hat{\mathbf{i}} - 6.00\hat{\mathbf{j}}$ (b) $4.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}}$ (c) 6.32 (d) 4.47 (e) 288°; 26.6°

25. 9.48 m at 166°

27. 4.64 m a 78.6° Noreste

29. (a) 185 N a 77.8° del eje positivo x (b) $(-39.3\hat{\mathbf{i}} - 181\hat{\mathbf{j}})$ N

31. (a) 2.83 m a $\theta = 315°$ (b) 13.4 m a $\theta = 117°$

33. (a) $8.00\hat{\mathbf{i}} + 12.0\hat{\mathbf{j}} - 4.00\hat{\mathbf{k}}$ (b) $2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}} - 1.00\hat{\mathbf{k}}$ (c) $-24.0\hat{\mathbf{i}} - 36.0\hat{\mathbf{j}} + 12.0\hat{\mathbf{k}}$

35. (a) $-3.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}}$ (b) 3.61 a 146° (c) $3.00\hat{\mathbf{i}} - 6.00\hat{\mathbf{j}}$

37. (a) $a = 5.00$ y $b = 7.00$ (b) Para que los vectores sean iguales, todas sus componentes deben ser iguales. Una ecuación vectorial contiene más información que una ecuación escalar.

39. 196 cm a 345°

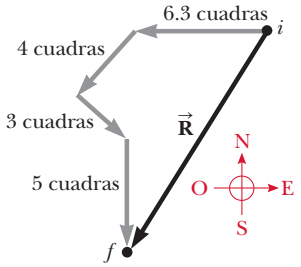
41. (a) $\vec{\mathbf{E}} = (15.1\hat{\mathbf{i}} + 7.72\hat{\mathbf{j}})$ cm (b) $\vec{\mathbf{F}} = (-7.72\hat{\mathbf{i}} + 15.1\hat{\mathbf{j}})$ cm (c) $\vec{\mathbf{G}} = (-7.72\hat{\mathbf{i}} - 15.1\hat{\mathbf{j}})$ cm

43. (a) $(-20.5\hat{\mathbf{i}} + 35.5\hat{\mathbf{j}})$ m/s (b) $25.0\hat{\mathbf{j}}$ m/s (c) $(-61.5\hat{\mathbf{i}} + 107\hat{\mathbf{j}})$ m (d) $37.5\hat{\mathbf{j}}$ m (e) 157 km

45. 1.43×10^4 m a 32.2° arriba de la horizontal

47. (a) 10.4 cm (b) $\theta = 35.5°$

49. (a)



(b) 18.3 cuadras (c) 12.4 cuadras a 233° en sentido contrario a las manecillas del reloj desde el Este

51. 240 m a 237°

53. (a) 25.4 s (b) 15.0 km/h

55. (a) 0.079 8 N (b) 57.9° (c) 32.1°

57. (a) Las componentes x, y y z son, respectivamente, 2.00, 1.00 y 3.00. (b) 3.74 (c) $\theta_x = 57.7°$, $\theta_y = 74.5°$, $\theta_z = 36.7°$

59. 1.15°

61. (a) $(10\,000 - 9\,600 \operatorname{sen}\theta)^{1/2}$ cm (b) 270°; 140 cm (c) 90°; 20.0 cm (d) Tienen sentido. El valor máximo se alcanza cuando $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ están en la misma dirección, y es 60 cm + 80 cm. El valor mínimo se alcanza cuando $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ están en direcciones opuestas, y es 80 cm − 60 cm.

63. (a) $-2.00\hat{\mathbf{k}}$ m/s (b) Su vector velocidad

65. (a) $\vec{\mathbf{R}}_1 = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}}$ (b) $R_1 = (a^2 + b^2)^{1/2}$ (c) $\vec{\mathbf{R}}_2 = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}}$

67. (a) (10.0 m, 16.0 m) (b) El centro de masa de la distribución de árboles está en la misma ubicación sin importar el orden en que se tomen los árboles dentro. (Estudiaremos el centro de masa en el capítulo 9.)

Capítulo 4

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (a)

2. (i) (b) **(ii)** (a)

3. 15°, 30°, 45°, 60°, 75°

4. **(i)** (d) **(ii)** (b)

5. **(i)** (b) **(ii)** (d)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) 4.87 km a 209° del Este (b) 23.3 m/s (c) 13.5 m/s a 209°

3. (a) $(1.00\hat{\mathbf{i}} + 0.750\hat{\mathbf{j}})$ m/s (b) $(1.00\hat{\mathbf{i}} + 0.500\hat{\mathbf{j}})$ m/s, 1.12 m/s

5. (a) $\vec{\mathbf{r}} = 18.0t\hat{\mathbf{i}} + (4.00t - 4.90t^2)\hat{\mathbf{j}}$, donde $\vec{\mathbf{r}}$ está en metros y t está en segundos

(b) $\vec{\mathbf{v}} = 18.0\hat{\mathbf{i}} + (4.00 - 9.80t)\hat{\mathbf{j}}$, donde $\vec{\mathbf{v}}$ está en metros por segundo y t está en segundos

(c) $\vec{\mathbf{a}} = -9.80\hat{\mathbf{j}}$ m/s^2

(d) $\vec{\mathbf{r}} = (54.0\hat{\mathbf{i}} - 32.1\hat{\mathbf{j}})$ m; $\vec{\mathbf{v}} = (18.0\hat{\mathbf{i}} - 25.4\hat{\mathbf{j}})$ m/s; $\vec{\mathbf{a}} = -9.80\hat{\mathbf{j}}$ m/s^2

7. (a) $\vec{\mathbf{v}} = -12.0t\,\hat{\mathbf{j}}$, donde $\vec{\mathbf{v}}$ está en metros por segundo y t está en segundos (b) $\vec{\mathbf{a}} = -12.0\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$ (c) $\vec{\mathbf{r}} = (3.00\hat{\mathbf{i}} - 6.00\hat{\mathbf{j}})\ \text{m};\ \vec{\mathbf{v}} = -12.0\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}$

9. (a) $(0.800\hat{\mathbf{i}} - 0.300\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}^2$ (b) 339° (c) $(360\hat{\mathbf{i}} - 72.7\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}$, −15.2°

11. 12.0 m/s

13. (a) 2.81 m/s horizontal (b) 60.2° debajo de la horizontal

15. 53.1°

17. (a) 3.96 m/s horizontalmente hacia adelante (b) 9.6%

19. 67.8°

21. $d\tan\theta_i - \dfrac{gd^2}{2v_i^2\cos^2\theta_i}$

23. (a) La bola libra por 0.89 m (b) Mientras desciende

25. (a) 18.1 m/s (b) 1.13 m (c) 2.79 m

27. 9.91 m/s

29. (a) (0, 50.0 m) (b) $v_{xi} = 18.0$ m/s; $v_{yi} = 0$ (c) Partícula bajo aceleración constante (d) Partícula bajo velocidad constante (e) $v_{xf} = v_{xi}$; $v_{yf} = -gt$ (f) $x_f = v_{xi}t$; $y_f = y_i - \frac{1}{2}gt^2$ (g) 3.19 s (h) 36.1 m/s, −60.1°

31. 1.92 s

33. 377 m/s²

35. 2.06×10^3 rev/min

37. 0.749 rev/s

39. 7.58×10^3 m/s, 5.80×10^3 s

41. 1.48 m/s² hacia adentro y 29.9° hacia atrás

43. (a) Sí. La partícula puede estar acelerando o desacelerando, con una componente tangencial de la aceleración de magnitud $\sqrt{6^2 - 4.5^2} = 3.97\ \text{m/s}^2$. (b) No. La magnitud de la aceleración no puede ser menor que $v^2/r = 4.5\ \text{m/s}^2$.

45. (a) 1.26 h (b) 1.13 h (c) 1.19 h

47. (a) 15.0 km/h Este (b) 15.0 km/h Oeste (c) 0.016 7 h = 60.0 s

49. (a) 9.80 m/s² abajo y 2.50 m/s² Sur (b) 9.80 m/s² abajo (c) El tornillo se mueve en una parábola con el eje hacia abajo e inclinación hacia el Sur. Aterriza al Sur en el punto directamente debajo de su punto de partida. (d) El tornillo se mueve en una parábola con un eje vertical.

51. (a) $\dfrac{2d/c}{1 - v^2/c^2}$ (b) $\dfrac{2d}{c}$

(c) El viaje en el flujo de agua toma un intervalo de tiempo más largo. El nadador viaja a menor rapidez contra corriente durante un intervalo de tiempo más largo, así su rapidez media se reduce por debajo de c. matemáticamente, $1/(1 - v^2/c^2)$ siempre es mayor que 1. Se convierte en el límite, conforme $v \to c$, el intervalo de tiempo se hace infinito. En ese caso, el estudiante no puede volver al punto de partida, porque no sabe nadar lo suficientemente rápido para superar la corriente del río.

53. 15.3 m

55. 54.4 m/s²

57. La relación entre la altura h y la rapidez con que camina es $h = (4.16 \times 10^{-3})v_x^2$, donde h está en metros y v_x está en metros por segundo. A una rapidez a pie típica de 4 a 5 km/h, la pelota tendría que caer desde una altura de aproximadamente 1 cm, claramente muy baja para la mano de una persona. Incluso con una rapidez de récord olímpico para la carrera de 100 metros (confirme en Internet), esta situación sólo se produciría si la bola cae desde aproximadamente 0.4 m, que también está por debajo de la mano de una persona normalmente proporcionada.

59. (a) 101 m/s (b) 3.27×10^4 pies (c) 20.6 s

61. (a) 26.9 m/s (b) 67.3 m (c) $(2.00\hat{\mathbf{i}} - 5.00\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}^2$

63. (a) $(7.62\hat{\mathbf{i}} - 6.48\,\hat{\mathbf{j}})$ cm (b) $(10.0\,\hat{\mathbf{i}} - 7.05\,\hat{\mathbf{j}})$ cm

65. (a) 1.52 km (b) 36.1 s (c) 4.05 km

67. La altura inicial de la bola cuando golpeó es 3.94 m, que es demasiado alta para que el bateador le pegue a la pelota.

69. (a) 1.69 km/s (b) 1.80 h

71. (a) 46.5 m/s (b) −77.6° (c) 6.34 s

73. (a) $x = v_i(0.164\,3 + 0.002\,299v_i^2)^{1/2} + 0.047\,94\,v_i^2$, donde x está en metros y v_i está en metros por segundo (b) 0.041 0 m (c) 961 m (d) $x \approx 0.405v_i$ (e) $x \approx 0.095\,9\,v_i^2$ (f) La gráfica de x contra v_i comienza desde el origen como una línea recta con pendiente 0.405 s. Luego se curva hacia arriba por encima de esta línea tangente, cada vez más y más cerca de la parábola $x = 0.095\,9v_i^2$, donde x está en metros y v_i está en metros por segundo.

75. (a) 6.80 km (b) 3.00 km verticalmente hacia arriba del punto de impacto (c) 66.2°

77. (a) 20.0 m/s (b) 5.00 s (c) $(16.0\hat{\mathbf{i}} - 27.1\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}$ (d) 6.53 s (e) $24.5\hat{\mathbf{i}}$ m

79. (a) 4.00 km/h (b) 4.00 km/h

81. (a) 43.2 m (b) $(9.66\hat{\mathbf{i}} - 25.6\,\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}$ (c) la resistencia del aire normalmente haría la distancia de salto más pequeña y las componentes de la velocidad horizontal y vertical final algo más pequeñas. Sin embargo, si una esquiadora experta hace que su cuerpo sea una superficie de sustentación, sin embargo, puede desviar el aire hacia abajo a través del cual pasa de manera que al empujarla hacia arriba le da más tiempo en el aire y un salto más largo.

83. (a) Nadar perpendicularmente a la orilla (b) 133 m (c) 53.1° (d) 107 m

85. 33.5° debajo de la horizontal.

87. $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2gh}}{v}\right)$

89. Las distancias seguras son menores que 270 m o mayores que 3.48×10^3 m de la orilla occidental.

Capítulo 5

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (d)

2. (a)

3. (d)

4. (b)

5. **(i)** (c) **(ii)** (a)

6. (b)

7. (b) Tirando hacia arriba de la cuerda disminuye la fuerza normal, lo que a su vez disminuye la fuerza de fricción cinética.

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) 534 N (b) 54.5 kg

3. (a) $(6.00\hat{\mathbf{i}} + 15.0\hat{\mathbf{j}})$ N (b) 16.2 N

5. (a) $(2.50\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})$ N (b) 5.59 N

7. 2.58 N

9. (a) 1.53 m (b) 24.0 N hacia adelante y hacia arriba a 5.29° con la horizontal

11. (a) 3.64×10^{-18} N (b) 8.93×10^{-30} N es 408 mil millones de veces menor

13. (a) Fuerza ejercida por el resorte sobre la mano, hacia la izquierda; fuerza ejercida por el resorte en la pared,

hacia la derecha (b) Fuerza ejercida por el carro en la manija, hacia abajo a la izquierda; fuerza ejercida por el carro sobre el planeta, hacia arriba; fuerza ejercida por el carro sobre el suelo, hacia abajo (c) Fuerza ejercida por el balón de futbol sobre el jugador, hacia abajo a la derecha; fuerza ejercida por el balón de futbol sobre el planeta, hacia arriba (d) Fuerza ejercida por objeto de masa pequeña sobre un objeto de gran masa, hacia la izquierda (e) Fuerza ejercida por la carga negativa sobre la carga positiva, a la izquierda (f) Fuerza ejercida por el hierro sobre el imán, a la izquierda.

15. (a) $(-45.0\,\hat{\mathbf{i}} + 15.0\,\hat{\mathbf{j}})$ m/s (b) 162° a partir del eje $+x$ (c) $(-225\,\hat{\mathbf{i}} + 75.0\,\hat{\mathbf{j}})$ m (d) $(-227\,\hat{\mathbf{i}} + 79.0\,\hat{\mathbf{j}})$ m

17. (a) $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ (b) $a_x = \dfrac{F}{m}$ (c) $x = \dfrac{Fh}{mg}$ (d) $a = \sqrt{(F/m)^2 + g^2}$

19. (a) 5.00 m/s^2 a 36.9° (b) 6.08 m/s^2 a 25.3°

21. (a) 15.0 lb hacia arriba (b) 5.00 lb hacia arriba (c) 0

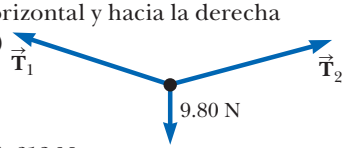
23. (a) 2.15×10^3 N hacia adelante (b) 645 N hacia adelante (c) 645 N hacia atrás (d) 1.02×10^4 N a 74.1° debajo de la horizontal y hacia atrás

25. (a) 3.43 kN (b) 0.967 m/s horizontalmente hacia adelante

27. (a) $P\cos 40° - n = 0$ y $P\,\text{sen}\,40° - 220\text{ N} = 0$; $P = 342$ N y $n = 262$ N (b) $P - n\cos 40° - (220\text{ N})\,\text{sen}\,40° = 0$ y $n\,\text{sen}\,40 - (220\text{ N})\cos 40° = 0$; $n = 262$ N y $P = 342$ N (c) Los resultados concuerdan. Los métodos son del mismo nivel de dificultad. Cada uno consiste en una ecuación y una incógnita y una ecuación con dos incógnitas. Si estamos interesados en encontrar n sin encontrar P, el método (b) es más simple.

29. (a) 7.0 m/s^2 horizontal y hacia la derecha (b) 21 N (c) 14 N horizontal y hacia la derecha

31. (a)



(b) 613 N

33. $T_1 = 253$ N, $T_2 = 165$ N, $T_3 = 325$ N

35. 100 N y 204 N

37. 8.66 N Este

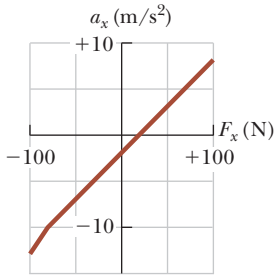
39. (a) $a = g\tan\theta$ (b) 4.16 m/s^2

41. (a) 646 N hacia arriba (b) 646 N hacia arriba (c) 627 N hacia arriba (d) 589 N hacia arriba

43. (a) $T_1 = 79.8$ N, $T_2 = 39.9$ N (b) 2.34 m/s^2

45. (a) $F_x > 19.6$ N (b) $F_x \leq -78.4$ N

(c)



47. 3.73 m

49. (a) 2.20 m/s^2 (b) 27.4 N

51. (a) 706 N (b) 814 N (c) 706 N (d) 648 N

53. 1.76 kN hacia la izquierda

55. (a) 0.306 (b) 0.245

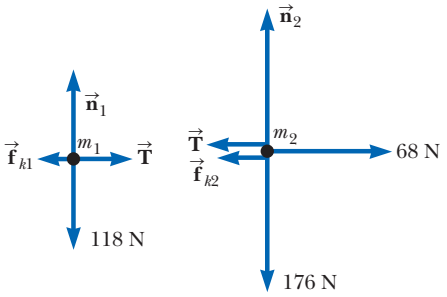
57. $\mu_s = 0.727$, $\mu_k = 0.577$

59. (a) 1.11 s (b) 0.875 s

61. (a) 1.78 m/s^2 (b) 0.368 (c) 9.37 N (d) 2.67 m/s

63. 37.8 N

65. (a)



(b) 1.29 m/s^2 a la derecha (c) 27.2 N

67. 6.84 m

69. 0.060 0 m

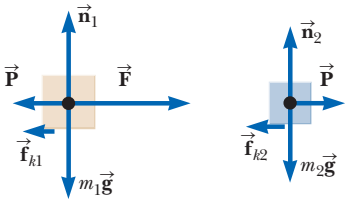
71. (a) 0.087 1 (b) 27.4 N

73. (a) Eliminando masa (b) 13.7 mi/h · s

75. (a) $a = -\mu_k g$ (b) $d = \dfrac{v_i^2}{2\mu_k g}$

77. (a) 2.22 m (b) 8.74 m/s hacia abajo del plano inclinado

79. (a)

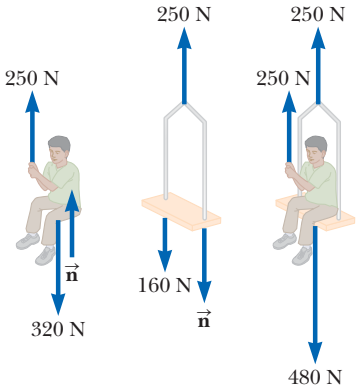


(b) F (c) $F - P$ (d) P (e) m_1: $F - P = m_1 a$; m_2: $P = m_2 a$

(f) $a = \dfrac{F - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g}{m_1 + m_2}$

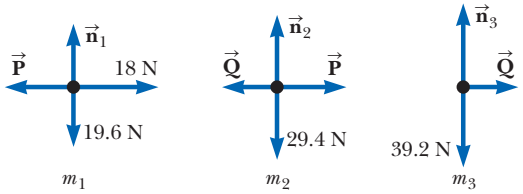
(g) $P = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}[F + m_1(\mu_2 - \mu_1)g]$

81. (a)



(b) 0.408 m/s^2 (c) 83.3 N

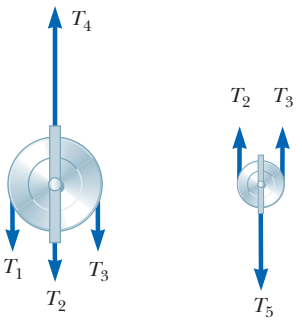
83. (a)



(b) 2.00 m/s^2 a la derecha (c) 4.00 N sobre m_1, 6.00 N a la derecha sobre m_2, 8.00 N a la derecha sobre m_3 (d) 14.0 N entre m_1 y m_2, 8.00 N entre m_2 y m_3 (e) El bloque m_2 modela el pesado bloque de madera. La fuerza de contacto en su espalda es modelada por la fuerza entre los bloques m_2 y

m_3, que es mucho menor que la fuerza F. La diferencia entre F y esta fuerza de contacto es la fuerza neta que causa la aceleración del par de objetos de 5 kg. La aceleración es real y distinta de cero, pero dura un tiempo tan corto que nunca se asocia con una gran velocidad. La estructura del edificio y sus piernas ejercen fuerzas pequeñas en magnitud con respecto al golpe de martillo, para partir el bloque, y descansar otra vez en un intervalo de tiempo grande con respecto al golpe de martillo.

85. (a) *Polea superior:* *Polea inferior:*



(b) $Mg/2$, $Mg/2$, $Mg/2$, $3Mg/2$, Mg (c) $Mg/2$

87. $\mu_k = 0.287$

89. (b) Si θ es mayor que $\tan^{-1}(1/\mu_s)$, el movimiento es imposible.

91. (a) La fuerza neta sobre el cojín está en una dirección fija, hacia abajo y adelante, haciendo un ángulo $\tan^{-1}(F/mg)$ con la vertical. A partir del reposo, se desplazará a lo largo de esta línea con (b) rapidez creciente. Cambia la magnitud de su velocidad. (c) 1.63 m (d) Se desplazará a lo largo de una parábola. El eje de la parábola es paralelo a la línea descrita en el inciso (a). Si el cojín es lanzado en una dirección por encima de esta recta, su trayectoria será cóncava hacia abajo, haciendo que su velocidad sea más y más casi paralela a la recta con el paso del tiempo. Si el cojín se lanza hacia abajo con más inclinación, su trayectoria será cóncava hacia arriba, su velocidad irá hacia la dirección fija de su aceleración.

93. $(M + m_1 + m_2)(m_1 g/m_2)$

95. (a) 30.7° (b) 0.843 N

97. 72.0 N

99. (a) 0.931 m/s^2 (b) Desde un valor de 0.625 m/s^2 para x grandes, la aceleración aumenta gradualmente, atraviesa un máximo y luego cae más rápidamente, haciéndose negativa y llegando a -2.10 m/s^2 en $x = 0$. (c) 0.976 m/s^2 en $x = 25.0$ cm (d) 6.10 cm

101. (a) 4.90 m/s^2 (b) 3.13 m/s a 30.0° debajo de la horizontal (c) 1.35 m (d) 1.14 s (e) La masa del bloque no hace diferencia.

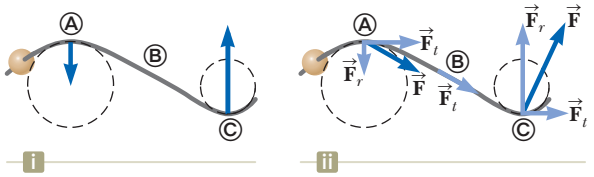
103. (a) 2.13 s (b) 1.66 m

Capítulo 6

Respuestas a los exámenes rápidos

1. **(i)** (a) **(ii)** (b)

2. **(i)** Debido a que la rapidez es constante, la única dirección que la fuerza puede tener es la de la aceleración centrípeta. La fuerza es mayor en Ⓒ que en Ⓐ porque el radio en Ⓒ es menor. No existe fuerza en Ⓑ porque el cable es recto. **(ii)** Además de las fuerzas en dirección centrípeta en el inciso (a), ahora hay fuerzas tangenciales para proporcionar la aceleración tangencial. La fuerza tangencial es la misma en los tres puntos porque la aceleración tangencial es constante.



3. (c)

4. (a)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. Cualquier rapidez arriba de 8.08 m/s

3. (a) 8.33×10^{-8} N hacia el núcleo
(b) 9.15×10^{22} m/s^2 hacia dentro

5. 6.22×10^{-12} N

7. 2.14 rev/min

9. (a) Fricción estática (b) 0.085 0

11. $v \leq 14.3$ m/s

13. (a) 1.33 m/s^2 (b) 1.79 m/s^2 a 48.0° hacia dentro de la dirección de la velocidad

15. (a) $v = \sqrt{R\left(\frac{2T}{m} - g\right)}$ (b) $2T$ hacia arriba

17. (a) 8.62 m (b) Mg, hacia abajo (c) 8.45 m/s^2 (d) El cálculo de la fuerza normal muestra que será negativa, lo que es imposible. Esto se interpreta como que la fuerza normal tiende a cero en un punto y los pasajeros caerán fuera de sus asientos en la parte superior de la rueda si ellos no son detenidos de alguna manera. Llegaríamos a este mismo resultado sin calcular la fuerza normal indicando que la aceleración en la parte (c) es más pequeña que la debida a la gravedad. La forma de lágrima tiene la ventaja de una mayor aceleración de los pasajeros en la parte superior del arco para una trayectoria que tenga la misma altura que la trayectoria circular, por lo que los pasajeros permanecen en los carros.

19. No. El arqueólogo necesita una vid de resistencia igual o superior a 1.38 kN para cruzar.

21. (a) 17.0° (b) 5.12 N

23. (a) 491 N (b) 50.1 kg (c) 2.00 m/s^2

25. 0.527°

27. 0.212 m/s^2, opuesto al vector velocidad

29. 3.01 N hacia arriba

31. (a) 1.47 N · s/m (b) 2.04×10^{-3} s (c) 2.94×10^{-2} N

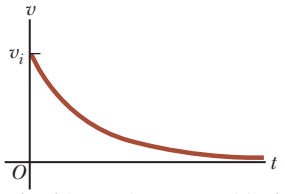
35. (a) 0.034 7 s^{-1} (b) 2.50 m/s (c) $a = -cv$

37. (a) En Ⓐ, la velocidad es hacia el Este y la aceleración es hacia el Sur. (b) en Ⓑ, la velocidad es hacia el Sur y la aceleración es hacia el Oeste.

39. 781 N

41. (a) $mg - \frac{mv^2}{R}$ (b) $\sqrt{gR}$

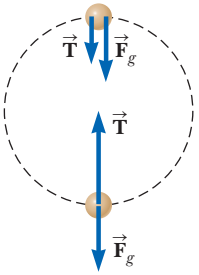
43. (a) $v = v_i e^{-bt/m}$ (b)



(c) En este modelo, el objeto sigue moviéndose para siempre. (d) Viaja una distancia finita en un intervalo de tiempo infinito.

45. (a) La fuerza gravitacional hacia abajo y la fuerza de la tensión de la cuerda, siempre dirigida hacia el centro de la trayectoria.

(b)



(c) 6.05 N (d) 7.82 m/s

47. (a) 106 N hacia arriba de la inclinación (b) 0.396

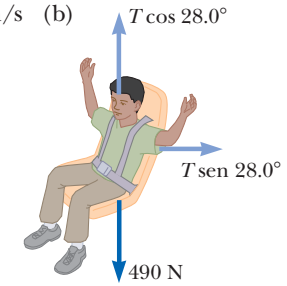
49. (a) 0.016 2 kg/m (b) $\frac{1}{2}D\rho A$ (c) 0.778 (d) 1.5% (e) Para filtros de café anidados cayendo en el aire con rapidez terminal, la gráfica de la resistencia del aire de la fuerza como una función del cuadrado de la rapidez demuestra que la fuerza es proporcional a la rapidez al cuadrado, dentro de la incertidumbre experimental que se estimó en 2%. Esta proporcionalidad coincide con el modelo teórico de la resistencia del aire a altas velocidades. El coeficiente de arrastre de un filtro de café es $D = 0.78 \pm 2\%$.

51. $g(\cos\phi \tan\theta + \operatorname{sen}\phi)$

53. (a) La única fuerza horizontal en el auto es la fuerza de fricción, con un valor máximo determinado por la rugosidad de la superficie (descrita por el coeficiente de fricción estática) y la fuerza normal (que aquí es igual a la fuerza gravitacional en el auto). (b) 34.3 m (c) 68.6 m (d) Frenar es mejor. No debe girar el volante. Si utiliza alguna fuerza de fricción disponible para cambiar la dirección del auto, no podría frenar el auto y la distancia de frenado sería mayor. (e) La conclusión es verdadera en general. El radio de la curva apenas puede ser dos veces la mínima distancia de frenado.

55. (a) 735 N (b) 732 N (c) La fuerza gravitacional es mayor. La fuerza normal es menor, como es cuando va en la parte superior de una rueda de la fortuna.

57. (a) 5.19 m/s (b)



(c) 555 N

59. b) Las fuerzas de fricción y gravitacional se mantienen constantes, aumenta la fuerza normal y la persona permanece en movimiento con la pared. (c) La fuerza gravitacional permanece constante, las fuerzas de fricción y la normal disminuyen, y la persona se desliza con respecto a la pared y hacia abajo en el hoyo.

61. (a) $v_{\text{mín}} = \sqrt{\dfrac{Rg(\tan\theta - \mu_s)}{1 + \mu_s \tan\theta}}$, $v_{\text{máx}} = \sqrt{\dfrac{Rg(\tan\theta + \mu_s)}{1 - \mu_s \tan\theta}}$

(b) $\mu_s = \tan\theta$

63. 12.8 N

65. (a) 78.3 m/s (b) 11.1 s (c) 121 m

67. (a) 8.04 s (b) 379 m/s (c) 1.19×10^{-2} m/s (d) 9.55 cm

69. (a) 0.013 2 m/s (b) 1.03 m/s (c) 6.87 m/s

Capítulo 7

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (a)
2. (c), (a), (d), (b)
3. (d)
4. (a)
5. (b)
6. (c)
7. **(i)** (c) **(ii)** (a)
8. (d)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) 1.59×10^3 J (b) Menor (c) La misma

3. (a) 472 J (b) 2.76 kN

5. (a) 31.9 J (b) 0 (c) 0 (d) 31.9 J

9. 16.0

11. (a) 16.0 J (b) 36.9°

13. $\vec{\mathbf{A}}$ = 7.05 m a 28.4°

15. (a) 7.50 J (b) 15.0 J (c) 7.50 J (d) 30.0 J

17. (a) 0.938 cm (b) 1.25 J

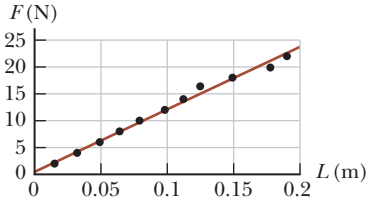
19. (a) 575 N/m (b) 46.0 J

21. (a) $x = mg\left(\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}\right)$ (b) $k = \left(\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}\right)^{-1}$

23. (a) Diseñe la constante elástica de modo que al extraer el peso de una bandeja de la pila se ocasione una extensión de los resortes igual al espesor de una bandeja. (b) 316 N/m (c) No se necesita conocer el largo y ancho de la bandeja.

25. (b) mgR

27. (a)



(b) La pendiente de la recta es 116 N/m. (c) Se usan todos los puntos mencionados y también el origen. No hay ninguna evidencia visible de una curva en la gráfica o de no linealidad cerca de cualquiera de los extremos. (d) 116 N/m (e) 12.7 N

29. 50.0 J

31. (a) 60.0 J (b) 60.0 J

33. (a) 1.20 J (b) 5.00 m/s (c) 6.30 J

35. 878 kN hacia arriba

37. (a) 4.56 kJ (b) 4.56 kJ (c) 6.34 kN (d) 422 km/s^2 (e) 6.34 kN (f) Las dos teorías concuerdan.

39. (a) 97.8 J (b) $(-4.31\,\hat{\mathbf{i}} + 31.6\,\hat{\mathbf{j}})$ N (c) 8.73 m/s

41. (a) 2.5 J (b) −9.8 J (c) −12 J

43. (a) −196 J (b) −196 J (c) −196 J (d) La fuerza gravitacional es conservativa.

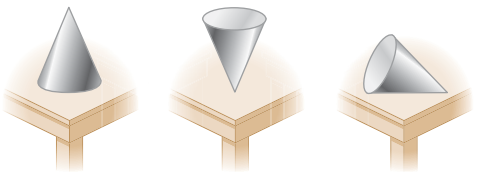
45. (a) 125 J (b) 50.0 J (c) 66.7 J (d) No conservativa (e) El trabajo realizado sobre la partícula depende de la trayectoria seguida por la partícula.

47. A/r^2 alejándose de la otra partícula

49. $(7 - 9x^2y)\,\hat{\mathbf{i}} - (3x^3)\,\hat{\mathbf{j}}$

51. (a) 40.0 J (b) −40.0 J (c) 62.5 J

53.



55. 90.0 J

57. (a) 8×10^7 N/m (b) Dura para un intervalo de tiempo. Si la interacción no ocupa intervalo de tiempo, la fuerza ejercida por cada bola en el otro sería infinita, y eso no puede suceder. (c) 0.8 J (d) 0.15 mm (e) 10^{-4} s

59. 0.299 m/s

61. (a) $\vec{\mathbf{F}}_1 = (20.5\hat{\mathbf{i}} + 14.3\hat{\mathbf{j}})$ N, $\vec{\mathbf{F}}_2 = (-36.4\hat{\mathbf{i}} + 21.0\hat{\mathbf{j}})$ N
(b) $\sum \vec{\mathbf{F}} = (-15.9\hat{\mathbf{i}} + 35.3\hat{\mathbf{j}})$ N
(c) $\vec{\mathbf{a}} = (-3.18\hat{\mathbf{i}} + 7.07\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2
(d) $\vec{\mathbf{v}} = (-5.54\hat{\mathbf{i}} + 23.7\hat{\mathbf{j}})$ m/s
(e) $\vec{\mathbf{r}} = (-2.30\hat{\mathbf{i}} + 39.3\hat{\mathbf{j}})$ m (f) 1.48 kJ (g) 1.48 kJ
(h) El teorema del trabajo-energía cinética es consistente con la segunda ley de Newton

63. 0.131 m

65. (a) $U(x) = 1 + 4e^{-2x}$ (b) La fuerza debe ser conservativa porque depende del trabajo que hace la fuerza sobre la partícula que sólo actúa en las posiciones finales del original y de la partícula, no de la trayectoria entre ellas.

67. (a) $x = 3.62m/(4.30 - 23.4m)$, donde x está en metros y m está en kilogramos (b) 0.095 1 m (c) 0.492 m (d) 6.85 m (e) La situación es imposible. (f) La extensión es directamente proporcional a m cuando m tiene sólo unos pocos gramos. Luego crece más rápido y más rápido, divergiendo al infinito para $m = 0.184$ kg.

Capítulo 8

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (a) En la televisión, la energía entra por transmisión eléctrica (mediante el cable de alimentación). La energía sale por calor (de las superficies calientes al aire), ondas mecánicas (sonido de la bocinas) y radiación electromagnética (de la pantalla). (b) En la podadora con motor de gasolina, la energía entra por transferencia de materia (gasolina). La energía sale por el trabajo (en las hojas de hierba), las ondas mecánicas (sonido) y el calor (de superficies calientes al aire). (c) En el sacapuntas de manivela la energía entra por el trabajo (de su mano y girando la manivela). La energía sale por trabajo (realizado en el lápiz) ondas mecánicas (sonido) y calor debido al aumento de la temperatura por la fricción.

2. **(i)** (b) **(ii)** (b) **(iii)** (a)

3. (a)

4. $v_1 = v_2 = v_3$

5. (c)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) $\Delta E_{\text{int}} = Q + T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}}$
(b) $\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W + Q + T_{\text{OM}} + T_{\text{TM}}$
(c) $\Delta U = Q + T_{\text{TM}}$ (d) $0 = Q + T_{\text{TM}} + T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}}$

3. 10.2 m

5. (a) $v = (3gR)^{1/2}$ (b) 0.098 0 N hacia abajo

7. (a) 4.43 m/s (b) 5.00 m

9. 5.49 m/s

11. $\sqrt{\dfrac{8gh}{15}}$

13. $\dfrac{v^2}{2\mu_k g}$

15. (a) 0.791 m/s (b) 0.531 m/s

17. (a) 5.60 J (b) 2.29 rev

19. (a) 168 J

21. (a) 1.40 m/s (b) 4.60 cm después de liberarse (c) 1.79 m/s

23. (a) −160 J (b) 73.5 J (c) 28.8 N (d) 0.679

25. (a) 4.12 m (b) 3.35 m

27. (a) Aislado. La única influencia externa sobre el sistema es la fuerza normal del tobogán, pero esta fuerza siempre es perpendicular a su desplazamiento, así no realiza ningún trabajo sobre el sistema. (b) No, el deslizamiento es sin fricción.
(c) $E_{\text{sistema}} = mgh$ (d) $E_{\text{sistema}} = \frac{1}{5}mgh + \frac{1}{2}mv_i^2$
(e) $E_{\text{sistema}} = mgy_{\text{máx}} + \frac{1}{2}mv_{xi}{}^2$
(f) $v_i = \sqrt{\dfrac{8gh}{5}}$ **(g)** $y_{\max} = h(1 - \frac{4}{5}\cos^2\theta)$ (h) Si hay fricción, la energía mecánica del sistema no se conserva, así que la energía cinética de la niña en todos los puntos después de salir de la parte superior del tobogán sería reducida comparada con el caso sin fricción. En consecuencia, se reduciría también su rapidez de lanzamiento y su altura máxima.

29. 1.23 kW

31. 4.5×10^3 N

33. $145

35. $\sim 10^4$ W

37. (a) 423 mi/gal (b) 776 mi/gal

39. 236 s or 3.93 min

41. (a) 10.2 kW (b) 10.6 kW (c) 5.82 MJ

43. (a) 0.588 J (b) 0.588 J (c) 2.42 m/s (d) $K = 0.196$ J, $U = 0.392$ J

45. $H = h + \dfrac{d^2}{4h}$

47. (a) $K = 2 + 24t^2 + 72t^4$, donde t está en segundos y K está en joules (b) $a = 12t$ y $F = 48t$, donde t está en segundos, a está en m/s^2 y F está en newtons (c) $P = 48t + 288t^3$, donde t está en segundos y P está en watts (d) 1.25×10^3 J

49. (a) 11.1 m/s (b) 1.00×10^3 J (c) 1.35 m

51. (a) -6.08×10^3 J (b) -4.59×10^3 J (c) 4.59×10^3 J

53. (a) $x = -4.0$ mm (b) −1.0 cm

55. (a) 2.17 kW (b) 58.6 kW

57. (a) 1.38×10^4 J (b) 5.51×10^3 W (c) El valor del inciso (b) representa la única energía que deja el motor y se transforma en energía cinética del automóvil. La energía adicional sale de la energía por calor y sonido. Más energía deja el motor para trabajar contra las fuerzas de fricción y resistencia del aire.

59. (a) 1.53 J en $x = 6.00$ cm, 0 J en $x = 0$ (b) 1.75 m/s (c) 1.51 m/s (d) La respuesta del inciso (c) no es la mitad de la respuesta del inciso (b) porque la ecuación de la rapidez de un oscilador no es lineal en posición.

61. (a) 100 J (b) 0.410 m (c) 2.84 m/s (d) −9.80 mm (e) 2.85 m/s

63. 0.328

65. (a) 0.400 m (b) 4.10 m/s (c) El bloque se queda en la pista.

67. 33.4 kW

69. $2m$

71. 2.92 m/s
75. (b) 0.342
77. (a) 14.1 m/s (b) 800 N (c) 771 N (d) 1.57 kN hacia arriba.
79. (a) $-\mu_k g x/L$ (b) $(\mu_k g L)^{1/2}$
81. (a) 6.15 m/s (b) 9.87 m/s
83. Menos peligrosa
85. (a) 25.8 m (b) 27.1 m/s^2

Capítulo 9

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (d)
2. (b), (c), (a)
3. **(i)** (c), (e) **(ii)** (b), (d)
4. (a) Los tres son iguales. (b) Tablero, cinturón de seguridad, bolsa de aire.
5. (a)
6. (b)
7. (b)
8. **(i)** (a) **(ii)** (b)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (b) $p = \sqrt{2mK}$
3. 7.00 N
5. $\vec{\mathbf{F}}_{\text{sobre bat}} = (+3.26\hat{\mathbf{i}} - 3.99\hat{\mathbf{j}})$ kN
7. (a) $\vec{\mathbf{v}}_{pi} = -\left(\dfrac{m_g}{m_g + m_p}\right)v_{gp}\hat{\mathbf{i}}$ (b) $\vec{\mathbf{v}}_{gi} = \left(\dfrac{m_p}{m_g + m_p}\right)v_{gp}\hat{\mathbf{i}}$
9. 40.5 g
11. (a) $-6.00\hat{\mathbf{i}}$ m/s (b) 8.40 J (c) La energía original está en el resorte. (d) Una fuerza debe ser ejercida sobre un desplazamiento para comprimir el resorte, transfiriendo energía a éste por trabajo. El cable ejerce fuerza, pero sin desplazamiento. (e) La cantidad de movimiento del sistema se conserva con valor cero. (f) Las fuerzas sobre los dos bloques son fuerzas internas que no pueden cambiar la cantidad de movimiento del sistema; el sistema está aislado. (g) Aunque después hay movimiento, las cantidades de movimiento finales son de igual magnitud en direcciones opuestas, así la cantidad de movimiento final del sistema es cero.
13. (a) 13.5 N · s (b) 9.00 kN
15. (c) No hay diferencia
17. (a) 9.60×10^{-2} s (b) 3.65×10^5 N (c) $26.6g$
19. (a) $12.0\hat{\mathbf{i}}$ N · s (b) $4.80\hat{\mathbf{i}}$ m/s (c) $2.80\hat{\mathbf{i}}$ m/s (d) $2.40\hat{\mathbf{i}}$ N
21. 16.5 N
23. 301 m/s
25. (a) 2.50 m/s (b) 37.5 kJ
27. (a) 0.284 (b) 1.15×10^{-13} J and 4.54×10^{-14} J
29. (a) 4.85 m/s (b) 8.41 m
31. 91.2 m/s
33. 0.556 m
35. (a) 1.07 m/s at −29.7° (b) $\dfrac{\Delta K}{K_i} = -0.318$
37. $(3.00\hat{\mathbf{i}} - 1.20\hat{\mathbf{j}})$ m/s
39. $v_O = v_i \cos\theta$, $v_Y = v_i \operatorname{sen}\theta$
41. 2.50 m/s at −60.0°
43. (a) $(-9.33\hat{\mathbf{i}} - 8.33\hat{\mathbf{j}})$ Mm/s (b) 439 fJ
45. $\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = (0\hat{\mathbf{i}} + 1.00\hat{\mathbf{j}})$ m
47. 3.57×10^8 J
49. (a) 15.9 g (b) 0.153 m
51. (a) $(1.40\hat{\mathbf{i}} + 2.40\hat{\mathbf{j}})$ m/s (b) $(7.00\hat{\mathbf{i}} + 12.0\hat{\mathbf{j}})$ kg · m/s
53. 0.700 m
55. (a) $\vec{\mathbf{v}}_{1f} = -0.780\hat{\mathbf{i}}$ m/s, $\vec{\mathbf{v}}_{2f} = 1.12\hat{\mathbf{i}}$ m/s
(b) $\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = 0.360\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s antes y después de la colisión
57. (b) El amortiguador continúa ejerciendo una fuerza hacia la izquierda hasta que la partícula ha oscilado hasta su punto más bajo.
59. (a) $\sqrt{\dfrac{F(2d - \ell)}{2m}}$ (b) $\dfrac{F\ell}{2}$
61. 15.0 N en la dirección de la velocidad inicial de la corriente de salida del agua.
63. (a) 442 toneladas métricas (b) 19.2 toneladas métricas (c) Es mucho menor que el valor sugerido de 442/2.50. Matemáticamente, el logaritmo en la ecuación de propulsión del cohete no es una función lineal. Físicamente, una mayor rapidez de escape tiene un efecto acumulativo extragrande sobre la rapidez final del cuerpo del cohete, al contar una y otra vez en la rapidez que el cuerpo logra segundo tras segundo durante su quema.
65. (a) Cero (b) $\dfrac{mv_i}{\sqrt{2}}$ hacia arriba
67. 260 N normal a la pared
69. (a) $1.33\hat{\mathbf{i}}$ m/s (b) $-235\hat{\mathbf{i}}$ N (c) 0.680 s (d) $-160\hat{\mathbf{i}}$ N · s y $+160\hat{\mathbf{i}}$ N · s (e) 1.81 m (f) 0.454 m (g) −427 J (h) +107 J (i) El cambio en la energía cinética de un miembro del sistema, según la ecuación 8.2, será igual al negativo del cambio en energía interna para ese miembro $\Delta K = -\Delta E_{\text{int}}$. El cambio de energía interna, a su vez, es el producto de la fuerza de fricción y la distancia a través de la cual se mueve el miembro. Fuerzas de fricción iguales actúan sobre la persona y el carro, pero las fuerzas recorren diferentes distancias, como vemos en los incisos (e) y (f). Por lo tanto, existen diferentes cambios en la energía interna para la persona y el carro y, a su vez, diversos cambios en la energía cinética. El cambio total en la energía cinética del sistema, −320 J, se convierte en +320 J de energía interna extra en todo el sistema en esta colisión perfectamente inelástica.
71. (a) La cantidad de movimiento del sistema bala–bloque se conserva en la colisión, así puede relacionar la rapidez de la bala y bloque inmediatamente después de la colisión con la rapidez inicial de la bala. Luego, puede utilizarla conservación de energía mecánica para el sistema bala–bloque–Tierra para relacionar la rapidez después de la colisión con la altura máxima. (b) 521 m/s hacia arriba.
73. $2v_i$ para la partícula con masa m y 0 para la partícula con masa $3m$.
75. (a) $\dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$ (b) $(v_1 - v_2)\sqrt{\dfrac{m_1m_2}{k(m_1 + m_2)}}$
(c) $v_{1f} = \dfrac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$,
$v_{2f} = \dfrac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$
77. m_1: 13.9 m m_2: 0.556 m
79. 0.960 m
81. 143 m/s
83. (a) 0; inelástica (b) $(-0.250\hat{\mathbf{i}} + 0.75\,\hat{\mathbf{j}} - 2.00\,\hat{\mathbf{k}})$ m/s; perfectamente inelástica (c) Ya sea $a = -6.74$ con $\vec{\mathbf{v}} = -0.419\,\hat{\mathbf{k}}$ m/s o $a = 2.74$ con $\vec{\mathbf{v}} = -3.58\,\hat{\mathbf{k}}$ m/s
85. 0.403

87. (a) $-0.256\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s y $0.128\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s (b) $-0.064\,2\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s y 0 (c) 0 y 0
89. (a) 100 m/s (b) 374 J
91. (a) 2.67 m/s (partícula incidente), 10.7 m/s (partícula objetivo) (b) −5.33 m/s (partícula incidente), 2.67 m/s (partícula objetivo) (c) 7.11×10^{-3} J en el caso (a) y 2.84×10^{-2} J en el caso (b). La partícula incidente pierde más energía cinética en el caso (a), en el cual la masa objetivo es de 1.00 g.
93. (a) Partícula de masa m: $\sqrt{2}v_i$; partícula de masa $3m$: $\sqrt{\frac{2}{3}}v_i$ (b) 35.3°
95. (a) $v_{CM} = \sqrt{\dfrac{F}{2m}(x_1 + x_2)}$

(b) $\theta = \cos^{-1}\left[1 - \dfrac{F}{2mgL}(x_1 - x_2)\right]$

Capítulo 10

Respuestas a los exámenes rápidos

1. **(i)** (c) **(ii)** (b)
2. (b)
3. **(i)** (b) **(ii)** (a)
4. **(i)** (b) **(ii)** (a)
5. (b)
6. (a)
7. (b)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) 7.27×10^{-5} rad/s (b) Debido a su rapidez angular, la Tierra se abulta en el Ecuador.
3. (a) 5.00 rad, 10.0 rad/s, 4.00 rad/s^2
(b) 53.0 rad, 22.0 rad/s, 4.00 rad/s^2
5. (a) 4.00 rad/s^2 (b) 18.0 rad
7. (a) 5.24 s (b) 27.4 rad
9. (a) 8.21×10^2 rad/s^2 (b) 4.21×10^3 rad
11. 13.7 rad/s^2
13. 3.10 rad/s
15. (a) 0.180 rad/s (b) 8.10 m/s^2 radialmente hacia adentro
17. (a) 25.0 rad/s (b) 39.8 rad/s^2 (c) 0.628 s
19. (a) 8.00 rad/s (b) 8.00 m/s (c) 64.1 m/s^2 a un ángulo de 3.58° de la recta radial al punto P (d) 9.00 rad
21. (a) 126 rad/s (b) 3.77 m/s (c) 1.26 km/s^2 (d) 20.1 m
23. 0.572
25. (a) 3.47 rad/s (b) 1.74 m/s (c) 2.78 s (d) 1.02 rotaciones
27. −3.55 N · m
29. 21.5 N
31. 177 N
33. (a) 24.0 N · m (b) 0.035 6 rad/s^2 (c) 1.07 m/s^2
35. (a) 21.6 kg · m^2 (b) 3.60 N · m (c) 52.5 rev
37. 0.312
39. (a) 5.80 kg · m^2 (b) Sí, no es necesario conocer la altura de la puerta.
41. 1.28 kg · m^2
43. $\frac{11}{12}mL^2$
45. (a) 143 kg · m^2 (b) 2.57 kJ
47. (a) 24.5 m/s (b) No (c) No (d) No (e) No (f) Sí
49. 1.03×10^{-3} J
51. 149 rad/s
53. (a) 1.59 m/s (b) 53.1 rad/s
55. (a) 11.4 N (b) 7.57 m/s^2 (c) 9.53 m/s (d) 9.53 m/s
57. (a) $2(Rg/3)^{1/2}$ (b) $4(Rg/3)^{1/2}$ (c) $(Rg)^{1/2}$
59. (a) 500 J (b) 250 J (c) 750 J
61. (a) $\frac{2}{3}g$ sen θ (b) La aceleración de $\frac{1}{2}g$ sen θ para el aro es menor que para el disco. (c) $\frac{1}{3}\tan\theta$
63. (a) El disco (b) Disco: $\sqrt{\frac{4}{3}gh}$; aro: $\sqrt{gh}$
65. (a) 1.21×10^{-4} kg · m^2 (b) No es necesario conocer la altura de la lata. (c) La masa no se distribuye uniformemente; la densidad de la lata de metal es mayor que la de la sopa.
67. (a) 4.00 J (b) 1.60 s (c) 0.80 m
69. (a) 12.5 rad/s (b) 128 rad
71. (a) 0.496 W (b) 413 W
73. (a) $(3g/L)^{1/2}$ (b) $3g/2L$ (c) $-\frac{3}{2}g\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{4}g\,\hat{\mathbf{j}}$
(d) $-\frac{3}{2}Mg\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{4}Mg\,\hat{\mathbf{j}}$
75. $\dfrac{g(h_2 - h_1)}{2\pi R^2}$
77. (a) Partícula bajo una fuerza neta (b) Objeto rígido bajo un momento de torsión neto (c) 118 N (d) 156 N
(e) $\dfrac{r^2}{a}(T_2 - T_1)$ (f) 1.17 kg · m^2
79. $\omega = \sqrt{\dfrac{2mgd\,\text{sen}\,\theta + kd^2}{I + mR^2}}$
81. $\sqrt{\dfrac{10}{7}\left[\dfrac{g(R-r)(1-\cos\theta)}{r^2}\right]}$
83. (a) $2.70R$ (b) $F_x = -20mg/7$, $F_y = -mg$
85. (a) $\sqrt{\frac{3}{4}gh}$ (b) $\sqrt{\frac{3}{4}gh}$
87. (a) 0.800 m/s^2 (b) 0.400 m/s^2 (c) 0.600 N, 0.200 N hacia adelante
89. (a) $\sigma = 0.060\,2$ s^{-1}, $\omega_0 = 3.50$ rad/s (b) $\alpha = -0.176$ rad/s^2 (c) 1.29 rev (d) 9.26 rev
91. (b) Hacia la izquierda
93. (a) 2.88 s (b) 12.8 s

Capítulo 11

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (d)
2. **(i)** (a) **(ii)** (c)
3. (b)
4. (a)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. $\hat{\mathbf{i}} + 8.00\,\hat{\mathbf{j}} + 22.0\,\hat{\mathbf{k}}$
3. (a) $7.00\,\hat{\mathbf{k}}$ (b) 60.3°
5. (a) 30 N · m (en contra de las manecillas del reloj)
(b) 36 N · m (en contra de las manecillas del reloj)
7. 45.0°
9. (a) $F_3 = F_1 + F_2$ (b) No
11. $17.5\,\hat{\mathbf{k}}$ kg · m^2/s
13. $m(xv_y - yv_x)\,\hat{\mathbf{k}}$
15. (a) Cero (b) $(-mv_i^3\,\text{sen}^2\,\theta\cos\theta/2g)\,\hat{\mathbf{k}}$
(c) $(-2mv_i^3\,\text{sen}^2\,\theta\cos\theta/g)\,\hat{\mathbf{k}}$
(d) La fuerza gravitacional hacia abajo ejerce un momento de torsión en el proyectil en la dirección z negativa.
17. $mvR[\cos(vt/R) + 1]\,\hat{\mathbf{k}}$
19. $60.0\hat{\mathbf{k}}$ kg · m^2/s
21. (a) $-m\ell gt\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}$ (b) La Tierra ejerce un momento de torsión gravitacional sobre la bola. (c) $-mg\ell\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}$
23. 1.20 kg · m^2/s
25. (a) 0.360 kg · m^2/s (b) 0.540 kg · m^2/s
27. (a) 0.433 kg · m^2/s (b) 1.73 kg · m^2/s
29. (a) 1.57×10^8 kg · m^2/s (b) 6.26×10^3 s = 1.74 h

31. 7.14 rev/min

33. (a) La energía mecánica del sistema no es constante. La energía química es convertida en energía mecánica. (b) La cantidad de movimiento del sistema no es constante. La tornamesa ejerce una fuerza externa hacia el Norte sobre el eje. (c) La cantidad de movimiento angular del sistema es constante. (d) 0.360 rad/s en contra de las manecillas del reloj (e) 99.9 J

35. (a) 11.1 rad/s en contra de las manecillas del reloj (b) No; 507 J se transforman en energía interna. (c) No; la tornamesa imparte rápidamente un impulso de 44.9 kg · m/s hacia el Norte en el sistema tornamesa-barro y después de eso sigue cambiando la cantidad de movimiento del sistema.

37. (a) $mv\ell$ hacia abajo (b) $M/(M + m)$

39. (a) $\omega = 2mv_i d/[M + 2m]R^2$ (b) No; la energía mecánica del sistema se transforma en energía interna. (c) La cantidad de movimiento del sistema no es constante. El eje ejerce una fuerza hacia atrás sobre el cilindro cuando el barro pega.

41. (a) Sí (b) 4.50 kg · m^2/s (c) No. En la colisión perfectamente inelástica, la energía cinética se transforma en energía interna. (d) 0.749 rad/s (e) La energía total del sistema *debe* ser la misma antes y después de la colisión, suponiendo que despreciamos la energía que sale por calor y ondas mecánicas (sonido) (desde la puerta ahora calienta al aire frío). Las energías cinéticas son las siguientes: $K_i = 2.50 \times 10^3$ J; $K_f = 1.69$ J. La mayoría de la energía cinética inicial se transforma en energía interna en la colisión.

43. 5.46×10^{22} N · m

45. 0.910 km/s

47. 7.50×10^{-11} s

49. (a) $7md^2/3$ (b) $mgd\hat{\mathbf{k}}$ (c) $3g/7d$ en contra de las manecillas del reloj (d) $2g/7$ hacia arriba (e) mgd (f) $\sqrt{6g/7d}$ (g) $m\sqrt{14gd^3/3}$ (h) $\sqrt{2gd/21}$

51. (a) Sistema aislado (cantidad de movimiento angular) (b) $mv_i d/2$ (c) $(\frac{1}{12}M + \frac{1}{4}m)d^2$ (d) $(\frac{1}{12}M + \frac{1}{4}m)d^2\omega$

(e) $\dfrac{6mv_i}{(M + 3m)d}$ (f) $\frac{1}{2}mv_i^2$ (g) $\dfrac{3m^2v_i^2}{2(M + 3m)}$ (h) $-\dfrac{M}{M + 3m}$

53. (a) $v_i r_i/r$ (b) $(mv_i^2 r_i^2)r^{-3}$ (c) $\frac{1}{2}mv_i^2(r_i^2/r^2 - 1)$

55. (a) 3 750 kg · m^2/s (b) 1.88 kJ (c) 3 750 kg · m^2/s (d) 10.0 m/s (e) 7.50 kJ (f) 5.62 kJ

57. (a) $2mv_0$ (b) $2v_0/3$ (c) $4m\ell v_0/3$ (d) $4v_0/9\ell$ (e) mv_0^2 (f) $26mv_0^2/27$ (g) No, las fuerzas horizontales actúan sobre la bola desde afuera después del lanzamiento, así la cantidad de movimiento horizontal se mantiene constante. Su centro de masa se mueve constantemente con la velocidad horizontal que tenía al lanzamiento. No hay momentos de torsión alrededor de su eje de rotación que actúen sobre la bola, así la cantidad de movimiento angular se mantiene constante. Las fuerzas internas no pueden afectar la conservación de la cantidad de movimiento lineal y la conservación de la cantidad de movimiento angular, pero pueden afectar la energía mecánica.

59. Un aumento de 6.368 × 10^{-4}% o 0.550 s, que no es significativo

61. (a) $\frac{1}{3}\omega_i$ (b) $-\frac{2}{3}$ (c) $\dfrac{R\omega_i}{3\mu g}$ (d) $\dfrac{R^2\omega_i^2}{18\mu g}$

63. $4\sqrt{\frac{1}{3}ga(\sqrt{2} - 1)}$

Capítulo 12

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (a)

2. (b)

3. (b)

4. **(i)** (b) **(ii)** (a) **(iii)** (c)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. $F_x - R_x = 0$, $F_y + R_y - F_g = 0$, $F_y \cos\theta - F_x \operatorname{sen}\theta - 0.5F_g \cos\theta = 0$

3. (3.85 cm, 6.85 cm)

5. 0.750 m

7. (2.54 m, 4.75 m)

9. 177 kg

11. Sam ejerce una fuerza hacia arriba de 176 N, y Joe ejerce una fuerza hacia arriba de 274 N

13. (a) $f_s = 268$ N, $n = 1\,300$ N (b) 0.324

15. (a) 29.9 N (b) 22.2 N

17. (a) 1.04 kN a 60.0° hacia arriba y a la derecha (b) $(370\hat{\mathbf{i}} + 910\hat{\mathbf{j}})$ N

19. (a) 27.7 kN (b) 11.5 kN (c) 4.19 kN

21. (a) 859 N (b) 1.04 kN a 36.9° a la izquierda y hacia arriba

23. 2.81 m

25. $T_1 = 501$ N, $T_2 = 672$ N, $T_3 = 384$ N

27. (a) $-0.053\,8$ m^3 (b) 1.09×10^3 kg/m^3 (c) Con sólo un cambio de 5% en volumen en este caso extremo, el agua líquida en efecto es casi incompresible en situaciones de laboratorio biológico y para estudio.

29. 23.8 μm

31. (a) 3.14×10^4 N (b) 6.28×10^4 N

33. 4.90 mm

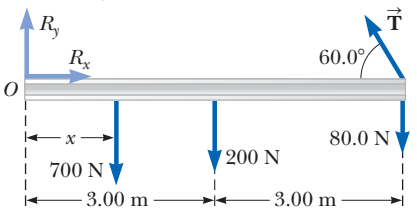
35. 0.029 2 mm

37. $n_A = 5.98 \times 10^5$ N, $n_B = 4.80 \times 10^5$ N

39. 0.896 m

41. $F_t = 724$ N, $F_s = 716$ N

43. (a)



(b) $T = 343$ N, $R_x = 171$ N a la derecha, $R_y = 683$ N hacia arriba (c) 5.14 m

45. (a) $T = F_g(L + d)/[\operatorname{sen}\theta\,(2L + d)]$ (b) $R_x = F_g(L + d)\cot\theta/(2L + d)$; $R_y = F_g L/(2L + d)$

47. $\vec{\mathbf{F}}_A = (-6.47 \times 10^5\hat{\mathbf{i}} + 1.27 \times 10^5\hat{\mathbf{j}})$ N, $\vec{\mathbf{F}}_B = 6.47 \times 10^5\hat{\mathbf{i}}$ N

49. (a) 5.08 kN (b) 4.77 kN (c) 8.26 kN

51. (a) $\frac{1}{2}m\left(\dfrac{2\mu_s \operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\cos\theta - \mu_s \operatorname{sen}\theta}\right)$ (b) $(m + M)g\sqrt{1 + \mu_s^2}$ (c) $g\sqrt{M^2 + \mu_s^2(m + M)^2}$

53. (a) 9.28 kN (b) El brazo de momento de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_h$ no es más largo que los 70 cm desde la articulación del hombro, sino sólo de 49.5 cm, por lo tanto se reduce $\vec{\mathbf{F}}_m$ a 6.56 kN.

55. (a) 66.7 N (b) Aumentando a 0.125 N/s

57. (a) $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\dfrac{mgd}{\ell}$ (b) $n_A = mg\left(\dfrac{2\ell - d}{2\ell}\right)$, $n_B = \dfrac{mgd}{2\ell}$

(c) $R_x = \frac{1}{\sqrt{15}}\frac{mgd}{\ell}$, $R_y = \frac{mgd}{2\ell}$ (a la derecha y hacia abajo en la mitad derecha de la escalera)

59. (a) $P_1 = P_3 = 1.67$ N, $P_2 = 3.33$ N (b) 2.36 N
61. 5.73 rad/s
63. (a) 443 N (b) 221 N (a la derecha), 217 N (hacia arriba)
65. 9.00 pies
67. $3F_g/8$

Capítulo 13

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (e)
2. (c)
3. (a)
4. (a) Perihelio (b) Afelio (c) Perihelio (d) Todos los puntos

Respuestas a problemas con numeración impar

1. 7.41×10^{-10} N
3. (a) 2.50×10^{-7} N hacia el objeto de 500 kg (b) Entre los objetos y a 2.45 m del objeto de 500 kg
5. 2.67×10^{-7} m/s^2
7. 2.97 nN
9. 2.00 kg y 3.00 kg
11. 0.614 m/s^2 hacia la Tierra
13. (a) 7.61 cm/s^2 (b) 363 s (c) 3.08 km (d) 28.9 m/s a 72.9° abajo de la horizontal
15. $\frac{GM}{\ell^2}(\frac{1}{2} + \sqrt{2})$ a 45° del eje x positivo
17. 1.50 h o 90.0 min
19. (a) 0.71 año (b) La salida debe ser programada para que la nave llegue al afelio cuando el planeta está ahí.
21. 1.26×10^{32} kg
23. 35.1 UA
25. 4.99 días
27. 8.92×10^7 m
29. (a) Sí (b) 3.93 años
31. 2.82×10^9 J
33. (a) 1.84×10^9 kg/m^3 (b) 3.27×10^6 m/s^2 (c) -2.08×10^{13} J
35. (a) -1.67×10^{-14} J (b) Las partículas chocan en el centro del triángulo.
37. 1.58×10^{10} J
39. (a) 4.69×10^8 J (b) -4.69×10^8 J (c) 9.38×10^8 J
41. 1.78×10^3 m
43. (a) 850 MJ (b) 2.71×10^9 J
45. (a) 5.30×10^3 s (b) 7.79 km/s (c) 6.43×10^9 J
47. (a) Fuerza del mismo tamaño (b) 15.6 km/s
49. 2.52×10^7 m
51 $\omega = 0.057\,2$ rad/s o 1 rev en 110 s
53. (a) 2.43 h (b) 6.59 km/s (c) 4.74 m/s^2 hacia la Tierra
55. 2.25×10^{27}
57. (a) 1.00×10^7 m (b) 1.00×10^4 m/s
59. (a) 15.3 km (b) 1.66×10^{16} kg (c) 1.13×10^4 s (d) No, su masa es tan grande en comparación con la suya que usted tendría un efecto insignificante en su rotación.
61. (a) $v_1 = m_2\sqrt{\frac{2G}{d(m_1 + m_2)}}$, $v_2 = m_1\sqrt{\frac{2G}{d(m_1 + m_2)}}$, $v_{rel} = \sqrt{\frac{2G(m_1 + m_2)}{d}}$ (b) 1.07×10^{32} J and 2.67×10^{31} J
63. (a) -7.04×10^4 J (b) -1.57×10^5 J (c) 13.2 m/s
65. 7.79×10^{14} kg
67. (a) 2×10^8 años (b) ~ 10^{41} kg (c) 10^{11}
69. (a) 2.93×10^4 m/s (b) $K = 2.74 \times 10^{33}$ J, $U = -5.39 \times 10^{33}$ J (c) $K = 2.56 \times 10^{33}$ J, $U = -5.21 \times 10^{33}$ J (d) Sí, $E = -2.65 \times 10^{33}$ J tanto para el afelio como para el perihelio.
71. 119 km
73. $\sqrt{\frac{GM}{4R_E}}$
75. $(800 + 1.73 \times 10^{-4})\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s y $(800 - 1.73 \times 10^{-4})\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s
77. 18.2 ms
79. (a) -3.67×10^7 J (b) 9.24×10^{10} kg · m^2/s (c) $v = 5.58$ km/s, $r = 1.04 \times 10^7$ m (d) 8.69×10^6 m (e) 134 min

Capítulo 14

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (a)
2. (a)
3. (c)
4. (b) o (c)
5. (a)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. 2.96×10^6 Pa
3. (a) 6.24 MPa (b) Sí, esta presión podría perforar el piso de vinilo.
5. 24.8 kg
7. 8.46 m
9. 7.74×10^{-3} m^2
11. (a) 3.71×10^5 Pa (b) 3.57×10^4 N
13. 2.71×10^5 N
15. (a) 2.94×10^4 N (b) 1.63×10^4 N · m
17. 2.31 lb
19. 98.6 kPa
21. (a) 10.5 m (b) No. El vacío no es tan bueno, porque se evaporará algo del agua y el alcohol. Las presiones de vapor de equilibrio del alcohol y del agua son superiores a la presión de vapor de mercurio.
23. (a) 116 kPa (b) 52.0 Pa
25. 0.258 N hacia abajo
27. (a) 4.9 N hacia abajo, 16.7 N hacia arriba (b) 86.2 N (c) Por cualquiera de los métodos de evaluación, la fuerza de flotación es 11.8 N hacia arriba.
29. (a) 7.00 cm (b) 2.80 kg
31. (a) 1 250 kg/m^3 (b) 500 kg/m^3
33. (a) 408 kg/m^3 (b) Cuando m es menor que 0.310 kg, el bloque de madera se sumerge sólo parcialmente en el agua. (c) Cuando m es mayor que 0.310 kg, el bloque de madera y el objeto de acero se hundirán.
35. (a) 3.82×10^3 N (b) 1.04×10^3 N; el globo se eleva porque la fuerza neta es positiva: la fuerza de flotación hacia arriba es mayor que la fuerza gravitacional hacia abajo. (c) 106 kg
37. (a) 11.6 cm (b) 0.963 g/cm^3 (c) No, la densidad ρ no es lineal en h.
39. 1.52×10^3 m^3
41. (a) 17.7 m/s (b) 1.73 mm
43. 0.247 cm

45. (a) 2.28 N hacia Holanda (b) 1.74×10^6 s
47. (a) 15.1 MPa (b) 2.95 m/s
49. (a) 1.91 m/s (b) 8.65×10^{-4} m^3/s
51. 347 m/s
53. (a) 4.43 m/s (b) 10.1 m
55. 12.6 m/s
57. (a) 1.02×10^7 Pa (b) 6.61×10^5 N
59. (a) 6.70 cm (b) 5.74 cm
61. 2.25 m
63. 455 kPa
65. 0.556 m
67. 160 kg/m^3
69. (a) 8.01 km (b) Sí
71. Escala superior: 17.3 N; escala inferior: 31.7 N
73. 91.64%
75. 27 N · m
77. 758 Pa
79. 4.43 m/s
81. (a) 1.25 cm (b) 14.3 m/s
85. (a) 18.3 mm (b) 14.3 mm (c) 8.56 mm

Capítulo 15

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (d)
2. (f)
3. (a)
4. (b)
5. (c)
6. **(i)** (a) **(ii)** (a)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) 17 N hacia la izquierda (b) 28 m/s^2 hacia la izquierda
3. 0.63 s
5. (a) 1.50 Hz (b) 0.667 s (c) 4.00 m (d) π rad (e) 2.83 m
7. 0.628 m/s
9. 40.9 N/m
11. 12.0 Hz
13. (a) −2.34 m (b) −1.30 m/s (c) −0.076 3 m (d) 0.315 m/s
15. (a) $x = 2.00 \cos(3.00\pi t - 90°)$ o $x = 2.00 \operatorname{sen}(3.00\pi t)$ donde x está en centímetros y t está en segundos (b) 18.8 cm/s (c) 0.333 s (d) 178 cm/s^2 (e) 0.500 s (f) 12.0 cm
17. (a) 20 cm (b) 94.2 cm/s cuando la partícula pasa por el equilibrio (c) ± 17.8 m/s^2 a una distancia máxima del equilibrio
19. (a) 40.0 cm/s (b) 160 cm/s^2 (c) 32.0 cm/s (d) −96.0 cm/s^2 (e) 0.232 s
21. 2.23 m/s
23. (a) 0.542 kg (b) 1.81 s (c) 1.20 m/s^2
25. 2.60 cm y −2.60 cm
27. (a) 28.0 mJ (b) 1.02 m/s (c) 12.2 mJ (d) 15.8 mJ
29. (a) $\frac{8}{9}E$ (b) $\frac{1}{9}E$ (c) $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}A$ (d) No, la máxima energía potencial es igual a la energía total del sistema. Ya que la energía total debe permanecer constante, la energía cinética nunca puede ser mayor que la máxima energía potencial.
31. (a) 4.58 N (b) 0.125 J (c) 18.3 m/s^2 (d) 1.00 m/s (e) Menor (f) El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie (g) 0.934
33. (b) 0.628 s
35. (a) 1.50 s (b) 0.559 m
37. 0.944 kg · m^2
39. 1.42 s, 0.499 m
41. (a) 0.820 m/s (b) 2.57 rad/s^2 (c) 0.641 N (d) $v_{máx} = 0.817$ m/s, $\alpha_{máx} = 2.54$ rad/s^2, $F_{máx} = 0.634$ N (e) Las respuestas están cerca, pero no son exactamente iguales. Las respuestas calculadas a partir de su conservación de la energía y de la segunda ley de Newton son más precisas.
43. (a) 3.65 s (b) 6.41 s (c) 4.24 s
45. (a) 5.00×10^{-7} kg · m^2 (b) 3.16×10^{-4} N · m/rad
47. (a) 7.00 Hz (b) 2.00% (c) 10.6 s
51. 11.0 cm
53. (a) 3.16 s^{-1} (b) 6.28 s^{-1} (c) 5.09 cm
55. 0.641 Hz o 1.31 Hz
57. (a) 2.09 s (b) 0.477 Hz (c) 36.0 cm/s (d) $E = 0.064\,8m$, donde E está en joules y m está en kilogramos (e) $k = 9.00m$, donde k está en newtons/metro y m está en kilogramos (f) Periodo, frecuencia y rapidez máxima son todos independientes de la masa en esta situación. La energía y la constante de fuerza son directamente proporcionales a la masa.
59. (a) $2Mg$ (b) $Mg\left(1 + \frac{y}{L}\right)$ (c) $\frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{2L}{g}}$ (d) 2.68 s
61. 1.56×10^{-2} m
63. (a) $L_{Tierra} = 25$ cm (b) $L_{Marte} = 9.4$ cm (c) $m_{Tierra} = 0.25$ kg (d) $m_{Marte} = 0.25$ kg
65. 6.62 cm
67. $\frac{1}{2\pi L}\sqrt{gL + \frac{kh^2}{M}}$
69. 7.75 s^{-1}
71. (a) 1.26 m (b) 1.58 (c) La energía disminuye en 120 J. (d) La energía mecánica se transforma en energía interna en la colisión perfectamente inelástica.
73. (a) $\omega = \sqrt{\frac{200}{0.400 + M}}$, donde ω está en s^{-1} y M está en kilogramos (b) 22.4 s^{-1} (c) 22.4 s^{-1}
75. (a) 3.00 s (b) 14.3 J (c) $\theta = 25.5°$
77. (b) 1.46 s
79. (a) $x = 2 \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (b) ± 1.73 m (c) 0.105 s = 105 ms (d) 0.098 0 m
81. (b) $T = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{\pi M}{\rho g}}$
83. 9.12×10^{-5} s
85. (a) 0.500 m/s (b) 8.56 cm
87. (a) $\frac{1}{2}(M + \frac{1}{3}m)v^2$ (b) $2\pi\sqrt{\frac{M + \frac{1}{3}m}{k}}$
89. (a) $\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{L_i + \frac{1}{2\rho a^2}\left(\frac{dM}{dt}\right)t}$ (b) $2\pi\sqrt{\frac{L_i}{g}}$

Capítulo 16

Respuestas a los exámenes rápidos

1. **(i)** (b) **(ii)** (a)
2. **(i)** (c) **(ii)** (b) **(iii)** (d)
3. (c)
4. (f) y (h)
5. (d)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. 184 km

3. $y = \dfrac{6.00}{(x - 4.50t)^2 + 3.00}$ donde x y y están en metros y t está en segundos

5. (a) 2.00 cm (b) 2.98 m (c) 0.576 Hz (d) 1.72 m/s

7. 0.319 m

9. (a) $3.33\hat{\mathbf{i}}$ m/s (b) −5.48 cm (c) 0.667 m (d) 5.00 Hz (e) 11.0 m/s

11. (a) 31.4 rad/s (b) 1.57 rad/m (c) $y = 0.120 \text{ sen } (1.57x - 31.4t)$, donde x y y están en metros y t está en segundos (d) 3.77 m/s (e) 118 m/s^2

13. (a) 0.500 Hz (b) 3.14 rad/s (c) 3.14 rad/m (d) $0.100 \text{ sen } (\pi x - \pi t)$ (e) $0.100 \text{ sen } (-\pi t)$ (f) $0.100 \text{ sen } (4.71 - \pi t)$ (g) 0.314 m/s

15. (a) −1.51 m/s (b) 0 (c) 16.0 m (d) 0.500 s (e) 32.0 m/s

17. (a) 0.250 m (b) 40.0 rad/s (c) 0.300 rad/m (d) 20.9 m (e) 133 m/s (f) Dirección x positiva

19. (a) $y = 0.080\,0 \text{ sen } (2.5\pi x + 6\pi t)$ (b) $y = 0.080\,0 \text{ sen } (2.5\pi x + 6\pi t - 0.25\pi)$

21. 185 m/s

23. 13.5 N

25. 80.0 N

27. 0.329 s

29. (a) 0.051 0 kg/m (b) 19.6 m/s

31. 631 N

33. (a) 1 (b) 1 (c) 1 (d) Aumenta por un factor de 4

35. (a) 62.5 m/s (b) 7.85 m (c) 7.96 Hz (d) 21.1 W

37. (a) $y = 0.075 \text{ sen } (4.19x - 314t)$, donde x y y están en metros y t está en segundos (b) 625 W

39. (a) 15.1 W (b) 3.02 J

45. 0.456 m/s

47. 14.7 kg

49. (a) 39.2 N (b) 0.892 m (c) 83.6 m/s

51. (a) 21.0 ms (b) 1.68 m

53. $\sqrt{\dfrac{mL}{Mg \text{ sen } \theta}}$

55. 0.084 3 rad

57. $\dfrac{1}{\omega}\sqrt{\dfrac{m}{M}}$

59. (a) $v = \sqrt{\dfrac{T}{\rho(1.00 \times 10^{-5}\, x + 1.00 \times 10^{-6})}}$, donde v está en metros por segundo, T está en newtons, ρ está en kilogramos por metro cúbico y x está en metros (b) $v(0) = 94.3$ m/s, $v(10.0 \text{ m}) = 9.38$ m/s

61. (a) $\dfrac{\mu\omega^3}{2k} A_0^2 e^{-2bx}$ (b) $\dfrac{\mu\omega^3}{2k} A_0^2$ (c) e^{-2bx}

63. 3.86×10^{-4}

65. (a) $(0.707)(2\sqrt{L/g})$ (b) $L/4$

67. (a) μv_0^2 (b) v_0 (c) Sentido de las manecillas del reloj: 4π; en contra de las manecillas del reloj: 0

Capítulo 17

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (c)
2. (b)
3. (b)
4. (e)
5. (e)
6. (b)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) 2.00 μm (b) 40.0 cm (c) 54.6 m/s (d) −0.433 μm (e) 1.72 mm/s

3. $\Delta P = 0.200 \text{ sen } (20\pi x - 6\,860\pi t)$ donde ΔP está en pascales, x está en metros y t está en segundos.

5. 0.103 Pa

7. 0.196 s

9. (a) 0.625 mm (b) 1.50 mm a 75.0 μm

11. (a) 5.56 km (b) No. La rapidez de la luz es mucho mayor que la rapidez del sonido, así que el intervalo de tiempo requerido para que la luz lo contacte es insignificante en comparación con el intervalo de tiempo para el sonido.

13. 7.82 m

15. (a) 27.2 s (b) 25.7 s; el intervalo de tiempo en el inciso (a) es mayor.

17. (a) El pulso que viaja a través del riel (b) 23.4 ms

19. 66.0 dB

21. (a) 3.75 W/m^2 (b) 0.600 W/m^2

23. 3.0×10^{-8} W/m^2

25. (a) 0.691 m (b) 691 km

27. (a) 1.3×10^2 W (b) 96 dB

29. (a) 2.34 m (b) 0.390 m (c) 0.161 Pa (d) 0.161 Pa (e) 4.25×10^{-7} m (f) 7.09×10^{-8} m

31. (a) 1.32×10^{-4} W/m^2 (b) 81.2 dB

33. 68.3 dB

35. (a) 30.0 m (b) 9.49×10^5 m

37. (a) 475 Hz (b) 430 Hz

39. (a) 3.04 kHz (b) 2.08 kHz (c) 2.62 kHz; 2.40 kHz

41. (a) 441 Hz (b) 439 Hz (c) 54.0 dB

43. (a) 0.021 7 m/s (b) 28.9 Hz (c) 57.8 Hz

45. 26.4 m/s

47. (a) 56.3 s (b) 56.6 km más largo

49. 0.883 cm

51. (a) 0.515 camiones por minuto (b) 0.614 camiones por minuto

53. 67.0 dB

55. (a) 4.16 m (b) 0.455 μs (c) 0.157 mm

57. No es razonable, lo que implica un nivel de sonido de 123 dB. Casi toda la disminución de la energía mecánica se convierte en energía interna en el pestillo.

59. (a) 5.04×10^3 m/s (b) 1.59×10^{-4} s (c) 1.90×10^{-3} m (d) 2.38×10^{-3} (e) 4.76×10^8 N/m^2 (f) $\dfrac{\sigma_y}{\sqrt{\rho Y}}$

61. (a) 55.8 m/s (b) 2 500 Hz

63. (a) 3.29 m/s (b) El murciélago será capaz de atrapar el insecto porque el murciélago está viajando a una mayor rapidez en la misma dirección que el insecto.

65. (a) 0.343 m (b) 0.303 m (c) 0.383 m (d) 1.03 kHz

67. (a) 0.983° (b) 4.40°

69. 1.34×10^4 N

71. (a) 531 Hz (b) 466 Hz to 539 Hz (c) 568 Hz

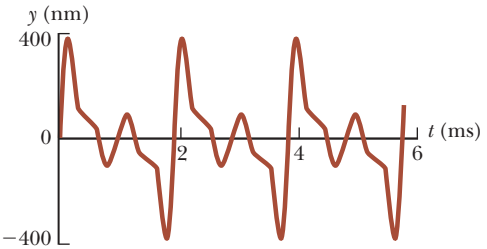
Capítulo 18

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (c)
2. **(i)** (a) **(ii)** (d)
3. (d)
4. (b)
5. (c)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. 5.66 cm
3. (a) −1.65 cm (b) −6.02 cm (c) 1.15 cm
5. 91.3°
7. (a) y_1: dirección x positiva; y_2: dirección x negativa (b) 0.750 s (c) 1.00 m
9. (a) 9.24 m (b) 600 Hz
11. (a) 156° (b) 0.058 4 cm
13. (c) Sí, la forma límite de la trayectoria son dos líneas rectas a través del origen con pendiente ± 0.75.
15. (a) 15.7 m (b) 31.8 Hz (c) 500 m/s
17. (a) 4.24 cm (b) 6.00 cm (c) 6.00 cm (d) 0.500 cm, 1.50 cm, 2.50 cm
19. A 0.089 1 m, 0.303 m, 0.518 m, 0.732 m, 0.947 m y 1.16 m de una bocina.
21. 19.6 Hz
23. (a) 163 N (b) 660 Hz
25. (a) Segundo armónico (b) 74.0 cm (c) 3
27. (a) 350 Hz (b) 400 kg
29. 1.86 g
31. (a) 3.8 cm (b) 3.85%
33. (a) Tres bucles (b) 16.7 Hz (c) Un bucle
35. (a) 3.66 m/s (b) 0.200 Hz
37. 57.9 Hz
39. (a) 0.357 m (b) 0.715 m
41. (a) 0.656 m (b) 1.64 m
43. (a) 349 m/s (b) 1.14 m
45. (a) 0.195 m (b) 841 Hz
47. $n(0.252\text{ m})$ with $n = 1, 2, 3, \ldots$
49. 158 s
51. (a) 50.0 Hz (b) 1.72 m
53. (a) 21.5 m (b) Siete
55. (a) 1.59 kHz (b) Armónicos con numeración impar (c) 1.11 kHz
57. 5.64 batimientos/s
59. (a) 1.99 batimientos/s (b) 3.38 m/s
61. Los siguientes coeficientes son aproximados: $A_1 = 100$, $A_2 = 156$, $A_3 = 62$, $A_4 = 104$, $A_5 = 52$, $A_6 = 29$, $A_7 = 25$.



63. 31.1 N
65. 800 m
67. 1.27 cm
69. 262 kHz
71. (a) 45.0 o 55.0 Hz (b) 162 o 242 N
73. (a) $r = 0.078\,2\left(1 - \dfrac{4}{n^2}\right)^{1/3}$ (b) 3 (c) 0.078 2 m (d) La esfera flota en el agua.
75. (a) 34.8 m/s (b) 0.986 m
77. 3.85 m/s alejándose de la estación o 3.77 m/s hacia la estación
79. 283 Hz
81. 407 ciclos
83. (b) $A = 11.2$ m, $\phi = 63.4°$
85. (a) 78.9 N (b) 211 Hz
87. $\sqrt{15}Mg$

Capítulo 19

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (c)
2. (c)
3. (c)
4. (c)
5. (a)
6. (b)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) 106.7°F (b) Sí, la temperatura normal del cuerpo es 98.6°F, por lo que el paciente tiene fiebre alta que necesita atención inmediata.
3. (a) −109°F, 195 K (b) 98.6°F, 310 K
5. (a) −320°F (b) 77.3 K
7. (a) −270°C (b) 1.27 atm, 1.74 atm
9. (a) 0.176 mm (b) 8.78 μm (c) 0.093 0 cm^3
11. 3.27 cm
13. 1.54 km. La tubería se puede apoyar en los rodillos. Bucles en forma de Ω se pueden construir entre tramos rectos. Se doblan conforme cambia la longitud del acero.
15. (a) 0.109 cm^2 (b) Aumenta
17. (a) 437°C (b) 2.1×10^3°C (c) No, el aluminio se funde a 660°C (tabla 20.2). También, aunque éste no está en la tabla 20.2, una investigación en Internet muestra que el latón (una aleación de cobre y zinc) se funde a aproximadamente 900°C.
19. (a) 99.8 mL (b) Se encuentra debajo de la marca. La acetona se ha reducido en volumen y el frasco ha incrementado su volumen.
21. (a) 99.4 mL (b) 2.01 L (c) 0.998 cm
23. (a) $11.2 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$ (b) 20.0 kg
25. 1.02×10^3 galones
27. 4.28 atm
29. (a) 2.99 mol (b) 1.80×10^{24} moléculas
31. 1.50×10^{29} moléculas
33. (a) 41.6 mol (b) 1.20 kg (c) Este valor está de acuerdo con la densidad tabulada.
35. 3.55 L
37. (a) 3.95 atm = 400 kPa (b) 4.43 atm = 449 kPa
39. 473 K
41. 3.68 cm^3
43. 1.89 MPa
45. 6.57×10^6 Pa
47. (a) 2.542 cm (b) $\Delta T = 300$°C
49. 1.12 atm
51. 3.37 cm
53. −0.094 2 Hz
55. (a) 94.97 cm (b) 95.03 cm
57. (b) Conforme aumenta la temperatura, la densidad disminuye (suponiendo que β es positivo). (c) $5 \times 10^{-5}\ (\text{°C})^{-1}$ (d) $-2.5 \times 10^{-5}\ (\text{°C})^{-1}$
59. (a) 9.5×10^{-5} s (b) Se pierden 57.5 s.
61. (b) Se supone que $\alpha\,\Delta T$ es mucho menor que 1.
63. (a) Sí, mientras los coeficientes de expansión permanezcan constantes. (b) Las longitudes L_C y L_S a 0°C deben cumplir $17L_C = 11L_S$. Entonces la barra de acero debe ser

más larga. Con $L_S - L_C = 5.00$ cm, la única posibilidad es $L_S = 14.2$ cm y $L_C = 9.17$ cm

65. (a) 0.34% (b) 0.48% (c) Todos los momentos de inercia tienen la misma forma matemática: el producto de una constante, la masa y una longitud al cuadrado.

67. 2.74 m

69. (a) $\dfrac{\rho_w g P_0 V_i}{P_0 + \rho_w g h}$ (b) Disminuye (c) $h = \dfrac{P_0}{\rho_w g} = 10.3$ m

73. (a) 6.17×10^{-3} kg/m (b) 632 N (c) 580 N (d) 192 Hz

75. No, el acero tendría que ser 2.30 veces más fuerte.

77. (a) $L_f = L_i e^{\alpha \Delta T}$ (b) $(2.00 \times 10^{-4})\%$ (c) 59.4% (d) Con este método se derraman 102 mL de trementina, 2.01 L permanecen en el cilindro a 80.0°C y el nivel de trementina a 20.0°C es 0.969 cm por debajo del borde del cilindro.

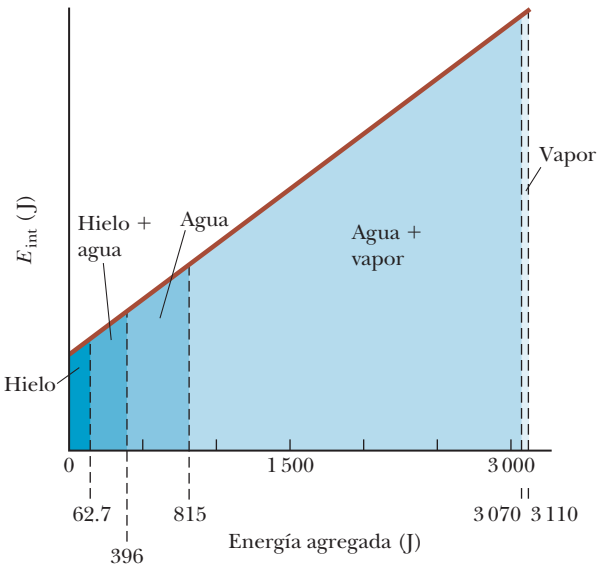
79. 4.54 m

Capítulo 20

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (i) Hierro, vidrio, agua (ii) Agua, vidrio, hierro

2. La siguiente figura muestra una representación gráfica de la energía interna del sistema en función de la energía añadida. Observe que esta gráfica presenta un aspecto diferente de la figura 20.3 en que no tiene las partes planas durante los cambios de fase. Independientemente de cómo está variando la temperatura en la figura 20.3, la energía interna del sistema simplemente aumenta de forma lineal con la entrada de energía; la recta en la siguiente gráfica tiene una pendiente de 1.



3

Situación	Sistema	Q	W	ΔE_{int}
(a) (a) Inflar rápidamente un neumático de bicicleta	Aire en la bomba	0	+	+
(b) Recipiente con agua a temperatura ambiente puesto sobre una estufa caliente	Agua en el recipiente	+	0	+
(c) Aire que escapa rápidamente de un globo	Aire originalmente en el globo	0	−	−

4. La trayectoria A es isovolumétrica, la trayectoria B es adiabática, la trayectoria C es isotérmica y la trayectoria D es isobárica.

5. (b)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) 2.26×10^6 J (b) 2.80×10^4 escalones (c) 6.99×10^3 escalones

3. 23.6°C

5. 0.845 kg

7. 1.78×10^4 kg

9. 88.2 W

11. 29.6°C

13. (a) 1 822 J/kg · °C (b) No podemos hacer una identificación definitiva. Tal vez sea berilio. (c) El material puede ser una aleación desconocida o un material que no figura en la tabla.

15. (a) 380 K (b) 2.04 atm

17. 2.27 km

19. 16.3°C

21. (a) 10.0 g de hielo derretido, $T_f = 40.4$°C (b) 8.04 g de hielo derretido, $T_f = 0$°C

23. (a) 0°C (b) 114 g

25. −466 J

27. (a) $-4P_iV_i$ (b) De acuerdo con $T = (P_i/nRV_i)V^2$, es proporcional al cuadrado del volumen.

29. 21.18 MJ

31.

Proceso	Q	W	ΔE_{int}
BC	−	0	−
CA	−	+	−
AB	+	−	+

33. 720 J

35. (a) 0.041 0 m^3 (b) +5.48 kJ (c) −5.48 kJ

37. (a) 7.50 kJ (b) 900 K

39. (a) −0.048 6 J (b) 16.2 kJ (c) 16.2 kJ

41. (a) −9.08 kJ (b) 9.08 kJ

43. (a) 6.45×10^3 W (b) 5.57×10^8 J

45. 74.8 kJ

47. 3.49×10^3 K

49. (a) 1.19 (b) Un factor de 1.19

51. 8.99 cm

53. (a) 1.85 pies^2 · °F · h/Btu (b) Un factor de 1.78

55. 51.2°C

57. (a) $\sim 10^3$ W (b) $\sim 10^{-1}$ K/s

59. (a) -6.08×10^5 J (b) 4.56×10^5 J

61. (a) 17.2 L (b) 0.351 L/s

63. 1.90×10^3 J/kg · °C

65. (a) 9.31×10^{10} J (b) -8.47×10^{12} J (c) 8.38×10^{12} J

67. (a) 13.0°C (b) −0.532°C/s

69. (a) 2 000 W (b) 4.46°C

71. 2.35 kg

73. (5.87×10^4)°C

75. (a) 3.16×10^{22} W (b) 3.17×10^{22} W (c) Es 0.408% más grande. (d) 5.78×10^3 K

77. 3.76 m/s

79. 1.44 kg

81. (a) 4.19 mm/s (b) 12.6 mm/s

83. 3.66×10^4 s = 10.2 h

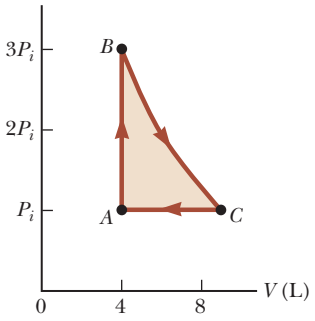
Capítulo 21

Respuestas a los exámenes rápidos

1. **(i)** (b) **(ii)** (a)
2. **(i)** (a) **(ii)** (c)
3. (d)
4. (c)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) 3.54×10^{23} átomos (b) 6.07×10^{-21} J (c) 1.35 km/s
3. (a) 0.943 N (b) 1.57 Pa
5. 3.32 mol
7. 5.05×10^{-21} J
9. (a) 4.00 u = 6.64×10^{-27} kg (b) 55.9 u = 9.28×10^{-26} kg (c) 207 u = 3.44×10^{-25} kg
11. (a) 2.28 kJ (b) 6.21×10^{-21} J
13. 17.4 kPa
15. $13.5PV$
17. (a) 3.46 kJ (b) 2.45 kJ (c) −1.01 kJ
19. 74.8 J
21. (a) 5.66×10^{7} J (b) 1.12 kg
23. 2.32×10^{-21} J
25. (a) 41.6 J/K (b) 58.2 J/K (c) 58.2 J/K, 74.8 J/K
27. (a) un factor de 0.118 (b) un factor de 2.35 (c) 0 (d) 135 J (e) 135 J
29. 227 K
31. 25.0 kW
33. (a)



(b) 8.77 L (c) 900 K (d) 300 K (e) −336 J
35. 132 m/s
37. (a) $2.00 \times 10^{-163} \rightarrow 0$ átomos (b) 2.70×10^{20} átomos
39. (a) 2.37×10^{4} K (b) 1.06×10^{3} K
41. (b) 0.278
43. (b) 8.31 km
45. (a) 1.69 h (b) 1.00
47. (a) 367 K (b) La rapidez rms del nitrógeno sería mayor porque la masa molar del nitrógeno es menor que la del oxígeno. (c) 572 m/s
49. 5.74×10^{6} Pa = 56.6 atm
51. **(i)** (a) 100 kPa (b) 66.5 L (c) 400 K (d) +5.82 kJ (e) +7.48 kJ (f) −1.66 kJ; **(ii)** (a) 133 kPa (b) 49.9 L (c) 400 K (d) +5.82 kJ (e) +5.82 kJ (f) 0; **(iii)** (a) 120 kPa (b) 41.6 L (c) 300 K (d) 0 (e) −909 J (f) +909 J; **(iv)** (a) 120 kPa (b) 43.3 L (c) 312 K (d) +722 J (e) 0 (f) +722 J
53. 0.623
55. (a) 0.514 m^3 (b) 2.06 m^3 (c) 2.38×10^{3} K (d) −480 kJ (e) 2.28 MJ
57. (a) $3.65v$ (b) $3.99v$ (c) $3.00v$ (d) $\dfrac{106 m_0 v^2}{V}$ (e) $7.98 m_0 v^2$
59. (a) 300 K (b) 1.00 atm
61. (a) $v_{\text{rms}} = (18k_B T/\pi\rho d^3)^{1/2} = (4.81 \times 10^{-12}) d^{-3/2}$, está en metros por segundo y d está en metros (b) $t = (2.08 \times 10^{11}) d^{5/2}$, donde t está en segundos y d está en metros (c) 0.926 mm/s y 3.24 ms (d) 1.32×10^{-11} m/s y 3.88×10^{10} s
63. 0.480°C
65. (a) 0.203 mol (b) 900 K (c) 900 K (d) 15.0 L (e) $A \rightarrow B$: bloquee el pistón en el lugar y ponga el cilindro en un horno a 900 K. B → C: mantenga el gas en el horno dejando que se expanda el gas gradualmente para levantar el pistón en cuanto pueda. C → A: mueva el cilindro del horno hacia la habitación a 300 K y deje que el gas se enfríe y se contraiga.
(f, g)

	Q, kJ	W, kJ	ΔE_{int}, kJ
AB	1.52	0	1.52
BC	1.67	−1.67	0
CA	−2.53	+1.01	−1.52
$ABCA$	0.656	−0.656	0

67. (a) 1.09×10^{-3} (b) 2.69×10^{-2} (c) 0.529 (d) 1.00 (e) 0.199 (f) 1.01×10^{-41} (g) $1.25 \times 10^{-1\,082}$
71. (a) 3.34×10^{26} moléculas (b) Durante el día 27 (c) 2.53×10^{6}
73. (a) 0.510 m/s (b) 20 ms
75. 510 K y 290 K

Capítulo 22

Respuestas a los exámenes rápidos

1. **(i)** (c) **(ii)** (b)
2. (d)
3. C, B, A
4. (a) Uno (b) Seis
5. (a)
6. Falso (el proceso adiabático debe ser *reversible* para que el cambio de entropía sea igual a cero).

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) 10.7 kJ (b) 0.533 s
3. (a) 6.94% (b) 335 J
5. (a) 0.294 (o 29.4%) (b) 500 J (c) 1.67 kW
7. 55.4%
9. (a) 75.0 kJ (b) 7.33
11. 77.8 W
13. (a) 4.51×10^{6} J (b) 2.84×10^{7} J (c) 68.1 kg
15. (a) 67.2% (b) 58.8 kW
17. (a) 8.70×10^{8} J (b) 3.30×10^{8} J
19. 9.00
21. 11.8
23. 1.86
25. (a) 564°C (b) No; un motor real siempre tendrá una eficiencia menor que la eficiencia de Carnot porque funciona de una manera irreversible.
27. (a) 741 J (b) 459 J
29. (a) 9.10 kW (b) 11.9 kJ
31. (a) 564 K (b) 212 kW (c) 47.5%
33. $\dfrac{Q_c}{\Delta t} = 1.40\left(\dfrac{0.5T_h + 383}{T_h - 383}\right)$, donde $Q_c/\Delta t$ está en megawatts y T_h está en kelvins. (b) La cantidad de energía que se descarga disminuye conforme aumenta la temperatura

en la cámara de combustión. (c) 1.87 MW (d) 3.84×10^3 K (e) No hay respuesta. La descarga podría ser de energía pequeña.

35. 1.17

37. (a) 244 kPa (b) 192 J

39. (a)

Macroestado	Microestados	Número de formas de sacar
Todas R	RRR	1
2 R, 1 V	VRR, RVR, RRV	3
1 R, 2 V	VVR, VRV, RVV	3
Todas V	VVV	1

(b)

Macroestado	Microestados	Número de formas de sacar
Todas R	RRRR	1
4R, 1V	VRRRR, RVRRR, RRVRR, RRRVR, RRRRV	5
3R, 2V	VVRRR, VRVRR, VRRVR, VRRRV, RVVRR, RVRVR, RVRRV, RRVVR, RRVRV, RRRVV	10
2R, 3V	RRVVV, RVRVV, RVVRV, RVVVR, VRRVV, VRVRV, VRVVR, VVRRV, VVRVR, VVVRR	10
1R, 4V	RVVVV, VRVVV, VVRVV, VVVRV, VVVVR	5
Todas V	VVVVV	1

41. (a) Uno (b) Seis

43. 143 J/K

45. 1.02 kJ/K

47. 57.2 J/K

49. 0.507 J/K

51. 195 J/K

53. (a) −3.45 J/K (b) +8.06 J/K (c) +4.62 J/K

55. 3.28 J/K

57. 32.9 kJ

59. (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$

61. 0.440 = 44.0%

63. (a) 5.00 kW (b) 763 W

65. (a) $-0.390nR$ (b) $-0.545nR$

67. (a) $3nRT_i$ (b) $3nRT_i \ln 2$ (c) $-3nRT_i$ (d) $-nRT_i \ln 2$ (e) $3nRT_i(1 + \ln 2)$ (f) $2nRT_i \ln 2$ (g) 0.273

69. (a) 39.4 J (b) 65.4 rad/s = 625 rev/min (c) 293 rad/s = 2.79×10^3 rev/min

71. 5.97×10^4 kg/s

73. (a) 4.10×10^3 J (b) 1.42×10^4 J (c) 1.01×10^4 J (d) 28.8% (e) Porque e_C = 80.0%, la eficiencia del ciclo es mucho menor que la de un motor de Carnot operando entre las mismas temperaturas extremas.

75. (a) 0.476 J/K (b) 417 J

77. $nC_P \ln 3$

79. (b) Sí (c) No, la segunda ley se refiere a un motor operando en un ciclo, mientras que este problema implica nada más un solo proceso.

81. (a) P_A = 25.0 atm, $V_A = 1.97 \times 10^{-3}$ m^3; P_B = 4.13 atm, $V_B = 1.19 \times 10^{-2}$ m^3; P_C = 1.00 atm, $V_C = 3.28 \times 10^{-2}$ m^3; P_D = 6.05 atm, $V_D = 5.43 \times 10^{-3}$ m^3 (b) 2.99×10^3 J

Índice

Nota de ubicación: **negrilla** indica una definición; *itálica* indica una figura; *t* indica una tabla

Abajo, quark (d), *6*, 7
Absorbedor ideal, **613**
Absortividad, **613**
Aceleración (*a*), **31**-35
  angular instantánea (α), **295**-296, 298, 314*t*
    y momento de torsión, 302-307
  angular promedio (α_{prom}), **295**, 300
  centrípeta (a_C), 91-94, **92**, 95, 150-156, 298-299
  constante
    movimiento en dos dimensiones con, 81-84
    movimiento en una dimensión con, *36*, **36**-40
  del centro de masa ($\vec{\mathbf{a}}_{CM}$), **272**
  diagramas de movimiento de, *35*, 35-36
  dirección de, 31, 32-33
  en caída libre, 41-43
  en movimiento armónico simple, 451, 452, 454, *455*, 455-456, 463
  en movimiento circular no uniforme, 156-158, *157*
  en movimiento circular uniforme, *91*, 91-92, 150-156
  en movimiento de proyectiles, 84-85, 87-89
  fuerza y, 32-33, 114, 115-117
  instantánea ($\vec{\mathbf{a}}$), *31*, **32**-33, 34, **80**
    en movimiento circular uniforme, 92
  lineal, en movimiento de rodamiento, 317
  masa y, 115-117
  modelo de partícula bajo aceleración constante, *36*, 36-40, **38**
  negativa, **33**, *35*, 36
  promedio (a_{prom}), **31**, *31*, 33, 34, **80**, 92, 314*t*
  radial (a_r), *94*, **94**-96, 156-158, *157*
  relativa, 97
  tangencial (a_t), *94*, **94**-95, 156-158, *157*, 298-299, *299*, 303
  total, 94, 95
  transversal (a_y), **490**-491
  unidades de, 8*t*, 31
  y vector velocidad, 80-81
Aceleración-tiempo, gráfica, 32, *32*, 33, *33*
Acero, coeficiente de expansión promedio, 575*t*
Afelio, 396
Agua
  calor específico, 594-595, 594*t*
  calor específico molar, 633*t*
  calores latentes de fusión y vaporización, 598-599, 598*t*
  cambio de fase en, 598-599, *599*
  conductividad térmica, 609*t*
  congelamiento de, 577-578
  densidad, 419*t*
  densidad *contra* curva de temperatura, 577, 577-578
  ondas en, 483, 485, *485*
  punto de hielo de, 571, 572
  punto de vapor, 571, 572
  punto triple, **572**
  rapidez del sonido en, 512*t*
  sobrecalentamiento, **600**
  subenfriamiento, **599**-600
Aire
  coeficiente de expansión promedio, 575*t*
  conductividad térmica, 609*t*
  densidad, 419*t*
  rapidez del sonido en, 511-512, 512*t*
Aire, acondicionadores de, 656
Aislado, sistema
  cantidad de movimiento angular en, 345-350
  conservación de energía en, 215-222
  definición de, 212
  energía interna de, 604
Aislado, modelo de sistema
  estrategias para resolución de problemas de, 217-218
  versión cantidad de movimiento, 250-252, **251**, 273
  versión cantidad de movimiento angular, 345-350, **347**
  versión energía, 215-222, **217**
Aislado, objeto, 114
Aisladores térmicos, 609
Aislamiento de casa, 611-612, 611*t*
Alcohol
  calor específico, 594*t*
  calores latentes de fusión y vaporización, 598*t*
  coeficiente de expansión promedio, 575*t*
  rapidez del sonido en, 512*t*
Álgebra, repaso de, A-5–A-10
Altitud
  y aceleración de caída libre, 391-392, 391*t*
  y presión atmosférica, 419
Altura (*h*) máxima del proyectil, *85*, 85-87
Aluminio (Al)
  calor específico, 594*t*
  calores latentes de fusión y vaporización, 598*t*
  coeficiente de expansión promedio, 575*t*
  conductividad térmica, 609t
  densidad, 6
  rapidez del sonido en, 512*t*
Amortiguada, oscilación, *468*, **468**-469, *469*
Amortiguado, oscilador, **468**
Amortiguamiento, coeficiente de (*b*), 468
Ampere (A), 3
Amplitud (A)
  de movimiento armónico simple, **452**-453, *453*, 455, **456**
  de onda, *487*, **488**, **491**
  de onda estacionaria, 539
  de oscilación amortiguada, 469, *469*, 470, *470*
  de oscilador impulsado, 470, *470*
Amplitud de presión ($\Delta P_{máx}$), **509**-510, *510*, 512, 514
Análisis de modelos, **28**
  modelo de partícula, **21**-22, 267, 272
  modelo del sistema, 178
  objeto rígido bajo aceleración angular constante, 296-298, **297**
  objeto rígido bajo momento de torsión neto, 302-307, **304**-**305**
  objeto rígido en equilibrio, 363-365, **364**
  onda viajera, *487*, 487-**491**
  ondas bajo condiciones frontera, *541*, 541-545, *542*, **543**
  ondas en interferencia, 534-538, *535*, **537**
  partícula bajo aceleración constante, *36*, 36-40, **38**
  partícula bajo rapidez constante, 30-**31**
  partícula bajo una fuerza neta, 121, *121*, **122**, 123-130
  partícula bajo velocidad constante, 28-31, *29*, **30**
  partícula en equilibrio, 120-121, *121*, **122**-123
  partícula en movimiento armónico simple, 452-458, **456**
  partícula en movimiento circular uniforme, *91*, 91-94, **93**, 152-156
  partícula en un campo gravitacional, 392-394, **393**-**394**
  selección de, 29, 121

sistema aislado
estrategias para resolución de problemas para, 217-218
versión cantidad de movimiento, 250-252, **251**, 273
versión cantidad de movimiento angular, 345-350, **347**
versión energía, 215-222, **217**
sistema no aislado
estrategias para resolución de problemas para, 217-218
versión cantidad de movimiento, 252-256, **255**, 273
versión cantidad de movimiento angular, 338-342, *339*, **341**
versión energía, 212-215, **214**-**215**, 313-314
Análisis de problemas, 46, 47. *Vea también* Estrategias para resolución de problemas
Análisis dimensional, 7-9
Andrómeda, galaxia, *406,* 406-407
Angular, aceleración (α)
instantánea (α), **295**-296, 298, 314*t*
promedio (α_{prom}), **295**, 300
y momento de torsión, 302-307
Angular, desplazamiento ($\Delta\theta$), **294**, *294*
Angular, frecuencia *(ω)*
de onda, **488**, **491**
de onda sonora, 509
del péndulo simple, 465
en movimiento armónico simple, **453**, 454, 455, **456**, 462-463
Angular, número de onda. *Vea* Número de onda
Angular, posición (θ), **294**, *294,* 296-297, 296*t*
Angular, rapidez (ω), 92-93, 94, 294-295, 296-297, 296*t,* 299, 314*t*
contra frecuencia angular, 462
instantánea (ω), **295**
promedio (ω_{prom}), **294**
Angular, velocidad, 295-296, *296,* 298, *298*
Ángulo de fase inicial. *Vea* Constante de fase
Ángulo(s)
aproximación de ángulo pequeño, **465,** 465*t*
conversión a/de coordenadas polares, 60-61
conversión a/de radianes, 294
igualdad de, A-10
Antiderivada. *Vea* Integración
Antilogaritmo, **A-9**
Antinodos, *539,* **539**-540, *540,* 541
desplazamiento, **546**, *547,* 550
presión, 546
Apogeo, 396
Aproximación ángulo pequeño, **465**, 465*t*
Aproximación de impulso, **254**-255
Área
bajo la curva, 43-44, *44*
como cantidad derivada, 5
de formas geométricas, A-10*t*
unidades de, 8*t*
Aristóteles, 40
Armónicos, **542**-543, *542, 547,* 548, *553, 554*
Arquímedes, *424,* 426
Arrastre, **434**, *434. Vea también* Resistencia del aire
Arrastre del aire. *Vea* Resistencia del aire
Arrastre, coeficiente de (D), 164, 167
Arriba, quark (t), 7
Astronomía y astrofísica. *Vea también* Gravitación; Luna; Planeta(s); Movimiento planetario; Estrellas; Sol
efecto Doppler en, 520
historia de, 394-395
torbellino de galaxias, *388,* 406
Atmósfera (de planetas), rapideces de escape y, 405
Atmósfera (unidad de presión), 423
Atomizadores, 434, *434*
Átomo(s)
cuantización de la energía en. *Vea* Energía, niveles de, cuantización de
etimología de, 6
expansión térmica y, 574
fuerzas de enlace, modelado de, 460, *460*
modelos, 627
Bohr (semiclásico de), 627
cuántico, 627
historia de, 6-7
potencial, energía de, en moléculas, 201, *201*
Atwood, máquina de, 128, *128,* 315-316, *316*
Audibles, ondas sonoras, 507
Audición
batimiento, 550-552, **551**, *551*
daño sonoro a, 515
efecto Doppler, *517,* **517**-521, *518*, *519*
frecuencia y, 516-517, *517*
música *contra* ruido, 550, 553
nivel del sonido, en decibeles, **515**-516, 515*t*
sonoridad, 516-517, *517*
umbral de audición, 514, 515, 516, *517*
umbral de dolor, 514, 515, 516-517, *517*
Automóviles
aceleración tangencial y radial, *95,* 95-96
bolsas de aire en, *254*
carreras de dragsters, *21*
"centrífuga", fuerza en las curvas, 159, *159*
colisiones, *247, 255,* 255-256, 261, 265-266, *266*
distancia de frenado, 225-226
elevadores de automóviles, *420,* 420-421
energía cinética de, 189*t*
frenos hidráulicos, 421
medios de propulsión, 277
motor de, 654, 655
presión de la llanta, 629
propulsado con pila de combustible, *1*
rapidez máxima en curva, *153,* 153-155, *154*
vibración de la suspensión en, 457-458
y fricción de rodamiento, 318
Aviones
aceleración en aterrizaje en portaviones, 38-39, 46-47
alas de, *434,* 434-435
estampido sónico, 522
presión de la cabina, 419
Azufre (S)
calores latentes de fusión y vaporización, 598*t*

Balanza de resorte
medición de fuerza con, 112-113, *113*
medición de peso con, 126-127, *127*
Barométrica, presión (P_0), 423
Barómetro, 423, *423*
Barras, ondas estacionarias en, 550, *550*
Base de logaritmos, **A-9**
Base *e, A-8*
Batimiento, 550-552, **551**, *551*
Bernoulli, Daniel, 430, *430*
Bernoulli, ecuación de, 430-433, **431**
Bernoulli, efecto de, 431, 434
Bimetálica, tira, 575, *575*
Bocinas, interferencia en, 537-538, *538*
Boltzmann, constante de (k_B), **579**, 670
Boltzmann, ley de distribución, **639**
Boltzmann, Ludwig, *640,* 670
Bombas térmicas, **656**-659, *657,* 661, 663
Bote, onda de proa de, 522, *522*
Brahe, Tycho, 394-395
Brazo de momento (d), **301**, *301*
Brazo de palanca. *Vea* Brazo de momento
Brown, Robert, 567
Btu. *Vea* Unidad térmica británica
Bucle, de onda estacionaria, 542
Busch, Kyle, *150*

Caballo de fuerza (hp), **232**
Caída libre, **40**-43
conservación de la energía mecánica en, 216, *216,* 218, *218*
fuerza gravitacional y, 41-43, 391-392, 391*t*
fuerzas resistivas en, 161-167
y movimiento de proyectiles, 84-91, *85*
Caída libre, aceleración de, 41-43
medición de, 465
Calcita, expansión térmica en, 574
Cálculo
derivadas, 26, *A-14,* **A-14**, A-14*t*
de la velocidad con respecto al tiempo, 32
del producto vectorial, 336
parcial, 490
propiedades, A-14
reglas para, 34-35
segunda, A-14
segunda, de posición con respecto al tiempo, 33
diferencial, 163, A-13–A-16
historia de, 25
integral, 43-45, *44,* A-16-A-19
integral definida, 44, *A-17,* A-17, A-19*t*
integral indefinida, **A-16**, A-18*t*
Cálculos de servilleta, 11
Cálculos, estimación en, 10-11
Calentadores de manos, comerciales, 600
Calidad (timbre), 553
Calor (Q), **591**. *Vea también* Conducción térmica
como transferencia de energía, *212,* 213, **608**
contra energía interna y temperatura, 591
en procesos termodinámicos, 602-603, *603*

entropía y, 671-676
equivalente mecánico del, *592*, **592**-593
específico (c), 593-597, **594**, 594*t*
historia del concepto, 591-592
latente (L), **597**-601
unidades de, 591-592
Calor específico (c), 593-597, **594**, 594*t*. *Vea también* Calor específico molar
Calor específico molar
a presión constante (C_p), **632**-634, 635-637
a volumen constante (C_V), **632**-634, 635-637, *636*
componentes rotacional y vibracional de las moléculas, 634, *635*, 635-637, *636*
de gas ideal, 631-634, **632**
de gases complejos, 635-637, *636*
de gases reales, 633*t*
razón de (γ), 633*t*, 634
Calor latente (L), **597**-601
Calor latente de condensación, 598
Calor latente de fusión (L_f), **598**, 598*t*
Calor latente de solidificación, 598
Calor latente de vaporización (L_v), **598**, 598*t*
Caloría (cal), **591**-592
Caloría (caloría en alimentos), 592
Calórico, 591
Calorimetría, 595, **595**-596
Calorímetro, **595**, 595
Cambio de fase, 593, **597**-600, *599*
Cambio en, símbolo para (Δ), 23
Campo de fuerzas, 112, *112*
Campo gravitacional, **392**-394, *393*
Canal, de onda, **487**, *487*
Candela (cd), 3
Cantidad de movimiento, 249
Cantidad de movimiento ($\vec{\mathbf{p}}$). *Vea* Cantidad de movimiento angular; Cantidad de movimiento lineal
Cantidad de movimiento angular ($\vec{\mathbf{L}}$), 314*t*, 335-352, **339**
conservación de, **345**-350, *346*, 352, 403
de objeto rígido, *342*, 342-345
de órbita planetaria, 396-397, 403
de sistema de partículas, 340-342
en sistemas aislados, 345-350
en sistemas no aislados, 338-342, *339*, **341**
momento de torsión y, 338-339, 340-341, 350-351, *351*
y elección de eje, 339
Cantidad de movimiento lineal ($\vec{\mathbf{p}}$), 247-250, **248**, 314*t*
conservación de, 250-251, **254**, **257**, 277
contra energía cinética, 249
de sistema de partículas, **272**
en sistemas aislados, 250-252
impulso y, *253*, **253**-254
y colisiones en dos dimensiones, *264*, 264-267
y colisiones en una dimensión, 256-264
y movimiento rotacional, 314, 320-321
Cantidad escalar, **23**, **61**
multiplicación de vector por, 64
Cantidad vectorial, **23**, **61**, *61*
dirección de, 23
fuerza como, 112-113, *113*
Cantidades
derivadas, 5-6, A-24*t*
fundamentales, 5
notación para, 7, 8, A-2*t*–A-3*t*
Cantidades derivadas, 5-6, A-24*t*
Cantidades fundamentales, 5
Capacidad calorífica (C), **593**-594
Carnot, ciclo de, **660**-664, *662*
Carnot, motor de, **660**-665, *661, 662*
cambio de entropía en, 673-674, 677-678
Carnot, Sadi, 660, *661*
Carrera de admisión, *665*, 665-666
Carrera de compresión, *665*, 666
Carreras de dragsters, *21*
Cartesiano, sistema coordenado, 59, *59*
conversión a/de coordenadas polares, 60-61
Categorización de problemas, 45, 46. *Vea también* Estrategias para resolución de problemas
Caucho
conductividad térmica, 609*t*
rapidez del sonido en, 512*t*
Cavendish, Henry, 389, *389*
Celsius, escala, **571**, 572
conversión a/de, 572, 573
Centrífuga, fuerza, 159, *159*, 160
Centrípeta, aceleración (a_c), 91-94, **92**, 95, 150-156, 298-299
Centro de gravedad, 269, *269*
de objeto rígido, *365*, 365-366, *366*
Centro de masa, **267**-272, *268, 269*
aceleración de, **272**
cantidad de movimiento lineal de, **272**
centro de gravedad y, *365*, 365-366
de objeto rodando, 316-317, *317*
movimiento de, 272-274
velocidad de, **272**
Cero
absoluto, **572**
como cifras significativas, 12
Cero absoluto, **572**
Champagne, botella de, abrir una, 579, *579*
Charles, ley de, 578
Cíclico, proceso, **604**
Cicloide, 316, *317*
Cifras significativas, **11**-13
Cinemática, 21
en dos dimensiones, 78-98
modelado de, *81*, 81-82, *82*
en una dimensión, 21-47
Cinemática, ecuaciones, **37**
en dos dimensiones, 79-82
en movimiento rotacional, 296-297, 296*t*, 297, 314*t*
en una dimensión, 36-38, 44-45
Cinturón de Kiuper, 397-398
Circular, movimiento. *Vea* Movimiento circular no uniforme; Movimiento circular uniforme
Círculo de referencia, 462-463, *463*
Círculos, A-10, **A-11**
Cobre (Cu)
calor específico, 594*t*
calores latentes de fusión y vaporización, 598*t*
coeficiente de expansión promedio, 575*t*
conductividad térmica, *609t*
densidad, 419*t*
rapidez del sonido en, 512*t*
Coeficiente de fricción cinética (μ_k), **131**-135, 132*t*, 230-231
Coeficiente de fricción estática (μ_s), **131**-133, 132*t*, 154
Coeficiente de rendimiento (COP), **657**-659, 663
Coeficiente(s), **A-7**
Cohetes
empuje, **278**
energía cinética de, 189*t*
explosión, movimiento de, 274-275
propulsión, 249, *277*, 277-278, 279
rapidez de escape de, 404-405, 405*t*
Colisiones, **256**, *256*
a nivel atómico, 256, *256*, 257, 266-267
elásticas, **257**-260, *258, 264*, 264-265, 266-267
en dos dimensiones, *264*, 264-267
estrategia para resolución de problemas de, 265
en una dimensión, **256**-264
estrategia para resolución de problemas de, 259
indirectas, *264*, 264-265, 266-267
inelásticas, **257**, 265-266, 266
perfectamente inelásticas, **257**, *257*, 261-262
Colisiones inelásticas, **257**, 265-266, *266*
perfectamente inelástica, **257**, *257*, 261-262
Colisiones perfectamente inelásticas, **257**, *257*, 261-262
Columnas de aire, ondas estacionarias en, 546-549, *547*
Cometa Halley, órbita de, 395, *396*
Componentes rectangulares. *Vea* Componentes, de vector
Componentes de vector, *65*, **65**-70
Compresibilidad, **375**
Compresión
como onda de, *508*, **509**
cuasiestática, **601**-602
de resorte, 229-230
Común, factor, A-6
Conceptualización de problemas, 45, 46. *Vea también* Estrategias para resolución de problemas
Concreto
coeficiente de expansión promedio, 575*t*
conductividad térmica, 609*t*
pretensado de, *375*, 375-376
Condensación, calor latente de, 598
Condición de movimiento de rodamiento puro, **317**
Condiciones frontera, ondas bajo. *Vea* Ondas estacionarias
Conducción. *Vea* Conducción térmica
Conducción térmica, *609*, **609**-611, *610*
aislamiento de casa, 611-612, 611*t*
entropía en, 674-675, 677
ley de, **609**-610
Conductividad térmica (k), **609**-611, 609*t*
Configuración de referencia, para la energía potencial, 193, 199

Conservación de la cantidad de movimiento
angular, **345**-350, *346,* 352, 403
lineal, 250-251, **254**, 257, 277
Conservación de la cantidad de movimiento angular, **345**-350, *346*, 352, 403
Conservación de la energía, 197, 211-233, **213**
en órbitas planetarias, 402-403
en sistemas aislados, 215-222
estrategias para la resolución de problemas, 217-218
fricción y, *196,* 196-197, 216-217, 222-231
historia del concepto, 590, *592*
mecánica, 198, **216**-217, 218, 221, 314
sistemas no aislados y, *212,* 212-215
y primera ley de la termodinámica, 603-604
Constante, aceleración
en movimiento de proyectil, 84-85, 88-89
movimiento en dos dimensiones con, 81-84
movimiento en una dimensión con, *36,* **36**-40
partícula bajo, análisis de modelo, *36,* 36-40, **38**
Constante de fase (ϕ), **453**, 455, **456**, 463, **489**
Constante de gravitación universal (G), **389**
Constante de tiempo (τ), 162, **163**-164, 166
Constante de torsión (κ), 467
Constante de una fuerza (constante de un resorte, *k*), 185-186, *187,* 187-188, 220-221, 456
Constante del resorte (constante de fuerza, *k*), 185-186, *187*, 187-188, 220-221, 456
Constante universal de los gases (R), **579**, 633
Constructiva, interferencia, **534**, *535,* 536, *536,* 537
Contacto, fuerzas de, 112, *112,* 126
Contaminación de ruido, 515
Convección, 213, **612**-613, *613*
Convección forzada, 613
Convección natural, **612**-613
Conversión de unidades, A-1*t*–A-2*t*
Coordenadas polares (r, θ), 294
Coordenadas polares en el plano (r, θ). *Vea* Sistema de coordenadas polares
COP. *Vea* Coeficiente de rendimiento
Copérnico, Nicolás, 394
Coplanares, fuerzas, 364
Coriolis, fuerza de, 159-160, *160*
Corriente (I), unidades de, 3, 4, A-2*4t*
Cosecante (csc), A-ll, A-12*t*
Coseno (cos), A-ll–A-12, A-12*t*
Cotangente (cot), A-11, A-12*t*
Coulomb, fuerza de. *Vea* Eléctrica, fuerza
Cresta, de onda, **487**, *487*
Críticamente amortiguada, oscilación, **469**, *469*
Cuadrado perfecto, A-6
Cuantización
de frecuencia, 533, **541**, 542, 547, 548
de niveles de energía, 636-637, *637*
Cuasiestática compresión/expansión, **601**-602, 606
Cuerdas
ecuación lineal de onda para, 497-**498**
ondas de transmisión en, **494**-495, *495*
ondas estacionarias en, 538-545, *539, 542*
ondas sinusoidales en, *490*, 490-491
propagación de ondas en, *484*, 484-487, *485*
rapidez de ondas en, *491*, 491-494
reflexión de ondas en, **494**, *494, 495*
tensión en, 491, *491*, 543
transferencia de energía por ondas en, *495*, 495-497
Cuerpo negro, **613**

Dalton, John, *592*
Decibeles (dB), **515**-516, *515t*
Deformables, sistemas
conservación de la cantidad de movimiento angular en, 345-346, *346*
movimiento de, 275-277
propiedades elásticas de los sólidos, 373-376
trabajo en, 179
y trabajo-energía cinética, teorema, 189
Deformación, **373**
de corte, **374**
esfuerzo y, 373
por tensión, **373**, *374*
volumétrica, **375**
Deformación de corte, **374**
Deformación volumétrica, **375**
Delta (Δ), 23
Demócrito, 6
Densidad (ρ), **6**
de sustancias comunes, 419*t*
medición de, 426, 426*f*
temperatura y, 419, 577, *577*
Densidad de masa superficial (σ), 308
Densidad de masa volumétrica (ρ), 108
Densidad de número ($n_V(E)$), **639**
Densidad lineal de masa (λ), 308
Deportes
acrobáticos, 346
arquería, *251*, 251-252, 277
basquetbol, 23, *23*
béisbol, 166-167, 434
boliche, 343
buceo, 346
carrera de motocicletas, *335*
carreras, 29-30
carreras de dragsters, *21*
esquí, 90-91
excursionismo, 69-70
gasing, *293*
golf, 434, *434*
hockey, *116*, 116-117, *133*, 133-134
NASCAR, *150*
natación, 421-422
paracaidismo, 41
patinaje sobre hielo, 338, *338*, 339, 346, *346*
pool/billar, 257, 264, 390-391
remo, *111*
salto de longitud, 87
sube y baja, 344-345, 367-368
surfeo, 165, *165*
y movimiento de proyectiles, 85
Derivación, A-13-A-16. *Vea también* Derivadas
Derivadas, 26, *A-14,* **A-14**, A-14*t*
de la velocidad con respecto al tiempo, 32
del producto vectorial, 336
parcial, 490
propiedades, A-14
reglas para, 34-35
segunda, A-14
segunda, de posición con respecto al tiempo, 33
Derivadas parciales, 490
Desaceleración, **33**
Desplazamiento (Δx), **23**, *23,* 43-44, *44*
angular ($\Delta\theta$), **294**, *294*
y trabajo, 179
Desplazamiento, amplitud ($s_{máx}$), **509**-510, *510*, 512, 513, 514
Desplazamiento, antinodos, **546**, *547,* 550
Desplazamiento, nodo, **546**, *547,* 550
Desplazamiento, vector, **79**, *79*
Destructiva, interferencia, **534**, *535,* 536, *536,* 537
Dewar, botella de, 614, *614*
Día solar medio, 5
Diagrama de cuerpo libre, **119**, *119*
Diagrama de fuerzas, **119**, *119*
Diagrama *PV*, **602**, *602,* 604
Diagramas de energía, 199-200, *200*
Diagramas de movimiento, *35*, 35-36
Diagramas de niveles de energía, **636**-637, *637*
Diapasón, 549, *549*, 553, *553*, *554*
Diesel, motores, 638-639, 655, 666-667
Diferencia de trayectorias, 537-538
Diferencial, cálculo, A-13–A-16
Diferencial, ecuación, 163
Diferenciales perfectas, A-18–A-19
Diferencias de cuadrados, A-6
Dimensión, **7**
Dinámica. *Vea también* Leyes de movimiento
fluidos, 427-434
rotacional, 335
Dinámica de fluidos, 427-434
Discos compactos (CD), almacenaje de información y recuperación, 299-300
Dispersión de energía y entropía, 672
Dispositivos mecánicos
acondicionadores de aire, 656
bombas térmicas, **656**-659, *657*, 661, 663
refrigeradores, **656**-659, *657*
Distancia (d), **23**, *23,* A-10
División
cifras significativas en, 12
de fracciones, A-6
de potencias, A-6
e incertidumbre, A-20
en notación científica, A-5
División, cifras significativas en, 12
Dolor, umbral del, 514, 515, 516-517, *517*

e (número de Euler), 163, A-9
Ecuación(es). *Vea también* Ecuaciones cinemáticas
análisis dimensional, **8**-9
Bernoulli ecuación de, 430-433, **431**
coeficientes de, **A-7**
conservación de la energía, ecuación de, **213**-215, 275
cuadrática, **A-7**
de estado para gas ideal, **578**-579
diferencial, 163

ecuación de continuidad para fluidos, *428*, **428**-430
ecuación de onda lineal, 497-**498**
ecuaciones de transformación de Galileo, **97**
en forma algebraica, solución de, 13
lineal, A-8–A-9
para movimiento rotacional, 314*t*
para movimiento traslacional, 314*t*
unidades, inclusión de, 10
Ecuación de conservación de energía, **213**-215, 275
Ecuación de continuidad para fluidos, *428,* **428**-430
Ecuación de estado para gas ideal, **578**-579
Ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento, **254**
Ecuación lineal de onda, 497-**498**
Ecuaciones cuadráticas, A-7
Ecuaciones de transformación de Galileo, **97**
Ecuaciones de transformación de velocidad, de Galileo, **97**
Efecto Doppler, *517,* **517**-521, *518, 519*
Eficiencia. *Vea* Eficiencia térmica (*e*)
Eficiencia térmica (*e*), **655**-656
de Carnot, motor, 660-664
de ciclo de Otto, 666, 667
de motor de vapor, 664-665
de motores diesel, 667
Einstein, Albert
en movimiento browniano, 567
y la teoría especial de la relatividad, 2, 3
Eje
de rotación, 295, 301, 339
mayor, de elipse, **395**
menor, de elipse, **395**
semimayor, de elipse, **395**, *395*
semimenor, de elipse, **395**, *395*
Eje mayor, de elipse, **395**
Eje menor, de elipse, **395**
Eje semimayor, de elipse, **395**, *395*
Eje semimenor, de elipse, **395**, *395*
Elástica, energía potencial (U_s), **194**-196, *195*
Elásticas, colisiones, **257**-260, *258, 264,* 264-265, 266-267
Elásticas, propiedades de los sólidos, 373-376
Elástico, límite, **373**-374, *374*
Elástico, módulo, **373**-375, 374*t*
Elección, de microestados, 668-671
Eléctrica, fuerza (fuerza de Coulomb), como campo de fuerzas, 112
Eléctrica, transmisión, como transferencia de energía, *212,* 213
Eléctrica, unidades de potencia, 232
Electromagnética, radiación, como transferencia de energía, *212,* 213, 613
Electromagnéticas, ejemplos de ondas, 483
libres de medio de propagación, 483
Electromagnetismo
como fuerza fundamental, 112
como subdisciplina física, 1, 2-3
Electrón volt (eV), 639
Electrón(es)
descubrimiento de, 7
masa de, *5t*
Elevar, **434**, 434
Elipse, 395, *395,* **A-10**, *A-10*
Elípticas, órbitas, 395-396, *396*, 403
Emisividad (*e*), **613**
Empuje, **278**
En espiral, galaxia, *388*, 406
En fase, 536, *536*
Encanto, quark (c), 7
Energía (*E*), 177-201. *Vea también* Conservación de la energía; Energía interna; Energía cinética; Energía potencial
cambio de fase y, 597-600, *599*
como moneda de la naturaleza, 214
cuantización de. *Vea* Niveles de energía; Mecánica cuántica
definición de, 177
dispersión y entropía, 672
en movimiento armónico simple, 458-461, *459, 460*
en ondas mecánicas, *212,* 213, 484, *495,* 495-497
entropía y, 672
mecánica (E_{mec}), **198**, 216
conservación de, 198, **216**-217, 218, 221, 314
en movimiento armónico simple, 458-461, *459, 460*
fuerzas no conservativas y, 227-231
total, en órbitas, 403
transformación en energía interna, *196,* 196-197, 216-217, 222-224, 227-231
mecanismo de transferencia para, *212,* 212-213, 569, 594, *603,* 603-604
en procesos térmicos, 608-614
mecanismo de transformación para, 197
movimiento planetario y de satélites, 402-407
ondas como transferencia de, 484
teorema de equiparación para, **630**, 635-637
trabajo como transferencia de, 180, 190, 212, *212*
unidades de, 232, A-2*t*
y movimiento de rodamiento, 318-321
y movimiento rotacional, 312-316, 318-321
Energía cinética (*K*), **188**-191, 314*t*
contra cantidad de movimiento, 249
de objetos seleccionados, 189*t*
en colisiones elásticas, 257
en colisiones inelásticas, 257
en movimiento armónico simple, 458-459, *459, 460*
en movimiento de rodamiento, 317-318, *318*
en ondas mecánicas, 495-496
molecular
y presión, 627-629
y temperatura, 630-631
movimiento planetario y, 402-403
rotacional (K_R), *311,* **311**-312, 314, 314*t*
y trabajo. *Vea* Teorema trabajo-energía cinética
Energía interna (E_{int}), *196,* **196**-197, **591**
cambio de fase y, 597-600, *599*
como variable de estado, 601, 604
contra calor y temperatura, 591
de gas ideal, 630, 632
de sistema de moléculas, *635,* 635-637, *636, 637*
de sistemas aislados, 604
transformación de energía mecánica en, *196,* 196-197, 216-217, 222-224, 227-231
y temperatura, 594, 630, 632
Energía mecánica (E_{mec}), **198**, 216
conservación de, 198, **216**-217, 218, 221, 314
en movimiento armónico simple, 458-461, *459, 460*
fuerzas no conservativas y, 227-231
total, en órbitas, 403
transformación en energía interna, *196,* 196-197, 216-217, 222-224, 227-231
Energía potencial, 191-196, **192**, *192*
fuerzas conservativas y, 197, 198-199
elástica (U_s), **194**-196, *195*
diagramas de energía y, 199-200, *200*
equilibrio y, *200,* 200-201
gravitacional (U_g), **192**-194, *400,* 400-402, *401*
Lennard-Jones, función, 201, *201*
en ondas mecánicas, 496
configuración de referencia para, 193, 199
en movimiento armónico simple, 458-459, *459, 460*
Energía potencial gravitacional (U_g) **192**-194, *400*, 400-402, *401*
Energía potencial, función (*U*), **198**-199
Energía, depósito de, 602-603
Energía, dispersión de y entropía, 672
Energía, niveles de
cuantización de, 636-637, *637*
excitación térmica y, *639,* 639-641
Enlace, energía de, 401, 591
Enlace, fuerzas de, atómico, modelado de, 460, *460*
Entropía (*S*), 667-671, **669**
cambio en, para sistemas termodinámicos, 671-678
cambio en, y dispersión de energía, 672
como variable de estado, 667, 676
conducción térmica y, 674-675, 677
elección de microestados, 668-671
en expansión adiabática libre, 672, 674, *674,* 675-676, 677
en procesos reversible e irreversible, 672-678
falta de información, de microestados, 668-671
historia del concepto, 667-668
incertidumbre de microestados, 668-671
motor de Carnot y, 673-674, 677-678
para sistemas termodinámicos, 670-671
probabilidad de microestados, 668-671
y segunda ley de la termodinámica, 676-678
Enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica, **657**, 676
Envolvente
de curva oscilatoria, 469, *469*
de frente de onda de choque, 522, 522
Equilibrio, 363-372
estable, **200**, *200*
estático, condiciones para, 364-365

estrategias para la resolución de problemas para, 366-367
inestable, **200**, *200*
neutro, **200**
objeto rígido en modelo de equilibrio, 364-365, 366-372
partícula en modelo de equilibrio, 120-121, *121*, **122**-123
rotacional, **364**-365
y energía potencial, 199-201, *200*
Equilibrio estable, **200**, *200*
Equilibrio estático
condiciones para, 364-365
ejemplos de, 366-372
Equilibrio inestable, **200**, *200*
Equilibrio neutro, **200**
Equilibrio, posición de, **451**, *451*
Equipartición de energía, teorema de, **630**, 635-637
Equivalente mecánico del calor, *592*, **592**-593
Eris, 398
Escala Fahrenheit, **572**, 573
Esfuerzo, **373**
de corte, **374**, *374*
de tensión, **373**, 374
deformación y, 373
volumétrico, **375**, 375
Esfuerzo de corte, **374**, *374*
Esfuerzo volumétrico, **375**, 315, 376
Espacial, interferencia, 551
Estación Espacial Internacional, peso de, 394
Estacionario (laminar), flujo, *427*, **427**-428, *428*
Estado base, **637**
Estado, variables, **601**
Estampido sónico, 522
Estándares de medición, 3-6, *5*
Estimación, 10-11
Estrategia general para la resolución de problemas, 45-47
Estrategias para la resolución de problemas. *Vea también* Análisis de modelos
análisis dimensional, 8-9
construcción del modelo, 6-7
diagrama de cuerpo libre, **119**, *119*
diagrama de fuerza, **119**, *119*
estimación, 10-11
general, 45-47
leyes de Newton, aplicación de las, 121-122
movimiento de proyectiles, 87
para colisiones en dos dimensiones, 265
para colisiones en una dimensión, 259
para el modelo de sistema no aislado, 217-218
para modelo de sistema aislado, 217-218
para objeto rígido en equilibrio, 366-367
representaciones alternativas, *22*, 22-23
unidades, inclusión de, 9
valores razonables, comprobación, 4
Estrella enana blanca, 405
Estrellas
enana blanca, 405
neutrones, 347, 405-406
supernovas, 347, 405-406
Evaporación, 642
Evento horizonte, **406**, *406*
Excentricidad, de elipse (e), **395**-396, *396*
Expansión adiabática libre, **604**-605
como proceso irreversible, *659*, 659-660
entropía en, 672, 674, *674*, 675-676, 677
Expansión isotérmica de gas ideal, 606, *606*
Expansión térmica, *568*, *573*, **573**-578, *575*, 575*t*
Expansión térmica de juntas, 573, *573*
Expansión volumétrica, coeficiente promedio de (β), **574**-575, 575*t*
Exponentes, **A-4**
e incertidumbre, A-20
reglas de, A-6*t*
Expresión de corrimiento Doppler, general, 519
Extraño, quark (s), 7

Factorización, A-7
Fase de escape, *665*, 666
Fase del movimiento armónico simple, **453**
Ferrocarril
expansión térmica del riel, 576
fuerzas entre carros, 123-124
máquina de locomotora, 654, *654*
Filósofos griegos, sobre la naturaleza de la materia, 6
Finalización de la solución de un problema, 46-47. *Vea también* Estrategias para la resolución de problemas
Física. *Vea también* Astronomía y astrofísica
clásica, 1, 2-3
historia de, 2-3
moderna, 1, 3
objetivos de, 2
subdisciplinas de, 1
Física clásica, 1, 2-3
Física moderna, 1, 3
Fluido incompresible, 427
Fluido no viscoso, 427
Fluido(s), **417**. *Vea también* Gas(es); Líquido(s)
ecuación de continuidad para, *428*, **428**-430
modelo de flujo ideal, **427**-428, *428*
Flujo
estacionario (laminar), *427*, **427**-428, *428*
modelo de flujo de un fluido ideal, **427**-428, *428*
turbulento, **427**, *427*
Flujo de volumen (caudal), 428
Flujo volumétrico (razón de flujo), 428
Foco de la elipse, **395**, *395*
Fondo, quark (b), 7
Forma de onda. *Vea* Función de onda
Fotografía estroboscópica, 35, *35*
Fraccional, incertidumbre, **A-20**
Fracciones, multiplicación, división y suma, A-6
Frecuencia (f)
angular (ω)
de onda, **488**, **491**
de onda sonora, 509
de péndulo simple, 465
en movimiento armónico simple, **453**, 454, 455, **456**, 462-463
contra tono, 553
cuantización de, 533, **541**, 542, 547, 548
de modos normales, 542
de movimiento armónico simple, **454**, **456**
de onda, **487**-488, **491**
de onda sonora y audición, 516-517, *517*
fundamental (f_1), **542**-543
natural (ω_0), **468**, 542, 546, 547-548
resonancia (ω_0), **470**, *470*, **546**, 548
Frecuencia de batimiento ($f_{\text{batimiento}}$), 551-**552**
Frecuencia de precesión (ω_p), 351-**352**
Frecuencia fundamental (f_1), **542**-543
Frecuencia natural (ω_0), **468**, 542, 546, 547-548
Frente de onda, **513**, *513*
Fricción, *130*, **130**-135. *Vea también* Viscosidad
a nivel atómico, 131, 222, *222*
cinética, *130*, **131**, *222*, 222-227
coeficiente de fricción cinética (μ_k), **131**-135, 132*t*, 230-231
coeficiente de fricción estática (μ_s), **131**-133, 132*t*, 154
como fuerza no conservativa, *196*, 196-197, 222-227
dirección de la fuerza, 131
estático, *130*, 130-**131**
llantas de automóvil y, 153-154
rodamiento, 318
trabajo hecho por, 196-197, 198, *198*, 222
y energía mecánica, 227-231
y transformación de la energía mecánica en interna, *196*, 196-197, 216-217, 222-224, 227-231
Fricción cinética, *130*, **131**, *222*, 222-227
coeficiente de fricción cinética, **131**-135, 132*t*, 230-231
Fricción de rodamiento, 318
Fricción estática, *130*, 130-**131**
coeficiente de fricción estática, **131**-133, 132*t*
Frontera del sistema, **178**
Fuente puntual de ondas sonoras, 513, *513*, 514-515
Fuera de fase, 536, *536*
Fuerza aplicada ($\vec{\mathbf{F}}_{\text{apli}}$), 186-187
Fuerza boyante ($\vec{\mathbf{B}}$), 423-427, **424**, *424*, *425*
Fuerza de acción, 119, *119*
Fuerza débil, como fuerza fundamental, 112
Fuerza de resorte (F_s), 185
Fuerza fuerte, como fuerza fundamental, 112
Fuerza gravitacional ($\vec{\mathbf{F}}_g$), **117**-118, 389-391
altitud y, 391-392, 391*t*
como campo de fuerzas, 112, 390
como fuerza conservativa, 197
como fuerza fundamental, 112
descubrimiento de, 388, 389
distancia y, 389-390
en objeto rígido, *365*, 365-366
fuerza normal y, 119, *119*
hoyos negros, 405-**406**, *406*
trabajo hecho por, 197, 215
y aceleración de caída libre, 41-43, 391-392, 391*t*
y forma de órbita, 396
y movimiento de proyectiles, 84-91
y peso, **117**-118
y rapidez orbital, *406*, 406-407, *407*
Fuerza impulsiva, 254
Fuerza neta ($\Sigma\vec{\mathbf{F}}$), **116**, 314*t*
cantidad de movimiento lineal y, 252-253

en sistemas de partículas, 272
modelo de partícula bajo una fuerza neta, 121, *121*, **122**, 123-130
promediada en el tiempo, *253*, 253-254
Fuerza neta promediada en el tiempo, *253*, 253-254
Fuerza normal ($\vec{\mathbf{n}}$), **119**, *119*, 121, *121*
y fricción, 131
y trabajo, 180, *180*
Fuerza restauradora, 186, **451**
Fuerza resultante. *Vea* Fuerza neta
Fuerza total. *Vea* Fuerza neta
Fuerza(s) $\vec{\mathbf{F}}$, **111**-113, *112*. *Vea también* Fricción; Fuerzas fundamentales; Fuerza gravitacional; Fuerza magnética; Fuerza normal; Fuerza fuerte; Fuerza débil;
acción, 119, *119*
aplicada ($\vec{\mathbf{F}}_{apl}$), 186-187
boyante ($\vec{\mathbf{B}}$), 423-427, **424**, *424, 425*
campo de, 112, *112*
centrífuga, 159, *159,* 160
como cantidad vectorial, 112-113, *113*
conservativa, **197**-198
trabajo hecho por, 197-198, 198-199
y energía potencial, 197, 198-199
contacto, 112, *112,* 126
contra momento de torsión, 301
coplanar, 364
de Coriolis, 159-160, *160*
de fricción cinética ($\vec{\mathbf{f}}_k$), 130, **131**
de fricción estática ($\vec{\mathbf{f}}_s$), *130*, 130-**131**
en movimiento armónico simple, 451, *451*
en movimiento circular uniforme, *151*, 151-156, 158, *157*
ficticia, 158-161, **159**, *159, 160, 161*
fuerza del resorte (F_s), 185
fuerzas de enlace atómico, 460, *460*
línea de acción de, *300*, **301**
medición de, 112-113, *113*
neta ($\Sigma\vec{\mathbf{F}}$), **116**, 314*t*
cantidad de movimiento y, 252-253
modelo de partícula bajo una fuerza neta, 121, *121*, **122**, 123-130
promediada en el tiempo, *253*, 253-254
sobre un sistema de partículas, 272
no conservativa, **198**
fricción como, *196*, 196-197, 222-227
trabajo hecho por, 198, *198*
y energía mecánica, 227-231
reacción, 119, 119
restauración, 186, **451**
trabajo hecho por
fuerza conservativa, 197-198, 198-199
fuerza constante, 178-181, *179*, *180*, 193
fuerza gravitacional, 197, 215
fuerza no conservativa, 198, *198*
fuerza variable, 183-188, *184*
unidades de, 116, A-1*t*
viscosa, *162*, 162-164, 427
y aceleración, 32-33, 114, 115-117
y energía potencial, 199
y presión, 418
Fuerzas conservativas, **197**-198
trabajo hecho por, 197-198, 198-199
y energía potencial, 197, 198-199
Fuerzas de reacción, 119, *119*
Fuerzas ficticias, 158-161, **159**, *159, 160, 161*
Fuerzas fundamentales, 112
Fuerzas no conservativas, **198**
fricción como, *196*, 196-197, 222-227
trabajo hecho por, 198, *198*
y energía mecánica, 227-231
Fuerzas resistivas, 161-167, **162**. *Vea también* Fricción
dirección de, 162
proporcional a la rapidez del objeto al cuadrado, 164-167
proporcional a la velocidad del objeto, *162*, 162-164
Función de distribución, 639
Función de onda, **485**-486
para onda sinusoidal, 488-489, 491
Funciones, **A-14**
Fundamental, **542**-543
Fusión, calor latente de, **598**, *598t*
Fusión y entropía, 673

Galaxia, cúmulos, 407
Galilei, Galileo, 40, *40,* 114
γ (gamma), 633*t*, 634, 666
Gas ideal, **578**-580
calor específico molar de, 631-634, **632**
descripción macroscópica, 578-580
ecuación de estado para, **578-579**
energía interna de, 630, 632
expansión isotérmica de, 606, *606*
modelo molecular de, *627,* 627-631
proceso adiabático para, 637-639, *638*
propiedades de, 627
Gas(es). *Vea también* Gas ideal; Calor específico molar; Presión
calor específico, *594t*
características de, 417
conducción térmica en, *609t*
energía interna de, 635-637, *636*
entropía y, 672, 674, *674*, 675-676, 677
expansión adiabática libre, **604**-605
como proceso irreversible, *659*, 659-660
entropía en, 672, 674, *674*, 675-676, 677
PV, diagramas, **602**, *602*
rapidez de moléculas en, 639-643, *641*
teoría cinética de, **627**-643
trabajo y calor en procesos termodinámicos, *601,* 601-603, *602, 603*
y primera ley de la termodinámica, **603**-607
Gasolina, motores, *665,* 665-666, *666*
Gasolina, coeficiente de expansión promedio, 575*t*
Gauss, integral de probabilidad de, **A-19*t***
Geocéntrico, modelo, 394
Geometría, A-10–A-ll
Geométricas, formas, área y volumen de, A-10*t*
Giroscopios, 350-352, *351, 352*
Gordon, Jeff, *150*
Grados de libertad de una molécula, y energía de la molécula, 630, 635-636
Grados, conversión a/de radianes, 294
Gráfica, velocidad-tiempo,
pendiente de recta entre dos puntos de, 31, *31*
pendiente de recta tangente a, *31*, 32, *32*, 33, *33*
relación con la gráfica aceleración-tiempo, 33, *33*
relación con la gráfica posición-tiempo, 33, *33*
Gráficas de barras de energía, *195,* **196**, *196,* 231, *231*
Gran colisionador de hadrones, 407
Gravedad, centro de, 269, *269*
de objeto rígido, *365,* 365-366, *366*
Gravitación, 388-407. *Vea también* Leyes de Kepler; Movimiento planetario
ley de Newton de, **389**-391, 392
trabajo de Newton en, 388, 389, 392
Gravitación universal. *Vea* Constante de gravitación universal (*G*), **389**

Halley, cometa, órbita del, 395, *396*
Haumea, 398
Helio (He)
calor específico molar, 633*t*
calores latentes de fusión y vaporización, 598*t*
coeficiente de expansión promedio, 575*t*
conductividad térmica, *609t*
densidad, 419*t*
rapidez del sonido en, 512*t*
Heliocéntrico, modelo, 394
Hertz (Hz), **454**, **488**
Hidrodinámica (Bernoulli), *430*
Hidrógeno (H)
calor específico molar, 633*t*, 636, *636*
como combustible, 1
conductividad térmica, 609*t*
densidad, 419*t*
rapidez del sonido en, 512*t*
Hidrógeno, átomo(s)
Bohr (semiclásico), modelo de, 627
modelo cuántico de, 627
Hielo
calor específico, 594*t*
conductividad térmica, *609t*
densidad, 419*t*
Hierro (Fe)
calor específico, *594t*
conductividad térmica, 609*t*
densidad, 6, 419*t*
rapidez del sonido en, 512*t*
Hipérbola rectangular, A-11, *A-11*
Hoyos negros, 405-**406**, *406*
Hubble, telescopio espacial, *388*
Huygens, Christian, 466

Icebergs, 427, *427*
Impulso ($\vec{\mathbf{I}}$), *253,* **253**-254
Impulso angular-cantidad de movimiento angular, teorema, 341
Impulso-cantidad de movimiento, teorema
en sistemas deformables, 275
para impulso angular y cantidad de movimiento, 341
para partícula, **254**-255
para sistema de partículas, 273
y modelo para cantidad de movimiento de sistemas no aislados, 254

Incertidumbre absoluta, **A-20**
Incertidumbre, de microestados, 668-671
Incertidumbre, propagación de, **A-20**–A-21
Incógnitas, **A-5**
Indirectas, colisiones, *264*, 264-265, 266-267
Inercia, **114**. *Vea también* Momento de inercia
Información faltante, acerca de microestados, 668-671
Ingeniería mecánica. *Vea* Aviones; Automóviles; Puentes; Ferrocarriles; Satélites; Naves espaciales
Instantánea, potencia (*P*), **232**, 313
Instantánea, rapidez (*v*), **26**
Instantánea, rapidez (v_x), 25-27, **26**, *26*, **79**-80, *80*
  como función del tiempo, 81-82, *82*, 83
  de partícula bajo aceleración constante, 36, *36*, 37, 38, 44
Instantánea, aceleración ($\vec{\mathbf{a}}$), *31*, **32**-33, 34, **80**
  en movimiento circular uniforme, 92
Instantánea, aceleración angular (α), **295**-296, 298, 314*t*
  momento de torsión y, 302-307
Instantánea, rapidez angular (ω), **295**
Instrumentación. *Vea también* Relojes; Termómetros
  barómetros, 423, *423*
  calorímetros, **595**, *595*
  Dewar, botellas de, 614, *614*
  manómetro de tubo abierto, 423, *423*
  sismógrafos, 485
  tubos de Venturi, 432, *432*
Instrumentos musicales
  afinación de, 543, 552
  cuerda, 541-544, 548, 551-552
  percusión, 542, 550, *550*
  sintetizadores, 554
  sonidos característicos de, 553, *553*, *554*
  temperatura y, 548
  tubo de órganos, 546
  viento, 546-549, *547*, 553, *553*, *554*
Integración, 43-45, *44*, A-16–A-19
Integración parcial, **A-17–A-18**
Integral definida, 44, *A-17*, A-17, A-19*t*
Integral, cálculo, A-16–A-19
Integrales
  definida, 44, *A-16*, **A-16**–A-17, A-19*t*
  indefinida, **A-16**, A-18*t*
Integrales indefinidas, **A-16**, A-18*t*
Integrando, A-16
Intensidad
  de ondas sonoras, 512-517, **513**
  referencia (I_0), 515
Intensidad de referencia (I_0), 515
Intensidad luminosa, unidades de, 3, A-24*t*
Interferencia, **534**-538, *535*
  batimiento, 550-552, **551**, *551*
  constructiva, **534**, *535*, 536, *536*, 537
  destructiva, **534**, *535*, 536, *536*, 537
  espacial, 551
  ondas mecánicas, **534**-538, *535*, 550-552, *551*
  ondas sonoras, *536*, 536-538
  temporal, 550-552, *551*
Internacional, Comité de Pesos y Medidas, 572
Internacional, Estación Espacial, peso de la, 394
Internacional, Oficina de Pesos y Medidas, 4
Irreversibles, procesos, 653-654, **659**-660
  entropía en, 662-668
Irrotacional, flujo, 427
Isobárico, proceso, **605**, 607-608
Isoterma, 605, *606*, 632, *632*
Isotérmico, proceso, **605**
Isotrópico, material, 574
Isovolumétrico, proceso, **605**
Ixion, 398

Joule (J), **180**, 192, 592
Joule, James Prescott, 590, 592, *592*
Joules por segundo (J/s), 232
Juntas expandibles, 573, *573*
Júpiter
  datos planetarios, 398*t*
  órbita de, *406*
  rapidez de escape, 405*t*

KBO. *Vea* Objetos del cinturón de Kiuper
Kelvin (K), 3, 4, **572**
Kelvin-Planck, forma de la segunda ley de la termodinámica de, **655**, 657, 660, 677
Kelvin, escala, **572**, 572
  conversión a/de, 572
Kelvin, William Thomson, lord, *654*
Kepler, Johannes, 395, *395*
Kilogramo (kg), 3, **4**-5, 114, 117
Kilogramo estándar nacional, *5*
Kilowatt-hora (kWh), **232**
Kinesiología, 29

Laminar (estacionario) flujo, *427*, **427**-428, *428*
Latón
  calor específico, 594*t*
  coeficiente de expansión promedio, 575*t*
Lennard-Jones, función energía potencial de, 201, *201*, 459-460, *460*
Leucipo, 6
Ley asociativa de la suma, 63, *63*
Ley cero de la termodinámica, *569*, **569**-570
Ley conmutativa de la suma, para vectores, 62, 62
Ley de Boyle, 578
Ley de conducción térmica, **609**-610
Ley de conservación de cantidad del movimiento lineal, 277
Ley de cosenos, A-12
Ley de gas ideal, 578-**579**
Ley de Gay-Lussac, 578
Ley de Hooke, **185**, 187, 199, **451**, 456
Ley de inercia. *Vea* Primera ley del movimiento
Ley de inverso al cuadrado, **389**
Ley de la gravitación universal, **389**-391
Ley de la gravitación universal de Newton, **389**-391, 392
Ley de Pascal, **420**-421
Ley de senos, A-12
Ley de Stefan, **613**
Ley de Torricelli, 432-433
Ley distributiva de la multiplicación, **182**, 336
Leyes de Kepler, **395**-398
  primera, 395-396
  segunda, *396*, 396-397
  tercera, *397*, 397-398
Leyes de la termodinámica
  cero, *569*, **569**-570
  primera, **603**-604, 653
    aplicaciones, 604-608
  segunda, 653-654, 676-678
    enunciado de Clausius de, **657**, 676
    enunciado de entropía de, 676
    Kelvin-Planck, forma de, **655**, 657, 660, 677
Leyes del movimiento, 111-135
  aplicaciones de, 122-130
  en marcos de referencia no inerciales, 158-161, *159*, *160*
  historia de, 2
  primera, **113**-114
  segunda, **115**-117
    en movimiento circular no uniforme, 158
    en movimiento circular uniforme, 151-156
    forma rotacional de, 302-303, 339, 340-341, **342-343**
    para partícula, 249
    para sistema de partículas, 272
    usando análisis de modelos, 120-130
  tercera, **118**-120, *119*
  usando análisis de modelos, 120-130
Leyes de movimiento de Newton. *Vea* Leyes de movimiento
Libra (lb), **116**
Línea de acción, *300*, 301
Línea de flujo, **428**, *428*
Lineal, expansión, coeficiente promedio de (α), **574**, 575*t*
Lineales, ecuaciones, A-8–A-9, A-11
Líquido(s)
  calor específico, 594*t*
  características de, 417
  evaporación de, 642
  objetos cayendo en, *162*, l62-164
Locomotora, máquina de, 654, *654*
Logaritmos, **A-9**–A-10
  comunes, **A-9**–A-10
  naturales, A-9–A-10
Longitud, **4**
  símbolo para, 7
  unidades de, 3, 4, 466, A-1*t*, A-24*t*
  valores muestra de, 4*t*
Longitud de onda (λ), 487, **487**, **491**
  de modos normales, 542, *542*
  de onda sonora, 509, 513, *513*
Longitud de trayectoria (*r*), *536*, **537**
Luna
  datos planetarios, 398*t*
  energía cinética de, 189*t*
  fuerzas que causan la órbita de, 111-112
  masa, 5*t*
  rapidez de escape, 405*t*, 642
Luz, rapidez de (*c*), 4

Mach, número de, 522
Mach, ángulo de, 522
Macroestado, **668**-670

Madera
calor específico, 594*t*
conductividad térmica, 609*t*
Magnética, fuerza, como campo de fuerzas, 112
Makemake, 398
Manguera, jardín, rapidez del agua de, *428,* 428-429
Manométrica, presión, **423**
Manómetro de tubo abierto, 423, *423*
Máquina de coser, sistema de accionamiento de pedal, 462, *462*
Máquinas. *Vea también* Motores Carnot, **660**-665, *661, 662*
entropía y, 673-674, 677-678
de locomotora, 654, *654*
diesel, 638-639, 655, 666-667
eficiencia de, 655-656
gasolina, 655, *665,* 665-666, *666*
potencia de, 656
térmicas, *654,* **654**-656, *655*
vapor, 654, *654,* 664-665
Máquinas térmicas, *654,* **654**-656, *655*
Marcos de referencia
inercial, **113**-114
no inercial, **113**
leyes de movimiento en, 158-161, *159*, *160*
y velocidad relativa, *96*, 96-98, *97*
notación para, 96
Marcos de referencia inerciales, **113**-114
Marte
datos planetarios, 398*t*
órbita de, *406*
rapidez de escape, 405*t*
Masa (*m*), **4**-5, **114-115**. *Vea también* Centro de masa
contra peso, 115, 117-118, *118*
de cables y sogas, *120*
gravitacional, **118**
inercial, **118**, *118*
molar, 578
símbolo para, 7
unidades de, 3, 4-5, *5*, A-1*t*, A-24*t*
valores muestra de, 5*t*
y aceleración, 115-117
Masa atómica, A-22*t*–A-231*t*
Masa, densidad de
lineal, 308
superficial, 308
volumétrica, 308
Masa gravitacional, **118**
Masa inercial, **118**, *118*
Masa molar (M), 578
Materia
estados de, 417
modelos de, *6*, 6-7
oscura, 406-**407**
transferencia de, como transferencia de energía, *212*, 213
Material de fase superior, 597
Mathematical Principles of Natural Philosophy (Newton), 389
Maxwell-Boltzmann, función de distribución de rapidez de (N_v), **640**-641, *641*
Maxwell, James Clerk, 640
Mecánica. *Vea también* Mecánica de fluidos; Cinemática; Mecánica cuántica
clásica, 1, 2-3
estadística, 635, *640*, 667-668
Mecánica clásica, 1, 2-3. *Vea también* Mecánica
Mecánica cuántica. *Vea también* Cuantización
como subdisciplina de la física, 1, 3
historia de, 3
y calor específico molar, 636-637
Mecánica de fluidos, 417-434
dinámica, 427-434
ecuación de Bernoulli, 430-433, **431**
presión, *417*, 417-419, **418**
Mecánica estadística, 635, *640*, 667-668
Mecánica newtoniana. *Vea* Mecánica
Mecanismo de transformación para energía, 197
Medición. *Vea también* Instrumentación; Unidades; Unidades SI (*Système International*)
coeficiente de expansión promedio, 575*t*
de aceleración de caída libre, 465
de fuerza, 112-113, *113*
de presión, 418, *418*, 423, *423*
de temperatura, 569-573
de tiempo. *Vea* Relojes
estándares de, 3-6, *5*
incertidumbre en, A-20–A-21
marcos de referencia y, *96*, 96-98, *97*
Medio ambiente, **178**
Membranas, ondas estacionarias en, 550, *550*
Mercurio (Hg)
calor específico, 594*t*
coeficiente de expansión promedio, 575*t*
densidad, 419*t*
en termómetros, *570*, 570-571
rapidez del sonido en, 512*t*
Mercurio (planeta)
datos planetarios, 398*t*
órbita, 395, *396*, *406*
rapidez de escape, 405*t*
Mercurio, barómetro de, 423, *423*
Metal(es), conducción térmica en, 609, 609*t*
Método del origen a la punta para la suma de vectores, *62,* 62-63, 64-65
Metro (m), 3, **4**
Microestado, **668**-670
Modelo de flujo de un fluido ideal, **427**-428, *428*
Modelo de gas ideal, **578**-580
Modelo de objeto rígido, **293**
Modelo de objeto rígido bajo aceleración angular constante, 296-298, **297**
Modelo de objeto rígido bajo momento de torsión neto, 302-307, **304-305**
Modelo de objeto rígido en equilibrio, 363-365, **364**
Modelo de onda, *487*, **487**-491
Modelo de onda viajera, *487*, 487-**491**
Modelo de ondas bajo condiciones frontera, *541*, 541-545, *542*, **543**
Modelo de ondas en interferencia, 534-538, *535*, **537**
Modelo de partícula, **21**-22, 267, 272
Modelo de partícula bajo aceleración constante, *36*, 36-40, **38**
Modelo de partícula bajo rapidez constante, 30-**31**
Modelo de partícula bajo una fuerza neta, 121, *121*, **122**, 123-130
Modelo de partícula bajo velocidad constante 28-31, *29*, **30**
Modelo de partícula en equilibrio, 120-121, *121*, **122**-123
Modelo de partícula en movimiento armónico simple, 452-458, **456**
Modelo de partícula en movimiento circular uniforme, *91*, 91-94, **93**, 152-156
Modelo de partícula en un campo, campo gravitacional, 392-394, **393-394**
Modelo de sistema, 178
Modelo de movimiento armónico simple, **452**-458, *453*, *455*
Modelo de sistema no aislado
versión cantidad de movimiento, 252-256, **255**, 273
versión cantidad de movimiento angular, 338-342, *339*, **341**
versión energía, 212-215, **214-215**, 313-314
Modelos. *Vea también* Análisis de modelos; Modelo de partícula; Modelo de objeto rígido; Modelo ondulatorio
del átomo. *Vea* Átomo(s)
del núcleo, *6*, 7
del Sistema Solar
modelo geocéntrico, 394
modelo heliocéntrico, 394
estructurales, 627
flujo de fluido ideal, **427**-428, *428*
fuerzas de enlace atómico, 460, *460*
gas ideal, **578**-580
modelo molecular del gas ideal, *627*, 627-631
utilidad de, **6**-7
Modelos estructurales, 627
Modos normales, **541**
en barras y membranas, 550, *550*
en columnas de aire, 547
en cuerdas, 542-543, *542*
Módulo de corte (S), **373**, **374**, 374*t*
Módulo de Young (*Y*), **373**-374, 374*t*
Modulo volumétrico (*B*), **373**, 374-**375**, 374*t*, *375*, 509-512
Mole (mol), 3, **578**
Molécula(s)
cuantización de energía en, 636-637, *637*
en gas, distribución de rapidez de, 639-643, *641*
energía cinética de
y presión, 627-629
y temperatura, 630-631
movimiento rotacional de, *635*, 635-637, *636*, *637*
movimiento vibracional de, *635*, 635-637, *636*, *637*
rapidez rms (v_{rms}), 630, 631*t*
Molinos de viento, *177*, 189
Momento de inercia (*I*), **303**, 342
cálculo de, 307-311
como análogo de la masa, 303
de objeto rígido, **303**, 304*t*, 307-311, 467
eje de rotación y, 303

y conservación de la cantidad de movimiento angular, 345-346
Momento de torsión, 301-302, 314*t*
y aceleración angular, 302-307
Momento de torsión ($\vec{\tau}$), *300*, **300**-302, *301*
contra fuerza, 301
dirección de vector, *336*, 337-338
eje de rotación, 301
modelo de objeto rígido bajo momento de torsión neto, 302-307, **304-305**
neto, 301-302, 314*t*
y aceleración angular, 302-307
y cantidad de movimiento angular, 338-339, 340-341, 350-351, *351*
y equilibrio rotacional, 364-365
y péndulos de torsión, 467-468, *468*
Motores. *Vea también* Máquinas, potencia de, 233
Movimiento. *Vea también* Colisiones; Cinemática; Leyes del movimiento; Movimiento circular no uniforme; Movimiento oscilatorio; Movimiento planetario; Movimiento de precesión; Movimiento de proyectiles; Movimiento de rotación; Movimiento armónico simple; Movimiento circular uniforme; Ondas
con fuerzas resistivas, 161-167, **162**
de sistemas de partículas, 272-274
en dos dimensiones, 78-98
con aceleración constante, 81-84
modelado de, 81, 81-82, *82*
en sistemas deformables, 275-277
en una dimensión, 21-47
inminente, 131
tipos de, 21
Movimiento armónico simple, **451**. *Vea también* Movimiento oscilatorio
aplicaciones, 459-460
en objeto unido a resorte, *451*, 451-452
energía en, 458-461, *459*, *460*
movimiento circular uniforme y, *462*, 462-464, *463*
onda estacionaria como, 539
péndulo, 464-468
Movimiento browniano, 567
Movimiento circular no uniforme, 156-158, *157*
Movimiento circular uniforme, *91*, **91**-94
aceleración en, *91*, 91-92, 150-156
cantidad de movimiento angular en, 339-340
fuerza en, *151*, 151-156
periodo de, **92**, 93
rapidez angular de, 92-93, 94
segunda ley del movimiento en, 151-156
y movimiento armónico simple, *462*, 462-464, *463*
Movimiento de precesión, **350**-352, *351*
Movimiento de proyectiles, **84**-91, *85*
aceleración en, 84-85, 88-89
altura máxima, *85*, 85-87
conservación de la energía mecánica en, 221
estrategias para resolución de problemas, 87
proyectil explotado, 273-275, *274*
rango horizontal, *85*, 85-87, 90-91
trayectoria, 84, *85*, 86, *86*
Movimiento de rodamiento, 316-321, *317*
puro, 316-**317**
Movimiento de traslación, 21
ecuaciones para, 314*t*
en movimiento de rodamiento, 316-321, *317*
teorema de trabajo-energía cinética y, 189
Movimiento inminente, 131
Movimiento oscilatorio, 450-471. *Vea también* Péndulos; Movimiento armónico simple
amortiguado, *468*, **468**-469, *469*
aplicaciones, 459-460
en objeto unido a un resorte, *451*, 451-452
forzado, 469-471, *470*
frecuencia natural, **468**, 542, 546, 547-548
péndulos, 464-468
resonancia, *470*, **470**-471
Movimiento periódico, **450**. *Vea también* Movimiento oscilatorio; Movimiento armónico simple; Ondas
Movimiento planetario, 394-398, *396*. *Vea también* Leyes de Kepler; Órbita
análisis de modelos de energía en, 402-403, 404-407
cantidad de movimiento angular en, 396-397
rapidez orbital, 406, *406*
Movimiento rotacional, 21, 293-321. *Vea también* Momento de torsión
cantidades angulares y de traslación, relaciones entre, 298-300
cantidades y terminología en, 293-296
cinemáticas, ecuaciones, 296-297, 296*t*, 297
de moléculas, *635*, 635-637, *636*, *637*
ecuaciones para, 314*t*
eje de rotación en, 295, 339
energía cinética (K_R) de, *311*, **311**-312, 314, 314*t*
línea de referencia para, 294, *294*
métodos de cantidad de movimiento para, 314, 320-321
métodos de energía para, 312-316, 318-321
métodos para cantidad de movimiento angular, 338-350
modelo de objeto rígido bajo aceleración angular constante, 296-298, **297**
momento de inercia (I) y, **303**, 304*t*, 307-311
rodamiento, 316-321, *317*
segunda ley del movimiento para, 302-303, 339, 340-341, **342-343**
teorema del trabajo-energía cinética para, 189, **313**-314
Muerte térmica del Universo, 678
Multiplicación
cifras significativas en, 12
de fracciones, A-6
de potencias, A-6
de un vector por un escalar, 64
derivada de producto de dos funciones, A-14
e incertidumbre, A-20
en notación científica, A-4–A-5
ley distributiva de, **182**
Música
contra ruido, características de, 550, 553
y serie armónica, 542-543

National Institute of Standards and Technology (NIST), 5, *5*
Naves espaciales
conservación de cantidad de movimiento angular en, 352, 352
rapidez de escape, **404**-405, 405*t*
Voyager 2, 352
Neptuno
datos planetarios, 398*t*
órbita de, *406*
rapidez de escape, 405*t*
Neutrón(es), *6*, 7
Neutrones, estrellas de, 347, 405-406
Newton (N), **116**
Newton · metro (N · m), **180**
Newton, Isaac, 2-3, 111-112, *112*, 249, 388, 389, 392, A-13
NIST. *Vea* National Institute of Standards and Technology
Nitrógeno (N)
calor específico molar, 633*t*
calores latentes de fusión y vaporización, 598*t*
rapidez de distribución molecular, 641, *641*
Nivel sonoro (β), **515**-516, 515*t*
No equilibrada, fuerza. *Vea* Fuerza neta
No inercial, marcos de referencia, **113**
leyes de movimiento en, 158-161, *159*, *160*
Nodos, *539*, **539**-540, *540*, 541, 546, *547*
desplazamiento, **546**, *547*, 550
presión, 546
Notación
del orden de ($\sim$), 10
delta (Δ), 23
para cantidades, 7, 8, A-2*t*–A-3*t*
para marcos de referencia, 96
para vector unitario, 66
para vectores, 61
sigma (Σ), 43
Notación científica, **A-4**–A-5
cifras significativas en, 12
Núcleo atómico, *6*, 7
Número atómico (Z), **7**, A-22*t*–A-23*t*
Número de Avogadro (N_A), **578**
Número de Euler (e), 163, A-9
Número de masa (A), **7**
Número de onda (k), **488**, **491**, 509

Objeto(s) rígido(s), **293**
cantidad de movimiento angular de, *342*, 342-345
en equilibrio, 364-365, 366-372
como péndulo físico, *466*, 466-467
estrategias para la resolución de problemas para, 366-367
fuerza gravitacional sobre, *365*, 365-366
momento de inercia de, **303**, 304*t*, 307-311, 467

momento de torsión en. *Vea* Momento de torsión
movimiento de rodamiento en, 316-321, *317*
movimiento rotacional en. *Vea* Movimiento rotacional
Objeto aislado, 114
Objeto del cinturón de Kiuper (KBO), 397-398
Onda sonora periódica, 508
Onda viajera, **487**
Onda(s), 483-498. *Vea también* Ondas electromagnéticas; Ondas mecánicas, Ondas sinusoidales, Sonido
agua, 483, 485, *485*
como transferencia de energía, 484
cuadrada, 554, *554*
ecuación de onda lineal, 497-**498**
esféricas, **513**, *513*
estacionaria, *538*, **538**-541, *539*, *540*
bajo condiciones frontera, *541*, 541-545, *542*
en barras, 550, *550*
en columnas de aire, 546-549, *547*
en cuerdas, 541-543, *542*
en membranas, 550, *550*
función de onda, **485**-486
de onda sinusoidal, 488-489
interferencia, **534**-538, *535*, 550-552, *551*
lineal, 534
longitudinal, *484*, **484**-485, *508*, 508-509, *509*
modelo de onda viajera, *487*, 487-**491**
no lineal, 534
no sinusoidal, *553*, 553-554, *554*
potencia de, 496
propagación de, *484*, 484-487, *485*
rapidez de, 488
en cuerdas, *491*, 491-494
reflexión de, **494**, *494*, *495*
resonancia, *470*, **470**-471, **546**, *546*, 548
tipos, 483
transmisión de, **494**-495, *495*
transversal, *484*, **484**-485
Onda(s) lineal(es), 534
Ondas cuadradas, 554, *554*
Ondas de choque, 522, *522*
Ondas esféricas, **513**, 513
Ondas estacionarias, *538*, **538**-541, *539*, *540*
bajo condiciones frontera, *541*, 541-545, *542*
en barras, 550, *550*
en columnas de aire, 546-549, *547*
en cuerdas, 541-543, *542*
en membranas, 550, *550*
Ondas longitudinales, *484*, **484**-485, *508*, 508-509, *509*
Ondas mecánicas, 483. *Vea también* Ondas sinusoidales; Ondas sonoras
batimiento, 550-552, **551**, *551*
componentes de, 484
ecuación lineal de onda, 497-**498**
interferencia en, **534**-538, 535, 550-552, *551*
medio, 483, 484
modelo de onda viajera, *487*, 487-**491**
propagación de, *484*, 484-487, *485*
rapidez de, 488, *491*, 491-494, 511
reflexión de, **494**, *494*, *495*
superposición de, **534**-538, *535*, *536*
transferencia de energía en, *212*, 213, 484, *495*, 495-497
transmisión de, **494**-495, *495*
Ondas no lineales, 534
Ondas no sinusoidales, *553*, 553-554, *554*
Ondas *P*, **485**
Ondas sinusoidales, *487*, **487**-491
expresión general para, 489
función de onda de, 488-489
ondas sonoras, 507
rapidez de, 488, *491*, 491-494
sobre cuerdas, *490*, 490-491
rapidez de, *491*, 491-494
sobreposición de, 535-536, *536*
Ondas sonoras, 485, **507**-522. *Vea también* Audición
audible, 507
como onda longitudinal, *508*, 508-509, *509*, 547
efecto Doppler, *517*, **517**-521, 518, *519*
infrasónicas, 507
intensidad de, 512-517, **513**
interferencia de, *536*, 536-538
nivel del sonido (β), en decibeles, **515**-516, 515*t*
ondas de choque (estampido sónico), 522, *522*
rapidez de, *510*, 510-512, 512*t*
ultrasónicas, 507
variaciones de presión en, *508*, 508-510, *509*
Ondas sonoras infrasónicas, 507
Óptica, 1
historia de, 2-3
Órbita. *Vea también* Movimiento planetario
planetario, 394-398, *396*
análisis de modelos de energía en, 402-403, 404-407
cantidad de movimiento angular en, 396-397
rapidez de, 406, *406*
satélite
análisis de modelos de energía en, 403-405
cambiando de órbita, 403-404
geosíncrono, *399*, 399-400, 403-404
rapidez de escape, **404**-405, 405*t*
Orcus, 398
Orden de magnitud (~) cálculos, 10-11
Ordenadas al origen, **A-8**, *A-8*
Oro (Au)
calor específico, *594t*
calores latentes de fusión y vaporización, 598*t*
conductividad térmica, 609*t*
densidad, 419*t*, 426
estructura de, 6, *6*, 7
rapidez del sonido en, 512*t*
Oscilación forzada, 469-471, *470*
Oscura, materia, 406-**407**
Otto, ciclo de, *665*, **665**-666, *666*
Oxígeno (O)
calor específico molar, 633*t*
calores latentes de fusión y vaporización, 598*t*
conductividad térmica, 609*t*
densidad, 419*t*
rapidez del sonido en, 512*t*

Parábolas, **A-11**, *A-11*
Partícula de prueba, 392-393
Partícula fuente, 392-393
Partícula(s), **21**
de prueba, 392-393
fuente, 392-393
sistemas de, movimiento de, 272-274
Partículas masivas que interactúan débilmente (WIMP), 407
Pascal (Pa), **418**
Pascal, Blaise, 420
Pendiente, **A-8**, *A-8*
cociente como razón de cambio, 26
de curva posición-tiempo
para velocidad constante, 29, *29*
recta entre dos puntos de, 24
recta tangente a, 25-26, *26*, 27, 33, *33*
gráfica de velocidad-tiempo
recta entre dos puntos en, 31, *31*
recta tangente a, *31*, 32, *32*, 33, *33*
unidades de, 26
Péndulo balístico, 261-262, *262*
Péndulo cónico, 152
Péndulo de torsión, 467-468, *468*
Péndulo físico, *466*, **466**-467
Péndulo simple, *464*, **464**-466
Péndulos, 464-468
balísticos, 261-262, *262*
como acelerómetros, 161
como relojes, 465
cónicos, 152
físicos, *466*, **466**-467
simples, *464*, **464**-466
torsionales, 467-468, *468*
Perigeo, 396
Perihelio, 396
Periodo (T), **92**, 93
de onda, *487*, 487-488
del movimiento armónico simple, *453*, **453**-454, **456**, 462
del péndulo de torsión, 468
del péndulo físico, 467
del péndulo simple, 465
Peso, **117**-118
contra masa, 115, 117-118, *118*
medida con la escala del resorte, 126-127, *127*
Pez, ajuste en la fuerza de flotación en un, 424-425
Pie, 4, 5
Pilas de combustible, 1
Planeta(s). *Vea también planetas específicos*
atmósfera, rapideces de escape y, 405
datos acerca de, 398*t*
rapidez de escape de, **404**-405, 405*t*
rapidez orbital de, 406, *406*
Plata (Ag)
calor específico, 594*t*
calores latentes de fusión y vaporización, 598*t*

conductividad térmica, 609*t*
densidad, 419*t*
Plomo (Pb)
calor específico, 594*t*
calores latentes de fusión y vaporización, 598*t*
coeficiente de expansión promedio, 575*t*
conductividad térmica, 609*t*
densidad, 419*t*
rapidez del sonido en, 512*t*
Plushenko, Evgeni, *346*
Plutinos, 398
Plutón
como objeto del cinturón de Kiuper, 398
como planeta enano, 398*t*
datos planetarios, 398*t*
Porcentaje de incertidumbre, **A-20**
Posición (x), *22,* **22**-23
angular (θ), **294**, *294,* 296-297, 296*t*
de partícula bajo aceleración constante, *36,* 37, 38, 44-45
de partícula bajo velocidad constante, 29
en movimiento armónico simple, 452-453, *453,* 454, 455, *455*
Posición angular máxima, del péndulo simple, 465
Posición-tiempo gráfica, 22, *22*
para partícula bajo velocidad constante, 29, *29*
pendiente de la recta entre dos puntos en, 24
pendiente de la recta tangente a, 25-26, *26,* 27, 33, *33*
relación gráfica aceleración-tiempo, 33, *33*
relación gráfica velocidad-tiempo, 33, *33*
Posición, vector de ($\vec{\mathbf{r}}$), **67**, **78**-79, *79,* 81
como función del tiempo, 81-82, *82,* 83-84
de proyectil, 84, *85*
Potencia (P), **232**-233, 314*t*
de máquina, 656
de motor, 233
de onda, 496
de ondas sonoras, 512-513
en movimiento rotacional, 313, 314*t*
instantánea, 232, 313
promedio, **232**
Potencia de la carrera, *665,* 666
Potencia del viento, *177*
Potencias, A-6–A-7
e incertidumbre, A-20
Potencias de diez, prefijos para, 5, *6t*
Prefijos para potencias de diez, 5, 6*t*
Prensa hidráulica, *420,* 420-421
Presa, fuerza sobre, 422-423
Presión (P), **375**, *417,* 417-419, **418**
absoluta (P), **423**
atmosférica (P_0), 419, 420
barométrica, 423
Bernoulli, ecuación de, 430-433, **431**
contra temperatura y volumen, en gas ideal, 578-579
diagramas *PV,* **602**, *602*
elevación y, 430-431
energía cinética molecular y, 627-629
fuerza y, 418
ley de Pascal, **420**-421
manométrica, **423**
medición de, 418, *418,* 423, *423*
ondas sonoras como variaciones en, *508,* 508-510, *509*
profundidad y, 419-423, *420*
unidades de, A-2*t*
Presión absoluta (P), **423**
Presión antinodos, **546**
Presión atmosférica (P_0), 419, 420, 423
Presión, nodos, **546**
Pretensado, concreto, *375,* 375-376
Primera ley de Kepler, 395-396
Primera ley de la termodinámica, **603**-604, 653
aplicaciones, 604-608
Primera ley del movimiento de Newton, **113**-114
Principio de Arquímedes, **424**-427
Probabilidad de microestados, 668-671
Probabilidad e integral de probabilidad de Gauss, A-19*t*
Proceso adiabático, **604**-605, **637**
para gas ideal, 637-639, *638*
Proceso reversible, **659**-660
ciclo de Carnot como, 661, 662, 663
entropía y, 662-668
Procesos
irreversibles, 653-654, **659**-660
entropía en, 662-668
reversibles, **659**-660
entropía en, 662-668
Producto cruz. *Vea* Producto vectorial
Producto escalar (punto), *181,* **181**-183
Producto punto. *Vea* Producto escalar
Producto vectorial (cruz), **335**-338, *336*
forma de determinante, 336-337
Profundidad y presión, 419-423, *420*
Promedio, aceleración (a_{prom}), **31**, *31,* 33 34, **80**, 314*t*
en movimiento circular uniforme, 92
Promedio, aceleración angular (α_{prom}) **295**, 300
Promedio, coeficiente de expansión lineal (α), **574**, 575*t*
Promedio, coeficiente de expansión volumétrico (β), **574**-575, *575t*
Promedio, potencia (P_{prom}), **232**
Promedio, rapidez (v_{prom}), **24**-25
Promedio, rapidez angular (ω_{prom}), **294**
Promedio, velocidad ($\vec{\mathbf{v}}_{\text{prom}}$), **23**-25, 36, **79**, *80*
Propagación
de incertidumbre, **A-20**-A-21
de ondas mecánicas, *484,* 484-487, *485*
Propiedad conmutativa del producto escalar, **181**
Protón(es), *6,* 7
Ptolomeo, Claudio, 394
Puente Tacoma Narrows, 470, *470*
Puentes, oscilación en, *470,* 470-471
Pulso, 484, *484,* 485, *485, 486,* 486-487
Punto de hielo del agua, 571, 572
Punto triple del agua, **572**
Puntos de retorno, 200, 200

Quaoar, 398
Quark arriba (u), *6,* 7
Quarks, *6,* **7**
"¿Qué pasaría si?" preguntas, en la solución de problemas, 47

Radar, policía, 520
Radiación térmica, **613**-614
Radial, aceleración (a_r), *94,* **94**-96, 156-158, *157*
Radián (rad), **294**
conversión de grados a/de, 294
Radián, medida, A-10
Rango horizontal (R) de proyectil, *85,* 85-87, 90-91
Rapidez (v), 79, 83, 314t
angular (ω), 92-93, 94, 294-295, 296-297, 296*t*, 299, 314*t*
contra frecuencia angular, 462
instantánea (ω), **295**
promedio (ω_{prom}), **294**
como cantidad derivada, 5
de la luz (c), 4
de moléculas en gas, 639-643, *641*
de onda mecánica, 488, *491,* 491-494, 511
de onda sinusoidal, *49,* 488, 489, 491-494
de onda sobre cuerda, *491,* 491-494
de ondas sonoras, *510,* 510-512, 512*t*
en teorema trabajo-energía cinética, 189-190
instantánea, **26**
promedio (v_{prom}), **24**-25
tangencial (v), 298, 299, 311
terminal (v_T), 162, **163**-167, 165*t*, *166,* 166*t*
transversal (v_y), **490**-491
unidades de, 8*t*, A-1*t*
Rapidez de consumo, 278
Rapidez de escape (v_{esc}), *404,* **404**-405, 405*t*
distribución de rapidez molecular y, 641-642
hoyos negros y, 406
Rapidez media cuadrática (rms) (v_{rms}). *Vea* rapidez rms
Rapidez rms (v_{rms}), 630, 631*t*
Rarefacciones, **509**
Rayo(s), **513**, *513*
Razón de compresión, **666**-667
Razón de flujo (flujo volumétrico), 428
Razón de rotación, 92
Rectas, ecuaciones para, A-8–A-9, A-11
Redondeo, 13
Reflexión de ondas, **494**, *494, 495*
Reflexiones acerca del poder motriz del calor (Carnot), *661*
Refrigeradores, **656**-659, *657*
Regla de la cadena del cálculo diferencial, A-14
Regla de la mano derecha
para cantidad de movimiento angular, 339
para productos vectoriales, 336, *336*
para vector de velocidad angular, 295-296, *296*
Relativa, aceleración, 97
Relativa, velocidad, *96,* 96-98, *97*
Relatividad especial, 1
historia de la teoría, 2, 3
Reloj atómico con fuente de cesio, *5*
Relojes. *Vea también* Tiempo
atómicos, 5, *5*
péndulos y, 465

Relojes atómicos, 5, *5*
Repaso matemático, A-4-A-21
Representación gráfica, 22, *22,* 23
Representación matemática, 22-23
Representación tabular, 22, 22*t*
Representaciones alternativas, 22, 22-23
Resistencia a la compresión, 376
Resistencia al corte, 375-376
Resistencia del aire, 162, *164*, 164-167
  caída libre y, 40-41
Resonancia, *470*, **470**-471, **546**, *546*, 548
Resonancia, frecuencia de (ω_0), **470**, *470*, **546**, 548
Resorte(s)
  como fuerza conservativa, 197
  compresión de, 229-230
  función energía potencial para, 198-199
  ley de Hooke, **185**, 187, 199, **451**, 456
  movimiento armónico simple en, *451*, 451-452
  movimiento ondulatorio en, 484, *484*
  trabajo hecho por, *185*, 185-187, *187*, 187-188, 189-190
  y energía potencial elástica, **194**-196, *195*
Resta
  cifras significativas en, 12
  de vectores, *63*, 63-64
  e incertidumbre, A-20-A-21
Rigidez del resorte, 185
Rotacional, energía cinética (K_R), *311*, **311**-312, 314, 314*t*
Rotacional, equilibrio, momento de torsión y, **364**-365
Rueda de la fortuna, fuerza ejercida sobre un ocupante, *155*, 155-156

S, ondas, **485**
Satélites geoestacionarios, *399,* 399-400, 403-404
Satélites, órbita de
  análisis de modelo de energía en 403-415
  cambiando órbita de, 403-404
  geosíncronos, *399*, 399-400, 403-404
  rapidez de escape, **404**-405, 405*t*
Saturno
  datos planetarios, 398*t*
  órbita de, 406
  rapidez de escape, 405*t*
Schmitt, Harrison, *118*
Schwarzchild, radio de (R_S), **406**, *406*
Scott, David, 41
Secante (sec), A-11, A-12*t*
Sedna, 398
Segunda (*s*), 3, **5**
Segunda derivada, A-14
Segunda ley de Kepler, *396*, 396-397
Segunda ley de la termodinámica, 653-654, 676-678
  enunciado de Clausius de, **657**, 676
  enunciado de entropía de, 676
  equivalencia de enunciados de, 676-677
  Kelvin-Planck, forma de, **655**, 657, 660, 677
Segunda ley del movimiento de Newton, **115**-117
  análisis de modelos usando, 120-130
  en movimiento circular no uniforme, 158
  en movimiento circular uniforme, 151-156
  forma rotacional de, 302-303, 339, 340-341, **342**-**343**
  para partícula, 249
  para sistema de partículas, 272
Semejantes, triángulos, 92
Seno (sen), A-11–A-12, A-12*t*
Serie armónica, **542**, 547
Serie de Fourier, **553**
Series, expansiones de, A-13
SI unidades (*Système International*), **3**, A-2*t*–A-3*t*, A-24*t*
  conversión a unidades estadounidenses usuales, 9
  de aceleración, 8*t*, 31
  de área, 8*t*
  de cantidad de movimiento angular, 339
  de cantidad de movimiento lineal, 249
  de energía, 591
  de energía cinética, 188
  de energía potencial gravitacional, 192
  de frecuencia, 454
  de fuerza, 116
  de longitud, 4
  de masa, 4-5, *5*, 114, A-l*t*, A-24*t*
  de momento de inercia, 303
  de momento de torsión, 301
  de potencia, 232
  de presión, 418
  de rapidez, 8*t*
  de rapidez promedio, 24
  de temperatura, **572**
  de tiempo, 5, *5*
  de trabajo, 180
  de velocidad promedio, 23
  de volumen, 8*t*
  prefijos para, 5, 6*t*
Sigma (Σ), 43
Silicio (Si), calor específico de, 594*t*
Silla de ruedas, *371*, 371-372
Símbolos. *Vea* Notación
Simplificación de problemas, 45
Síntesis de Fourier, 554, *554*
Sismógrafos, 485
Sistema coordenado polar (r, θ), 59-60, *60*
  conversión a/de coordenadas cartesianas, 60-61
Sistema coordenado rectangular. *Vea* Sistema coordenado cartesiano
Sistema no aislado, 253
  cantidad de movimiento angular en, 338-342, *339*, **341**
  definición de, 212
  estrategias de resolución de problemas para, 217-218
  y conservación de energía, *212*, 212-215
Sistema Solar, *406*, 406-407
Sistema(s), **178**. *Vea también* Sistemas aislados; Sistema no aislado
  cantidad de movimiento angular en, 340-342
  de moléculas, energía interna de, *635*, 635-637, *636*, *637*
  de partículas, movimiento de, 272-274
  deformable
    conservación de la cantidad de movimiento angular en, 345-346, *346*
    movimiento de, 275-277
    propiedades elásticas de sólidos, 373-376
    trabajo en, 179
    y teorema de trabajo-energía cinética, 189
  energía potencial de, 191-196, **192**, *192*
  equilibrio de, 199-201, *200*, *201*
  identificación de, 178
Sistemas coordenados, 59-61
  cartesiano, 59, *59*
  conversión entre sistemas, 60-61
  coordenadas polares, 59-60, *60,* 294
  orientación de, 66
Slug, 5
Sobreamortiguada, oscilación, **469**, *469*
Sobrecalentamiento, **600**
Sobreposición de ondas mecánicas, **534**-538, *535*, *536*
Sobreposición, principio de, **534**, **537**
Sol
  datos planetarios, 398*t*
  masa de, 5*t*, 398-399
  radiación electromagnética del, 613
  rapidez de escape, 405*t*
  temperatura de, *572*
Solar, potencia, 613
Solidificación, calor latente de, 598
Sólido(s)
  calor específico, 594*t*
  características de, 417
  propiedades elásticas de, 373-376
Sonoridad, 516-517, *517*
Stonehenge, 2
Subamortiguada, oscilación, **469**, *469*
Subenfriamiento, **599**-600
Suma
  cifras significativas en, 12
  de fracciones, A-6
  de vectores, 80
    método de componentes, *67*, 67-70
    método gráfico, *62*, 62-63, 64-65
  derivada de la suma de dos funciones, A-14
  e incertidumbre, A-20
  ley asociativa de, 63, *63*
  ley conmutativa de, 62, *62*, **181**
Supernovas, 347, 405-406

Tabla periódica de los elementos, A-22*t*–A-23*t*
Tangencial, rapidez (v), 298, 299, 311
Tangencial, velocidad, 298, *298*
Tangencial, aceleración, *94*, **94**-95, 156-158, *157*, 298-299, *299*, 303
Tangente (tan), A-11–A-12, A-12*t*
  en calculadoras, 67
Temperatura (T), 568-580, **570**
  cambiada por propiedades físicas, 570
  contra energía interna y calor, 591
  contra presión y volumen, en gas ideal, 578-579
  equilibrio térmico, **569**-570
  expansión térmica, *568*, *573*, **573**-578, *575*, 575*t*
  interpretación molecular de, 630-631

ley cero de la termodinámica, 568, *569*, **569**-570
medición de, 569, 570-573
sensación de, 568-569
unidades de, 3, A-24*t*
y calor específico, 594
y densidad, 419, 577, *577*
y energía interna, 594, 630, 632
y entropía, 671
y frecuencias de instrumentos, 548
y niveles de energía atómicos, 639-640
y rapidez de ondas sonoras, 511-512, 512*t*
Temperatura absoluta, escala de, 571-**572**, *572*
conversión a/de, 572
Temperatura atmosférica, nubosidad y, 613
Temperatura, escalas
absoluta, 571-**572**, *572*
Celsius, **571**, 572, 573
conversión de, 572-573
Fahrenheit, **572**, 573
Kelvin, **572**, *572*
Temperatura, gradiente de, **609**
Temporal, interferencia, 550-552, *551*
Tensión (T), **120**-121, *121*, *122*, 122-123, 491, *491*, 543
Tensión, deformación por, **373**, 374
Tensión, esfuerzo por, **373**, *374*, 376
Tensión, resistencia a la, 376
Teorema de Carnot, **660**
Teorema de equipartición de energía, **630**, 635-637
Teorema de Fourier, **553**-554
Teorema de los ejes paralelos, **308**-311, *310*
Teorema de Pitágoras, A-11
Teorema de trabajo-energía cinética, 188-191, **189**, 212, 214, 215, 275
para movimiento rotacional, 189, **313**-314
Teoría atómica, historia de, 6-7, 567
Teoría cinética de los gases, **627**-643
Teoría especial de la relatividad. *Vea* Relatividad especial
Tercera ley del movimiento, Newton, **118**-120, *119*
Tercera ley, Kepler, *397*, 397-398
Térmica, energía, 591
Térmica, radiación, **613**-614
Térmico, contacto, *569*, **569**-570
Térmico, equilibrio, **569**-570
Térmicos, cortos eléctricos, 576-577
Terminal, rapidez (v_T), *162*, **163**-167, 165*t*, *166*, 166*t*
Termo, 614, *614*
Termodinámicas, variables, de gas ideal, **579**
Termodinámicos, 567, 590. *Vea también* Entropía; Calor; Teoría cinética de gases; Temperatura
aplicaciones, 567
como subdisciplina en física, 1
historia de la teoría, 2-3
ley cero de, *569*, **569**-570
primera ley de, **603**-604, 653
aplicaciones, 604-608
segunda ley de, 653-654, 676-678
enunciado de Clausius, **657**, 676
enunciado de entropía, 676
equivalencia de enunciados de, 676-677
forma de Kelvin-Planck de, **655**, 657, 660, 677
Termodinámicos, procesos, trabajo y calor en, 601-603
Termodinámicos, sistemas, cambios de entropía para, 671-678
Termómetros, 569, *569*, *570*, 570-573, *571*
alcohol, 570-571
calibración de, 570-571
de gas a volumen constante, *571*, 571-572
limitaciones de, 571
mercurio, *570*, 570-571
Termómetros de alcohol, 570-571
Termómetros de gas a volumen constante, *571*, 571-572
Termostatos mecánicos, 575, *575*
Terremotos, 485
Thomson, Joseph John, 7
Thompson, Benjamin, 592
Tiempo (t), **5**-6. *Vea también* Relojes
símbolo para, 7
unidades de, 3, 5, *5*, A-1*t*, A-24*t*
valores muestra de, 5*t*
Tierra
centrípeta, aceleración de la, 93-94
como marco inercial, 114
datos planetarios, 398*t*
densidad de, 392
energía cinética de, 189*t*
masa de, *5t*
órbita de, 395, *406*
rapidez de escape, 405*t*, 641-642
Timbre (calidad), 553
Tono, 553
Tormenta, estimación de distancia a, 512
Tornillo de Arquímedes, *424*
Torricelli, Evangelista, 423
Trabajo (W), **179**, 314*t*
como escalar, 179, 181
como transferencia de energía, 180, 190, 212, *212*
dependiente de la trayectoria, 198, *198*
en flujo de fluidos, 430-431
en gas, *601*, 601-608, *602*, *603*
en movimiento rotacional, 313, 314, 314*t*
en proceso adiabático, 604-605
en proceso cíclico, 604
en procesos isobáricos, 605, 607-608
en procesos isotérmicos, 605-606, *606*
en procesos isovolumétricos, 605
en sistemas deformables, 179
independiente de la trayectoria, 189, 191, 193, 197, 198
neto (ΣW), *184*, 184-185, 188-190, 314, 314*t*
por fricción, 196-197, 198, *198*, 222
por fuerza conservativa, 197-198, 198-199
por fuerza constante, 178-181, *179*, *180*, 183
por fuerza gravitacional, 197, 215
por fuerza variable, 183-188, *184*
por fuerzas no conservativas, 198, *198*
por máquina térmica, 655-656
por resorte, *185*, 185-187, *187*, 187-188, 189-190
unidades de, 180
y desplazamiento, 179
y energía cinética. *Vea* Teorema de trabajo-energía cinética
y la función energía potencial, 198-199
Trabajo neto (ΣW), *184*, 184-185, 188-190, 314, 314*t*
Transformación, ecuaciones, de Galileo, **97**
Transmisión de ondas, **494**-495, *495*
Transportación. *Vea* Aviones; Automóviles; Ferrocarriles; Satélites; Naves espaciales
Transversal, aceleración (a_y), **490**-491
Transversal, onda, *484*, **484**-485
Transversal, rapidez (v_y), **490**-491
Trayectoria, 84, *85*, 86, *86*
Triángulo(s), semejante(s), 92
Trigonométricas, funciones, A-ll-A-13
identidades para, A-*12t*
Trompo(s), 350, *351*
Tuberías y expansión térmica, *568*
Tubo abierto, manómetro de, 423, *423*
Tubo de flujo, 428
Turbulento, flujo, **427**, *427*

Ultrasónicas, ondas sonoras, 507
Umbral de audición, 514, 515, 516, *517*
Umbral de dolor, 514, 515, 516-517, *517*
Unidad astronómica (UA), 397
Unidad de masa atómica (u), 578
Unidad térmica británica (Btu), **592**
Unidades. *Vea también* Unidades SI (*Système International*); Conversión de unidades usuales estadounidenses, 9-10, A-1*t*-A-2*t*
en ecuaciones, inclusión de, 9
Unidades usuales estadounidenses, 5, 8*t*, 59, 116, 232, 611-612
conversión a unidades SI, 9
Universo, entropía del, 676, 678
Uranio (U), densidad de, 419*t*
Urano
datos planetarios, 398*t*
órbita de, *406*
rapidez de escape, 405*t*

Valor R, **611**-612, 611*t*
Vapor
calor específico, 594*t*
energía almacenada en, 599, 600-601
Vapor, punto de, del agua, 571, 572
Vapor, máquina de, 664-665
Vaporización, calor latente de, **598**, 598*t*
Variable(s)
de estado, **601**
transferencia, **601**
Variables de transferencia, **601**
Varuna, 398
Vector resultante, **62**
Vector(es)
componentes de, *65*, **65**-70
desplazamiento, **79**, *79*
igualdad de, 62, *62*
multiplicación por escalar, 64
negativo de, 63
notación para, 61

posición, **67**, **78**-79, *79*, 81
como función del tiempo, 81-82, *82*, 83-84
de proyectil, 84, *85*
producto escalar (punto) de, *181*, **181**-183
producto vectorial (cruz) de, **335**-338, *336*
en forma de determinante, 336-337
propiedades de, 62-65
resta de, *63*, 63-64
resultante, **62**
suma de, 80
método de componentes, *67*, 67-69
método gráfico, *62*, 62-63, 64-65
unidad, *66*, **66**-67
velocidad
como función del tiempo, 81-82, *82*, 83
Vectores componentes, *65*, 65-66
Vectores unitarios ($\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$), *66*, **66**-67
producto cruz de, 336
productos escalares de, 182
Vejiga natatoria en pez, 424-425
Velocidad ($\vec{\mathbf{v}}$), 26
angular, 295-296, *296*, 298, *298*
de partícula bajo velocidad constante, 29
del centro de masa ($\vec{\mathbf{v}}_{CM}$), **272**
en colisiones elásticas, 258-259
en movimiento armónico simple, 454, *455*, 455-456, 459
instantánea (v_x), 25-28, **26**, *26*, **79**-80, *80*
como función del tiempo, 81-82, *82*, *83*
de partícula bajo aceleración constante, 36, *36*, *37*, 38, 44
promedio ($\vec{\mathbf{v}}_{prom}$), **23**-25, 26-28, 36, **79**, *80*
relativa, *96*, 96-98, *97*
tangencial, 298, *298*
Velocidad de escape, 278
Venturi, tubo, 432, *432*
Venus
datos planetarios, 398*t*
órbita de, *406*
rapidez de escape, 405*t*
Vibracional, movimiento
como tipo de movimiento, 21
de molécula, *635*, 635-637, *636*, *637*
Vidrio
calor específico, 594*t*
coeficiente de expansión promedio, 575*t*
conductividad térmica, 609*t*
Vidrio Pyrex, rapidez del sonido en, 512*t*
Viscosa, fuerza, *162*, 162-164, 427
Viscosidad, **427**
Volumen (*V*)
contra presión y temperatura, en gas ideal, 578-579
de formas geométricas, A-10*t*
diagramas *PV*, **602**, *602*
expansión térmica y, 574-575, *575*
unidades de, 8t

Watt (W), **232**
Watt, James, 232
WIMP. *Vea* Partículas masivas que interactúan débilmente

Yarda, 4

Cuadro pedagógico de color

Mecánica y termodinámica

Desplazamiento y vectores de posición

Componentes de los vectores de desplazamiento y posición

Vectores de velocidad lineal ($\vec{\mathbf{v}}$) y angular ($\vec{\boldsymbol{\omega}}$)

Vectores componentes de velocidad

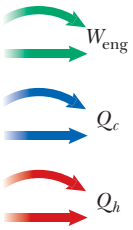
Vectores fuerza ($\vec{\mathbf{F}}$)

Vectores componentes de fuerza

Vectores aceleración ($\vec{\mathbf{a}}$)

Vectores componentes de aceleración

Flechas de transferencia de energía



Flecha de proceso

Vectores de cantidad de movimiento lineal ($\vec{\mathbf{p}}$) y angular ($\vec{\mathbf{L}}$)

Componentes de los vectores de cantidad de movimiento lineal

Vectores de torque ($\vec{\boldsymbol{\tau}}$)

Componentes de los vectores de torque

Direcciones de movimiento lineal o de rotación

Flecha de rotación dimensional

Flecha de alargamiento

Resortes

Poleas



Electricidad y magnetismo

Campos eléctricos

Vectores de campo eléctrico

Vectores componentes del campo eléctrico

Campos magnéticos

Vectores de campo magnético

Vectores componentes del campo magnético

Cargas positivas

Cargas negativas

Resistores

Baterías y otras fuentes de potencia CD

Interruptores

Capacitores

Inductores (bobinas)

Voltímetros

Amperímetros

Fuentes CA

Lámparas

Símbolo de tierra

Corriente

Luz y óptica

Rayos de luz

Rayo de luz focal

Rayo de luz central

Lentes convergentes

Lentes divergentes

Espejo

Espejo curva

Objetos

Imágenes

Algunas constantes físicas

Cantidad	Símbolo	Valor[a]
Unidad de masa atómica	u	$1.660\,538\,782\ (83) \times 10^{-27}$ kg 931.494 028 (23) MeV/c^2
Número de Avogadro	N_A	$6.022\,141\,79\ (30) \times 10^{23}$ partículas/mol
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$9.274\,009\,15\ (23) \times 10^{-24}$ J/T
Radio de Bohr	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2 k_e}$	$5.291\,772\,085\,9\ (36) \times 10^{-11}$ m
Constante de Boltzmann	$k_B = \frac{R}{N_A}$	$1.380\,650\,4\ (24) \times 10^{-23}$ J/K
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$	$2.426\,310\,217\,5\ (33) \times 10^{-12}$ m
Constante de Coulomb	$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$8.987\,551\,788\ldots \times 10^9$ N·m^2/C^2 (exacto)
Masa del deuterón	m_d	$3.343\,583\,20\ (17) \times 10^{-27}$ kg 2.013 553 212 724 (78) u
Masa del electrón	m_e	$9.109\,382\,15\ (45) \times 10^{-31}$ kg $5.485\,799\,094\,3\ (23) \times 10^{-4}$ u 0.510 998 910 (13) MeV/c^2
Electronvolt	eV	$1.602\,176\,487\ (40) \times 10^{-19}$ J
Carga elemental	e	$1.602\,176\,487\ (40) \times 10^{-19}$ C
Constante de gas	R	8.314 472 (15) J/mol·K
Constante gravitacional	G	$6.674\,28\ (67) \times 10^{-11}$ N·m^2/kg^2
Masa del neutrón	m_n	$1.674\,927\,211\ (84) \times 10^{-27}$ kg 1.008 664 915 97 (43) u 939.565 346 (23) MeV/c^2
Magnetón nuclear	$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p}$	$5.050\,783\,24\ (13) \times 10^{-27}$ J/T
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A (exacto)
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8.854\,187\,817\ldots \times 10^{-12}$ C^2/N·m^2 (exacto)
Constante de Planck	h	$6.626\,068\,96\ (33) \times 10^{-34}$ J·s
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,628\ (53) \times 10^{-34}$ J·s
Masa del protón	m_p	$1.672\,621\,637\ (83) \times 10^{-27}$ kg 1.007 276 466 77 (10) u 938.272 013 (23) MeV/c^2
Constante de Rydberg	R_H	$1.097\,373\,156\,852\,7\ (73) \times 10^7$ m^{-1}
Rapidez de la luz en el vacío	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$ m/s (exacto)

Nota: Estas constantes son los valores recomendados en 2006 por CODATA, con base en un ajuste de mínimos cuadrados de los datos provenientes de diferentes mediciones. Para una lista más completa, consulte P. J. Mohr y B. N. Taylor, "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants; 2006." *Rev. Mod. Phys.* **80**:2, 633–730, 2008.

[a]Los números entre paréntesis para los valores representan las incertidumbres de los últimos dos dígitos.

Datos del Sistema Solar

Cuerpo	Masa (kg)	Radio medio (m)	Periodo (s)	Distancia desde el Sol (m)
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^{6}	7.60×10^{6}	5.79×10^{10}
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^{6}	1.94×10^{7}	1.08×10^{11}
Tierra	5.97×10^{24}	6.37×10^{6}	3.156×10^{7}	1.496×10^{11}
Marte	6.42×10^{23}	3.39×10^{6}	5.94×10^{7}	2.28×10^{11}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^{7}	3.74×10^{8}	7.78×10^{11}
Saturno	5.68×10^{26}	5.82×10^{7}	9.29×10^{8}	1.43×10^{12}
Urano	8.68×10^{25}	2.54×10^{7}	2.65×10^{9}	2.87×10^{12}
Neptuno	1.02×10^{26}	2.46×10^{7}	5.18×10^{9}	4.50×10^{12}
Plutón[a]	1.25×10^{22}	1.20×10^{6}	7.82×10^{9}	5.91×10^{12}
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	—	—
Sol	1.989×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—

[a]En agosto de 2006, la Unión Astronómica Internacional adoptó una definición de planeta que separa a Plutón de los otros ocho planetas. Plutón ahora se define como "planeta enano" (como el asteroide Ceres).

Datos físicos usados con frecuencia

Distancia promedio Tierra-Luna	3.84×10^{8} m
Distancia promedio Tierra-Sol	1.496×10^{11} m
Radio promedio de la Tierra	6.37×10^{6} m
Densidad del aire (20°C y 1 atm)	1.20 kg/m^3
Densidad del aire (0°C y 1 atm)	1.29 kg/m^3
Densidad del agua (20°C y 1 atm)	1.00×10^{3} kg/m^3
Aceleración de caída libre	9.80 m/s^2
Masa de la Tierra	5.97×10^{24} kg
Masa de la Luna	7.35×10^{22} kg
Masa del Sol	1.99×10^{30} kg
Presión atmosférica estándar	1.013×10^{5} Pa

Nota: Estos valores son los utilizados en el texto.

Algunos prefijos para potencias de diez

Potencia	Prefijo	Abreviatura	Potencia	Prefijo	Abreviatura
10^{-24}	yocto	y	10^{1}	deca	da
10^{-21}	zepto	z	10^{2}	hecto	h
10^{-18}	ato	a	10^{3}	kilo	k
10^{-15}	femto	f	10^{6}	mega	M
10^{-12}	pico	p	10^{9}	giga	G
10^{-9}	nano	n	10^{12}	tera	T
10^{-6}	micro	μ	10^{15}	peta	P
10^{-3}	mili	m	10^{18}	exa	E
10^{-2}	centi	c	10^{21}	zetta	Z
10^{-1}	deci	d	10^{24}	yotta	Y

Abreviaturas estándar y símbolos para unidades

Símbolo	Unidad	Símbolo	Unidad
A	ampere	K	kelvin
u	unidad de masa atómica	kg	kilogramo
atm	atmósfera	kmol	kilomol
Btu	unidad térmica británica	L	litro
C	coulomb	lb	libra
°C	grado Celsius	al	año luz
cal	caloría	m	metro
d	día	min	minuto
eV	electronvolt	mol	mol
°F	grado Fahrenheit	N	newton
F	farad	Pa	pascal
ft	pie	rad	radián
G	gauss	rev	revolución
g	gramo	s	segundo
H	henry	T	tesla
h	hora	V	volt
hp	caballo de potencia	W	watt
Hz	hertz	Wb	weber
in.	pulgada	yr	año
J	joule	Ω	ohm

Símbolos matemáticos usados en el texto y su significado

Símbolo	Significado
$=$	es igual a
$\equiv$	se define como
$\neq$	no es igual a
$\propto$	es proporcional a
$\sim$	está en el orden de
$>$	es mayor que
$<$	es menor que
$>>(<<)$	es mucho mayor (menor) que
$\approx$	es aproximadamente igual a
Δx	el cambio en x
$\sum_{i=1}^{N} x_i$	la suma de todas las cantidades x_i desde $i = 1$ hasta $i = N$
$\lvert x \rvert$	la magnitud de x (siempre una cantidad no negativa)
$\Delta x \to 0$	Δx tiende a cero
$\frac{dx}{dt}$	la derivada de x con respecto a t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	la derivada parcial de x con respecto a t
$\int$	integral

Conversiones

Longitud

1 in. = 2.54 cm (exacto)
1 m = 39.37 in. = 3.281 ft
1 ft = 0.304 8 m
12 in. = 1 ft
3 ft = 1 año luz
1 yd = 0.914 4 m
1 km = 0.621 mi
1 mi = 1.609 km
1 mi = 5 280 ft
1 μm = 10^{-6} m = 10^{3} nm
1 año luz = 9.461×10^{15} m

Área

1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10.76 ft^2
1 ft^2 = 0.092 9 m^2 = 144 $in.^2$
1 $in.^2$ = 6.452 cm^2

Volumen

1 m^3 = 10^6 cm^3 = 6.102×10^4 $in.^3$
1 ft^3 = 1 728 $in.^3$ = 2.83×10^{-2} m^3
1 L = 1 000 cm^3 = 1.057 6 qt = 0.035 3 ft^3
1 ft^3 = 7.481 gal = 28.32 L = 2.832×10^{-2} m^3
1 gal = 3.786 L = 231 $in.^3$

Masa

1 000 kg = 1 t (tonelada métrica)
1 slug = 14.59 kg
1 u = 1.66×10^{-27} kg = 931.5 MeV/c^2

Fuerza

1 N = 0.224 8 lb
1 lb = 4.448 N

Velocidad

1 mi/h = 1.47 ft/s = 0.447 m/s = 1.61 km/h
1 m/s = 100 cm/s = 3.281 ft/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s

Aceleración

1 m/s^2 = 3.28 ft/s^2 = 100 cm/s^2
1 ft/s^2 = 0.304 8 m/s^2 = 30.48 cm/s^2

Presión

1 bar = 10^5 N/m^2 = 14.50 $lb/in.^2$
1 atm = 760 mm Hg = 76.0 cm Hg
1 atm = 14.7 $lb/in.^2$ = 1.013×10^5 N/m^2
1 Pa = 1 N/m^2 = 1.45×10^{-4} $lb/in.^2$

Tiempo

1 año = 365 días = 3.16×10^7 s
1 día = 24 h = 1.44×10^3 min = 8.64×10^4 s

Energía

1 J = 0.738 ft · lb
1 cal = 4.186 J
1 Btu = 252 cal = 1.054×10^3 J
1 eV = 1.602×10^{-19} J
1 kWh = 3.60×10^6 J

Potencia

1 hp = 550 ft · lb/s = 0.746 kW
1 W = 1 J/s = 0.738 ft · lb/s
1 Btu/h = 0.293 W

Algunas aproximaciones útiles para problemas de estimación

1 m ≈ 1 yd
1 kg ≈ 2 lb
1 N ≈ $\frac{1}{4}$ lb
1 L ≈ $\frac{1}{4}$ gal
1 m/s ≈ 2 mi/h
1 año ≈ $\pi \times 10^7$ s
60 mi/h ≈ 100 ft/s
1 km ≈ $\frac{1}{2}$ mi

Nota: Vea la tabla A.1 del Apéndice A para una lista más completa.

El alfabeto griego

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Rho	P	ρ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Ípsilon	Y	υ
Épsilon	E	ϵ	Nu	N	ν	Fi	Φ	ϕ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Ji	X	χ
Eta	H	η	Ómicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

Como líder del mercado, *FÍSICA PARA CIENCIAS E INGENIERÍA* es uno de los textos más poderosos en el mercado de la física. Conservando un lenguaje conciso, una pedagogía educativa de punta y ejemplos prácticos de primera categoría, la Novena edición destaca el enfoque de análisis del modelo de resolución de problemas. El enfoque de análisis de modelo presenta un conjunto estándar de las situaciones que aparecen en la mayoría de los problemas de la física, y sirve como un puente para ayudar a los estudiantes a identificar primero el principio fundamental correcto —y después la ecuación— para utilizar en la solución de ese problema. Las figuras activas y los problemas cuidadosamente pensados también mejoran la instrucción reflexiva por la que Raymond A. Serway y John W. Jewett, Jr. ganaron su reputación. La Novena edición de *FÍSICA PARA CIENCIAS E INGENIERÍA* es acompañada por una sección de complementos digitales en la oferta de texto-tecnología más integrada en la actualidad.

Características:

- Estrategia de solución de problemas.
- Ejemplos prácticos.
- Conjuntos de problemas característicos.
- Ayudas de aprendizaje en el texto.
- Anexo de matemáticas.

Y en la sección de complementos digitales:

- Cuestionarios interactivos.
- Figuras activas.
- Videos-solución.

CENGAGE Learning®

Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607-519-200-0
ISBN-10: 607-519-200-X

9 786075 192000